二円からできる三角形の面積に現れる定数について

３年Ａ組　川野　聡真

指導教員　川口　慎二

１．要約

黄金比とは$1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$で表わされる比のことをいう。いま、$A:B$が黄金比であるとき、$A:B=B:(A+B)$が成り立つ。例えば、正五角形の１辺の長さと対角線の長さの比は黄金比になっている。また、白銀比とは$1:\sqrt{2}$または$1:\left(1+\sqrt{2}\right)$で表わされる比である。$A:B$が白銀比であるとき、後者の場合について$A:B=(B-2A):A$が成り立つ。身近な例を挙げると、正方形の１辺の長さと対角線の長さの比は白銀比である。私は、黄金比と白銀比の 2 つを取り入れた図形を自ら作り、得られた図形の性質を研究した。

キーワード　黄金比、白銀比、ヘロンの公式

２．研究の背景と目的

私が初めて黄金比を知ったのは、好きな漫画「スティール・ボール・ラン」での登場人物である「ジャイロ・ツェペリ」の黄金長方形の説明であり、それが作る螺旋模様を美しいと感じたからである。そこで私は黄金比や白銀比について興味を持ち、研究を始めた。

３．研究内容

３－１　ヘロンの公式

まず、本稿で用いるヘロンの公式について紹介する。

<u>定理</u>（ヘロンの公式）

BC, AC, AB の長さをそれぞれa, b, cとする三角形 ABC の面積Sは、$s=\dfrac{a+b+c}{2}$とするとき、

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

で与えられる。

証明方法は三平方の定理や三角比を用いる方法などが知られている。

３－２　作成した図形(1)

図１のように AB＝AC＝１の直角二等辺三角形において、CB を半径とする円 C を描き、B を中心とし、半径の長さが$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$の円 B を描き、2 つの交点を X, Y とする。

このとき、BX＝BY＝$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　…①

CX＝CB＝CY＝$\sqrt{2}$　…②

が成り立つ。

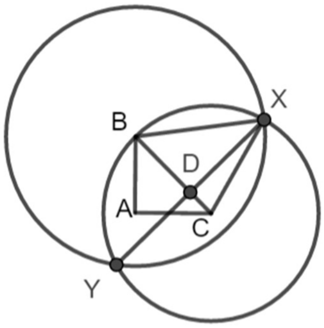

図１　作成した図形(1)

△BCXの面積は、ヘロンの公式より、

$$s=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{2}+1+\sqrt{5}}{4}$$ ゆえ、

$$S=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+1+\sqrt{5}}{4}\left(\frac{4\sqrt{2}+1+\sqrt{5}}{4}-\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{4\sqrt{2}+1+\sqrt{5}}{4}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{34+10\sqrt{5}}}{8}$$ である。

また、DはXYとBCの交点である。さらに、△XBCと△YBCにおいて①, ②およびBCは共通であることから、3辺相等より△XBC≡△YBCである。

このとき、XDの長さは、

$$\frac{\sqrt{34+10\sqrt{5}}}{8}\times2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{17+5\sqrt{5}}}{4}$$

であり、よってXYの長さは、

$$\frac{\sqrt{17+5\sqrt{5}}}{4}\times2=\frac{\sqrt{17+5\sqrt{5}}}{2}$$

とわかる。

次に∠BXCの大きさを求める。余弦定理より、∠BXC＝θとすると、

$BC^2=BX^2+CX^2-2BX\cdot CX\cdot\cos\theta$ であるから、

$$\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\cos\theta$$

つまり、$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{8}$ となる。

ゆえに、∠BXC＝θ≒55.1°である。また、∠BCX≒69.8°である。

３－３　作成した図形(2)

下の図２のようにAB＝AC＝1の直角二等辺三角形において、点B, Cを中心とし、半径の長さが$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$の円B, Cを描き、2つの交点をX, Yとする。

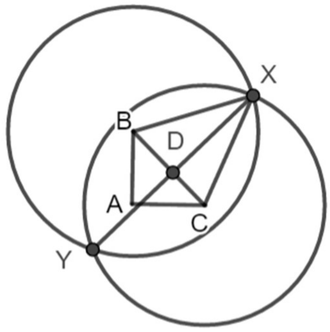

図２　作成した図形(2)

作成した図形(1)と場合と同様の計算により、△BCXの面積は、ヘロンの公式から、

$$s=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times2+\sqrt{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2},$$

$$S=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}$$ となる。

このとき、XDの長さは、

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}\times 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2}$$

となり、よってXYの長さは、

$$\frac{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2}\times 2=\sqrt{4+2\sqrt{5}}$$

とわかる。

次に∠BXCの大きさを求める。余弦定理より、∠BXC＝θとすると、

$BC^2 = BX^2 + CX^2 - 2BX \cdot CX \cdot \cos\theta$ であるから、

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cos\theta$$

よって、$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

ゆえに、∠BXC＝θ≒51.8°である。また、∠BCX≒64.1°である。

３－４　作成した図形(3)

図３のようにAB＝AC＝１の直角二等辺三角形において、点B, Cを中心とし、BCを半径とした円B, Cを描き、２つの交点をX, Yとする。△BCXと△BCYは１辺の長さが$\sqrt{2}$の正三角形である。

BCの中点をMとすると、BM＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$であり、△BXCはMB : BX : XM＝1 : 2 : $\sqrt{3}$の直角三角形である。

よって、△BXMの面積は、

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

とわかる。したがって、△BCXの面積は、$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

また、XYの長さは$\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$ である。△BCXは正三角形なので、∠BXC＝∠BCX＝∠CBX＝60°である。

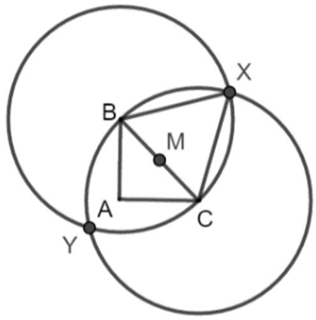

図３　作成した図形(3)

３－５　作成した図形(1), (2), (3)の比較

作成した図形(1), (2), (3)について直角二等辺三角形の等しい２辺の長さをnとして△BCXの面積とXYの長さを求め、表１にまとめた。

この表１からわかったことは、図(1), (2), (3)において、△BXCの面積の値とXYの長さの値に現れる定数部分の比は、1 : 2 : $\sqrt{2}$ ある。

表１　図形(1), (2), (3)の比較

図形	△BXCの面積	XYの長さ
(1)	$\dfrac{\sqrt{34+10\sqrt{5}}}{8}n^2$	$\dfrac{\sqrt{17+5\sqrt{5}}}{2}n$
(2)	$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}n^2$	$\sqrt{4+2\sqrt{5}}\,n$
(3)	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}n^2$	$\sqrt{6}\,n$

３－６　作成した図形(4)

次に、円を使用せずに図形内に黄金比や白銀比を使用した図形について考えてみた。その図形は３辺の長さが、AB＝1, AC=$\sqrt{2}$，BC＝$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$の三角形である。

$\sqrt{2}-1<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<\sqrt{2}+1$が成り立つため、このような三角形は存在する。その三角形の３つの内角を求めた。

∠BAC＝x ,∠ABC=y，∠ACB=z とする。△ABC について、余弦定理より $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos x$ であるから、

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos x$$

$$\cos x=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}.$$

よって、x≒82.2°である。

また、余弦定理から、

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos y$$

なので、

$$\left(\sqrt{2}\right)^2=1^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\cdot1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\cos y$$

$\cos y=\dfrac{1}{2}$となる。

ゆえに、y＝60°である。

さらに、もう一度余弦定理を用いると、

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos z°$$

$$1^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\cos z$$

より、$\cos z=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$とわかり、$z$≒37.8°である。

３－７　作成した図形(5)

図形(1)～(4)では、三角形について、各一辺の長さを設定してから面積や内角を求めたが、きれいな整数値はあまり求められなかった。

そこで今度はあらかじめ角度と、その両端の２辺の長さを設定して、残り１辺の長さや三角形の面積を求めた。∠BAC＝72°, AB＝AC＝$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$の二等辺三角形 ABC を考える。

ここで、$\cos 72°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$である。

△ABC について、余弦定理より

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 72°$$

$$BC^2=2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

であるから、$BC^2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

BC＞0 なので、$BC=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$.

また、$\sin 72°=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$であるから、

△ABC の面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{16}$$

となる。

４．今後の展望

作成した図形の中で得られた、面積や長さの数値がどのような値なのか、また意味はあるのかを調べる。他にも黄金比や白銀比を用いた図形を考案し、いろいろな線分の長さや図形の面積を求めて、法則を見つけたい。

５．参考文献

[1]「黄金比にまつわる話題｜高校数学の美しい物語」
https://mathtrain.jp/golden
[2]「ヘロンの公式との証明と使用例｜高校数学の美しい物語」
https://mathtrain.jp/heron
[3] Wikipedia
https://ja.m.wikipedia.org/wiki/

６．謝辞

　研究を進める過程でたくさんのアドバイスを下さった顧問の川口先生、サイエンス研究会数学班のみなさん、ありがとうございました。