シュートにおける物体の数学的解析
ー差分方程式を用いた落下運動の考察 ー

$v_{n+1} = v_n + a_n\Delta t$
$x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t$

6 年●●　　附属指導教員 ●●

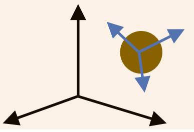
加速度センサー

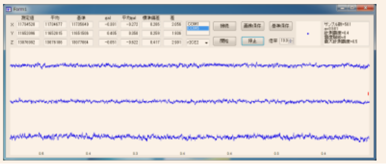
前回の研究より、バスケットボールのシュートの軌道には慣性モーメントの影響が大きく関わっており、そのため加速度が一定ではないということが分かった。
そこで、今回の実験では加速度を調べる装置として加速度センサーを用いた。その後、測定値より x-yグラフに表すことを考えた。

実験結果より、シュートを打つとボールには回転がかかり、地上でのx, y, z軸とボールのx, y, z軸がずれ、軸の補正が必要となることが分かった。しかし、補正するには行列の知識が必要となる。そこで行列の知識を用いずに加速度を考慮した式を求めたいと思った。

←加速度センサーの写真

加速度センサーの波形
↓





差分方程式

ボールの軌道には空気抵抗の比例係数kが大きく関係している。

[前提]

ボールには空気抵抗がかかっていて、それ以外の力が生じていなければ　$ma = mg - kv$ が成り立つ。

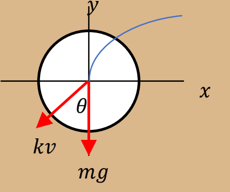
x方向　$ma_x = -kv\sin\theta$

y方向　$ma_y = -kv\cos\theta - mg$

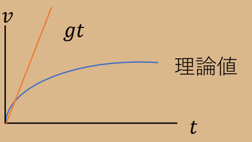
$v_{n+1} = v_n + a_n\Delta t$

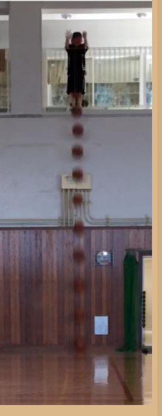
$x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t$

この差分方程式を解くには抵抗係数kを求めなければならない。



<イメージ図>





__方法[1]__

<仮説>
ボールを体育館の観客席から落としたときにボールの速度が終端速度になる。

<実験>
①本校の体育館の観客席よりボールを自由落下させる。
②落ちていく様子を動画解析し、視差の影響を考え、終端速度になるところを求める。

<結果・考察>
バスケットボールは大きさのある物体なので、
体育館の観客席から落とし、変位が一定になった＝終端速度になったとは言い切れないのではないかと考えた。

__方法[2]__

理論値と実測値の最小二乗法によりkを求める。

【今回用いた物理量】
落ちる物体の質量：$m[kg]$
重力加速度：g$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
空気抵抗の比例定数：k　とおく
$ma = mg - kv$

①速度の式を求める

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{kv}{m}$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$$
$$\therefore \frac{1}{v-\frac{mg}{k}}\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}$$
$$\int \frac{1}{v-\frac{mg}{k}}dv = \int\left(-\frac{k}{m}\right)dt$$

$$\log\left|v - \frac{mg}{k}\right| = -\frac{k}{m}t + C_0$$
(C_0 は積分定数)

両辺の指数をとると

$$v - \frac{mg}{k} = \pm e^{C_0}e^{-\frac{k}{m}t}$$
$$v = C_1e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$
(任意定数$C_1 = \pm e^{C_0}$)

②位置の式を求める

$$\frac{dx}{dt} = C_1e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$
$$dx = \left(C_1e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right)dt$$
$$x = -\frac{m}{k}C_1e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t + C_2$$

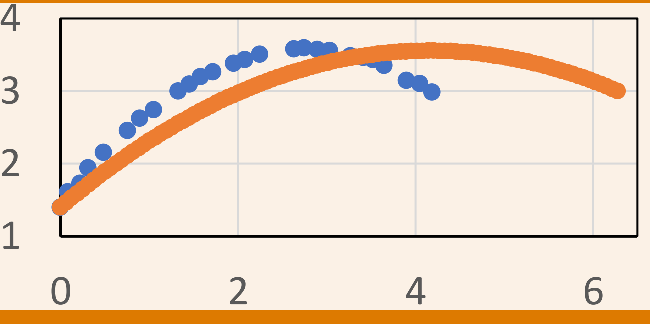
この式によってx_0, v_0, kを求めることができるのでここから差分方程式にもっていく。

グラフ化

実際の軌道について、表計算ソフトにプロットする。その際、ボールと同一平面上にあると考えられるリングの大きさを用いて縮尺を考えグラフ化することにした。

実際の軌道をプロットしたグラフとx方向が等速直線運動と考えたグラフに加えて、抵抗係数kと加速度を考慮したグラフと重ねることで、実際の軌道との比較を行う。

また今後は、実際の軌道を近似して、シュートの軌道がどのような概形であるかをまず、最小二乗法という考えを用いる。



今後の展望

今回は直線の最小二乗法の考え方を理解することができた。しかし、バスケットボールのシュートの軌道は直線的なものではなく、二次関数のような概形であると予想できる。今回、回帰直線を$y = ax + b$とおいてa, bそれぞれについて偏微分した。だから、今後は回帰曲線を$y = ax^2 + bx + c$と置いてa, b, cそれぞれについて偏微分して近似の式を求め、近似についての勉強を進めていきたい。

参考文献

[1]岩見雅人、藤井慶輔、伊藤穣「センサバスケットボールを用いたシュートのバックスピン回転数と入射角の計測精度検証」（『バスケットボール研究』2016年2巻、P.33-39）
[2]飯田祥明,センサバスケットボールによる運動情報フィードバックの即時的効果,南山大学「アカデミア」人文・自然科学第17号129-138,2019年1月
[3]「抵抗力のある落下運動」（「物理のかぎしっぽ」）　http://hooktail.sub.jp/index.html（最終閲覧日2021年５月８日）

謝辞 本研究を進めるにあたり、奈良女子大学理学部の●●先生にご助言をいただきました。深く感謝申し上げます。