無限多重根号の性質とその拡張

３年Ａ組　井上 友裕

指導教員　川口 慎二

１．要約

根号($\sqrt{\ }$)の中で根号を無限に足して繰り返しいく数式を無限多重根号という。昨年度は無限多重根号の値について、数列の極限を用いて計算した([1])。今回は、無限多重根号を 3 乗根や一般の k 乗根へ拡張する研究を行った。また、ランダウのオーダー記号を用いて無限多重根号を評価し、関数列を用いた別アプローチも試みた。

キーワード　極限、収束、関数のオーダー、関数列

２．研究の背景と目的

昨年度に無限多重根号についての研究を行い、数列と極限を用いて計算した([1])。そこで、無限多重根号を 3 乗根や一般の k 乗根へ拡張すると、どのように表すことができるかについて興味をもち、研究を行った。

３．研究内容

３－１　定義の一般化

まず、無限多重根号を拡張するために、定義を一般化した。

<u>定義１</u>

2 以上の自然数 k と自然数 m において数列 $\left\{a_n^{(k,m)}\right\}$ を次のように定義する。

$$a_0^{(k,m)}=0\,,\ a_{n+1}^{(k,m)}=\sqrt[k]{m+a_n^{(k,m)}}$$

このとき、$a_n^{(k,m)}$ を m の n 重 k 乗根号という。特に $a_n^{(2,m)}$ は $a_n^{(m)}$ とも表す。

<u>定義２</u>

$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k,m)}$ が収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k,m)}=I\left(k,m\right)$$

を m の無限多重 k 乗根号という。

明らかに、$I\left(2,m\right)=F_m$ である。

３－２　数列の収束

無限多重 k 乗根号が存在することを証明するためには、数列が単調増加であり、かつ上に有界であることを示せばよい。

<u>命題１</u>

数列 $\left\{a_n^{(k,m)}\right\}$ は単調増加である。

(証明)

すべての非負整数 n に対して、

$a_n^{(k,m)}<a_{n+1}^{(k,m)}$ が成り立つことを示せばよ

い。数学的帰納法により証明する。

[ｉ] $a_0^{(k,m)}=0$, $a_1^{(k,m)}=\sqrt[k]{m}$ より、明らかに $a_0^{(k,m)}<a_1^{(k,m)}$.

[ⅱ] $n=l$ のとき $a_l^{(k,m)}<a_{l+1}^{(k,m)}$ が成り立つならば、$n=l+1$ で $a_{l+1}^{(k,m)}<a_{l+2}^{(k,m)}$ が成立することを示す。$a_l^{(k,m)}<a_{l+1}^{(k,m)}$ より、

$m+a_l^{(k,m)}<m+a_{l+1}^{(k,m)}$.

よって、$\sqrt[k]{m+a_l^{(k,m)}}<\sqrt[k]{m+a_{l+1}^{(k,m)}}$ なので、$a_{l+1}^{(k,m)}<a_{l+2}^{(k,m)}$.

数学的帰納法により、すべての非負整数 n に対して $a_n^{(k,m)}<a_{n+1}^{(k,m)}$ が成り立つので、数列 $\left\{a_n^{(k,m)}\right\}$ は単調増加である。

(Q.E.D.)

<u>命題 2</u>

$m\geq 2$ のとき、$a_n^{(k,m)}\leq m$ が成り立つ。

(証明)

数学的帰納法により証明する。

[ｉ] $a_0^{(k,m)}=0$ より、$a_0^{(k,m)}\leq m$.

[ⅱ] $n=l$ のとき $a_l^{(k,m)}\leq m$ が成り立つならば、$n=l+1$ で $a_{l+1}^{(k,m)}\leq m$ が成立することを示す。

$a_l^{(k,m)}\leq m$ より、$m+a_l^{(k,m)}\leq 2m\leq m^k$.

よって、$\sqrt[k]{m+a_l^{(k,m)}}\leq\sqrt[k]{m^k}$ となるので $a_{l+1}^{(k,m)}\leq m$.

数学的帰納法により、$m\geq 2$ のとき、すべての自然数 n に対して $a_n^{(k,m)}\leq m$ が成立する。　(Q.E.D.)

<u>命題 3</u>

$a_n^{(k,1)}\leq\sqrt[k]{3}$ が成り立つ。

(証明)

数学的帰納法により証明する。

[ｉ] $a_0^{(k,1)}=0$ より、$a_0^{(k,1)}\leq\sqrt[k]{3}$

[ⅱ] $n=l$ のとき $a_l^{(k,1)}\leq\sqrt[k]{3}$ が成り立つならば、$n=l+1$ で $a_{l+1}^{(k,1)}\leq\sqrt[k]{3}$ が成立することを示す。

$a_l^{(k,1)}\leq\sqrt[k]{3}\leq 2$ より $1+a_l^{(k,m)}\leq 3$.

したがって、$\sqrt[k]{1+a_l^{(k,m)}}\leq\sqrt[k]{3}$ なので $a_{l+1}^{(k,1)}\leq\sqrt[k]{3}$.

数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して $a_n^{(k,1)}\leq\sqrt[k]{3}$ が成立する。

(Q.E.D.)

よって, 命題１から命題３より、m の無限多重k乗根号$I(k,m)$は存在することが証明できた。

３－３　無限多重３乗根号

[1]において、無限多重３乗根号について以下のような予想をした。

$$\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\cdots}}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}$$

この予想をはさみうちの原理を用いて証明することができた。

<u>定理１</u>

$$I(3,m)=\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}$$

が成り立つ。

（証明）

$$t=\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}$$

とする。

定義１より、$a_{n+1}^{(3,m)}=\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}$ ゆえ、

$$\left|a_{n+1}^{(3,m)}-t\right|=\left|\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}-t\right|$$

$$=\left|\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}-t\right)\times\frac{\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}\right)t+t^2}{\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}\right)t+t^2}\right|$$

$$=\left|\frac{m+a_n^{(3,m)}-t^3}{\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}\right)t+t^2}\right|.$$

ここで、$m=t^3-t$ より、$\left|a_{n+1}^{(3,m)}-t\right|$ より、

（与式）

$$=\left|\frac{a_n^{(3,m)}-t}{\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{m+a_n^{(3,m)}}\right)t+t^2}\right|$$

となる。

<u>補題</u>

このとき、$t>1$である。

（補題の証明）

仮定より $t^3=1+t$.

$t>0$ より $t^3>1$ なので、$t>1$

（証明終）

（定理１の証明続き）

補題より $\left|a_{n+1}^{(3,m)}-t\right|=\left|\frac{a_n^{(3,m)}-t}{t^2}\right|$ が成り立つので、

$$\left|a_{n+1}^{(3,m)}-t\right|=\frac{1}{t^2}\left|a_n^{(3,m)}-t\right|<\frac{1}{t^{2n+2}}\left|a_0^{(k,m)}-t\right|.$$

定義１より、$a_0^{(3,m)}=0$だから、

$$\left|a_{n+1}^{(3,m)}-t\right|<\left|\frac{t}{t^{2n+2}}\right|=\left|\frac{1}{t^{2n+1}}\right|$$

すなわち、$0\le\left|a_{n+1}^{(3,m)}-t\right|<\left|\frac{1}{t^{2n+1}}\right|.$

よって、はさみうちの原理より、

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}^{(3,m)} - t\right| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{t^{2n+1}}\right|.$$

$t>1$ より、$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{t^{2n+1}}\right| = 0$ なので、

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}^{(3,m)} - t\right| = 0.$$

つまり、$I(3,m)-t=0$．よって、

$$I(3,m)=\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}$$

を得る。　(Q.E.D.)

３－４　関数 $I(k,m)$ のオーダー

関数の大雑把なふるまいを評価するランダウの記号を用いて関数 $I(k,m)$ について議論することにした。

ここでは、$m\to\infty$ でのオーダーを表している。

<u>命題 4</u>

$I(2,m)=\mathrm{O}\left(\sqrt{m}\right)$ が成り立つ

(証明)

$I(2,m)=\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$ だから、

$\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}=\mathrm{O}\left(\sqrt{m}\right)$ を示せばよい。

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}}{\sqrt{m}} = \lim_{m\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2\sqrt{m}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{m}}+\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{1+4m}}{\sqrt{4m}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sqrt{\frac{4m+1}{4m}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{4m}} = 1.$$

ゆえに、$I(2,m)=\mathrm{O}\left(\sqrt{m}\right)$.　　(Q.E.D.)

<u>命題 5</u>

$I(3,m)=\mathrm{O}\left(\sqrt[3]{m}\right)$ が成り立つ。

(証明)

$$I(3,m)=\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}$$

に注意すると、

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}}{\sqrt[3]{m}}$$

$$\le \lim_{m\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{m}}\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{27m^2-4}{108}}}$$

$$\le \lim_{m\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{m}}\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{27m^2}{108}}}$$

$$\le \lim_{m\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{m}}\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\frac{m}{2}} = 2.$$

ゆえに、$\lim_{m\to\infty}\frac{I(3,m)}{\sqrt[3]{m}}\le 2$ より、

$I(3,m)=\mathrm{O}\left(\sqrt[3]{m}\right)$.　(Q.E.D.)

そこで次のような予想を立てた。

予想

$I(k,m)=\sqrt[k]{m}$ が成り立つ。

これは、無限に根号($\sqrt{\ }$)の中で数を足し合わせても、初めの $a_1^{(k,m)}=\sqrt[k]{m}$ とオーダーは同じであるという予想である。

命題6

$n\geq 1$ のとき、$a_n^{(k,m)}=\mathrm{O}\left(\sqrt[k]{m}\right)$ が成り立つ。

この命題は、k, n を定数とみなせば、m を変数とする関数と考えられることに起因する。

(命題6の証明)

数学的帰納法により示す。

[i] まず $a_1^{(k,m)}=\mathrm{O}\left(\sqrt[k]{m}\right)$ を示す。

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_1^{(k,m)}}{\sqrt[k]{m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt[k]{m}}{\sqrt[k]{m}}=1.$$

[ii] ゆえに $a_l^{(k,m)}=\mathrm{O}\left(\sqrt[k]{m}\right)$ ならば、

$a_{l+1}^{(k,m)}=\mathrm{O}\left(\sqrt[k]{m}\right)$ となることを示す。

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{l+1}^{(k,m)}}{\sqrt[k]{m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt[k]{m+a_l^{(k,m)}}}{\sqrt[k]{m}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sqrt[k]{1+\frac{a_l^{(k,m)}}{m}}$$

ここで、命題2より、$m\geq 2$ のとき

$a_n^{(k,m)}\leq m$ であるから、

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{l+1}^{(k,m)}}{\sqrt[k]{m}}\leq\lim_{m\to\infty}\sqrt[k]{2}\leq\lim_{m\to\infty}\sqrt[k]{2^k}=2.$$

すなわち、$a_n^{(k,m)}=\mathrm{O}\left(\sqrt[k]{m}\right)$.　(Q.E.D.)

3－5　関数列と無限多重根号

無限多重根号を別の方法で計算できないか考えたところ、関数列を用いて考えることができた。

定義3

関数列 $\left\{I_n^{(k,m)}(x)\right\}$ を以下のように帰納的に定義する。

$$I_1^{(k,m)}(x)=\sqrt[k]{x},$$

$$I_{n+1}^{(k,m)}(x)=\sqrt[k]{m+I_n^{(k,m)}(x)}.$$

特に、$I_n^{(k,m)}(m)=a_n^{(k,m)}$ である。

定義4

関数列 $\left\{I_n^{(k,m)}(x)\right\}$ に対して、

$\lim_{n\to\infty}I_n^{(k,m)}(x)$ が収束するとき、

$I^{(k,m)}(x)=\lim_{n\to\infty}I_n^{(k,m)}(x)$　とする。

特に $(k,m)=(2,2)$ の場合を考える。

命題 7

$I_n^{(2,2)}(x)$ は $n \to \infty$ のとき、

$I^{(2,2)}(x) = 2$ に各点収束する。

（証明）

$$
\begin{aligned}
\left| I_n^{(2,2)}(x) - 2 \right| &= \left| \sqrt{2 + I_{n-1}^{(2,2)}(x)} - 2 \right| \\
&= \left| \frac{I_{n-1}^{(2,2)}(x) - 2}{\sqrt{2 + I_{n-1}^{(2,2)}(x)} + 2} \right| \\
&< \frac{1}{2} \left| I_{n-1}^{(2,2)}(x) - 2 \right| \\
&< \frac{1}{2^{n-1}} \left| \sqrt{2} - 2 \right| = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2^n}.
\end{aligned}
$$

ゆえに、はさみうちの原理より、

$$0 \le \lim_{n \to \infty} \left| I_n^{(2,2)}(x) - 2 \right| \le \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \left(4 - 2\sqrt{2} \right)$$

なので、$\lim_{n \to \infty} I_n^{(2,2)}(x) = I^{(2,2)}(x) = 2$.

(Q.E.D.)

４．研究の考察と今後の課題

無限多重根号を 3 乗根に拡張し、その値を求めることができた。一般の k 乗根については、数列の極限値を求めることはできなかったが、その極限値が存在することを証明した。また、ランダウのオーダー記号を用いて無限多重根号について 2, 3 乗根のオーダーを調べ、一般の場合の予想を立てた。関数列でのアプローチを試みた。

今回できなかった無限多重根号の一般化をしたい。また、無限多重根号と連分数との関係性についても研究を行いたいと考えている。

５．参考文献

[1] 井上友裕,「無限多重根号について」, 奈良女子大学附属中等教育学校令和元年度 SSH 生徒研究論文集(2019), p.38～41

[2] 「Newton 別冊数学の世界　数の神秘編　素数、虚数、π など、数が織りなす美しい世界」, ニュートンプレス

[3]「理系脳を鍛える!Newton ライト　二乗してマイナスになる　奇妙な数！　虚数のきほん」, ニュートンプレス

[4] 「無限多重根号①(解法編)　Fukusuke の数学めも」 https://mathsuke.jp/infinite-nested-radical-solution/

[5] 水田義弘,「大学で学ぶ　やさしい微分積分」, サイエンス社(2002)

[6] 「あざらしとペンギンの問答　オーダー記法・その 2：基本的な定義」 https://azapen6.hatenablog.com/entry/2014/02/06/032835

[7] 「高校数学の美しい物語　各点収束と一様収束の違いと具体例」 https://mathtrain.jp/ichiyosyusoku

[8] 「高校数学の美しい物語　sup と inf の意味, max との違い」 https://mathtrain.jp/supmax

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。