関数を強くする

３年Ｃ組　竹内　伶河
指導教諭　川口　慎二

１．要約

関数に対して、変換を使ってより強い関数にすることで、巨大数を得られる。関数の「強さ」を定義し、関数の反復等を数え上げることで関数を「強く」することを目指した。本稿において「関数が強い」とは、関数の発散速度が速いことを意味する。

キーワード　急増加関数、順序数、極限順序数、基本列、ワイナー階層、関数の強さ

２．研究の背景と目的

グラハム数の存在を知り、巨大数に興味をもった。巨大数を得るためには、強い関数を用意するのが適切であるとわかり、いかに関数を強くする写像（変換）を作るかという課題を設定した。

３．研究内容

３－１　急増加関数

まず、本稿で用いる順序数および超限順序数についての基本事項は[3]を、巨大数に関する基本事項は[4]をそれぞれ参照されたい。

関数の強さを評価するために急増加関数を定義する。そのためにまず、順序数の基本列を定義する。

定義１

共終数が ω である極限順序数 α に対して、α に収束する順序数の単調増加列を、α の**基本列**という。

例えば、順序数 ω の基本列は $0, 1, 2, 3, \cdots$ であり、順序数 $\omega+\omega$ の基本列は

$$\omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \omega+4,\ \omega+5,\ \cdots$$

である。また、順序数 ω^{ω} の基本列は

$$\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5,\ \cdots$$

である。

急増加関数とは、順序数 α に対して、関数 $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める順序数による関数の階層 $\{f_a(n)\}$ のことをいい、関数の大きさを評価したり、比較したりするときに用いられる。数学的には以下のように定義される。

定義２

α を任意の順序数、x を任意の自然数とする。また、$\beta[n]$ を極限順序数 β の基本列の n 番目とする。このとき、関数の階層 $\{f_a(n)\}$ を次のように定義する。

$\alpha=0$ のとき、$f_\alpha(x)=x+1$

α が後続順序数のとき、$f_\alpha(x)=f_{\alpha-1}^{x}(x)$

α が極限順序数のとき、

$$f_\alpha(x)=f_{\alpha[n]}(x)$$

この階層 $\{f_a(n)\}$ を**急増加関数**という。

ここで、最小の超限順序数である ω から有限回の加算や乗算、冪乗では到達できない最小の超限順序数を ε_0 と表し、**イプシロン・ノート**または**イプシロン・ゼロ**とよぶ。

$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$ とも表現される。

ε_0 以下の極限順序数 α の基本列を定める方法としてワイナー階層とよばれるものがある。

<u>定義 3</u>

α を $\alpha \le \varepsilon_0$ である極限順序数とする。このとき、α の基本列 $\{a[n]\}$ を以下のように帰納的に定義する。

$\alpha = \omega$ のとき、$\omega[n] = n$

$\alpha = \omega^{\alpha}$ のとき、$\omega^{\alpha}[n] = \omega^{\alpha[n]}$

$\alpha = \omega^{\alpha+1}$ のとき、$\omega^{\beta+1}[n] = \omega^{\beta} n$

$\alpha = \omega^{\beta}$ かつ β が極限順序数のとき、

$$\omega^{\beta}[n] = \omega^{\beta[n]}$$

)

$\alpha = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} + \omega^{\gamma_k}$, ただし、$\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \cdots \ge \gamma_{k-1} \ge \gamma_k$ （カントール標準形）のとき、

$$(\omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} + \omega^{\gamma_k})[n] = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} + (\omega^{\gamma_k}[n])$$

$\alpha = \varepsilon_0$ のとき、

$$\varepsilon_0[0] = 1 \text{ かつ } \varepsilon_0[n+1] = \omega^{\varepsilon_0[n]}$$

この基本列 $\{a[n]\}$ を**ワイナー階層**という。

３－２　関数を強くする写像を定義する

以下のような写像を提案する。

いま、M を 0 個以上の 0 の列、N を 0 個以上の非負整数の列とする。さらに、n を任意の非負整数とする。

このとき、$\langle N, n+1 \rangle$ は非整数の列 N の後に $n+1$ を並べてできる列を表す。また、$\langle N, n, 0, M \rangle$ で、非負整数の列の後に n を並べて、その後に 0 の列を続けてできる列を表すことにする。
また、定義 4 において、$s(N, n+1)$ は列 $\langle N, n+1 \rangle$ に対応する $s(\langle N, n+1 \rangle)$ を表している。

<u>定義 4</u>

$f(x), g(x)$ を非負整数から非負整数への関数とする。n, x を任意の非負整数とする。また、M を 0 個以上の 0 の列、N を 0 個以上の非負整数の列とする。

いま、非負整数から非負整数への写像全体の集合を $\mathfrak{F}$ として、$\mathfrak{F}$ から $\mathfrak{F}$ への写像 $s(\bullet)$ を以下のように定義する。

$s(M)(f) = g$ のとき、$g(x) = f^x(x)$

$s(N, n+1)(f) = g$ のとき、

$$g(x) = S(N, n)^x f(x)$$

$s(N, n+1, 0, M)(f) = g$ のとき、

$$g(x) = s(N, n, x, M) f(x)$$

このように定義した写像 $s(M)$ の強さは

以下のように急増加関数により近似すると $f_{\omega^{\omega^\omega}}(x)$ に到達する。$f = x+1$ とする。

$$s(0)(f) = f_1(x)$$
$$s(1)(f) = f_\omega(x)$$
$$s(2)(f) = f_{\omega^2}(x)$$
$$s(1,\ 0)(f) = f_{\omega^\omega}(x)$$
$$s(1,\ 1)(f) \approx f_{\omega^{\omega+1}}(x)$$
$$s(1,\ 2)(f) \approx f_{\omega^{\omega+2}}(x)$$
$$s(2,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega 2}}(x)$$
$$s(2,\ 1)(f) \approx f_{\omega^{\omega 2+1}}(x)$$
$$s(2,\ 2)(f) \approx f_{\omega^{\omega 2+2}}(x)$$
$$s(3,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega 3}}(x)$$
$$s(1,\ 0,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega^2}}(x)$$
$$s(1,\ 0,\ 1)(f) \approx f_{\omega^{\omega^2+1}}(x)$$
$$s(1,\ 1,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega^2+\omega}}(x)$$
$$s(1,\ 2,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega^2+\omega 2}}(x)$$
$$s(2,\ 0,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega^2 2}}(x)$$
$$s(2,\ 1,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega^2 2+\omega}}(x)$$
$$s(3,\ 0,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega^2 3}}(x)$$
$$s(1,\ 0,\ 0,\ 0)(f) \approx f_{\omega^{\omega^3}}(x)$$
$$s(1,\ \underbrace{0,\ 0,\cdots,0}_{x\text{個}})(f) \approx f_{\omega^{\omega^\omega}}(x)$$

さらに、定義 4 の写像を拡張した。

<u>定義 5</u>

$f(x),\ g(x)$ を非負整数から非負整数への関数とする。$n,\ x$ を任意の非負整数とする。また、M を 0 個以上の 0 の列、N を 0 個以上の非負整数の列とする。(Z) を 0 個以上の( )の列、(X) を 0 個以上の (N) の列とする。

いま、非負整数から非負整数への写像全体の集合を $\mathfrak{F}$ として、$\mathfrak{F}$ から $\mathfrak{F}$ への写像 $s(\bullet)$ を以下のように定義する。

$s\big((Z)(M)\big)(f) = g$ のとき、

$$g(x) = f^x(x)$$

$s\big((X)(M,0)()(Z)\big)(f) = g$ のとき、

$$g(x) = s\left((X)()(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{x-1\text{個}},1)(Z)\right)f(x)$$

$s\big((X)(N,n+1)(Z)\big)(f) = g$ のとき、

$$g(x) = s\big((X)(N,n)^x(Z)\big)(f)(x)$$

$s\big((X)(N,n+1,0,M)(Z)\big)(f) = g$

のとき、

$$g(x) = s\big((X)(N,n,x,M)(Z)\big)(f)(x)$$

この写像$\sigma(X)$の強さは、以下のように急増加関数により近似すると$f_{\varepsilon_0}(x)$に到達する。

$$s\big((0)()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+1}}(x)$$

$$s\big((1)()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+\omega}}(x)$$

$$s\big((1,0)()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{\omega}}}(x)$$

$$s\big((1,1)()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{\omega+1}}}(x)$$

$$s\big((2,0)()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{\omega}2}}(x)$$

$$s\big((1,0,0)()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{\omega^2}}}(x)$$

$$s\big((2,0,0)()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{\omega^2}2}}(x)$$

$$s\big((1,0,0,0)()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{\omega^3}}}(x)$$

$$s\left((1,\underbrace{0,\cdots,0}_{x\text{個}})()\right)(f)$$

$$\sim f_{\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{\omega^{\omega}}}}(x) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}(x)$$

$$s\big((1)()()\big)(f) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}+\omega}}(x)$$

$$s\left((1,\underbrace{0,\cdots,0}_{x\text{個}})()()\right)(f)$$

$$\sim f_{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}+\omega^{\omega^{\omega}}}}(x) \sim f_{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}}(x)$$

$$s\big((0)()\cdots(n)\cdots()\big)(f) \sim f_{{}^{n+2}\omega}(x)$$

$$s\left((0)\underbrace{()\cdots()}_{x\text{個}}\right)(f) \sim f_{\varepsilon_0}(x)$$

４．今後の展望

多変数の写像を用いることにより強い写像を作ることができた。今後は単純に数え上げを繰り返すことで無理矢理大きくするのではなく、関数の強化を目的とした関数を用いるなどの工夫を盛り込んでいきたい。

５．参考文献

[1] 「ふぃっしゅ数バージョン 3」
https://googology.wikia.org/ja/wiki/%E3%81%B5%E3%81%83%E3%81%A3%E3%81%97%E3%82%85%E6%95%B0%E3%83%90%E3%83%BC%E3%82%B8%E3%83%A7%E3%83%B33

[2] 「急増加関数」
https://googology.wikia.org/ja/wiki/%E6%80%A5%E5%A2%97%E5%8A%A0%E9%96%A2%E6%95%B0

[3] 赤摂也，「集合論入門」，培風館

[4] 鈴木真治，「巨大数」，岩波書店