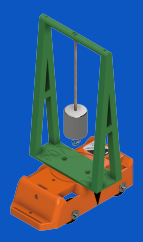
振り子と台車の連成振動の挙動分析とベアリングを用いた実験モデルの提案



担当教員 ●●

奈良女子大学附属中等教育学校５年　●●　　（共同研究者：●●）

研究概要　台車上に設置した振り子を振らせた時の振り子と台車の挙動について運動量保存から理論的な予想を行いつつ、実験装置を作成した。また、新たに制作した装置を理論的アプローチを試みた。

研究１　振り子を乗せた力学台車の挙動

仮説

運動保存則より

$$mv_0 + MV_0 = mv_n + MV_n = 0$$

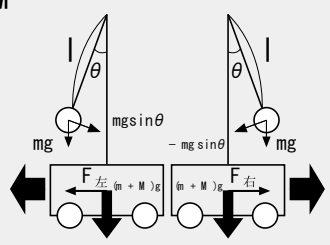
重心Ｇの X 軸方向の速度は

$$V_G = \frac{x_G}{t} = \frac{m\frac{x_v}{t} + M\frac{x_V}{t}}{m+M} = 0 \quad (1)$$

また

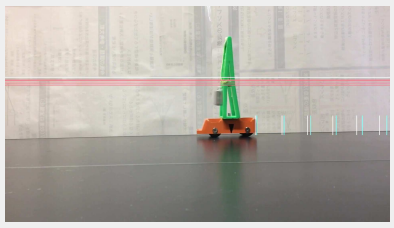
$$V = -\frac{m}{M}v \quad (2)$$

よってその場で振動運動する



実験

台車と振り子を静止させ、振り子を振ると同時に台車を放したときの挙動を観測した。



実験の様子
振り子を右に振り角をとり、同時に運動開始したときの様子
縦棒白色：台車が左に進んだときの台車が静止した地点
縦棒水色：台車が右に進んだときの台車が静止した地点
横棒赤色：運動開始時を 0s とおいた
振り子の 0.5+n 周期（整数）時の振り子の静止の高さ

結果

- 台車と振り子はほぼ半周期差で振動している。
- 全体は振動しながら前進を繰り返している。
- 放すタイミングによって挙動が異なった。

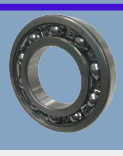
考察

- 運動量保存則の (2) はほぼ成り立っている。
- 振り子が振り始めた時に台車が同時に運動を開始できない。
- 挙動を正確に計ることが出来ない。

研究２　ベアリングと剛体振り子の挙動の予想

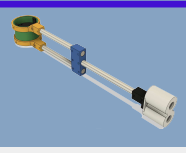
問題点
- 振り子がぶれる
- 個々の車輪の状況が異なる

改善後
- 振り子の振れ方向の固定化
- 摩擦力を一定化



問題点
- 運動が確認しにくい
- 再現性がない

改善後
- 挙動の視認性の向上
- 初期値の一定化



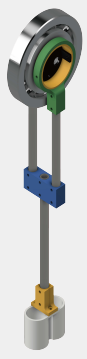
問題点
- 目視での正確な値が出せない

改善後
- 加速度センサを用いて挙動の定量化

工学的アプローチ

装置

ボールベアリングを用いて変位を１軸に固定し、アルミパイプと 3D プリンターを用いて、安価にかつ強度を持たせた汎用性のある剛体振り子を作り、センサを設置し計測できるように製作した。



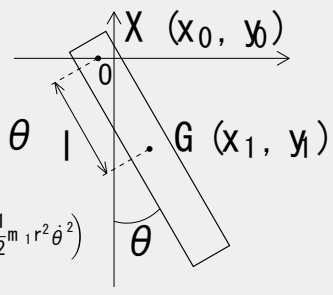
＜センサについて＞

ATR-Promotions の小型無線多機能センサ (TSND-121) を装置に取り付けて加速度から挙動を算出して、理論的アプローチと比較する。

理論的アプローチ

理論式

$$\begin{cases} x_0 = x,\ y_0 = y \\ x_1 = x + r\sin\theta,\ y_1 = y - r\cos\theta \\ f_0(x_0, y_0, x_1, y_1, t) = 0 \\ f_1(x_0, y_0, x_1, y_1, t) = 0 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\theta}^2\right)$$



$$L = \frac{1}{2}m_0(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_1}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{r}^2 + 2r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{r}(\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta) + 2r\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)\right] - m_0 gy - m_1 gy(1-\cos\theta) + \lambda_0(t)f_0 + \lambda_1(t)f_1$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{\sin\theta}{2m_0 + m_1(1+\sin^2\theta)} \begin{pmatrix} 2m_1 l\dot{\theta} - m_1 g\cos\theta \\ -m_1\dot{\theta}^2\cos\theta - (m_0 + m_1)\frac{g}{l} \end{pmatrix}$$

考察

2 物体を同時に操作しなくても 1 物体を操作するだけで、2 物体を同時に運動させられることが可能なため、理論式との比較が可能になると考えた。また、求めた理論式により、$m_0 \gg m_1$ ならば、周期が単振り子の近似解と比べて、$\sqrt{\frac{1}{2}}$ 倍の差があることがわかった。研究１の装置を台車も振り子も質点とするならば、振り子が剛体か振り子かの差で剛体の方が周波数が一致しその場で振動するか、僅差でより前進後進するのではと考えた。

今後の展望

- センサを用いた挙動の定量化
- 二重振り子など、複雑化

参考文献

「よくわかる初等力学」 著：前野 昌弘　東京書籍」
「シキノート 束縛条件下の運動 - ホロノミックな束縛と非保存力」
http://slpr.sakura.ne.jp/qp/constraint-condition2/
「3D プリンター活用技術検定 公式ガイドブック」 著：一般社団法人 コンピュータ教育振興協会
「キットで始める 3D プリンター自作入門」 著：吹田 智章　ラトルズ

謝辞　本研究は、奈良女子大学理学部の●●先生にご助言をいただきました。深く感謝申し上げます。