

振り子を設置した台車の挙動分析と ベアリングを用いた実験モデルの提案

6年B組 鶴崎 桐梧

6年B組 柴田 凌輔

指導教員 藤野 智美

1. 要約

私たちは、台車上に設置した振り子を振らせたときの振り子と台車の挙動に興味を持ち、研究を行っている。昨年までの研究により、運動量保存則による理論的な予想では、台車と振り子はその場で振動すると考えたが、実験では、台車は振動しながら前進した。本研究では、実験装置の改良およびベアリングを用いた実験モデルについて提案する。

キーワード：振り子，台車，運動量，ベアリング，3Dプリンター，剛体振り子

2. 研究の背景と目的

私たちは、台車上に設置した振り子を振ったときの振り子と台車の挙動に興味を持ち、運動量保存則に基づいた理論と実験の両面からの考察を試みた（図1）。

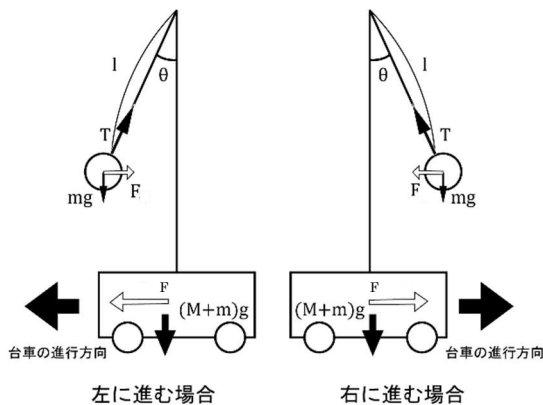


図1 実験のモデル図

3. 研究内容

3. 1 実験 I

3. 1. 1 仮説の立案と実験

2で述べたように、運動量保存則を用いて以下のように仮説の構築を行った。

重力加速度を g 、振り子のおもりの質量を m 、台車の質量を M 、時刻を t とする。おもりにはたらく重力 mg と張力 T を合成した力を F とおくと、 F は復元力となるため、振り子は振動する。この F の反作用が台車にはたらくため、反作用も同様に復元力となり、台

車も振動する。振り子と台車の速度をそれぞれ v, V とすると、初期値が静止状態であるので、振り子の初速度は $v_0 = 0$ 、台車の初速度は $V_0 = 0$ と考えられる。よって、運動量保存則を以下のように立式できる。

$$mv_0 + MV_0 = mv + MV = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

①式より、台車の振動方向は振り子の振動方向と逆になることがわかる。

次に、振り子と台車の重心の x 軸方向の運動を考える。振り子の重心の座標を (x_m, y_m) 、台車の重心の座標を $(x_M, 0)$ 、振り子と台車の重心の座標を (X_G, Y_G) とすると、重心の座標は次のように表される。

$$X_G = \frac{mx_m + Mx_M}{m+M} \dots \textcircled{2}$$

②の X_G を時間で微分すると、

$$V_G = \frac{mv + MV}{m+M} \dots \textcircled{3}$$

①、③式より、③の右辺の分子が0となり、振り子と台車の重心は静止し続けることが分かる。よって、本実験の仮説を以下のように考えた。

<仮説>

台車と振り子の重心の速度は常に0となるため、振り子と台車は前後運動することなくその場で振動する。

<実験と結果>

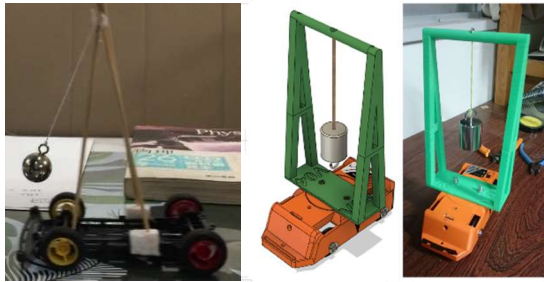


図2 作成した装置1(左)と装置2(右)

図2に示すような、ミニ四駆に竹串で支柱を立て、凧糸と50gのおもりを装着した装置1(左)や、3Dプリンターで支柱を作成した装置2(右)を用いて実験した。結果として、振り子と台車を同時に離すと互いに振動しながら前進し、仮説とは異なる結果となった。

<考察>

仮説と異なった原因として、以下の問題点を考えた。

1. 台車と振り子を同時に離せない。
2. 振り子の振れ角が大きすぎると重心が移動して片方の車輪が浮き、倒れる。
3. 力学台車に存在する4つのタイヤがそれぞれ摩耗していて、タイヤ一つ一つの摩擦力が異なる。
4. 実験中に振り子の紐がねじれ、おもりが台車の進行方向以外にも振れる。

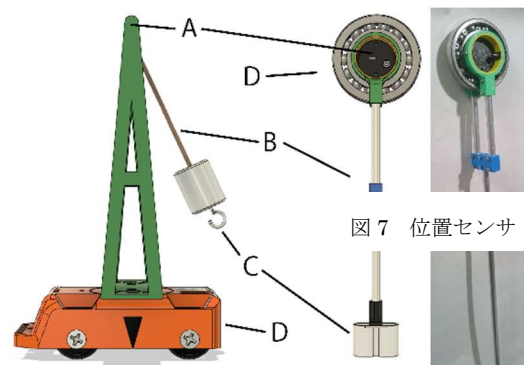
上記の問題を解決するには装置の根本的な変更が必要と考え、新たに装置3の構造を考えた。

3. 2 実験II

3. 2. 1 装置3の作成

装置3では台車の代わりにベアリングを使用し、紐は剛体の棒(アルミパイプ)を用い、下部におもりを設置して振り子とする

構造を採用した(図3)。この設計変更により、装置2の振り子の動きはそのままに、力学台車の振動をベアリングの外輪の回転運動に変換し、実験者が視覚的に振動の様子を認識しやすいように工夫した。装置3では、支点を可動化した剛体振り子へとモデルを変更したことになる。



A…振り子の支点,B…振り子の紐(棒),C…重り,D…ボディ(台車)

図3 装置2(左)と装置3(中央)の3Dモデルと装置3作成後の様子(右)

また、装置3では振り子の支点とボディの重心が同じ位置にあるため、その位置に位置センサを設置すれば、ボディの位相と振り子の重りの位相を計測できると考えた。本研究ではATR-Promotionsの小型多機能センサであるTSND121(図4)を用



いる。以下に装置2から装置3への改良点をまとめる。

1. 剛体振り子を用いることで、おもりを動かすだけでベアリングをつり合いの位置に移動でき、おもりを離すと同時にベアリングも自由な状態になる。
2. 振り子の支点とボディの重心を全く同じ位置に配置することで転倒を防ぐ。
3. ベアリング自体を台車の代わりとすることでタイヤの数を4つから1つに

図4 TSND121

き、摩擦力の統一化を図る。

- 振り子の支点にベアリングを用いることで、振り子を一方向に振らせる。
- 2と同じように振り子の支点とボディの重心を全く同じ位置に配置することでボディの重心のズレによる実験の誤差をなくすることができる。

3. 2. 2 装置3の各部詳細説明

装置3の各部について詳しく説明する。



図5 装置3を分解した様子

1. ボールベアリング

位置センサを内部に仕込めるようにベアリングを使用した。

2. アルミパイプ

装置全体の動きを大きくしたことで、振り子の棒部分が長くなり、おもりの質量が増加する。そこで、力がかかってもあまりしならず、かつ長いものが必要となり、アルミパイプを使用した。

3. シャフト (黄)

1のボールベアリングの内径(65mm)に合うパイプを入手できなかったため、3Dプリンターで作成した。内部に位置センサを設置で



図6 シャフト

きるほどの内径を保ちつつ、最大の厚さに設計した。材料には、比較的耐衝撃性があり、強度もあるABS樹脂を使用した。

4. アーム (緑)

3のシャフトを抱えるようにアルミパイプと接続している。シャフトの作成時間短縮を図るため



図7 アーム

に抱える部分は最小限にし、3Dプリンター印刷時にステージからはがれにくいように、片面は平面となるように設計した。なお積層型(熱溶解積層)の3Dプリンターは縦の円の作成を苦手としている。そのため密度が低かったりノズルの移動速度が速かったりすると、円が円よりも上に積層されていく樹脂の質量によって変形し、楕円になってしまう。そのためこのパーツは密度を高め設定した。

5. バンドル (青)

装置3では、ベアリングのアームからレーンを避けるようにして下がってくる2本のアルミパイプをまとめて

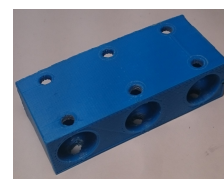


図8 バンドル

一本のアルミパイプに接続している。このパーツは一番負荷がかかるパーツであり強度が必要なため、密度を高く設定した。

6. おもりケースアタッチメント (黄)

1本にまとめられたアルミパイプの先端とおもりケースを接続している。二カ所をボルトナットで締める設計になっており、穴の寸法さえ合えば位置センサや追加のおもり等の設置も可能となるよう汎用性の高い設計とした。

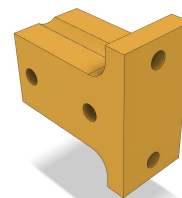


図9 アタッチメントのイメージ

7. おもりケース（白）

ケース本体と内部にはめ込むおもり、ボルトナットを合わせて約 500g（誤差±0.5g）となるように設計した。内部には 200g、40g のおもりがそれぞれ 2 個ずつ入り、重心は全体の



図 10 おもりケース

中心に来るように設計した。なお、おもりをきつくはめ込むために穴を少し小さめに設計し、後加工として紙やすりで削るために ABS 樹脂を使用した。

8. 位置センサアタッチメント（黒）

位置センサをボディ（ボールベアリング）の重心に設置するため、円形に設計した。位置センサを器のようなもので挟み込み、ボルトナットで締めた



図 11 アタッチメント

あと、そのアタッチメントごとシャフトに共締めするように設計した。なお、挟み込む機構のため器の深さよりも位置センサの厚さの方が厚く、ボルトナットで締めると器自体が湾曲すると予測した。そこで、シャフトと共締めするためのねじ穴自体を円ではなく、アタッチメントが湾曲する方向に縦の楕円形状とすることで少し湾曲してもねじ穴がシャフトと合うよう少しゆとりを持たせた。なお、簡単にサポートの除去が可能な PLA 樹脂を使用した。

3. 3 装置 3 の挙動の理論的予想

次に、装置 3 の挙動に関する理論的予想を構築した。図 12 のように、装置 3 の各種パラメータを設定する。なお、図中の G

は剛体振り子の重心とする。

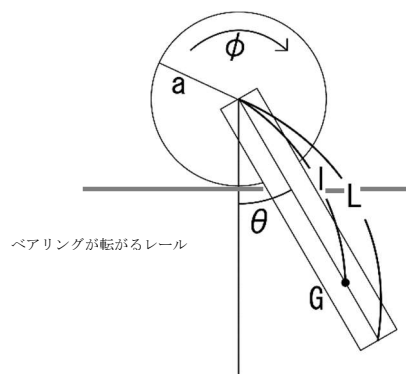


図 12 装置 3 の模式図

<各種パラメータ>

- ・ベアリング

重心の座標： $(x, y) = (X, a)$

半径： a 質量： M

慣性モーメント： I_b

- ・剛体棒

重心 G の x, y 座標：

$$(x_G, y_G) = (X + l \sin \theta, a - l \cos \theta)$$

支点から重心 G までの距離： l

剛体棒の全長： L

質量： m

慣性モーメント： I_s

ベアリングが運動しているとき滑らない、すなわち動摩擦力が働かないので、

$$\dot{X} = a\dot{\phi}$$

なお、時刻 0 では初期値 $X = 0$ とする。

上記の式をもとに、ラグランジュ方程式を立てると、以下ようになる。

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_b \dot{\phi}^2$$

$$+ \frac{1}{2} I_s \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

上記のラグランジュ方程式を解いたものをグラフ化したものを図 13 に示す。横

軸が時間、縦軸が変位である。この結果より、装置 3 においても理論上は振動の中心を変えることなく単身動しており、初期段階で考えた運動量保存が成り立っていることがわかる。

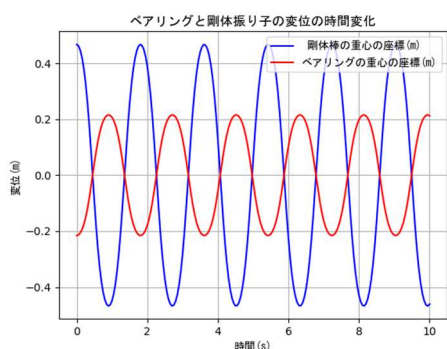


図 13 理論式を用いたシミュレーション

4. 結果

- 装置を改良し、支点を可動化した剛体振り子へのモデル変更ができた。
- 実験装置を今後、使用用途に合わせて改造しやすい設計を行うことができた。
- 作成した実験装置を実際に動かし、動作確認を行った結果、正常に動作することが確認できた。
- ラグランジュ方程式を立式し、解を導くことで、前後運動しない振動運動を示すことが出来た。

5. 今後の展望

今後は装置 3 を用いてデータ取得を行い、理論式から予測した挙動と実験値の比較を行いたい。加えて、装置 3 を建造物の壁に埋め込むことで、制振装置に応用できるのではないかと考えている。データ取得の後には、装置の応用について考察したい。

6. 参考文献

- [1] 「よくわかる初等力学」著：前野 昌弘 東京書籍
- [2] 「KIT 物理ナビゲーション 単振り子：運動方程式」
http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/physics/category/mechanics/masspoint_mechanics/simple_pendulum/henkan-text.cgi?target=/math/physics/category/mechanics/masspoint_mechanics/simple_pendulum/sp_equation_of_motion.html
- [3] 「3D プリンター活用技術検定 公式ガイドブック」
著：一般社団法人 コンピュータ教育振興協会 日系 DP
- [4] 「キットで始める 3D プリンタ自作入門」著：吹田 智章 ラトルズ

7. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、指導教員の藤野先生には多大なご指導を賜りました。深くお礼申し上げます。