五心と「混心」の研究

5年C組　川野　聡真
5年C組　山田　悠晟
指導教員　川口　慎二

１．要約

私たちは三角形を特徴付けるさまざまな点について興味をもち、よく知られている関数との関係について、昨年度の基盤探究Ⅰの授業で調べた([4])。今年度はそれに引き続き、特に五心について研究を行った。今回、研究の後半において三角形の重心を成す「中線」を扱ったが、ここでは中線を線分の場合と直線の場合に分けている。直線で考える場合は明記しており、特記しない場合は線分を意味している。今年度も、研究においてグラフや作図はすべて動的数学ソフトウェアである GeoGebra を用いて調査・予測し、予想を幾何的にあるいは解析的に証明する方針を採った。

キーワード　曲線、三角形の五心、三角形の混心、軌跡、ストロフォイド

２．研究の背景と目的

私たちは昨年度、三角形の五心と曲線の関係を調べたが、五心同士の関係についても興味をもった。

３．研究内容

３―１　二次関数と傍心

私たちは昨年度、放物線 $y=x^2$ 上に点A(−1, 1)と点B(1, 1)をとり、点 $\mathrm{C}\left(t,\ t^2\right)$ は放物線上を移動し、そのときの△ABC の傍心を除く五心の軌跡を調べた。傍心の軌跡については、GeoGebra を用いても軌跡をうまく描画することができず、さらに軌跡の方程式や媒介変数表示を求めることができていなかったので、今年度は初めにこの傍心の軌跡の導出から始めた。傍心の軌跡を考えるにあたって傍心座標の公式を用いた。傍心の座標の公式とは、傍心の位置ベクトルから考えられ、以下のようである。

<u>定理１</u>

平面上の３点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$, $\mathrm{C}(\vec{c})$ について、△ABC の傍心 $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$ の位置ベクトル $\vec{i_A}, \vec{i_B}, \vec{i_C}$ は、BC＝α，CA＝β，AB＝γ とするとき、それぞれ

$$\vec{i_A}=\frac{-\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{-\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\vec{i_B}=\frac{\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha-\beta+\gamma}$$

$$\vec{i_C}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta-\gamma}$$

である。

二点間の距離の公式より、

$$\begin{aligned}AC&=\sqrt{(t+1)^2+\left(t^2-1\right)^2}\\&=\sqrt{(t+1)^2+\{(t+1)(t-1)\}^2}\\&=\sqrt{(t+1)^2\left\{1+(t-1)^2\right\}}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{(t+1)^2 \left(t^2 - 2t + 2\right)}$$

$$= |t+1| \sqrt{t^2 - 2t + 2}$$

であり、また、

$$BC = \sqrt{(t-1)^2 + \left(t^2 - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{(t-1)^2 + \{(t+1)(t-1)\}^2}$$

$$= \sqrt{(t-1)^2 \left\{1 + (t+1)^2\right\}}$$

$$= \sqrt{(t-1)^2 \left(t^2 + 2t + 2\right)}$$

$$= |t-1| \sqrt{t^2 + 2t + 2}$$

となる。

定理 1 を用いると、 $y = x^2$ 上を点 C が動き回るときの傍心 I_A, I_B, I_C の座標は媒介変数 t を用いて、次のように表すことができる。

傍心 I_A の座標は t を媒介変数として

$$x = \frac{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} + |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} + 2t}{-|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} + |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} + 2}$$

$$y = \frac{-|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} + |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} + 2t^2}{-|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} + |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} + 2}$$

とわかる。I_A の軌跡は図 1 のようになる。

傍心 I_B の座標は t を媒介変数として

$$x = \frac{-|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} - |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} + 2t}{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} - |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} + 2}$$

$$y = \frac{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} - |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} + 2t^2}{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} - |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} + 2}$$

とわかる。I_B の軌跡は図 2 のようになる。

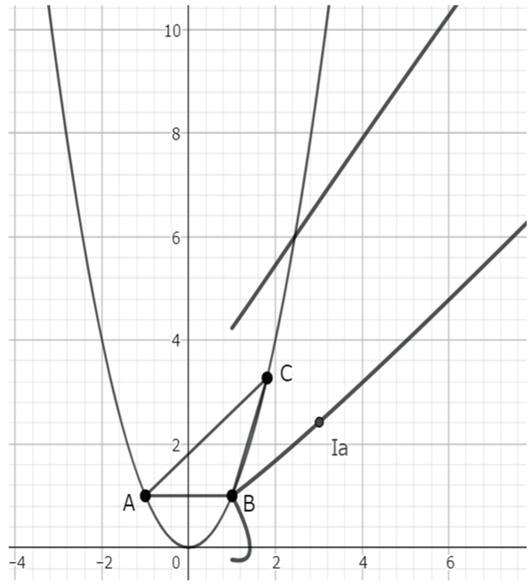

図 1　I_A の軌跡

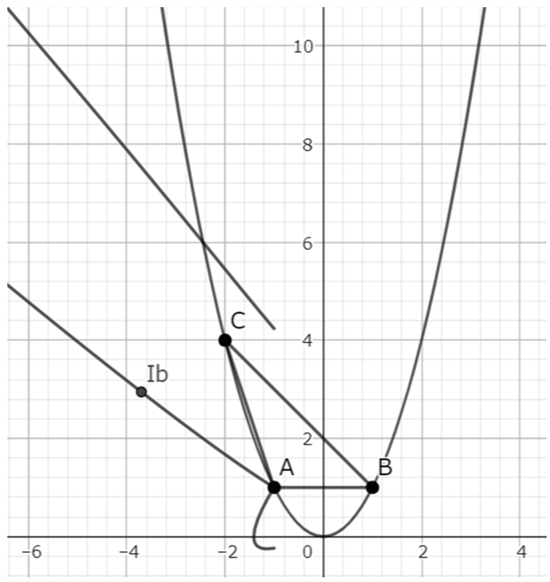

図 2　I_B の軌跡

傍心 I_C の座標は t を媒介変数として

$$x = \frac{-|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} + |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} - 2t}{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} + |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} - 2}$$

$$y = \frac{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} + |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} - 2t^2}{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2} + |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} - 2}$$

とわかる。I_C の軌跡は図 3 のようになる。

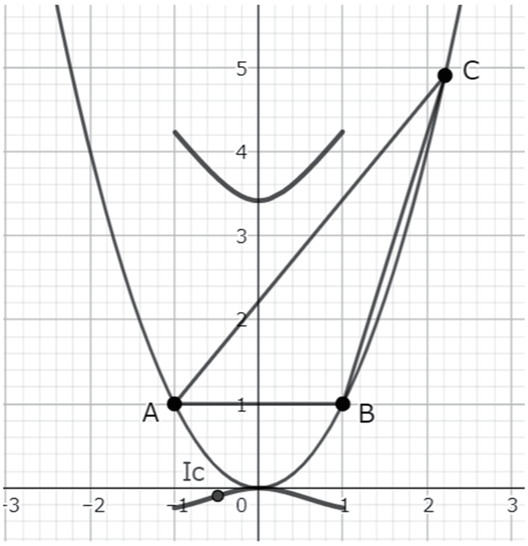

図３　$\mathrm{I_C}$の軌跡

ここで傍心 $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$の座標をすべて xy 平面上に表すと図４のようになる。

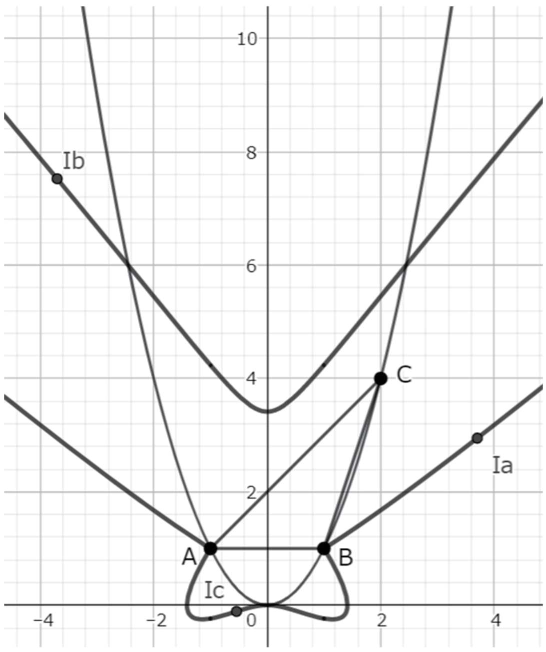

図４　$\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$の軌跡を重ねる

ここで昨年度の私たちの研究において、同条件のもとでの内心Ｉの座標の軌跡は図５のようになった。

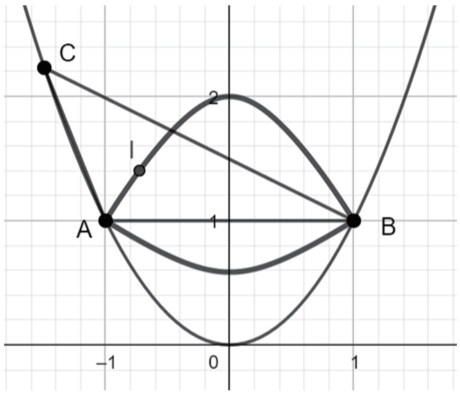

図５　内心Ｉの軌跡

内心Ｉの座標は媒介変数 t を用いて、

$$x=\frac{-|t-1|\sqrt{t^2+2t+2}+|t+1|\sqrt{t^2-2t+2}+2t}{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2}+|t+1|\sqrt{t^2-2t+2}+2}$$

$$y=\frac{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2}+|t+1|\sqrt{t^2-2t+2}+2t^2}{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2}+|t+1|\sqrt{t^2-2t+2}+2}$$

と表される。

この内心Ｉと傍心 $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$の軌跡をすべて xy 平面上に表すと図６のようになる。

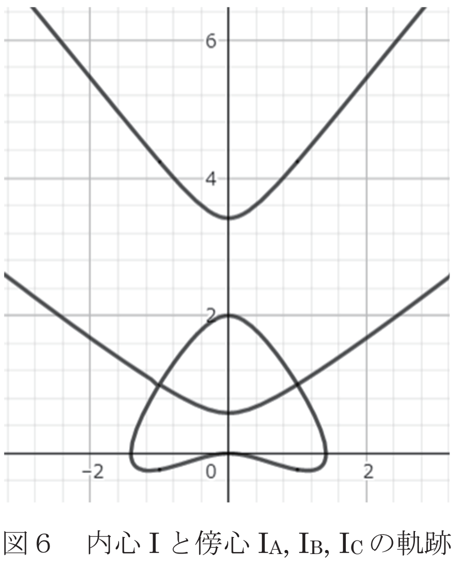

図６　内心Ｉと傍心 $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$の軌跡

図６を見ると、内心Ｉと傍心 $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$の軌跡が１つの曲線として繋がっているように見える。

３—３　円と傍心

[4]において、円 $x^2+y^2=1$ 上に点 A(1, 0)と点 B(−1, 0)をとり、点 C$(\cos\theta, \sin\theta)$が円上を移動したときの△ABC の五心の軌跡を調べた。

まず、AC, BC については、

$$
\begin{aligned}
AC &= \sqrt{\{\cos\theta-(-1)\}^2+(\sin\theta-0)^2} \\
&= \sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta+1} \\
&= \sqrt{2(1+\cos\theta)} \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(\cos\theta-1)^2+(\sin\theta-0)^2} \\
&= \sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\cos\theta+1} \\
&= \sqrt{2(1-\cos\theta)} \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

である。

３—３—１　傍心の座標

傍心 I_A の座標は θ を媒介変数として

$$x=\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}+2\cos\theta}{-\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}+2}$$

$$y=\frac{2\sin\theta}{-\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+\cos\theta}+2}$$

と表される。

ゆえに、傍心 I_A の軌跡を図示すると、図 7 のようになる。

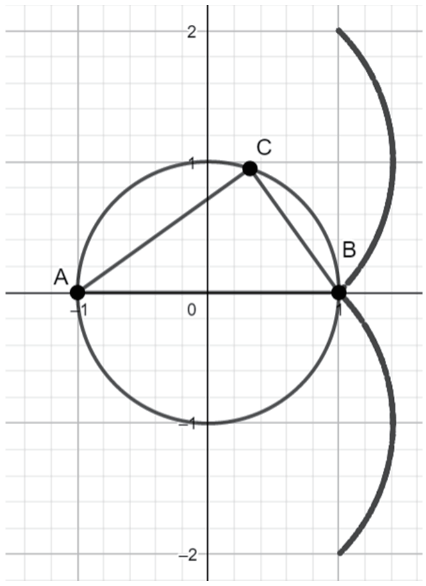

図 7　傍心 I_A の軌跡

ここで、点 C が点 A または点 B と一致するとき、すなわち $\theta=0, \pi$ のときを考える。

(ｉ)点 C が点 B と一致するとき（つまり $\theta=0$ のとき）

$$x=\frac{\sqrt{2-2\cos0}+\sqrt{2+2\cos0}+2\cos0}{-\sqrt{2-2\cos0}+\sqrt{2+2\cos0}+2}=1$$

$$y=\frac{2\sin0}{-\sqrt{2-2\cos0}+\sqrt{2+\cos0}+2}=0$$

より、このとき傍心 I_A は(1, 0)となる。

しかし、実際は三角形 ABC が存在しないため、傍心 I_A は存在しない。

ゆえに、図 7 の I_A の軌跡から点(1, 0)は除かれる。

（ⅱ）点 C が点 A と一致するとき（つまり $\theta=\pi$ のとき）

$$x=\frac{\sqrt{2-2\cos\pi}+\sqrt{2+2\cos\pi}+2\cos\pi}{-\sqrt{2-2\cos\pi}+\sqrt{2+2\cos\pi}+2}$$

$$y=\frac{2\sin\pi}{-\sqrt{2-2\cos\pi}+\sqrt{2+\cos\pi}+2}$$

となるが、x, yとも分母が

$$-\sqrt{2-2\cos\pi}+\sqrt{2+2\cos\pi}+2=0$$

となるため、このとき傍心 I_A は存在しないとわかる。

次に、傍心 I_B の座標はθを媒介変数として

$$x=\frac{-\sqrt{2-2\cos\theta}-\sqrt{2+2\cos\theta}+2\cos\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}-\sqrt{2+2\cos\theta}+2}$$

$$y=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}-\sqrt{2+2\cos\theta}+2}$$

と表される。

ゆえに、傍心 I_B の軌跡を図示すると、図８のようになる。

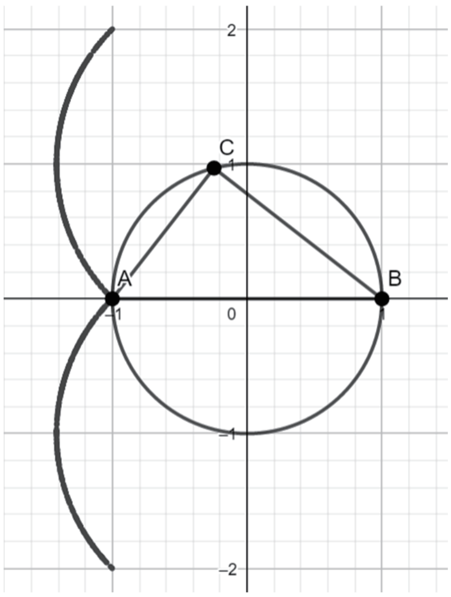

図８　傍心 I_B の軌跡

I_A のときと同様に、点 C が点 A または点 B と一致するとき、すなわち、$\theta=0$ または $\theta=\pi$ のときを考える。

(ⅰ)点 C が点 B と一致するとき（つまり $\theta=0$ のとき）

$$x=\frac{-\sqrt{2-2\cos 0}-\sqrt{2+2\cos 0}+2\cos 0}{\sqrt{2-2\cos 0}-\sqrt{2+2\cos 0}+2}$$

$$y=\frac{2\sin 0}{\sqrt{2-2\cos 0}-\sqrt{2+\cos 0}+2}$$

となるが、x, yとも分母が

$$\sqrt{2-2\cos 0}-\sqrt{2+2\cos 0}+2=0$$

となるため、このとき傍心 I_B は存在しないとわかる。

（ⅱ）点 C が点 A と一致するとき（つまり $\theta=\pi$ のとき）

$$x=\frac{-\sqrt{2-2\cos\pi}-\sqrt{2+2\cos\pi}+2\cos\pi}{\sqrt{2-2\cos\pi}-\sqrt{2+2\cos\pi}+2}$$
$$=-1$$

$$y=\frac{2\sin\pi}{\sqrt{2-2\cos\pi}-\sqrt{2+2\cos\pi}+2}=0$$

より、このとき傍心 I_B は$(-1, 0)$となる。

しかし、実際は三角形 ABC が存在しないため、傍心 I_B は存在しない。

ゆえに、図８の I_B の軌跡から点$(-1, 0)$は除かれる。

さらに、傍心 I_C の座標はθを媒介変数として

$$x=\frac{-\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}-2\cos\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}-2}$$

$$y=\frac{-2\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}-2}$$

と表される。

ゆえに、傍心 I_C の軌跡を図示すると、図９のようになる。

I_A, I_B と同様に点 C が点 A または点 B と一致するとき、すなわち、$\theta=0$ または $\theta=\pi$ のときを考える。

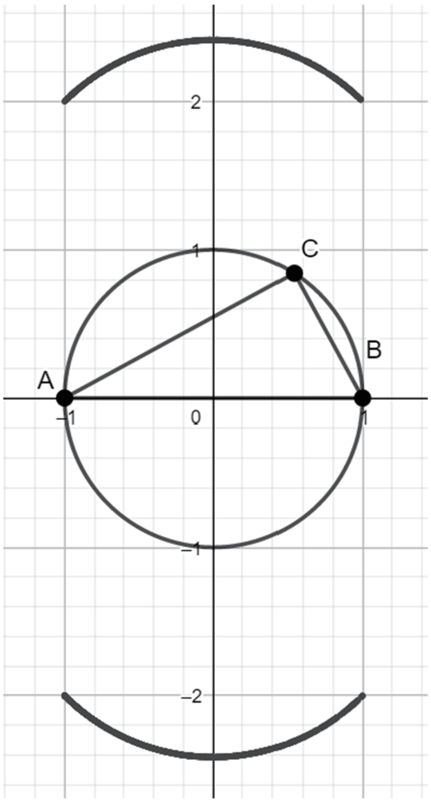

図 9　傍心 I_C の軌跡

（ｉ）点 C が点 B と一致するとき（つまり $\theta=0$ のとき）

$$x=\frac{-\sqrt{2-2\cos 0}+\sqrt{2+2\cos 0}-2\cos 0}{\sqrt{2-2\cos 0}+\sqrt{2+2\cos 0}-2}$$

$$y=\frac{-2\sin 0}{\sqrt{2-2\cos 0}+\sqrt{2+\cos 0}-2}$$

となるが、x, y とも分母が

$$\sqrt{2-2\cos 0}+\sqrt{2+2\cos 0}-2=0$$

となるため、このとき傍心 I_C は存在しないとわかる。

（ⅱ）点 C が点 A と一致するとき（つまり $\theta=\pi$ のとき）

$$x=\frac{-\sqrt{2-2\cos \pi}+\sqrt{2+2\cos \pi}-2\cos \pi}{\sqrt{2-2\cos \pi}+\sqrt{2+2\cos \pi}-2}$$

$$y=\frac{-2\sin \pi}{\sqrt{2-2\cos \pi}+\sqrt{2+\cos \pi}-2}$$

となるが、x, y とも分母が

$$\sqrt{2-2\cos \pi}+\sqrt{2+2\cos \pi}-2=0$$

となるため、このとき傍心 I_C は存在しないとわかる。

以上から、これら傍心 I_A, I_B, I_C の軌跡を 1 つの xy 平面上に重ねて描くと、図 10 のようになる。

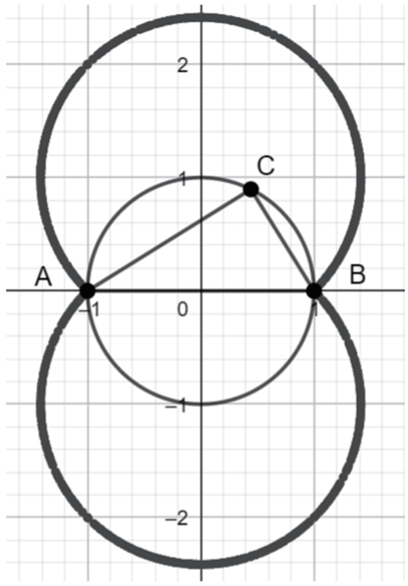

図 10　傍心の軌跡を重ねる

３−３−１　内心と傍心の座標

円 $x^2+y^2=1$ 上に点 A(1, 0) と点 B(−1, 0) をとり、点 C$(\cos\theta, \sin\theta)$ は円上を移動するとき、内心 I の座標は θ を媒介変数として

$$x=\frac{-\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}+2\cos\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}+2}$$

$$y=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}+2}$$

と表すことができる。

ゆえに、内心 I の軌跡を図示すると、図 11 のようになる([4])。

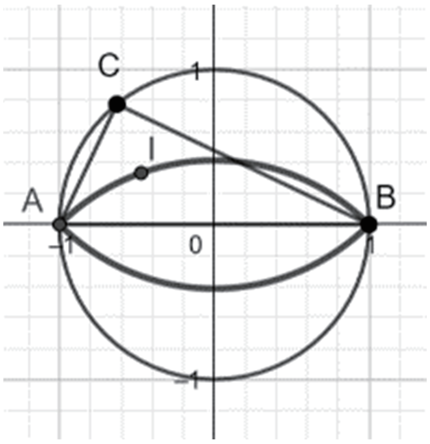

図 11　内心 I の軌跡

このとき、内心 I と傍心 I_A, I_B, I_C の軌跡を同一の xy 平面上に重ねて描くと、図 12 のようになる。

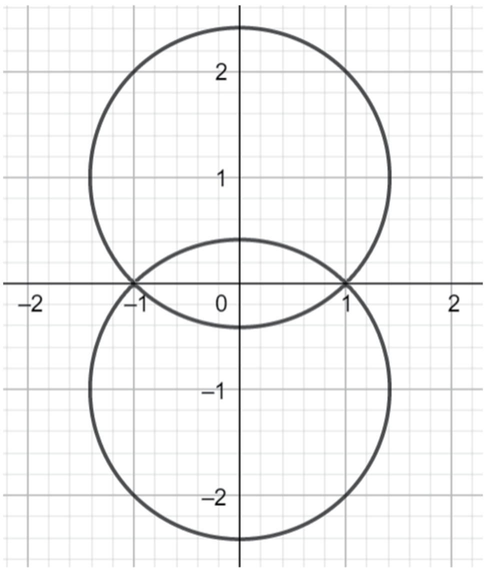

図 12　内心 I と傍心 I_A, I_B, I_C の軌跡

私たちは GeoGebra の LocusEquation という機能を用いて、内心の軌跡と傍心の軌跡を合わせたものが描く曲線の方程式を

$$x^4+2x^2y^2-2x^2+y^4-6y^2+1=0$$

であると予想した([4])。

この方程式は

$$\left(x^2+y^2-1+2y\right)\left(x^2+y^2-1-2y\right)=0$$

と因数分解することができ、2 つの円の方程式に分けることができる。この曲線

$$\left(x^2+y^2-1+2y\right)\left(x^2+y^2-1-2y\right)=0$$

が、私たちが導出した媒介変数により表された曲線と一致するかは証明することができなかったが、このような条件のもとで、内心と 3 つの傍心を動かし、その軌跡を重ねると、2 つの円を合わせたものと一致すると予想し、それを証明した。

<u>定理 2</u>

円上の 2 点 B, C と弧 BC を固定し、点 A が円周上を自由に動くとき、△ABC の内心と 3 つの傍心の軌跡を合わせたものは 2 つの円になる。ただし、固定された 2 点 B, C を通る直線に垂直で、2 点 B, C をそれぞれ通る直線上の点は除く。

（証明）　△ABC の外接円を用意し、辺 BC の上側の円弧上を動く点を A、下側の円弧上を動く点を A^*とする。また、△ABC の内心を I、∠A, ∠B, ∠C に対する傍心をそれぞれ I_A, I_B, I_C とする。同様に△A^*BC の内心を I^*とする。ここで、∠CBA^*と∠BCA^*をそれぞれ∠B^*, ∠C^*と表記する。このとき、∠A^*, ∠B^*, ∠C^*に対する傍心を $I_{A^*}, I_{B^*}, I_{C^*}$とする。

図 13 において、I は△ABC の内心、I_A は∠A に対する傍心なので、

$$\angle \mathrm{BIC}=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB})$$

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BI_AC}&=180^\circ-\frac{1}{2}\{(180^\circ-\angle \mathrm{ABC})\\&\qquad+(180^\circ-\angle \mathrm{ACB})\}\\&=\frac{1}{2}(\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB})\end{aligned}$$

ここで、円周角の定理より、∠BAC は一

定であり、$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB}=180^\circ-\angle \mathrm{BAC}$ なので、$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB}$ も一定である。

このことから、$\angle \mathrm{BIC}$, $\angle \mathrm{BI_AC}$ はどちらも一定であり、また内心 I は BC の上側に、傍心 $\mathrm{I_A}$ は BC の下側にそれぞれあり、

$$\angle \mathrm{BIC}+\angle \mathrm{BI_AC}=180^\circ$$

を満たすため、円周角の定理の逆より、I、$\mathrm{I_A}$ は同一円周上にあるといえる。この 4 点 B, C, I, $\mathrm{I_A}$ が通る円を円 C_1 とする。

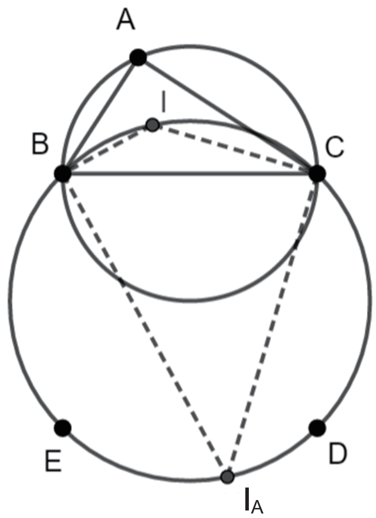

図 13　I と $\mathrm{I_A}$ の軌跡の議論

また、A が B に近づくとき、内心 I も B に近づき、傍心 $\mathrm{I_A}$ は CD⊥BC となる、円 C_1 上の点 D に近づく。これは∠ACB の外角が 180° に近づくためである。同様に、A が C に近づくとき、$\mathrm{I_A}$ は BE⊥BC となる円 C_1 上の点 E に近づく。

また、△A*BC において、$\mathrm{I_{B^*}}$ は∠B に対する傍心より、

$$\angle \mathrm{BI_{B^*}C}$$
$$=180^\circ-\left\{\frac{1}{2}\angle \mathrm{A^*BC}+\angle \mathrm{A^*CB}+\frac{1}{2}(180^\circ-\angle \mathrm{A^*CB})\right\}$$
$$=90^\circ-\frac{1}{2}(\angle \mathrm{A^*BC}+\angle \mathrm{A^*CB})$$

ここで、$\angle \mathrm{ABA^*}+\angle \mathrm{ACA^*}=180^\circ$ より、

$$\angle \mathrm{A^*BC}+\angle \mathrm{A^*CB}=180^\circ-(\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB})$$

したがって、

$$\angle \mathrm{BI_{B^*}C}=90^\circ-\frac{1}{2}(\angle \mathrm{A^*BC}+\angle \mathrm{A^*CB})$$
$$=90^\circ-\frac{1}{2}\{180^\circ-(\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB}).$$

$\mathrm{I_{C^*}}$ についても同様に、

$$\angle \mathrm{BI_{C^*}C}=\frac{1}{2}(\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB}).$$

ここで、$\mathrm{I_{B^*}}$, $\mathrm{I_{C^*}}$ はともに BC の下側にあり、$\angle \mathrm{BI_AC}=\angle \mathrm{BI_{B^*}C}=\angle \mathrm{BI_{C^*}C}$ より、$\mathrm{I_{C^*}}$, $\mathrm{I_{B^*}}$ の軌跡も I や $\mathrm{I_A}$ が描くものと同一の円弧の一部を描く。

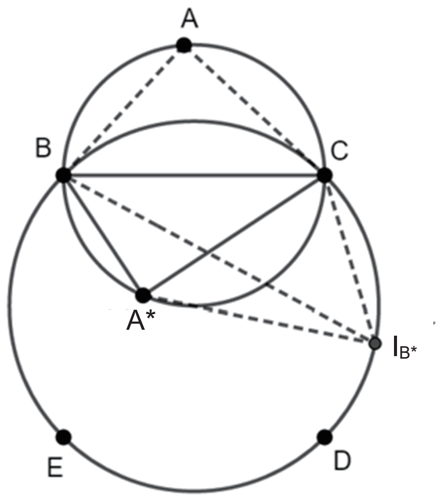

図 14　$\mathrm{I_{B^*}}$ の軌跡の議論

また、A*が B に近づくとき、∠A*CB の外角が 180° に近づくため $\mathrm{I_{B^*}}$ は D に近づき、$\mathrm{I_{C^*}}$ は∠A*CB が 0° に近づくため B に近づく。A*が C に近づくときも同様に、$\mathrm{I_B}$ は C に近づき、$\mathrm{I_C}$ は D に近づく。このことから、A, A*が B から C へ動くと、I, $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_{B^*}}$, $\mathrm{I_{C^*}}$ の軌跡は同じ円弧の一部を描き、これら

と点 B, C, D, E をあわせると一つ円になる。また、I*, I_{A*}, I_B, I_C でも同様になるため、ある三角形の一点をその三角形の外接円上を動かしたときの、その内心と傍心の軌跡は B, C を通る 2 つの円となる。ただし、固定された 2 点を通る直線と垂直な 2 点を通る直線上の点を除かねばならない。

(Q.E.D)

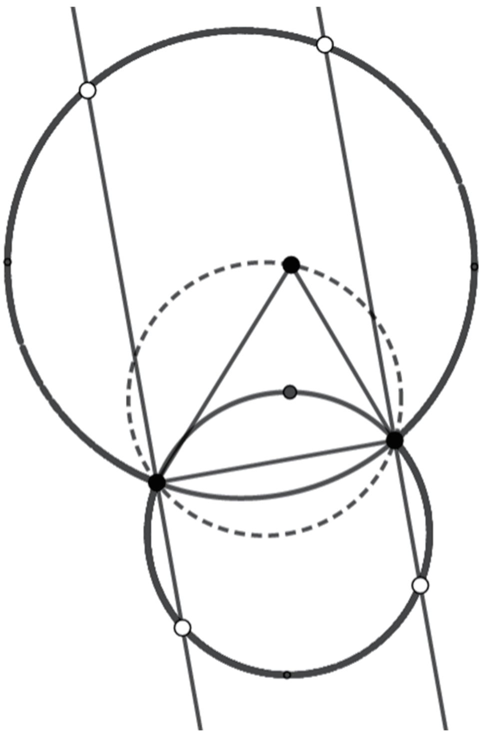

図 15　三角形の内心と 3 つの傍心の軌跡

3―3　アステロイドと五心

次に、アステロイド

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

上に点 A(−1, 0)と点 B(1, 0)をとり、点 C $(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ はアステロイド上を移動する。このとき、△ABC の五心の軌跡を調べた。

3－3－1　外心の軌跡

外心 D は必ず線分 AB の垂直二等分線上に存在する。幾何的に考えると、点 C が(0, −1), (0, 1)にあるとき、△ABC は直角二等辺三角形であり、外心 D は線分 AB の中点(0, 0)にある。点 C が第 2 象限から点 A に近づくとき、3 本の垂直二等分線は平行に近づいていき、外心 D の y 座標は $-\infty$ に発散していく。

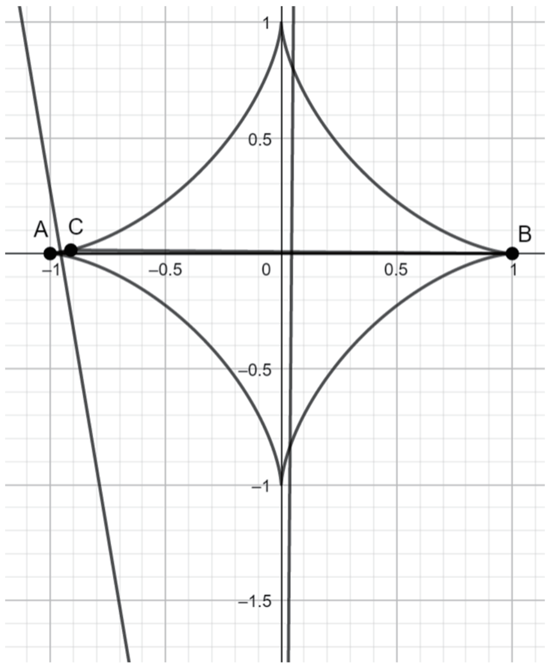

図 16　点 C が第 2 象限から A に近づくとき

同様に考えると、点 C が第 3 象限から点 B に近づくとき、外心 D の y 座標は $+\infty$ に発散する。点 C が第 1 象限から点 B に近づくとき、外心 D の y 座標は $-\infty$ に発散する。点 C が第 4 象限から点 B に近づくとき、外心 D の y 座標は $+\infty$ に発散する。

以上より、図 17 のように、外心 D の軌跡は y 軸である。

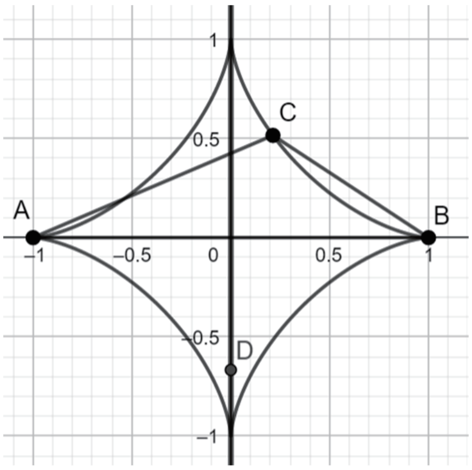

図 17　外心 D の軌跡

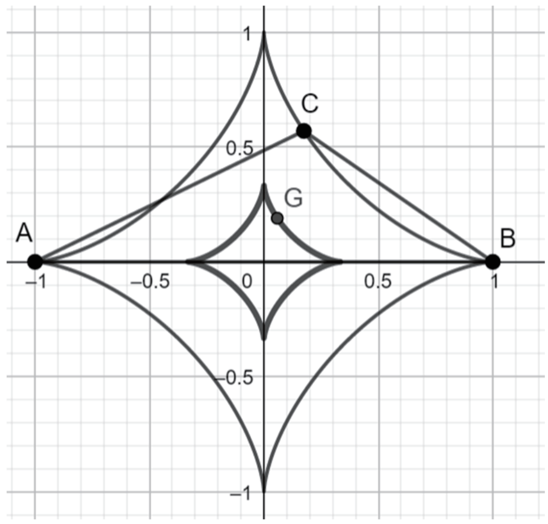

図 18　重心 G の軌跡

３－３－２　重心の軌跡

点 C が $(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ 上にあるとき重心 G の座標は

$$G\left(\frac{1+(-1)+\cos^3\theta}{3}, \frac{0+0+\sin^3\theta}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{\cos^3\theta}{3}, \frac{\sin^3\theta}{3}\right)$$

よって、重心 G の軌跡をパラメーター表示すると、

$$x=\frac{\cos^3\theta}{3},\ y=\frac{\sin^3\theta}{3}$$

となる。これを変形して、

$$\cos^3\theta=3x,\ \sin^3\theta=3y\ .$$

ここで、$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より、

$$(3x)^{\frac{2}{3}}+(3y)^{\frac{2}{3}}=1$$

となり、これはアステロイドである。

しかし、点 C の座標が線分 AB（つまり x 軸）上との交点になるとき、重心は存在しない。このようになるのは、$y=0$ を代入して、$(3x)^{\frac{2}{3}}=1$．両辺を 3 乗して、$x^2=\frac{1}{9}$, $x=\pm\frac{1}{3}$ となる。

したがって、重心 G の軌跡は、アステロイド $(3x)^{\frac{2}{3}}+(3y)^{\frac{2}{3}}=1$ から、2 点 $\left(\pm\frac{1}{3},\ 0\right)$ を除いた部分となる。

３－３－３　内心の軌跡

点 C が $(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ と表現されるとき、AB＝2 であり、二点間の距離の公式より、

$$AC=\sqrt{\{\cos^3\theta-(-1)\}^2+(\sin^3\theta)^2}$$
$$=\sqrt{\cos^6\theta+2\cos^3\theta+\sin^6\theta+1}$$
$$BC=\sqrt{(\cos^3\theta-1)^2+(\sin^3\theta)^2}$$
$$=\sqrt{\cos^6\theta-2\cos^3\theta+\sin^6\theta+1}$$

となる。ここで、

$\sin^6\theta+\cos^6\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$\quad\times(\sin^4\theta+\cos^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta)$

$=\sin^4\theta+\cos^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

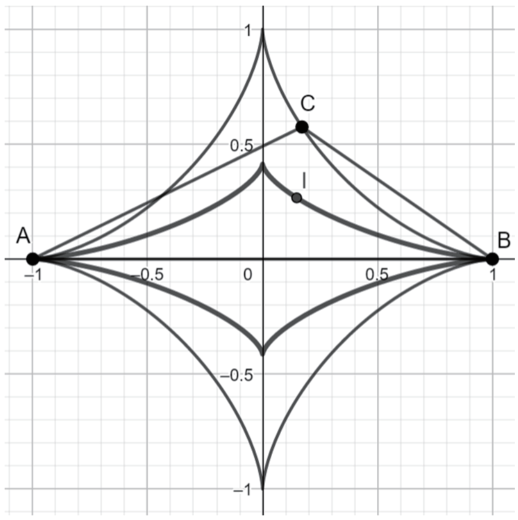

図 19　内心 I の軌跡

$$AC=\sqrt{\cos^6\theta+2\cos^2\theta+\sin^6\theta+1}$$
$$=\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}$$
$$BC=\sqrt{\cos^6\theta-2\cos^2\theta+\sin^6\theta+1}$$
$$=\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}$$

ここで、定理 3 の内心の座標を与える公式を用いる。

<u>定理 3</u>　座標平面上の 3 点 $A(x_a,\ y_a)$, B $(x_b,\ y_b)$, $C(x_c,\ y_c)$ について、△ABC の内心 I の座標は

$$I\left(\frac{ax_a+bx_b+cx_c}{a+b+c},\ \frac{ay_a+by_b+cy_c}{a+b+c}\right)$$

である。

定理 3 より、△ABC の内心 I の座標をパラメータ表示すると、以下のように表される。

$$\begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+2\cos^3\theta}{\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+2} \\ y=\dfrac{2\sin^3\theta}{\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+2} \end{cases}$$

３－３－４　垂心の軌跡

垂心 H の軌跡を考えるにあたって、垂心座標の公式（定理 4）を用いた。垂心の座標の公式とは、垂心の位置ベクトルを与える以下のような公式である。

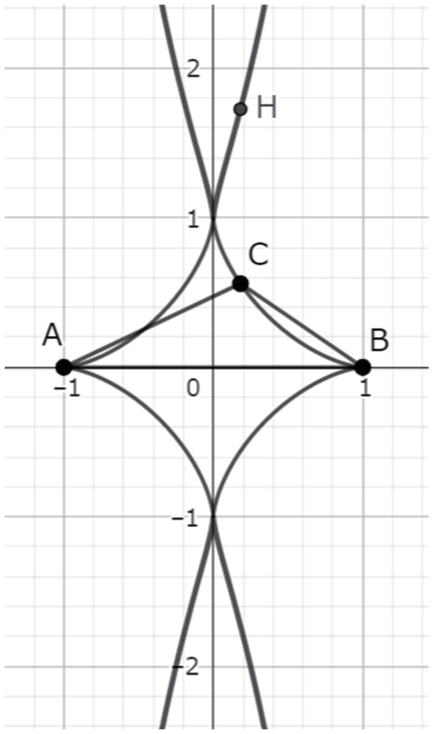

図 20　垂心 H の軌跡

定理 4

座標平面上の 3 点 A$(x_a,\ y_a)$, B$(x_b,\ y_b)$, C$(x_c,\ y_c)$ について、△ABC の垂心 H の位置ベクトル $\vec{h}$ は、$\vec{h}=\dfrac{\vec{a}\tan A+\vec{b}\tan B+\vec{c}\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}$ で与えられる。

定理 4 を利用すると、余弦定理から

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=\frac{2^2+\left(\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}\right)^2-\left(\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}\right)^2}{2\times2\times\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}}$$

$$=\frac{4+2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2+2\cos^3\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta-2}{4\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}}$$

$$=\frac{4+4\cos^3\theta}{4\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}}=\frac{1+\cos^3\theta}{\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}}$$

したがって、$\cos^2 A = \left(\dfrac{1+\cos^3\theta}{\sqrt{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}} \right)^2 = \dfrac{(1+\cos^3\theta)^2}{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}$

ここで、$\tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A} - 1$．いま、∠A は常に鋭角であるから、$\tan A > 0$ ゆえ、

$$\tan A = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 A} - 1} = \sqrt{\frac{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}{(1+\cos^3\theta)^2} - 1}$$
$$= \sqrt{\frac{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2 - (1+\cos^3\theta)^2}{(1+\cos^3\theta)^2}} = \frac{\sqrt{-\cos^6\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 1}}{1+\cos^3\theta}.$$

同様にして、

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$$
$$= \frac{2^2 + \left(\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}\right)^2 - \left(\sqrt{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}\right)^2}{2 \times 2 \times \sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}}$$
$$= \frac{4 - 2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2 - 2\cos^3\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta - 2}{4\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}}$$
$$= \frac{4 - 4\cos^3\theta}{4\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}} = \frac{1-\cos^3\theta}{\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}}$$

したがって、

$$\cos^2 B = \left(\frac{1-\cos^3\theta}{\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}} \right)^2 = \frac{(1-\cos^3\theta)^2}{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}$$

ここで、∠B は常に鋭角であるから、$\tan B > 0$ ゆえ、

$$\tan B = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 B} - 1} = \sqrt{\frac{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}{(1-\cos^3\theta)^2} - 1}$$
$$= \sqrt{\frac{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2 - (1-\cos^3\theta)^2}{(1-\cos^3\theta)^2}} = \frac{\sqrt{-\cos^6\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 1}}{1-\cos^3\theta}.$$

さらに、

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}\right)^2 + \left(\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}\right)^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2} \times \sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2}}$$

$$=\frac{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2-4}{2\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}}$$

$$=\frac{-6\sin^2\theta\cos^2\theta}{2\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}}$$

したがって、

$$\cos^2 C=\left(\frac{-6\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}\times\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}}\right)^2$$

$$=\frac{36\sin^4\theta\cos^4\theta}{4\left(2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2\right)\left(-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2\right)}$$

$$=\frac{9\sin^4\theta\cos^4\theta}{-4\cos^6\theta+9\sin^4\theta\cos^4\theta-12\sin^2\theta\cos^2\theta+4}$$

ここで、∠C は常に鈍角であるから、$\tan C<0$ ゆえ、

$$\tan C=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2 C}-1}=-\sqrt{\frac{-4\cos^6\theta+9\sin^4\theta\cos^4\theta-12\sin^2\theta\cos^2\theta+4}{9\sin^4\theta\cos^4\theta}-1}$$

$$=-\sqrt{\frac{-4\cos^6\theta+9\sin^4\theta\cos^4\theta-12\sin^2\theta\cos^2\theta+4-9\sin^4\theta\cos^4\theta}{9\sin^4\theta\cos^4\theta}}$$

$$=-\frac{2\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

したがって、垂心の位置ベクトルの公式から、垂心の x 座標は

$$x=\left(\frac{-\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{1+\cos^3\theta}+\frac{\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{1-\cos^3\theta}-\frac{2\cos^3\theta\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)$$

$$\div\left(\frac{\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{1+\cos^3\theta}+\frac{\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{1-\cos^3\theta}-\frac{2\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)$$

$$=\frac{-\frac{1}{1+\cos^3\theta}+\frac{1}{1-\cos^3\theta}-\frac{2\cos^3\theta}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\frac{1}{1+\cos^3\theta}+\frac{1}{1-\cos^3\theta}-\frac{2}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}}=\frac{\frac{2\cos^3\theta}{1-\cos^6\theta}-\frac{2\cos^3\theta}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\frac{2}{1-\cos^6\theta}-\frac{2}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}}$$

$$=\cos^3\theta$$

であり、 y 座標は

$$y=\frac{-2\sin^3\theta\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\div\left(\frac{\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{1+\cos^3\theta}+\frac{\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{1-\cos^3\theta}-\frac{2\sqrt{-\cos^6\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+1}}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)$$

$$=\frac{-\frac{2\sin^3\theta}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\frac{1}{1+\cos^3\theta}+\frac{1}{1-\cos^3\theta}-\frac{2}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}}=\frac{-\frac{2\sin\theta}{3\cos^2\theta}}{\frac{2}{1-\cos^6\theta}-\frac{2}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{-\frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}}{\frac{1}{1-\cos^6\theta}-\frac{1}{3\sin^2\theta\cos^2\theta}}=\frac{-\frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}}{\frac{3\sin^2\theta\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)}{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)\times3\sin^2\theta\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{-\frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}}{\frac{3\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)}{\sin^2\theta(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)\times3\sin^2\theta\cos^2\theta}}=\frac{-\frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}}{\frac{3\cos^2\theta-(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)}{(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)\times3\sin^2\theta\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{-\frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}}{\frac{-\cos^4\theta+2\cos^2\theta-1}{(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)\times3\sin^2\theta\cos^2\theta}}=\frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}\times\frac{(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)\times3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^4\theta-2\cos^2\theta+1}$$

$$=\frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}\times\frac{(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta)\times3\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1-\cos^2\theta)^2}=\frac{\cos^4\theta+\cos^2\theta+1}{\sin\theta}$$

となる。

よって、まとめると垂心 H の座標は θ を媒介変数として、

$$\mathrm{H}\left(\cos^3\theta,\ \frac{\cos^4\theta+\cos^2\theta+1}{\sin\theta}\right)$$

と表すことができる。

３－３－５　傍心の軌跡

定理 1 を用いて、アステロイド$(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$上を点 C が動き回るときの傍心 I_A, I_B, I_C の座標を、媒介変数θを用いて表す。

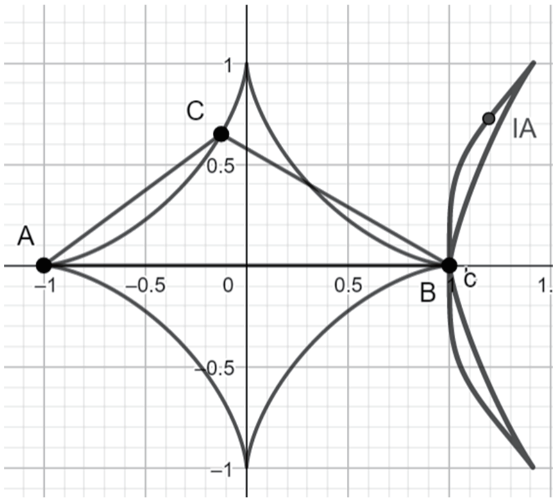

図 21　傍心 I_A の軌跡

傍心 I_A の座標は θ を媒介変数として、

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2} + \sqrt{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2} + 2\cos^3\theta}{-\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2} + \sqrt{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2} + 2} \\ y = \dfrac{2\sin^3\theta}{-\sqrt{-2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2} + \sqrt{2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2} + 2} \end{cases}$$

ここで、点 C が点 A，点 B と一致するとき、すなわち、$\theta = 0, \pi$ のときを考える。

（ｉ）点 C が点 B と一致するとき（つまり$\theta = 0$のとき）$x = 1,\ y = 0$.

よって、このとき傍心 I_A は(1, 0)になるように見えるが、実際はこのとき△ABC が存在しないため、傍心 I_A は存在しない。

（ⅱ）点 C が点 A と一致するとき（つまり$\theta = \pi$のとき）

I_A の x 座標の分母は、

$$-\sqrt{-2\cos^3\pi - 3\sin^2\pi\cos^2\pi + 2} + \sqrt{2\cos^3\pi - 3\sin^2\pi\cos^2\pi + 2} + 2 = 0$$

となるため、このときも傍心 I_A は存在しない。

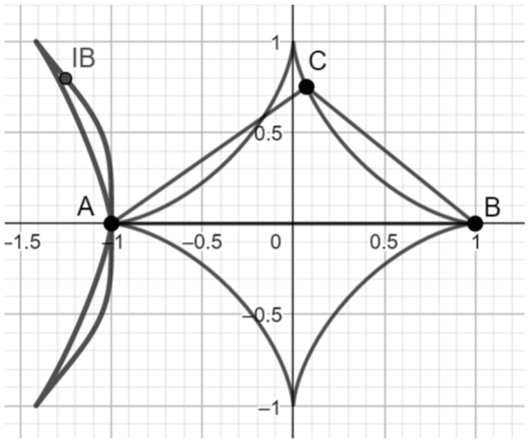

図 22　傍心 $\mathrm{I_B}$ の軌跡

同様に、傍心 $\mathrm{I_B}$ の座標は θ を媒介変数として、

$$\begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}-\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+2\cos^3\theta}{\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}-\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+2} \\ y=\dfrac{2\sin^3\theta}{\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}-\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+2} \end{cases}$$

ここで、点 C が点 A，点 B と一致するとき、すなわち、$\theta=0, \pi$ のときを考える。

（ⅰ）点 C が点 B と一致するとき（つまり $\theta=0$ のとき）.

$\mathrm{I_A}$ の x 座標と y 座標の分母はともに、

$$\sqrt{-2\cos^3 0-3\sin^2 0\cos^2 0+2}-\sqrt{2\cos^3 0-3\sin^2 0\cos^2 0+2}+2=0$$

となるため、このとき傍心 $\mathrm{I_B}$ は存在しない。

（ⅱ）点 C が点 A と一致するとき（つまり $\theta=\pi$ のとき）$x=-1,\ y=0$

よって、このとき傍心 $\mathrm{I_B}$ は$(-1, 0)$になるように見えるが、実際はこのとき△ABC が存在しないため、傍心 $\mathrm{I_B}$ は存在しない。

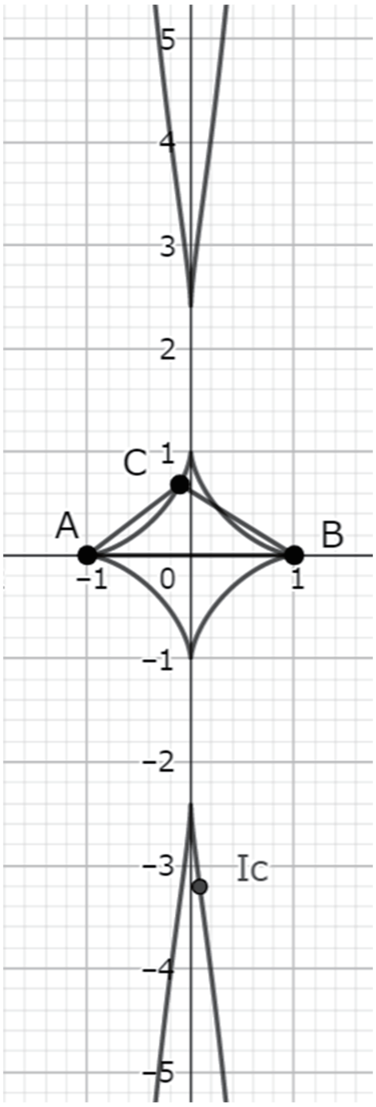

図 23　傍心 I_C の軌跡

最後に、傍心 I_C の座標は θ を媒介変数として、

$$\begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}-2\cos^3\theta}{\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}-2} \\ y=\dfrac{-2\sin^3\theta}{\sqrt{-2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}+\sqrt{2\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta+2}-2} \end{cases}$$

３―４　混心(mixed center)

これまでは、三角形の五心に注目してきたが、ここからは自分たちで新たに定義した点に関する研究を報告する。

<u>定義</u>

△ABC において BC の垂直二等分線、点 B と AC の中点 M を結んだ中線、C から AB に降ろした垂線 CH が 1 点で交わるとき、その交わる点を「**混心**」（mixed center）と名付けることにする。

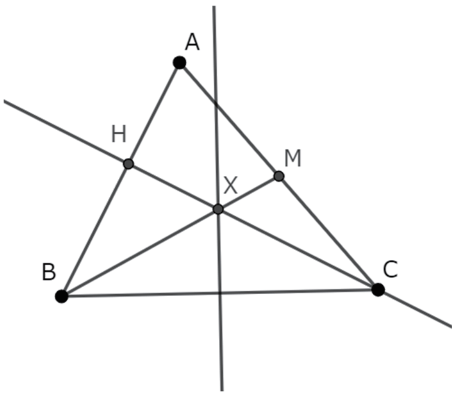

図 24　△ABC の混心 X

混心 X が存在するような点 A の条件を考える。ここで混心の研究において、以下、△ABC の頂点を固定点 A(−1, 0)，点 B, (1, 0)と xy 平面上の動点 C (s, t) とする。

３―４―１　混心の研究①

y 軸は AB の垂直二等分線で、点 M は BC の中点であり、線分 AM は中線である。また点 B から AC に垂線 BH を下ろす。このときの 3 線が 1 点で交わるときの s と t の関係を求める。なお s が点 A の x 座標である−1 より値が小さいとき、垂線 BH は三角形 ABC の外部にあり、中線は必ず三角形 ABC の内部にあるので、垂線と中線が交わらないので混心 X は存在しない。したがって、混心 X が存在する条件は $-1 \leq s$ である。

（ｉ）垂直二等分線と中線の交点 X を垂線が通るとき

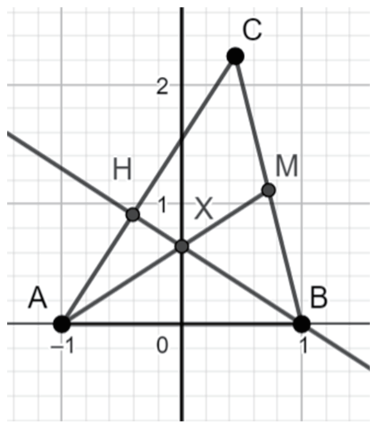

図 25　場合（ｉ）の状況

図 25 において、直線 AM の方程式は、

$$y-0=\frac{\frac{t}{2}}{\frac{s+1}{2}+1}\{x-(-1)\}$$

より、 $y=\frac{t}{s+3}x+\frac{t}{s+3}$ …①

混心 X は垂直二等分線上に存在するので、必ず y 軸上に存在する。

①において、 $x=0$ を代入すると、

$$y=\frac{t}{s+3}\quad(s\neq-3)$$

よって、BM と y 軸の交点 X の座標は X $\left(0, \frac{t}{s+3}\right)$ である。その交点 X と点 B を結んだ直線の方程式は

$$y-0=\frac{0-\frac{t}{s+3}}{1-0}(x-1)$$

より、 $y=-\frac{t}{s+3}(x-1)$.

ここで、直線 CA の方程式は

$$y=\frac{t}{s+1}x+\frac{t}{s+1} \quad (s\neq -1)$$

である。

直線 BX と直線 CA は直交するので

$$-\frac{t}{s+3}\times\frac{t}{s+1}=-1$$

より、$t^2=(s+1)(s+3)$ となる。

以上より、点 C は

$$y^2=(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$$

つまり、双曲線 $(x+2)^2-y^2=1$ 上に存在する。

ここで、この曲線 $y^2=x^2+4x+3$ 上の点 (s,t) において、

$$t=\pm\sqrt{s^2+4s+3}$$

なので、混心 X の座標は媒介変数 s をもちいて、$\mathrm{X}\left(0,\ \frac{\pm\sqrt{s^2+4s+3}}{s+3}\right)$ と表される。ここで、s の値を限りなく大きくすると、

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\pm\sqrt{s^2+4s+3}}{s+3}=\lim_{s\to\infty}\frac{\pm\sqrt{1+\frac{4}{s}+\frac{3}{s^2}}}{1+\frac{3}{s}}=\pm1$$

となる。

（ⅱ）垂直二等分線と垂線の交点 X を中線が通るとき

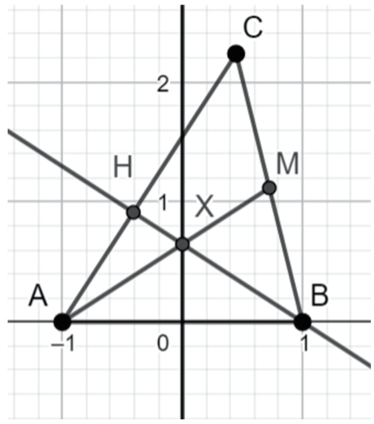

図 26　場合（ⅱ）の状況

図 26 において、直線 AC の方程式は、

$$y-0=\frac{t-0}{s-(-1)}\{x-(-1)\}$$

より、 $y=\frac{t}{s+1}(x+1) \quad (s\neq -1)$

直線 AC と直線 BH は直交するので、直線 BH の傾きは $-\frac{s+1}{t}$ なので、直線 BH の方程式は、 $y=-\frac{s+1}{t}(x-1)$.

直線 BH と y 軸との交点は、$x=0$ を代入して、$\mathrm{X}\left(0,\ \frac{s+1}{t}\right)$ である。

よって、直線 AX の方程式は

$$y=\frac{s+1}{t}(x+1) \quad \cdots②$$

これが線分 BC の中点 $\mathrm{M}\left(\frac{s+1}{2},\ \frac{t}{2}\right)$ を通るとき、②式に代入すると、

$$\frac{t}{2}=\frac{s+1}{t}\left(\frac{s+1}{2}+1\right),\ t^2=(s+1)^2+2s+2$$

より、$t^2=s^2+4s+3$.

したがって、点 C は双曲線

$$x^2+4x-y^2+3=0$$

上に存在する。

ここで、この曲線 $y^2 = x^2 + 4x + 3$ 上の点 (s, t) において、

$$t = \pm\sqrt{s^2 + 4s + 3}$$

なので、混心 X の座標は媒介変数 s をもちいて、$\mathrm{X}\left(0, \dfrac{\pm\sqrt{s^2 + 4s + 3}}{s + 3}\right)$ と表される。ここで、s の値を限りなく大きくすると、

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\pm\sqrt{s^2 + 4s + 3}}{s + 3} = \lim_{s\to\infty}\frac{\pm\sqrt{1 + \frac{4}{s} + \frac{3}{s^2}}}{1 + \frac{3}{s}} = \pm 1$$

となる。

（iii）垂線と中線の交点 X を垂直二等分線が通るとき

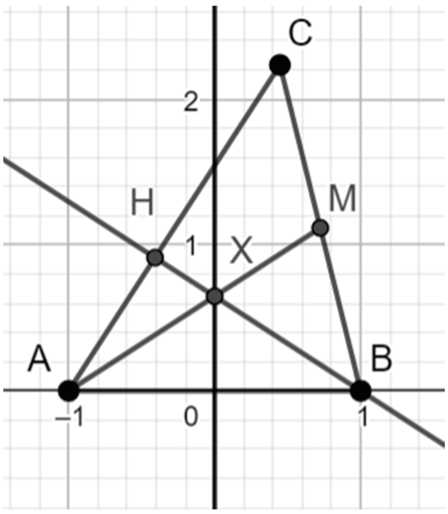

図 27　場合（iii）の状況

図 27 において、直線 AM の方程式は、

$$y - 0 = \frac{0 - \frac{t}{2}}{-1 - \frac{s+1}{2}}\{x - (-1)\}$$

より、$y = \dfrac{t}{s + 3}(x + 1)\ \ (s \neq -3)$

また、直線 BH の方程式は（ⅱ）の場合と同じく、$y = -\dfrac{s + 1}{t}(x - 1)$.

よって、直線 AM と直線 BH の交点は $\dfrac{t}{s + 3}(x + 1) = -\dfrac{s + 1}{t}(x - 1)$ より、

$$x = \frac{s^2 + 4s - t^2 + 3}{s^2 + 4s + t^2 + 3}$$

であるから、混心 X の y 座標は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{t}{s + 3}\left(\frac{s^2 + 4s - t^2 + 3}{s^2 + 4s + t^2 + 3} + 1\right) \\ &= \frac{2st + 2t}{s^2 + 4s + t^2 + 3} \end{aligned}$$

となるため、混心 X の座標は

$$\mathrm{X}\left(\frac{s^2 + 4s - t^2 + 3}{s^2 + 4s + t^2 + 3}, \frac{2st + 2t}{s^2 + 4s + t^2 + 3}\right)$$

である。この点 X から x 軸へ垂線を下ろしたとき、この垂線の方程式は

$$x = \frac{s^2 + 4s - t^2 + 3}{s^2 + 4s + t^2 + 3}$$

であり、これが$(0, 0)$を通る場合

$$\frac{s^2 + 4s - t^2 + 3}{s^2 + 4s + t^2 + 3} = 0$$

ゆえ、$t^2 = s^2 + 4s + 3$.

したがって、点 C は双曲線

$$x^2 + 4x - y^2 + 3 = 0$$

上に存在する。

ここで、この曲線 $y^2 = x^2 + 4x + 3$ 上の点 (s, t) において、

$$t = \pm\sqrt{s^2 + 4s + 3}$$

なので、混心 X の座標は媒介変数 s をもちいて、

$$x = \frac{s^2 + 4s - (s^2 + 4s + 3) + 3}{s^2 + 4s + (s^2 + 4s + 3) + 3} = 0$$

$$y=\frac{\pm 2s\sqrt{s^2+4s+3}\pm 2\sqrt{s^2+4s+3}}{s^2+4s+(s^2+4s+3)+3}$$
$$=\pm\frac{s+1}{\sqrt{s^2+4s+3}}$$

と表される（複号同順）。ここで、s の値を限りなく大きくすると、

$$\lim_{s\to\infty}\pm\frac{s+1}{\sqrt{s^2+4s+3}}=\lim_{s\to\infty}\pm\frac{1+\frac{1}{s}}{\sqrt{1+\frac{4}{s}+\frac{3}{s^2}}}=\pm 1$$

となる。

よって、（ⅰ）から（ⅲ）のどの場合でも点 C は双曲線

$$x^2+4x-y^2+3=0$$

上に存在する。ただし、$x\geq -1$ である。

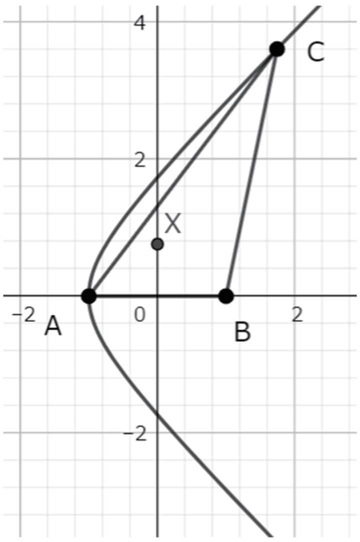

図 28　混心が存在する C の軌跡

またこのときの混心 X の軌跡は、y 軸の $-1\leq y\leq 1$ の部分で原点(0, 0)を除くものである。図 29 の太い線分が混心 X の軌跡である。

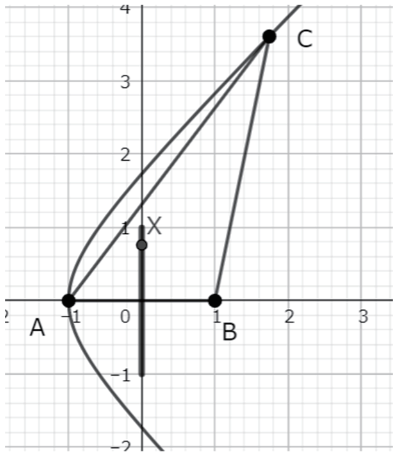

図 29　混心 X の軌跡

GeoGebra で点 C を動かしてみると、点 C が $x\leq -3$ に存在するとき、3 線は交わらなかった。さらにこのとき、△ABC は鈍角三角形であった。ここで、中線 AM を線分でなく直線にすると、3 直線は交わった。

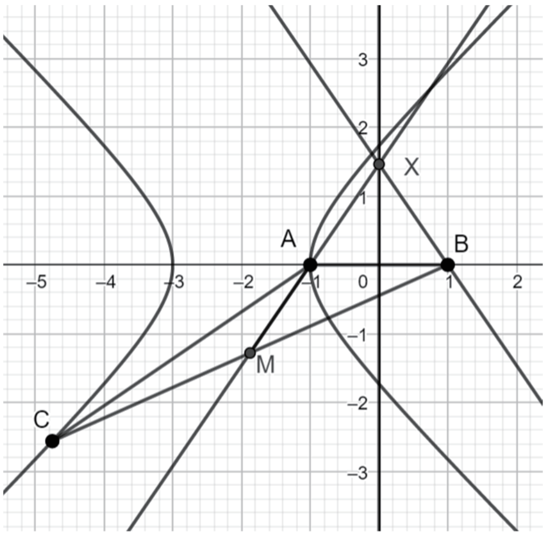

図 30　点 C が $x\leq -3$ に存在するとき

ここで、中線が直線であり、△ABC が鈍角であるときの混心 X の軌跡を考える。

（ｉ）垂直二等分線と中線の交点 X を垂線が通るとき

$$\lim_{s\to -3}\pm\frac{\sqrt{s^2+4s+3}}{s+3}$$
$$=\lim_{s\to -3}\pm\frac{\sqrt{s^2+4s+3}}{s+3}\times\frac{\sqrt{s^2+4s+3}}{\sqrt{s^2+4s+3}}$$
$$=\lim_{s\to -3}\pm\frac{s^2+4s+3}{(s+3)\sqrt{s^2+4s+3}}$$
$$=\lim_{s\to -3}\pm\frac{s+1}{\sqrt{s^2+4s+3}}=\pm\infty$$

であり、 $\lim_{s\to -\infty}\pm\frac{s+1}{\sqrt{s^2+4s+3}}=\pm 1$

なので、混心 X の軌跡は y 軸の $y\le -1,\ 1\le y$ の部分である。

（ⅱ）垂直二等分線と垂線の交点 X を中線が通るとき

（ⅲ）垂線と中線の交点 X を垂直二等分線が通るとき

この 2 つの場合ではともに、

$$\lim_{s\to -3}\frac{s+1}{\pm\sqrt{s^2+4s+3}}=\pm\infty$$

$$\lim_{s\to -\infty}\frac{s+1}{\pm\sqrt{s^2+4s+3}}=\pm 1$$

となる。したがって、混心 X の軌跡は y 軸の $y\le -1,\ 1\le y$ の部分である。

したがって、△ABC が鋭角三角形、鈍角三角形のどちらにも変化するとき、混心 X の軌跡は、 y 軸から原点(0, 0)を除いたものとなる。

3－4－2　混心の研究②

次に、それぞれの線（垂直二等分線、垂線、中線）の位置を変えた。

原点 O は点 A，点 B の中点であり、線分 CO は中線である。B から直線 AC に垂線 BH を下ろし、線分 BC の垂直二等分線を引く。このときの 3 線が 1 点で交わるときの s と t の関係を求める。

（ア）垂直二等分線と中線の交点 X を垂線が通るとき

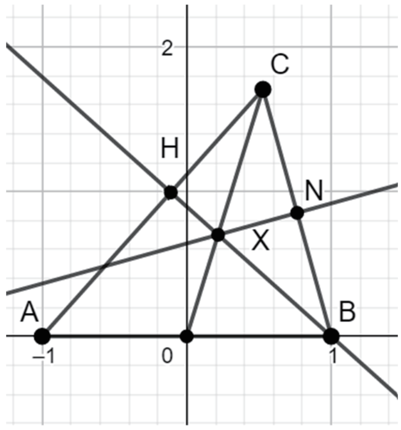

図 31　（ア）の場合の状況

ここで、直線 OC の方程式は

$$y=\frac{t}{s}x\ \ (s\ne 0)\ \cdots③$$

また、直線 BC の方程式は

$$y=\frac{t}{s-1}(x-1)\ \ (s\ne 1)$$

である。したがって、点 N を通る線分 BC の垂直二等分線の方程式は、

$$y-\frac{t}{2}=-\frac{s-1}{t}\left(x-\frac{s+1}{2}\right)$$

より、 $y=-\frac{s-1}{t}x+\frac{s^2-1}{2t}+\frac{t}{2}\ \cdots④$

よって、③と④の交点 X の x 座標は、

$$\frac{t}{s}x=-\frac{s-1}{t}x+\frac{s^2-1}{2t}+\frac{t}{2}$$

から、 $x=\frac{s^3+st^2-s}{2s^2+2t^2-2s}$.

これを③式に代入すると、

$$y=\frac{t}{s}\cdot\frac{s^3+st^2-s}{2s^2+2t^2-2s}=\frac{ts^2+t^3-t}{2s^2+2t^2-2s}$$

したがって、③と④の交点 X の座標は、

$$\mathrm{X}\left(\frac{s^3+st^2-s}{2s^2+2t^2-2s},\ \frac{ts^2+t^3-t}{2s^2+2t^2-2s}\right)$$

と表すことができる。また、直線 BX の方程式は、

$$y-0=\frac{\frac{ts^2+t^3-t}{2s^2+2t^2-2s}-0}{\frac{s^3+st^2-s}{2s^2+2t^2-2s}-1}(x-1)$$

より、

$$y=\frac{s^2t+t^3-t}{s^3-2s^2+st^2+s-2t^2}(x-1)$$

である。また、直線 AC の方程式は

$$y-0=\frac{t-0}{s-(-1)}\{x-(-1)\}$$

より、$y=\frac{t}{s+1}(x+1)\ \ (s\neq -1)$.

直線 BX と直線 AC が垂直なので、

$$\frac{s^2t+t^3-t}{s^3-2s^2+st^2+s-2t^2}\times\frac{t}{s+1}=-1$$

ゆえに、

$$s^4-s^3+2s^2t^2-s^2-st^2+s+t^4-3t^2=0 \quad (s\neq 0,\pm 1)$$

となるので、点 C は曲線

$$x^4-x^3+2x^2y^2-x^2-xy^2+x+y^4-3y^2=0$$

上に存在する。

（イ）垂直二等分線と垂線の交点 X を中線が通るとき

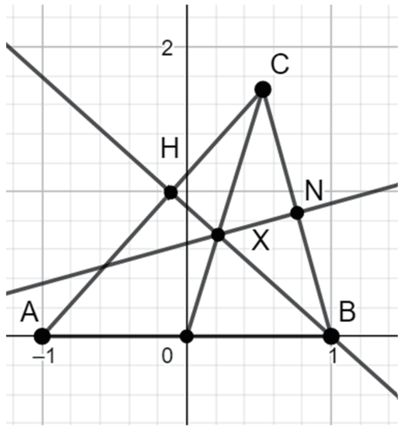

図 32　（イ）の場合の状況

直線 BH の方程式は３―４―１節と同じく、$y=-\frac{s+1}{t}(x-1)$ …⑤.

線分 BC の中点 N は $\mathrm{N}\left(\frac{s+1}{2},\frac{t}{2}\right)$ であり、線分 BC の方程式は

$$y-0=\frac{t-0}{s-1}(x-1)$$

ゆえ、$y=\frac{t}{s-1}(x-1)\ \ (s\neq 1)$

であるから、線分 BC の垂直二等分線の方程式は

$$y-\frac{t}{2}=-\frac{s-1}{t}\left(x-\frac{s+1}{2}\right)$$

なので、$y=-\frac{s-1}{t}\left(x-\frac{s+1}{2}\right)+\frac{t}{2}$

よって、垂線 BH と垂直二等分線の交点 X の x 座標は

$$-\frac{s+1}{t}(x-1)=-\frac{s-1}{t}\left(x-\frac{s+1}{2}\right)+\frac{t}{2}$$

から、$x=-\frac{s^2+t^2-2s-3}{4}$.

これを⑤式に代入して

$$y=\frac{s^3+st^2-s^2-s+t^2+1}{4t}$$

よって、交点 X の座標は、

$$\mathrm{X}\left(-\frac{s^2+t^2-2s-3}{4},\ \frac{s^3+st^2-s^2-s+t^2+1}{4t}\right)$$

である。また、直線 CX の方程式は

$$y-t=\frac{\dfrac{s^3+st^2-s^2-s+t^2+1}{4t}-t}{-\dfrac{s^2+t^2-2s-3}{4}-s}(x-s)$$

であり、これが原点 O を通るので、

$$-t=\frac{\dfrac{s^3+st^2-s^2-s+t^2+1}{4t}-t}{-\dfrac{s^2+t^2-2s-3}{4}-s}\times(-s)$$

つまり、

$$s^4-s^3+2s^2t^2-s^2-st^2+s+t^4-3t^2=0$$
$$(s\neq 0,\pm 1)$$

したがって、点 C は曲線

$$x^4-x^3+2x^2y^2-x^2-xy^2+x+y^4-3y^2=0$$

上に存在する。

（ウ）垂線と中線の交点 X を垂直二等分線が通るとき

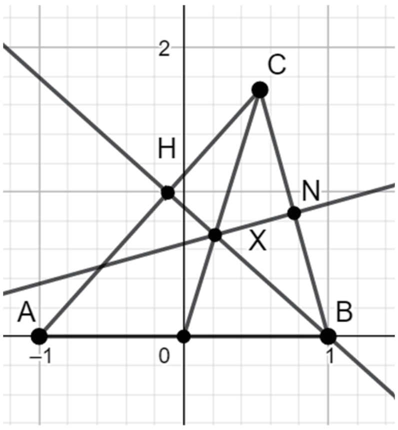

図 33　（ウ）の場合の状況

直線 BH の方程式は３—４—１節と同じく、

$$y=-\frac{s+1}{t}(x-1)$$

であり、直線 OC の方程式は $y=\dfrac{t}{s}x$ $(s\neq 0)$ であるから、直線 BH と直線 OC の交点 X の x 座標は、$-\dfrac{s+1}{t}(x-1)=\dfrac{t}{s}x$ から、$x=\dfrac{s^2+s}{s^2+s+t^2}$

よって、直線 OC の方程式から X の y 座標は、

$$y=\frac{t}{s}\times\frac{s^2+s}{s^2+s+t^2}=\frac{st+t}{s^2+s+t^2}$$

よって、交点 X の座標は

$$\mathrm{X}\left(\frac{s^2+s}{s^2+s+t^2},\ \frac{st+t}{s^2+s+t^2}\right)$$

である。

さらに、線分 BC の方程式は

$$y=\frac{t}{s-1}(x-1)\quad(s\neq 1)$$

であるので、交点 X から BC に下ろし垂線の方程式は、

$$y-\frac{st+t}{s^2+s+t^2}=-\frac{s-1}{t}\left(x-\frac{s^2+s}{s^2+s+t^2}\right)$$

となる。この垂線が BC の中点 N を通るときが垂直二等分線であるので、

$$\mathrm{N}\left(\frac{s+1}{2},\ \frac{t}{2}\right)$$

を代入して、

$$\frac{t}{2}-\frac{st+t}{s^2+s+t^2}=-\frac{s-1}{t}\left(\frac{s+1}{2}-\frac{s^2+s}{s^2+s+t^2}\right)$$

から、

$$s^4-s^3+2s^2t^2-s^2-st^2+s+t^4-3t^2=0$$
$$(s\neq 0,\pm 1)$$

したがって、点 C は曲線

$$x^4-x^3+2x^2y^2-x^2-xy^2+x+y^4-3y^2=0$$

上に存在する。

以上より、（ア）～（ウ）のどの場合でも点 C は、曲線
$x^4-x^3+2x^2y^2-x^2-xy^2+x+y^4-3y^2=0$
上に存在する。

この方程式を GeoGebra 入力すると、次のような曲線が現れた。

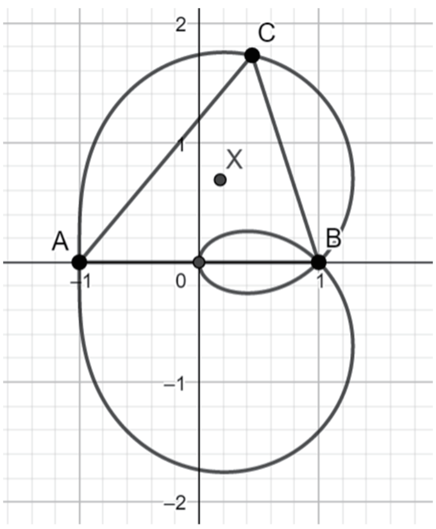

図 34　点 C の軌跡

このように、リマソン曲線のようなグラフとなる。このリマソン曲線のような曲線の内部の卵形の部分に注目する。

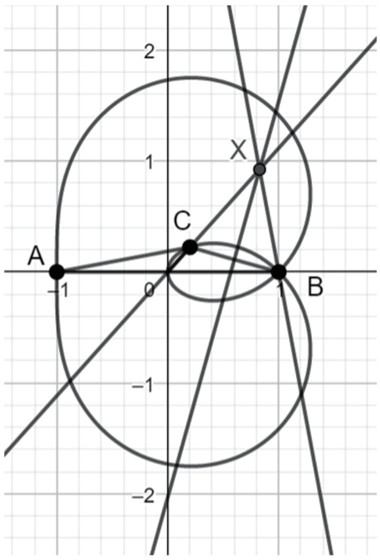

図 35　点 C が内部の卵形部分にあるとき

GeoGebra で点 C を動かしてみると、点 C がこの卵形部分に存在するとき、3 線は交わらなかった。このとき、△ABC は鈍角三角形になった。ここで、中線 AM を線分でなく直線にすると、3 直線は交わった。

また、$x\neq 0, \pm 1$ である。$s\neq \pm 1$ のときは、図形的にみると点 C が点 A や点 B と一致して、△ABC が存在しないと分かる。$x=0$ のときは、以下の 2 つのパターンがある。

（あ）△ABC が鋭角三角形のとき（中線が線分であるとき）

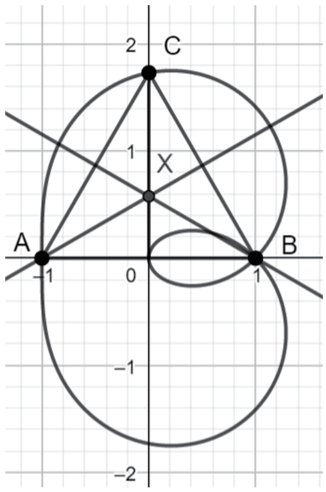

図 36　（あ）の場合の状況

このときは図 36 のように、3 線は 1 点交わる。

（い）△ABC が鈍角三角形のとき（中線が直線であるとき）

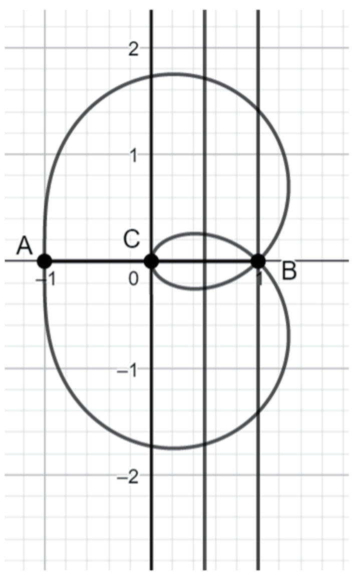

図 37　（い）の場合の状況

図 37 のように、3 点 A, B, C は一直線上にあるので混心は存在しない。

３―４―３　混心の研究③

さらに、それぞれの線の位置を変えてみた。点 M は線分 BC の中点で、線分 AM は△ABC の中線である。点 N は線分 AC の中点でこの点を AC の垂直二等分線が通っている。

さらに、点 C から直線 AB に下ろした垂線を垂線 CH とする。このときの 3 線が 1 点で交わるときの s と t の関係を求める。

（Ⅰ）　垂直二等分線と中線の交点 X を垂線が通るとき

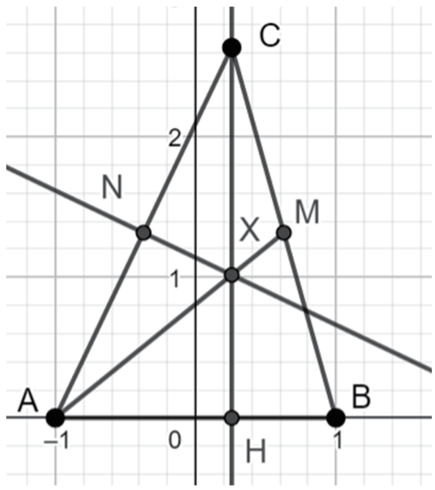

図 38　（Ⅰ）の場合の状況

直線 AM の方程式は

$$y=\frac{t}{s+3}(x+1)\quad (s\neq -3)\cdot$$

直線 AC の方程式は

$$y=\frac{t}{s+1}(x+1)\quad (s\neq -1)$$

なので、線分 AC の垂直二等分線の方程式は

$$y=-\frac{s+1}{t}\left(x-\frac{s-1}{2}\right)+\frac{t}{2}$$

よって、直線 AM と線分 AC の垂直二等

分線の交点Xのx座標は

$$\frac{t}{s+3}(x+1)=-\frac{s+1}{t}\left(x-\frac{s-1}{2}\right)+\frac{t}{2}$$

より、

$$x=\frac{s^3+3s^2+st^2-s+t^2-3}{2s^2+8s+6+2t^2}$$

これが交点Xのx座標であるが、これが点Cから直線ABに下ろした垂線上にあるとき、点Cのx座標と一致するので、

$$\frac{s^3+3s^2+st^2-s+t^2-3}{2s^2+8s+6+2t^2}=s$$

つまり、

$$s^3+5s^2+7s+st^2-t^2+3=0$$
$$(s\neq -3,\ -1)$$

したがって、点Cは曲線

$$x^3+5x^2+7x+xy^2-y^2+3=0$$

上にある。

（Ⅱ）垂直二等分線と垂線の交点Xを中線が通るとき

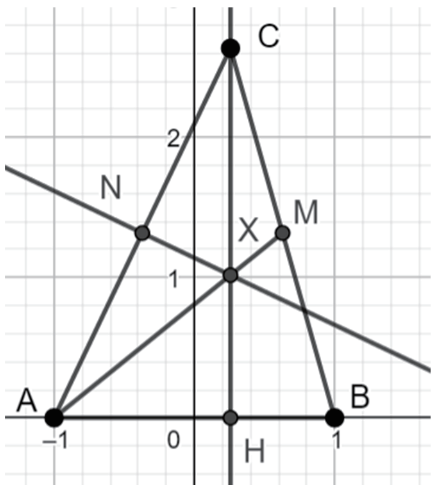

図39　（Ⅱ）の場合の状況

垂線CHの方程式は$x=s$であり、線分ACの垂直二等分線の方程式は

$$y=-\frac{s+1}{t}\left(x-\frac{s-1}{2}\right)+\frac{t}{2}$$

であるので、垂線CHと線分ACの垂直二等分線の交点Xのy座標は

$$y=-\frac{s+1}{t}\left(s-\frac{s-1}{2}\right)+\frac{t}{2}=-\frac{s^2+2s+1}{2t}+\frac{t}{2}$$

よって、交点Xの座標は

$$\mathrm{X}\left(s,\ -\frac{s^2+2s+1}{2t}+\frac{t}{2}\right)$$

ゆえに、直線AXの方程式は

$$y-0=\frac{\left(-\frac{s^2+2s+1}{2t}+\frac{t}{2}\right)-0}{s-(-1)}\{x-(-1)\}$$

つまり、

$$y=-\frac{s^2+2s+1-t^2}{2st+2t}(x+1)\quad (s\neq -1)$$

これが線分BCの中点$\left(\frac{s+1}{2},\ \frac{t}{2}\right)$を通るので、

$$\frac{t}{2}=-\frac{s^2+2s+1-t^2}{2st+2t}\left(\frac{s+1}{2}+1\right)$$

より、

$$s^3+5s^2+7s+st^2-t^2+3=0$$
$$(s\neq -3,\ -1)$$

したがって、点Cは曲線

$$x^3+5x^2+7x+xy^2-y^2+3=0$$

上にある。

（Ⅲ）垂線と中線の交点Xを垂直二等分線が通るとき

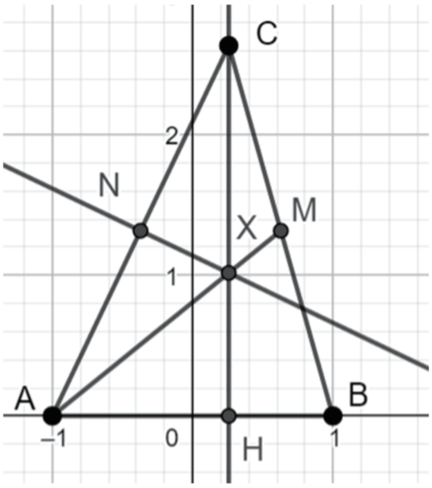

図 40　（Ⅲ）の場合の状況

直線 AM の方程式は

$$y=\frac{t}{s+3}(x+1)\quad (s\neq -3)$$

である。また、垂線 CH の方程式は $x=s$ なので、直線 AM と垂線 CH の交点 X の y 座標は

$$y=\frac{t}{s+3}(s+1)=\frac{st+t}{s+3}$$

より、交点 X の座標は

$$\mathrm{X}\left(s,\ \frac{st+t}{s+3}\right)$$

となる。ここで、直線 AC の方程式は

$$y=\frac{t}{s+1}(x+1)\quad (s\neq -1)$$

であるので、交点 X から直線 AC に下ろした垂線の方程式は

$$y-\frac{st+t}{s+3}=-\frac{s+1}{t}(x-s)$$

つまり、$y=-\dfrac{s+1}{t}(x-s)+\dfrac{st+t}{s+3}$

この垂線が AC の中点 $\mathrm{N}\left(\dfrac{s-1}{2},\dfrac{t}{2}\right)$ を通るとき、この垂線は線分 AC の垂直二等分線となる。よって、

$$\frac{t}{2}=-\frac{s+1}{t}\left(\frac{s-1}{2}-s\right)+\frac{st+t}{s+3}$$

より、

$$s^3+5s^2+7s+st^2-t^2+3=0$$
$$(s\neq -3,\ -1)$$

したがって、点 C は、

$$x^3+5x^2+7x+xy^2-y^2+3=0$$

上にある。

よって、（Ⅰ）～（Ⅲ）のどの場合でも点 C は

$$x^3+5x^2+7x+xy^2-y^2+3=0\quad \cdots(*)$$

上に存在することがわかる。この方程式を GeoGebra に入力すると、図 41 のような曲線が現れた。

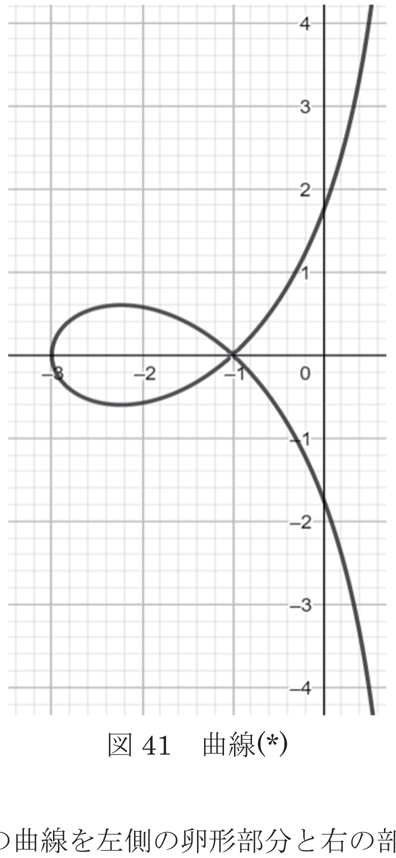

図 41　曲線(*)

この曲線を左側の卵形部分と右の部分に分けたところ、右の部分に点 C がいるとき、3 線は交わった。

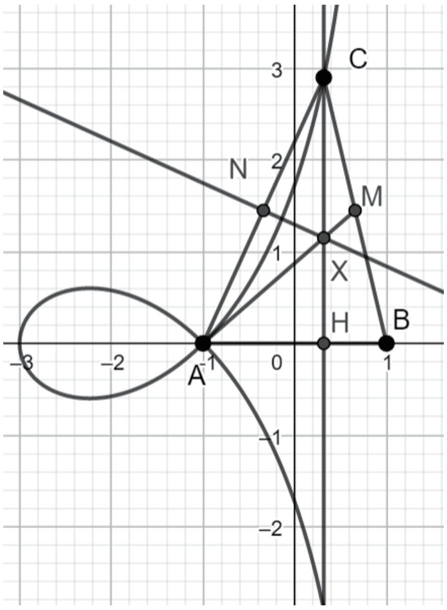

図 42　C が右の部分にいるとき

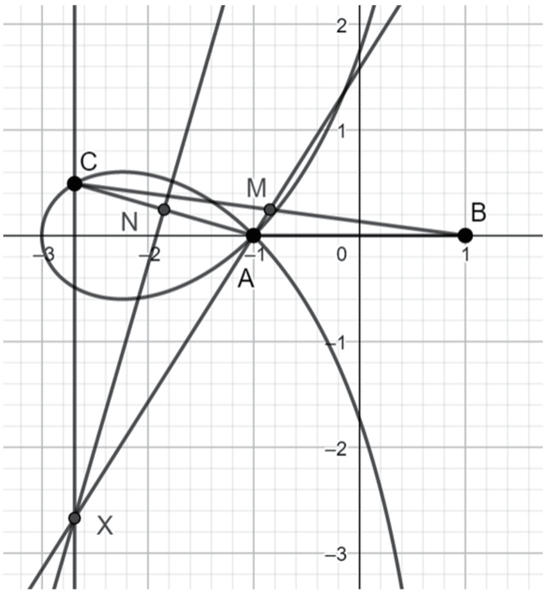

図 43　 C が左の卵形部分にいるとき

GeoGebra で点 C を動かしてみると、点 C が卵形部分に存在するとき、3 線は交わらなかった。このとき、△ABC は鈍角三角形であった。ここで、中線 AM を線分でなく直線にすると、3 直線は交わった。

３－５ ストロフォイド

基盤探究Ⅱの時間において、３—４－３節で導出した曲線が何かを調べるために、曲線図鑑([5])を調べていたところ、この曲線が「ストロフォイド」（別名：「**葉形線**」）の形に似ていることに気づいた。

<u>定義</u>

x 軸上の原点 O でない点 $\mathrm{A}(a,0)$ $(a \neq 0)$ と y 軸全体を自由に動く点 P があるとき、半直線 AP 上にあり、かつ OP＝PN＝PM を満たす点 N, M の軌跡、またそれを回転、平行移動させたものを**ストロフォイド**(strophoid)という。

このとき、ストロフォイドの方程式は

$$(x-a)x^2+(x+a)y^2=0$$

であり、$x=-a$ $(a<0)$ を漸近線にもつ。

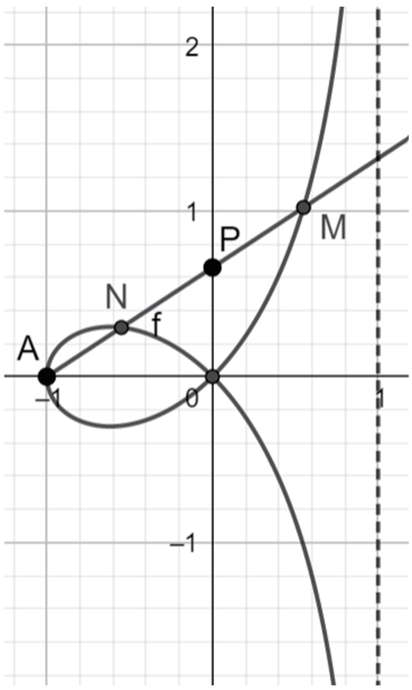

図 44　ストロフォイドと漸近線

ここで、先ほどの

$$x^3+5x^2+7x+xy^2-y^2+3=0$$

は

$$(x+3)(x+1)^2+(x-1)y^2=0$$

と式変形できるので、これは$a=-1$のときのストロフォイドをx軸方向に－2 だけ平行移動させた曲線となる（ただし、点(－3, 0)と(－1, 0)を除く)。また、漸近線は$x=1$であるとわかる。

５. 参考文献

[1]「三角形の内心とは？内心の意味や座標＆ベクトルの求め方を解説」, math-travel.com

[2]「GeoGebra 初心者のための日本語マニュアル」, sakura.ne.jp

[3] 大西俊弘, 「GeoGebra における「軌跡」の扱い方について : LocusEquation コマンドの新機能紹介（数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究)」, 数理解析研究所講究録第 2067 巻 (2018)

[4] 川野聡真, 山田悠晟, 「三角形の特徴的な点とその軌跡」, 令和 3 年度奈良女子大学附属中等教育学校 SSH サイエンス研究会生徒研究論文集(2021)

[5] 礒田正美,田端毅, 讃岐勝, Maria G. Bartolini Bussi, 「曲線の事典－性質・歴史・作図法－」, 共立出版 (2009)

６. 謝辞

今回の探究活動にあたり多大なご指導を賜りました顧問の川口先生、アドバイスをくれた「基盤探究Ⅱ」の同じ川口講座のみなさんには深く感謝いたします。ありがとうございました。