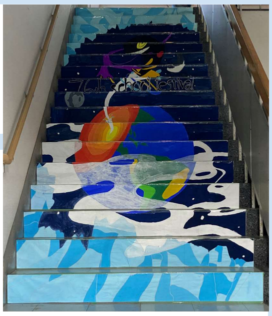
# 階段にうつす（写す/映す）絵の数式化
# ～元の絵そのままの歪みのない絵を映すには～

5年/[redacted] 担当教員[redacted]

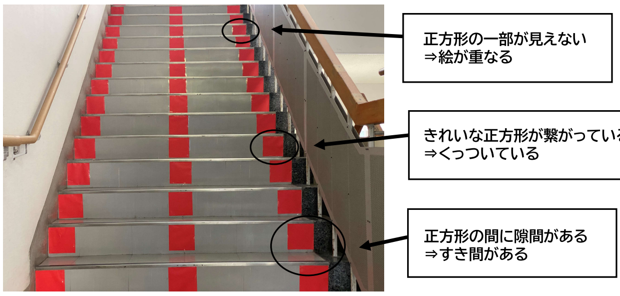
## 背景と目的

本校の学園祭では、毎年右の写真のような「階段アート」を展示している。「階段アート」とは、階段の蹴上（けあげ）に絵を貼り、その絵を正面から見たときに一枚の絵に見えるように作られた作品である。しかし、多くの「階段アート」は、元の一枚の絵を単に切って蹴上に貼りつけているだけで、鑑賞する人の立ち位置や距離などが考慮されておらず、元の絵が「歪んで」見えてしまう。そこで、階段の真正面から「階段アート」を見たときに、元の絵そのままの「歪みのない」絵に見えるためにはどのような絵を階段に貼ったら良いのかを数学を用いて解明したいと考えた。また、その結果を本校の学園祭の参考にしてもらいたいと考えた。



## 考え方1

**方法**
階段に貼った折り紙を写真に映した時に、写真にどのように映るのか調べる。




**結果**
Excelを用いて写真に写った折り紙の縦と横の大きさの関係からどのような数式になるか調べようとしたが、きれいな関数にならず、結果が出なかった。

写真は上のようになった。
階段の上のほうは絵がかぶって見えないところがあり、下のほうは踏面（ふみづら）が見えるところがあることが分かる。

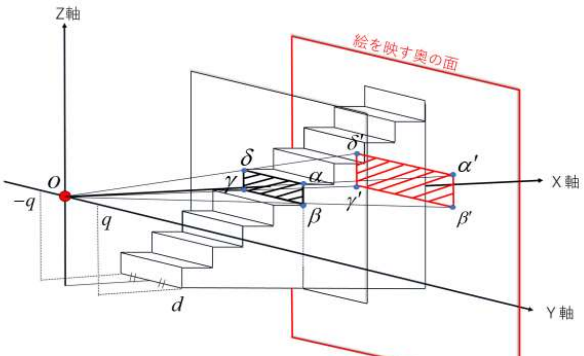
どのような条件によって決まるのか考える。

## 考え方2

**方法**
目線と階段の蹴上にある任意の点を結ぶ。その線は階段の一番奥に写ると考える。そしてベクトルの考え方から写る点の座標と、その数式を求める。

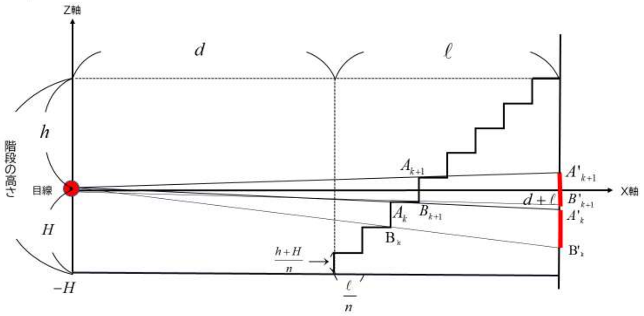
$n$：階段の段数　$d$：階段までの距離　$\ell$：階段の奥行　$H$：目線の高さ
$h$：階段の1番上から目線までの高さ　$q$：階段の横幅の中心からの距離
$A_k$：$k$段目の階段の蹴上の上端　$B_k$：$k$段目の階段の蹴上の下端
$A'_k$：$A_k$を階段の一番奥に写した点　$B'_k$：$B_k$を階段の一番奥に写した点

図1




$\alpha\beta\gamma\delta$ と $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ は平行なので、
2つの長方形はOを相似の中心として相似の位置にある
⟹ 図2のように階段の蹴上の片側の端点のみで考えることが可能

図2




**結果**

一直線に存在する点の公式から、

$A_k$については、

$$\begin{pmatrix} d+\ell \\ Y_{A'_k} \\ Z_{A'_k} \end{pmatrix} = S_k \begin{pmatrix} d+\frac{\ell}{n}(k-1) \\ q \\ \frac{h+H}{n}k-H \end{pmatrix}$$

となる（$S_k$は $k$ の値によって変化する変数）

$B_k$については、

$$\begin{pmatrix} d+\ell \\ Y_{B'_k} \\ Z_{B'_k} \end{pmatrix} = T_k \begin{pmatrix} d+\frac{\ell}{n}(k-1) \\ q \\ \frac{h+H}{n}(k-1)-H \end{pmatrix}$$

となる

（$T_k$ は $k$ の値によって変化する変数）

上の式から、$S_k = T_k = \dfrac{(d+\ell)n}{\ell k-\ell+nd}$

図1．2のように絵が重なるときと重ならないときの条件は、

$$Z_{B'_{k+1}} - Z_{A'_k} = (S_{k+1}-S_k)\left(\frac{h+H}{n}k-H\right) \quad \cdots *$$

の符号で決まる。

$$S_{k+1}-S_k = (d+\ell)n\cdot\frac{-1}{(\ell k+nd)\{\ell(k-1)+nd\}}$$

＜0　より、

＊ の正負は $\dfrac{h+H}{n}k-H$ の正負で決まる。

よって、

$Z_{B'_{k+1}} - Z_{A'_k} < 0$（絵が重なる）のとき、

$$\Leftrightarrow \frac{h+H}{n}k-H>0$$

$$\Leftrightarrow k>\frac{nH}{h+H}$$

よって、次の関係が成り立つ

① $Z_{B'_{k+1}} - Z_{A'_k} < 0$（絵が重なる）のとき、　$k>\dfrac{nH}{h+H}$

② $Z_{B'_{K+1}} - Z_{A'_k} = 0$（くっついている）のとき、　$k=\dfrac{nH}{h+H}$

③ $Z_{B'_{k+1}} - Z_{A'_k} > 0$（すき間がある）のとき、　$k<\dfrac{nH}{h+H}$

＜例＞
本校の階段の場合
(階段の段数 $(n)$ ＝13段 / 階段までの距離 $(d)$＝300㎝ / 階段の奥行 $(\ell)$ ＝380㎝ /
目線の高さ $(H)$ ＝80㎝ / 階段全体の高さ $(H+h)$ ＝234㎝)

$$\frac{nH}{h+H}=\frac{13\times 80}{234} □ 4.5$$

となり、
5段目よりも上の段であるか、下の段であるかで絵の映り方が変わる。

## 考察

・階段の奥に映った絵が重なっているか、くっついているか、すき間があるかは、

写した絵の段数と 階段の段数×$\dfrac{目線までの高さ}{階段の高さ}$ との関係だけによって決まり、

階段までの距離 $(d)$ や、階段の奥行 $(\ell)$ とは無関係である

・踏面が見えるのは目線よりも下の段で、絵がかぶるのは目線よりも上のときである。

## 今後の展望

・今回は階段上の点を目で見たときの形を数式化した。
今後はその逆である絵を階段上に写した場合の条件を数式化したい。

・今回の研究から、目線よりも下の階段は踏面が見えることが分かったので、踏面にも絵を映す場合の数式化をしたい。

## 謝辞

本研究は、奈良女子大学理学部[redacted]先生にご助言いただきました。
深く感謝申し上げます。