貴金属数列の一般項の導出

５ 年A組　明神　楓人
５ 年A組　藤田　恭平
５ 年A組　富田　裕紀
指導教員　川口　慎二

１．要約

本研究は私たちの身近なものにも多数活用されている貴金属比について、黄金比とフィボナッチ数列のような関係にある数列の一般項およびその性質を探ることを目的としている。黄金比以外の貴金属比と関係をもつ数列を探るため、貴金属比を連分数展開して調べた。今回は黄金比（第１貴金属比）とフィボナッチ数列（第１貴金属数列）の性質をもとに、第 n 貴金属数列の一般項を求めることを目標とする。

キーワード　貴金属数列、連分数表示、パスカルの三角形

２．研究の背景と目的

貴金属比に興味を持ち調べていくうちに、黄金比にだけフィボナッチ数列という関係がある数列があることに気づき、他の貴金属比にも同様の関係にある数列が存在するのではないかと考え、研究を始めた。今回は黄金比（第１貴金属比）とフィボナッチ数列（第１貴金属数列）の性質をもとに第 n 貴金属数列の一般項を求めることを目標にする。

３．研究内容

３－１　貴金属比・貴金属数とは

$n \in \mathbb{N}$ に対して、２次方程式

$$x^2 - nx - 1 = 0$$

の正の実数解 $\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ のことを**第 n 貴金属数**という。

貴金属数を幾何的に考えると、図１のような縦１，横 x の長方形の中に、縦の辺を１辺とする正方形を n 個並べたとき、残りの部分（図１の影の部分）が元の長方形と相似になるような横の辺の長さ x と見ることができる。

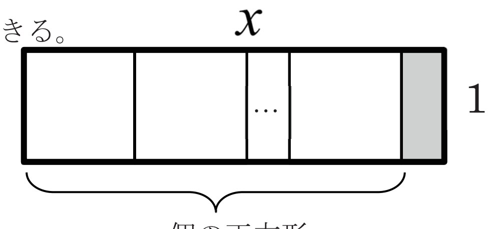

図１　第 n 貴金属数の視覚化

実際、相似関係より、$1 : x = (x-n) : 1$ なので、$x^2 - nx - 1 = 0$ を得る。

また第 n 貴金属比を、$1 : \dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ で表される比として定める。$n=1$ を貴金属比に代入すると、$1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ になり、**黄金比**になる。同様にして、$n = 2, 3$ 代入すると、

$n=2$ のとき、$1:1+\sqrt{2}$

$n=3$ のとき、$1:\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

となり、それぞれ**白銀比**、**青銅比**とよばれている。

このことから、第 1 貴金属比、第 2 貴金属比、第 3 貴金属比をそれぞれ「黄金比」、「白銀比」、「青銅比」という。

3―2　貴金属数列とは

貴金属数列とは、貴金属数を連分数表示したときの分子を羅列して得られる数列のことをいう。この数列について例を用いてわかりやすく説明する。

3―2―1　第 1 貴金属数列

黄金比（第 1 貴金属比）の連分数を用いる。黄金数は

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

と連分数展開できることが知られている。

これを用いて、深さが k までの連分数を順に計算すると、

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\cdots$$

となる。この分数の分子を並べてできる数列 $\{a_n\}$ は、

$$\{a_n\}:1,2,3,5,8,13,21,\cdots$$

であり、隣接二項の比 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が黄金比に収束している。

この数列 $\{a_n\}$ を**第 1 貴金属比数列**とする。

この数列の性質を見てみると 1 つ前の項と 2 つ前の項の和が次の数字を作っていることがわかる。この性質はフィボナッチ数列と同じである。

第 1 貴金属数列はフィボナッチ数列の第 2 項から始まる数列になっている。しかし、性質的には差異が無いので同等のものを見なすことにする。

3―2―2　第 2 貴金属数列

次に白銀比や青銅比の連分数展開から得られた数列について考えてみる。

はじめに、白銀比（第 2 貴金属比）の連分数を用いる。白銀数は

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

と連分数展開できることが知られている。

これを用いて、深さが k までの連分数を順に計算すると、

$$\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{12}{5},\frac{29}{12},\frac{70}{29},\frac{169}{70},\frac{408}{169},\cdots$$

となる。この分数の分子を並べてできる数列 $\{b_n\}$ は、

$$\{b_n\}:2,5,12,29,70,169,408,\cdots$$

である。この数列 $\{b_n\}$ を**第 2 貴金属数列**とする。

3―2―3　第 3 貴金属数列

この場合は青銅比（第 3 貴金属比）の連

分数を用いる。青銅数は

$$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cdots}}}$$

と連分数展開できることが知られている。

これを用いて、深さが k までの連分数を順に計算すると、

$$\frac{3}{1},\frac{10}{3},\frac{33}{10},\frac{109}{33},\frac{360}{109},\frac{1189}{360},\frac{3927}{1189},\cdots$$

となる。この分数の分子を並べてできる数列 $\{c_n\}$ は、

$$\{c_n\}:3,10,33,109,360,1189,3927,\cdots$$

である。この数列 $\{c_n\}$ を**第 3 貴金属数列**とする。

３—３　貴金属数列の漸化式

ここまで貴金属数列の例となる 3 つの数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ を導いてきた。この 3 つの数列の関係性を元に第 n 貴金属数列について考える。3 つの数列の関係性を調べるためにそれぞれの数列の漸化式を考えてみる。

【第 1 貴金属数列の漸化式】

$$\{a_n\}:1,2,3,5,8,13,21,\cdots$$

フィボナッチ数列の性質上、2 つ前の項の数と 1 つ前の項の数を足し合わせたものが次の項を作っている。この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k=a_{k-2}+a_{k-1}\quad(k\geq 3)$$

を満たしている。

【第 2 貴金属数列の漸化式】

$$\{b_n\}:2,5,12,29,70,169,408,\cdots$$

この数列をよく見てみると、2 つ前の項の数と 1 つ前の項の数を 2 倍したものを足し合わせることで､次の項を作っている。この数列の第 k 項 b_k は

$$b_k=b_{k-2}+2b_{k-1}\quad(k\geq 3)$$

を満たしている。

【第 3 貴金属数列の漸化式】

$$\{c_n\}:3,10,33,109,360,1189,3927,\cdots$$

この数列の特徴は､2 つ前の項の数と 1 つ前の項の数を 3 倍したものを足し合わせることで次の項の数を作っている。ゆえに、この数列の第 k 項 c_k は

$$c_k=c_{k-2}+3c_{k-1}\quad(k\geq 3)$$

を満たしている。

【第 n 貴金属数列の漸化式】

これまで、$n=1,\ 2,\ 3$ のとき、黄金数、白銀数、青銅数数の連分数展開をそれぞれ用いた貴金属数列について調べた。上の求めた 3 つの漸化式から、第 n 貴金属数列の漸化式はどのようになるのか考える。

3 つの漸化式を見てみると第 $(k-1)$ 項の係数が異なっていることがわかる。これを表で整理すると、表 1 のようになる。

表 1　第 n 貴金属数列の第 $(k-1)$ 項の係数

第 n 貴金属数列	第 $(k-1)$ 項の係数
$n=1$	1
$n=2$	2
$n=3$	3

このことから、第n貴金属数列$\{x_k\}$を、第$(k-1)$項x_{k-1}の係数がnである漸化式

$$x_k = x_{k-2} + n \cdot x_{k-1} \quad (k \geq 3)$$

により定義する。

３—３—１　貴金属数列の漸化式の性質

このようにして定義した第n貴金属数列$\{x_k\}$の各項を、nを用いて記述すると、

$$x_1 = n$$
$$x_2 = n^2 + 1$$
$$x_3 = n^3 + 2n$$
$$x_4 = n^4 + 3n^2 + 1$$
$$x_5 = n^5 + 4n^3 + 3n$$
$$x_6 = n^6 + 5n^4 + 6n^2 + 1$$
$$x_7 = n^7 + 6n^5 + 10n^3 + 4n$$
$$x_8 = n^8 + 7n^6 + 15n^4 + 10n^2 + 1$$
$$x_9 = n^9 + 8n^7 + 21n^5 + 20n^3 + 5n$$
$$x_{10} = n^{10} + 9n^8 + 28n^6 + 35n^4 + 15n^2 + 1$$
$$\vdots$$

となる。n^kの項の係数に注目してみると、図２のようにパスカルの三角形になることを発見した。

	n^0	n^1	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
x_1		1									
x_2	1		1								
x_3		2		1							
x_4	1		3		1						
x_5		3		4		1					
x_6	1		6		5		1				
x_7		4		10		6		1			
x_8	1		10		15		7		1		
x_9		5		20		21		8		1	
x_{10}	1		15		35		28		9		1

図２　係数の並びとパスカルの三角形

３—３－２　貴金属数列の一般項

次に、第n貴金属数列$\{x_k\}$の一般項については、以下の結果を得た。

定理１

第n貴金属数列$\{x_k\}$の一般項は

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} \times \left\{ \left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2} \right)^{k+1} \right\}$$

で与えられる。

（証明）まず、$x_1 = n,\ x_2 = n^2 + 1$であり、

$$x_k = x_{k-2} + n \cdot x_{k-1} \quad (k \geq 3) \quad \cdots①$$

が成り立つ。

特性方程式$t^2 - nt - 1 = 0$を解くと、

$$t = \frac{n \pm \sqrt{n^2+4}}{2}.$$

そこで、

$\alpha = \dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2},\ \beta = \dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}$とおく。

解と係数の関係から、

$$\alpha + \beta = n \quad \cdots②, \qquad \alpha\beta = -1 \quad \cdots③$$

すると、①は

$$x_n = (\alpha + \beta) x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2}$$

と変形できるため、

$$x_k - \alpha x_{k-1} = \beta(x_{k-1} - \alpha x_{k-2}) \quad \cdots④$$
$$x_k - \beta x_{k-1} = \alpha(x_{k-1} - \beta x_{k-2}) \quad \cdots⑤$$

を得る。

いま、$k \geq 3$とする。

④において、$x_{k-1} - \alpha x_{k-2} = y_{k-2}$とおくと、

$y_{k-1}=\beta y_{k-2}$から、数列$\{y_k\}$は初項が

$$y_1=x_2-\alpha x_1=(n^2+1)-\alpha n$$
$$=n^2-\alpha n+1$$

で公比がβの等比数列である。

ゆえに、$y_{k-2}=(n^2-\alpha n+1)\beta^{k-3}$となる。

ここで、$x_{k-1}-\alpha x_{k-2}=y_{k-2}$ゆえ、

$$x_{k-1}-\alpha x_{k-2}=(n^2-\alpha n+1)\beta^{k-3},$$

つまり、

$$x_k-\alpha x_{k-1}=(n^2-\alpha n+1)\beta^{k-2} \quad \cdots ⑥$$

を得る。

同様に、⑤において、$x_{k-1}-\beta x_{k-2}=z_{k-2}$とおくと、$z_{k-1}=\alpha z_{k-2}$から、数列$\{z_k\}$は初項が$z_1=n^2-\beta n+1$, 公比が$\alpha$の等比数列である。

ゆえに、$z_{k-2}=(n^2-\beta n+1)\alpha^{k-3}$となる。

ここで、$x_{k-1}-\beta x_{k-2}=z_{k-2}$ゆえ、

$$x_{k-1}-\beta x_{k-2}=(n^2-\beta n+1)\alpha^{k-3},$$

つまり、

$$x_k-\beta x_{k-1}=(n^2-\beta n+1)\alpha^{k-2} \quad \cdots ⑦$$

を得る。

⑥, ⑦からx_{k-1}を消去して、x_kについて解くと、

$$(\alpha-\beta)x_k=(n^2+1)\left(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}\right)$$
$$-\alpha\beta n\left(\alpha^{k-2}-\beta^{k-2}\right)$$

ここで、$\alpha+\beta=n,\ \alpha\beta=-1$より、

$$(\alpha-\beta)x_k=\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}.$$

ゆえに、$x_k=\dfrac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$なので、

$$x_k=\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)^{k+1}\right\}$$

となる。■

３－４　貴金属数列の性質

ここでは、第n貴金属数列$\{x_k\}$の性質を示す。

３―４―１　貴金属数列の性質①

貴金属数列は隣接 2 項の比が収束するという性質がある。

定理２

第n貴金属数列$\{x_k\}$は、第n貴金属数$\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$に収束する。つまり、

$$\lim_{k\to\infty} x_k=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}.$$

（証明）$\alpha=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2},\ \beta=\dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}$とおく。

$$x_k=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\sqrt{n^2+4}},\ x_{k+1}=\frac{\alpha^{k+2}-\beta^{k+2}}{\sqrt{n^2+4}}$$

より、

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{\alpha^{k+2}-\beta^{k+2}}{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}=\alpha\cdot\frac{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{k+2}}{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{k+1}}$$

である。すると、

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\times\frac{2}{n+\sqrt{n^2+4}}$$

$$=\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{n+\sqrt{n^2+4}}=\frac{1-\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}}$$

より、$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$ であることから、

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k+2}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k+1}=0$$

ゆえ、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}x_k=\alpha=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$. ■

３―４―２　貴金属数列の性質②

貴金属数列は他にも隣接 2 項の間に、以下の関係が成り立つ。

定理３

第 n 貴金属数列 $\{x_k\}$ の隣接する 2 項は互いに素である。

（証明）x_k と x_{k-1} が共通の因数 p （$p\geq 2$）をもつと仮定すると、

$$x_k=lp,\ x_{k-1}=mp\quad(l,m\in\mathbb{Z})$$

と表される。漸化式より、

$$x_{k-2}=x_k-nx_{k-1}$$
$$=lp-mnp=(l-mn)p$$

となり、x_{k-2} も p の倍数なので x_{k-1} と x_{k-2} も共通因数 p をもつ。

これを繰り返すと、x_2 と x_1 も共通因数 p をもつ。 …(*)

ここで、$x_2=n^2+1$ と $x_1=n$ が共通因数 p をもつことから、

$$x_2=sp,\ x_1=tp\quad(s,t\in\mathbb{Z})$$

と表すと、$sp=(tp)^2+1=t^2p^2+1$ なので、整理すると

$$sp-t^2p^2=1$$

となる。このとき、$p(s-t^2p)=1$ であり、$p\in\mathbb{Z},\ s-t^2p\in\mathbb{Z}$ なので、

$$(p,\ s-t^2p)=(\pm1,\ \pm1)\quad(\text{複号同順})$$

とわかる。これは $p\geq 2$ に矛盾する。

したがって、x_2 と x_1 は互いに素である。

ゆえに、 (*)は x_2 と x_1 が互いに素であることに矛盾するので、第 n 貴金属数列 $\{x_k\}$ のすべての隣接 2 項は互いに素である。■

４．今後の課題

第 n 貴金属数列の漸化式を得たことから発見したパスカルの三角形との関係のメカニズムを解明したい。また、第 1 貴金属数列の性質をもとに、今回発見した以外の性質についても、第 n 貴金属数列へと一般化したい。

５．参考文献

[1] 岩本誠一，江口将生，吉良知文，「黄金・白銀・青銅－数と比と形と率と－」, 九州大学経済学会, 經濟學研究 74(4), p. 1-19 (2008)

[2] A. Beutelspacher, B. Petri 著，柳井浩訳,「黄金分割－自然と数理と芸術と－」, 共立出版 (2005)