

減衰する振動現象の解析

6年B組 松本 大毅

指導教員 藤野 智美

1. 要約

私はある条件下で減衰振動する運動に興味を持った。本研究では、長い導線を巻きつけたロールにおもりを繋ぎ、おもりを落下させることによって生じる振動運動について探究を行った。初期段階として、慣性モーメントや角運動量を考慮した平面を転がる円柱の運動の微分方程式について考察した。その手法を応用して、実際の実験モデルに相当する微分方程式を立案できた。

キーワード：減衰振動，慣性モーメント，角運動量，微分方程式

2. 研究の背景と目的

昨年度までの探究活動で、単振動の運動として最も単純なばね振り子について考察し、減衰振動の解析を行った。当時の研究では Excel を用いて振動の微分方程式を立て、差分方程式として扱右ことでシミュレーションを行った。今年度の研究では、振動のモデルをより複雑化なものに変更し、振動運動の解析を試みた。

の導線を滑車 1 (図 1 の右側の滑車) に通す。長さを調節した導線を滑車 2 (図 1 の左側の滑車) に通し、導線の先に 100g のおもりをつるして導線がたるまないよう設置した。

<実験方法>

作成した実験装置においてロールを任意の位置から離し、ロールとおもりの挙動を観測した。

<実験結果>

・ロールを任意の位置から離すと、ロールはある 1 点 (以後、基準点) を中心に減衰しながら振動運動を繰り返した。振幅は基準点を中心に滑車側のほうが振幅が小さく、単純なばね振り子とは異なっていた。

・ロール及びおもり、導線からなる物体系は、最終的に基準点で静止した (図 1 はこの静止時における写真)。

<考察>

ロールはある1点でつり合い、振動はその点を基準に行われることが分かった。また振動の様子から、ロールとおもりはそれぞれ独立した周期をもつと予想する。

3. 研究内容

3. 1 振動運動の観察

図 1 に示すようなロールとおもりを用いた実験装置により、減衰振動が観察できた。

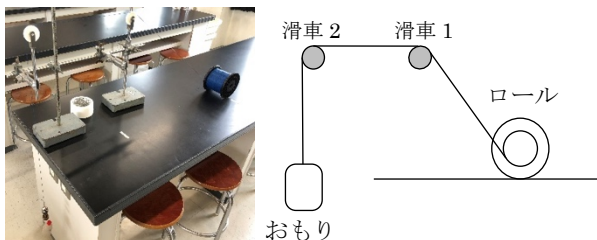


図 1 実験装置とモデル図

<実験装置>

半径が 6.5 cm のロールに導線を巻き、こ

3. 2 ばねで繋がれた円柱の振動

図 1 で示すモデルに対して微分方程式を立案しようとしたが、ロールが空洞である点や変数が複雑であったため、まずは簡易なモデルとしてバネに繋がれた円柱が平面で並進する運動について考察した。

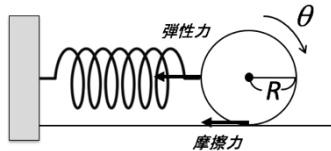


図 2 モデル図

ばね定数を k 、摩擦力を F 、円柱の回転角を θ 、慣性モーメントを I とする。円柱を剛体として扱うため、並進運動と回転運動が同時に起こる。

並進運動の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx - F \quad \dots \textcircled{1}$$

回転運動の運動方程式は、

$$I\ddot{\theta} = Fr \quad \dots \textcircled{2}$$

①、②式より F を消去すると、

$$mr\ddot{x} + I\ddot{\theta} + r\dot{k}x = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

円柱が平面上を滑らない条件として、

$$x = r\theta \quad \dots \textcircled{4}$$

④式より、 $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$ かつ 慣性モーメントとして $I = \frac{1}{2}mr^2$ を③式へ代入すると、

$$m\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{x} + kx = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

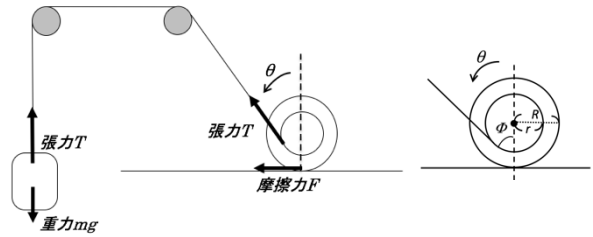
よって、 $\ddot{x} = -\frac{2k}{3m}x = -\left(\sqrt{\frac{2k}{3m}}\right)^2 x \quad \dots \textcircled{7}$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

微分方程式を解き、運動の解析ができた。

3. 3 作成した実験装置への適用

図 1 で示した今回の実験モデルのうち、ロールが滑車に近づく場合について、3.2 で考察した手法を用いて解析を試みる。



重力加速度 $g[m/s^2]$ 、ロールの質量 $M[kg]$
おもりの質量 $m[kg]$ 、張力 $T[N]$ 、摩擦力 $F[N]$
ロールの外径 $R[m]$ 、ロールの内径 $r[m]$
ロールの回転角 $\theta[rad]$ 、導線とロールの中心がなす角 $\phi[rad]$

図 3 作成した実験装置のモデル図

図 3 のようにロールがおもりに近づき、おもりの高さが上昇する場合を考える。なお、ロールの回転角 $\theta[rad]$ は反時計周りを、 x 軸は右向きを、 y 軸は上向きを正とする。また、ロールの慣性モーメントを I とする。

おもりの運動方程式より、

$$m\ddot{y} = T - mg$$

ロールの運動方程式より、

$$m\ddot{x} = -T\sin\phi - F$$

$$I\ddot{\theta} = -FR - Tr$$

ロールが滑らない条件として、 $x = R\theta$

ϕ は θ によって決まるので、 $\phi = \phi(\theta)$

y も θ によって決まるので、 $y = y(\theta)$

4. 今後の展望

3.3 の式について、未知数の決定に至らなかった。今後の課題としたい。

5. 参考文献

「よくわかる初等力学」著：前野 昌弘 東京出版

<https://www.hellocybernetics.tech/>

6. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、指導教員の藤野先生には多大なご指導を賜りました。深くお礼申し上げます。