ばね振り子の減衰振動の解析

5年 ●●
指導教員 ●●,●●

研究の目的と概要

物理の授業で浮力による液中での単振動を学んだ時に単振動の運動について興味を持ち、おもりの減衰振動を解析したいと考えた。そこで単振動の運動として1番単純なばね振り子を使用し、変位の測定値と理論値の比較を試みた。今回の研究ではEXCELを用いてばね振り子の振動をフーリエ解析し、振動数の時間変化を調べた。また振動の微分方程式を差分方程式にし、シミュレーションをして振動数の時間変化を調べた。
測定値,理論値の結果から減衰運動をするにつれて、振幅は減少することが分かった。

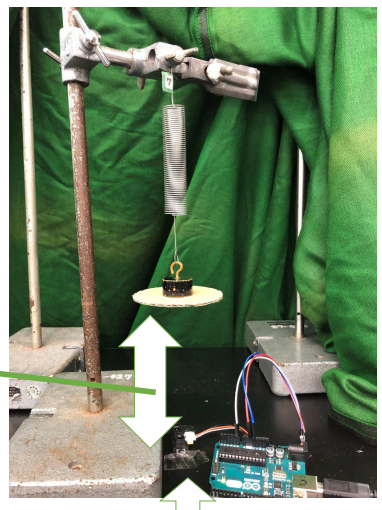
仮説

距離センサーの波形,差分方程式による理論的波形のどちらもほぼ同じ形となり、その波形はどちらも時間の経過につれて振幅が減少する形をとることができる。また、どちらの波形でも周期は振幅が多ければ多いほど抵抗力が増え、振動数は減ることが考えられる。

実験による解析

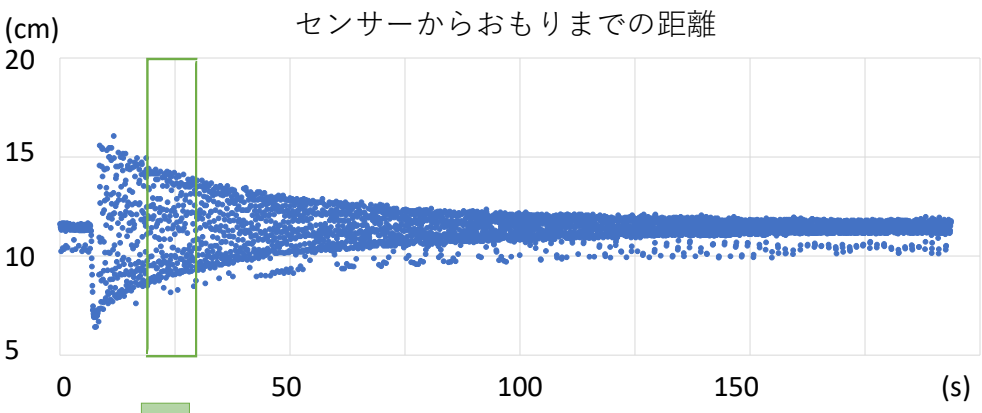
実験方法

1. 右図のように、赤外線センサーとArduinoを用いて、おもりの底面までの距離を測定する。
2. EXCELを使用してフーリエ解析し、得られた値とばね振り子の周期の理論値を比較する。

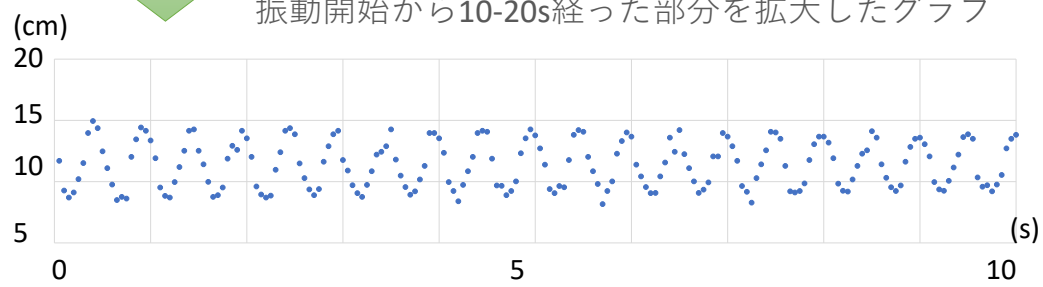


測定結果

ばね定数	k :8.17 N/m
おもりの質量	m :5.16×10^{-2} kg
ばねの質量	M :9.69×10^{-3} kg



振動開始から10-20s経った部分を拡大したグラフ



ここで得た10s間のデータをフーリエ解析する

解析方法

$t[s]$における距離センサーの値を $x(t)$とおき、t_0を振動開始の時刻とする。$X(t)$は数秒間の間では、周期関数とみなすことができる。このとき$X(t)$は次のように表せる。

$$x(t)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos(\omega t)+a_2\cos(2\omega t)+\cdots$$
$$+b_1\sin(\omega t)+b_2\sin(2\omega t)+\cdots$$

ただし

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi nft)\,dt \quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi nft)\,dt$$

とする

a_n, b_n はそれぞれcosθ,sinθの係数となるため、a_n, b_n のスカラー量が大きいとき、その振動数の成分が大きいことになる
よって $a_n{}^2+b_n{}^2$の値が最大となる振動数fを調べる

結果　振動開始から10-20s,60-70s,110-120s,160-170s経ったときのすべての範囲において
有効数字３桁の範囲では $f=1.98$[Hz] であり、ばね振り子の周期である$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=2.00$[Hz]にほぼ一致した。

理論による解析

解析方法

単振動における運動方程式は次のようになる

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+A\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad (1)$$

$t_0\sim t_n$間を n 等分し、$\Delta t=\frac{t_n-t_0}{n}$ とする
t_nにおける速度v_n, 加速度 a_n は、微分方程式より

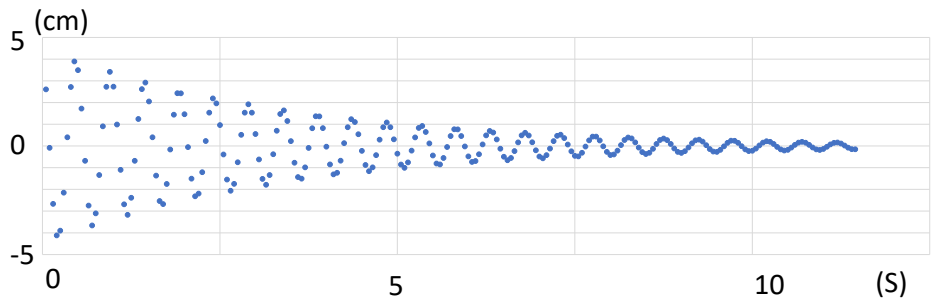
$$v_n=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{(n+\Delta\tau)}-x_n}{n+\Delta t-n}=\frac{x_{(n+\Delta\tau)}-x_n}{\Delta t} \qquad (2)$$

$$a_n=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{a_{(n+\Delta\tau)}-a_n}{n+\Delta t-n}=\frac{a_{(n+\Delta\tau)}-a_n}{\Delta t} \qquad (3)$$

（Δtは $\Delta t \ll 1$）

(1)-(3) よりx_n, v_n, a_nの差分方程式を用いたシミュレーションを試みた

（例）以下のグラフにおいて
ばね定数k[N/m],おもりの質量m[kg],初期変位x_0[cm]は測定値の値を使用し,　（x_0は自然長からの距離）
A＝0.030, $a_0=\frac{kx_0}{m}$[m/s²], v_0 =0　としてシミュレーションした



ここから、実験による測定値と同じ振動数が得られた

考察・今後の展望

- 測定値及び理論値の解析から、振幅は徐々に減衰していくが、その減衰の速度は時間の経過と共に遅くなることが分かった。
- 今回の研究では測定値を複数解析することはできなかったが、時間が経ったとしても、振動数が大きく変化していくことは無かった。しかし、データの量が少なかったので今後も研究していきたい。
- 今後、実験で得られた測定値とシミュレーションで得られた理論値を比較するうえで、今回の研究では理論値の計算のときに、ばねの質量が及ぼす影響を考えていなかったので、今後の研究ではその点も考慮していきたい。

参考文献

・ HELLO CYBERNETICS https://www.hellocybernetics.tech/

謝辞 本研究は、奈良女子大学理学部の●●先生にご助言をいただきました。深く感謝申し上げます。