中線定理の高次元への拡張

5 年 B 組　井上　友裕
指導教員　川口　慎二

１．要約

中線定理を三次元に拡張し、中面定理を証明した。また、四面体の重心と中面の関係性を明らかにした。

キーワード　中線定理、四面体、重心

２．研究の背景と目的

前年度中線定理の等分点の個数を一般化した。今年度は平面幾何の定理である中線定理を三次元に拡張する研究を行っている。

３．先行研究

中線定理は三平方の定理を用いて証明する。そこで、まずは空間において三平方の定理がどのように拡張されるのか調べた。

<u>四平方の定理</u>（デカルト・グアの定理）

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$ である三角錐 OABC においては、

$$|ABC|^2 = |OAB|^2 + |OBC|^2 + |OCA|^2$$

が成り立つ([1])。

四平方の定理の拡張として、[2]には以下の定理が成り立つと記載されている。

<u>主張</u>

四面体 ABCD において
平面 ABC と平面 ACD のなす角を θ_{12}，
平面 ACD と平面 ABD のなす角を θ_{23}，
平面 ABC と平面 ABD のなす角を θ_{13}，
平面 ABC と平面 BCD のなす角を θ_{14}，
平面 ACD と平面 BCD のなす角を θ_{24}，
平面 ABD と平面 BCD のなす角を θ_{34}
とすると

$$\begin{aligned}|BCD|^2 = |ABC|^2 + |ACD|^2 + |ABD|^2 \\ -2|ABC|\cdot|ACD|\cos\theta_{12} \\ -2|ACD|\cdot|ABD|\cos\theta_{23} \\ -2|ABC|\cdot|ABD|\cos\theta_{31}\end{aligned}$$

が成り立つ。

４．定理の修正

しかし、[2]にある上記の先行研究の結果には誤りがあるため訂正を行った。

平面と平面のなす角は必ず 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下であるから四面体 ABCD において点 A から平面 BCD におろした垂線の足が三角形 BCD の外部にあるとき主張は成り立たない。

そこで面と面のなす角を四面体の内部で測ることにより主張を以下のように修正した。

<u>定義１</u>（面と面のなす角）

四面体 $P_1P_2P_3P_4$ において点 P_1 から辺 P_3P_4 におろした垂線の足を H_1，点 P_2 から

辺 P_3P_4 におろした垂線の足を H_2 とおくとき、$\overrightarrow{P_1H_1}$ と $\overrightarrow{P_2H_2}$ のなす角を面 $P_1P_3P_4$ と面 $P_2P_3P_4$ のなす角という。

<u>定理 1</u>（[2]の訂正）

四面体 ABCD において、
面 ABC と面 ACD のなす角を θ_{12}，
面 ACD と面 ABD のなす角を θ_{23}，
面 ABC と面 ABD のなす角を θ_{13}，
面 ABC と面 BCD のなす角を θ_{14}，
面 ACD と面 BCD のなす角を θ_{24}，
面 ABD と面 BCD のなす角を θ_{34}
とすると

$$\begin{aligned}|BCD|^2 = {}&|ABC|^2+|ACD|^2+|ABD|^2\\&-2|ABC|\cdot|ACD|\cos\theta_{12}\\&-2|ACD|\cdot|ABD|\cos\theta_{23}\\&-2|ABC|\cdot|ABD|\cos\theta_{31}\end{aligned}$$

が成り立つ。

（証明）

頂点 A から平面 BCD におろした垂線の足を A′ とする。このとき

$$\begin{aligned}|BCD| = {}&|ABC|\cos\theta_{14}+|ACD|\cos\theta_{24}\\&+|ABD|\cos\theta_{34}\end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、

$$\begin{aligned}|BCD|^2 = {}&|ABC||BCD|\cos\theta_{14}\\&+|ACD||BCD|\cos\theta_{24} \cdots ①\\&+|ABD||BCD|\cos\theta_{34}\end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}|ABC|^2 = {}&|ABC||ACD|\cos\theta_{12}\\&+|ABC||ABD|\cos\theta_{13}\\&+|ABC||BCD|\cos\theta_{14},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|ACD|^2 = {}&|ABC||ACD|\cos\theta_{12}\\&+|ACD||ABD|\cos\theta_{23}\\&+|ACD||BCD|\cos\theta_{24},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|ABD|^2 = {}&|ABC||ABD|\cos\theta_{13}\\&+|ACD||ABD|\cos\theta_{23}\\&+|ABD||BCD|\cos\theta_{34}\end{aligned}$$

が成り立つ。

式を変形すると

$$\begin{aligned}&|ABC||BCD|\cos\theta_{14}\\&\quad=|ABC|^2-|ABC||ACD|\cos\theta_{12}\\&\qquad-|ABC||ABD|\cos\theta_{13}\end{aligned}$$

…②

$$\begin{aligned}&|ACD||BCD|\cos\theta_{24}\\&\quad=|ACD|^2-|ABC||ACD|\cos\theta_{12}\\&\qquad-|ACD||ABD|\cos\theta_{23}\end{aligned}$$

…③

$$\begin{aligned}&|ABD||BCD|\cos\theta_{34}\\&\quad=|ABD|^2-|ABC||ABD|\cos\theta_{13}\\&\qquad-|ACD||ABD|\cos\theta_{23}\end{aligned}$$

…④

②，③，④を①に代入すると、

$$\begin{aligned}|BCD|^2 = {}&|ABC|^2+|ACD|^2+|ABD|^2\\&-2|ABC|\cdot|ACD|\cos\theta_{12}\\&-2|ACD|\cdot|ABD|\cos\theta_{23}\\&-2|ABC|\cdot|ABD|\cos\theta_{31}\end{aligned}$$

を得る。　(Q.E.D.)

四平方の定理は、定理１の特別な場合である。

５．研究内容

定義２（中面）

四面体のある２つの頂点の組に対し、その２本を結んだ線分の中点と、残り２つの頂点を含む面を、**中面**という。

図１の四面体 ABCD において線分 BC の中点を M とする。このとき、△ADM が中面である。

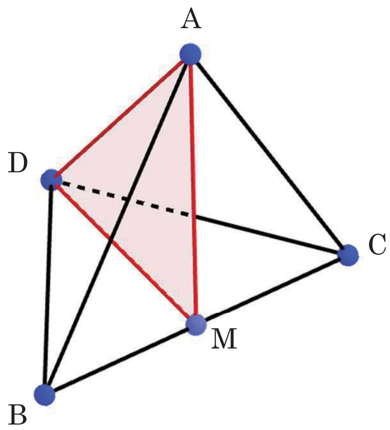

図１　中面

中面定理

四面体 ABCD に対し、辺 BC の中点を M、面 ABC と面 BDC の間の角度を θ とすると、

$$|ABD|^2+|ACD|^2$$
$$=2|ABM|^2+2|BDM|^2+2|ADM|^2$$
$$-4|ABM|\cdot|BDM|\cos\theta$$

が成り立つ。

（証明）

四面体 ABDM において、定理１より

$$\begin{aligned}|ABD|^2=|ADM|^2+|ABM|^2+|BDM|^2\\ -2|ADM|\cdot|ABM|\cos\theta_1\\ -2|ADM|\cdot|BDM|\cos\theta_2\\ -2|ABM|\cdot|BDM|\cos\theta_3\end{aligned}$$

…①

四面体 ACDM において、定理１より

$$\begin{aligned}|ACD|^2=|ADM|^2+|ACM|^2+|CDM|^2\\ -2|ADM|\cdot|ACM|\cos(\pi-\theta_1)\\ -2|ADM|\cdot|CDM|\cos(\pi-\theta_2)\\ -2|ACM|\cdot|CDM|\cos\theta_3\end{aligned}$$

…②

ここで、①＋②を計算すると

$$\begin{aligned}&|ABD|^2+|ACD|^2\\ &=2|ADM|^2+2|ABM|^2+2|BDM|^2\\ &\qquad -4|ABM|\cdot|BDM|\cos\theta_3\end{aligned}$$

を得る。　(Q.E.D.)

中面定理から次の命題が示される。

命題１

平面 ABC と平面 BDC が垂直に交わる四面体 ABCD に対し、辺 BC の中点を M とすると、

$$|ABD|^2+|ACD|^2$$
$$=2|ABM|^2+2|BDM|^2+2|ADM|^2$$

が成り立つ。

中面と四面体の重心について次のような関係が得られた。

定理２

四面体の 6 つの中面は 1 点で交わり、それは四面体の重心である。

（証明）

四面体 ABCD において辺 CD の中点を P，辺 AC の中点を Q，辺 BC の中点を R とする。

（1）四面体のすべての中面は四面体の重心を含む

中面 ABP において線分 AP を 2：1 に内分する点を E、線分 BE を 3：1 に内分する点を G とする。ここで、線分 AE は ΔACD の中線であるため点 E は ΔACD の重心である。したがって、点 G は四面体 ABCD の重心である。同様に、四面体 ABCD のすべての中面が重心を含むことが示される。

（2）四面体のすべての中面は 1 点で交わる

中面 BDQ において（1）より点 E は ΔACD の重心であるため点 E は中線 DQ 上の点、すなわち中面 BDQ 上にある。したがって、平面 ABP と平面 BDQ の交線は直線 BE である。

ここで、点 B, E 共に中面 ADR 上の点ではないため、直線 BE と平面 ADR は 1 点で交わる。同様に、すべての頂点が 1 点で交わることが示される。

（1），（2）より四面体の 6 つの中面はその重心において 1 点で交わる。

(Q.E.D.)

６．結果と考察

四面体へ中線定理を拡張し、中面と四面体の重心との関係を調べた。

今後は、中線定理をさらに拡張し、n 次元へ一般化したい。

他の平面幾何の定理を高次元へと拡張し、元の定理との相違点や類似点を検討したいと思う。

７．参考文献

[1] 高校数学の美しい物語，「四平方の定理(図形の面積と正射影)」，https://manabitimes.jp/math/1003

[2]「余弦定理の拡張」，http://www25.tok2.com/home/toretate/cos01.html,

[3] 高校数学の美しい物語，四面体の重心の存在証明と応用例」，https://manabitimes.jp/math/1123

８．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。