階段にうつす(写す/映す)絵の数式化
～元の絵そのままの歪みのない絵を映すには～

6年●● 担当教員 ●●

背景と目的

本校の学園祭では、毎年右の写真のような「階段アート」を展示している。「階段アート」とは、階段の蹴上(けあげ)に絵を貼り、その絵を正面から見たときに一枚の絵に見えるように作られた作品である。しかし、多くの「階段アート」は、元の一枚の絵を単に切って蹴上に貼りつけているだけで、鑑賞する人の立ち位置や距離などが考慮されておらず、元の絵が「歪んで」見えてしまう。そこで、階段の真正面から「階段アート」を見たときに、元の絵そのままの「歪みのない」絵に見えるためにはどのような絵を階段に貼ったら良いのかを数学を用いて解明したいと考えた。また、その結果を本校の学園祭の参考にしてもらいたいと考えた。

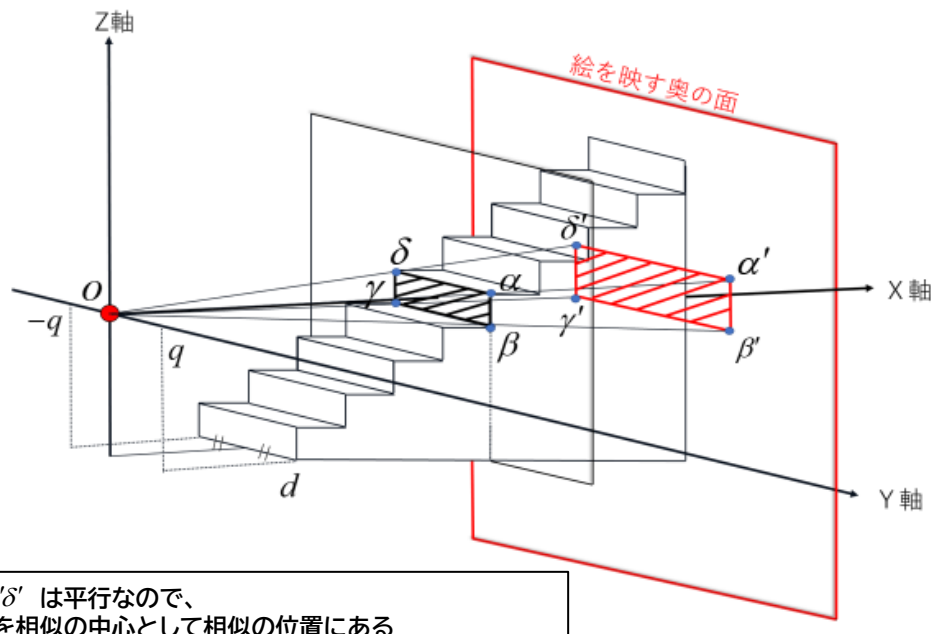
前回まで

前回は以下の考え方から階段上の点を目で見たときの形を数式化した。

目線と階段の蹴上にある任意の点を結ぶ。その線は階段の一番奥に写ると考える。
そしてベクトルの考え方から写る点の座標と、その数式を求める。

n：階段の段数　d：階段までの距離　q：階段の奥行　H：目線の高さ
h：階段の1番上から目線までの高さ　ℓ：階段の横幅の中心からの距離
A_k：k段目の階段の蹴上の上端　B_k：k段目の階段の蹴上の下端
A'_k：A_kを階段の一番奥に写した点　B'_k：B_kを階段の一番奥に写した点

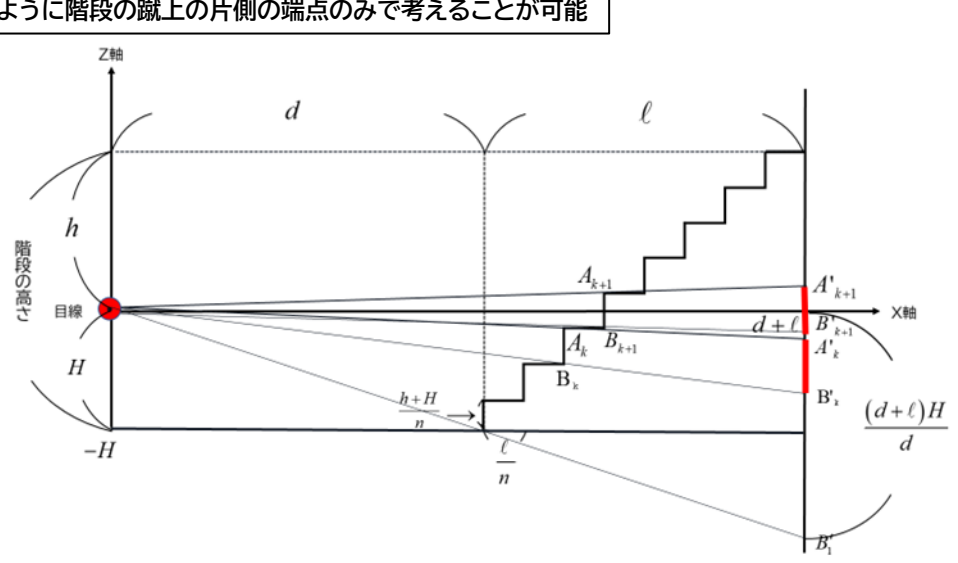
図1



$\alpha\beta\gamma\delta$ と $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ は平行なので、
2つの長方形はOを相似の中心として相似の位置にある

⟹ 図2のように階段の蹴上の片側の端点のみで考えることが可能

図2



次の関係が成り立った

① $Z_{B'_{k+1}} - Z_{A'_k} < 0$　(絵が重なる)のとき、　$k > \dfrac{nH}{h+H}$

② $Z_{B'_{K+1}} - Z_{A'_k} = 0$　(くっついている)のとき、　$k = \dfrac{nH}{h+H}$

③ $Z_{B'_{k+1}} - Z_{A'_k} > 0$　(すき間がある)のとき、　$k < \dfrac{nH}{h+H}$

階段の奥から蹴上に戻す数式を立てる

今回

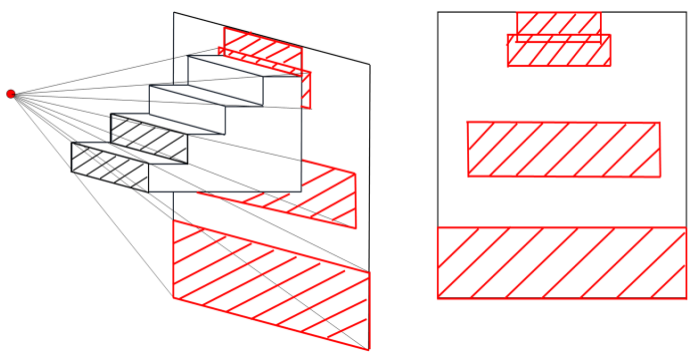
前回とは逆である、絵を階段上に映した場合の条件を数式化した。

考え方

前回の k 段目の階段上の点を階段の奥に写す関数を f_k とすると、今回の関数は逆関数であり、f_k^{-1} である。

＜Y軸方向について＞
各段ごとに絵の用いる範囲を求め、その絵を引き延ばして上段と下段の絵がぴったりとくっつくような数式を求める。
(階段の上に行くほど元の絵と比べて映る範囲が制限された絵になる。)

絵の用いる範囲は1段目を基準とし、各段の1段目に対する倍率から求める。
(1段目を基準にした場合、1段目は元の絵の横幅全てを用いることになり、Y'_1 は $q \times S_1$ になるため)



＜Z軸方向について＞
各段ごとに絵を階段の蹴上に写す時の倍率が異なるため、段ごとの倍率を数式化する。また、絵上の各点が何段目に映るのかを求める。

目線よりも上の Z'_k は k段目にも $k-1$ 段目にも写る場合があるが、
その場合は階段の前側($k-1$ 段目)に写るようにする。

結果

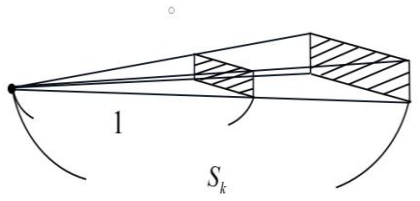
＜Z軸方向について＞
前回の研究より、k 段目の蹴上にある任意の点を
階段の一番奥に写した時の倍率 S_k は $S_k = \dfrac{(d+\ell)n}{\ell(k-1)+nd}$ ということが分かった。

よって、絵を k 段目の蹴上に写す時の倍率は $\dfrac{1}{S_k} = \dfrac{\ell(k-1)+nd}{(d+\ell)n}$ である。

また絵上の各点が何段目に写るのかについては、
目線よりも上であるか、目線上もしくは目線よりも下であるかによって異なる。

・目線よりも上であるとき

k 段目の蹴上に写るのは区間 $\left[Z_{A'_k}, Z_{A'_{k-1}}\right)$ である。



・目線上もしくは目線よりも下であるとき

k 段目の蹴上に写るのは区間 $\left[Z_{A'_k}, Z_{B'_k}\right]$ である。

k 段目の階段の踏面に写るのは区間 $\left[Z_{B'_{k+1}}, Z_{A'_k}\right]$ である。

＜Y軸方向について＞
k 段目の蹴上に貼られた絵を階段の奥に写した時の絵の横幅は、
$S_k = \dfrac{(d+\ell)n}{\ell(k-1)+nd}$ 倍になる。

よって、Z軸方向と同じく、絵を k 段目の蹴上に写す時の絵の横幅は
$\dfrac{1}{S_k} = \dfrac{\ell(k-1)+nd}{(d+\ell)n}$ 倍になる。

用いる絵の範囲は、$Y_{A'_1}$ に対する $Y_{A'_k}$ の割合を求めて決定する。

漸化式 $Y'_{k+1} = \dfrac{S_{k+1}}{S_k} Y'_k$ が立てられる

これを変形すると、$Y'_k = \dfrac{S_k}{S_{k-1}} Y'_{k-1} = \dfrac{S_k}{S_{k-1}} \times \dfrac{S_{k-1}}{S_{k-2}} \times Y'_{k-2} = \cdots = \dfrac{S_k}{S_1} Y'_1$ となり、

$Y_{A'_k} = Y_{A'_1} \times \dfrac{nd}{(k-1)\ell + nd}$ になった。

実際の絵への応用

上の結果では、Y軸方向について1段目を基準にしているため、実際の絵に応用するのが難しい。
よって、Y軸方向について n 段目を基準とした1段目(元の絵)の横幅と元の絵の縦の長さを求める。そしてその絵の内、上の結果で求めた範囲の絵を用いる。

＜元の絵の横幅＞

$Y_{A'_k} = Y_{A'_1} \times \dfrac{nd}{(k-1)\ell + nd}$ より、 $Y_{A'_1} = Y_{A'_n} \times \dfrac{(n-1)\ell + nd}{nd}$ $\left(= q \times \dfrac{(n-1)\ell + nd}{nd}\right)$

＜元の絵の縦の長さ＞

目線よりも上の長さ＋目線よりも下の長さ

よって、目線よりも上の長さ＋ $\left|0 - Z_{B'_1}\right| = h + \dfrac{(d+\ell)H}{d}$

考察

・長方形の元の絵そのままに階段上に写すのは不可能であり、削らなければいけない部分が存在する。

・上の結果のZ軸方向とY軸方向の組み合わせによって用いる絵の条件が決まる。

今後の展望

・踏面にも絵を映す場合の数式化をしたい。

謝辞　本研究は、奈良女子大学理学部●●先生にご助言いただきました。深く感謝申し上げます。