美しい数列の世界を探る

5年A組　奥野　俊輔

指導教員　川口　慎二

１．要約

私は、数学オリンピックの問題について研究している。今回は数学オリンピックに出題された組合せと数列の問題に関して、模範解答だけでなく、別の視点からも考え、一般化および考察を行うことを目標とした。

キーワード　数学オリンピック、漸化式、フィボナッチ数列

２．研究の動機、背景と目的

私は、数学の問題を解くことが好きで、その解説に別解があると、そのような解き方もあるのかと認識し、関心を持つことが多かった。そこで、自分でも問題を別の視点からも見て、問題を一般化して議論し、何か活用できるような形にしたいと考えた。

今回は組合せと数列について考察を行った。

３．研究内容

３－１　組合せの問題

次の問題は、参考文献[1]において、組合せに分類されていた。

<u>問題１</u>

10桁の自然数で、各桁が2と3のみからなり、3が2つの連続する桁にあらわれないようなものは、全部で何個あるか。

＜IMC2008 A5＞(参考文献[1] 2.54)

（解答）

題意を満たす10桁の自然数全体の集合をAとし、Aの中で3をちょうどk個含む数全体をA_kとする。3は連続して並ばないから、$0 \leqq k \leqq 5$である。$a \in A_k$をとり、aの先頭に32を、末尾に23を付け加えてできる14桁の自然数を$f(a)$とし、$f(a)$を十進表記したとき、$(i-1)$番目とi番目の3の間に並んだ2の個数をb_i $(0 \leqq i \leqq k)$とすると、$k + b_0 + b_1 + \cdots + b_k = 12$が成り立つ。$c_i = b_i - 1$とすれば、$A_k$の要素の個数$\# A_k$は$c_0 + c_1 + \cdots + c_k = 11 - 2k$を満たす非負整数の組$(c_0, c_1, \cdots, c_k)$に等しい。これは$(k+1)$ 種類の中から$(11-2k)$個を選ぶ重複組合せの場合の数であるから、

$$\# A_k = {}_{k+1}H_{11-2k} = \frac{(11-k)!}{k!(11-2k)!}$$

である。kに1から5を代入して足すと、求める答えは144個である。■

この問題に対し、私は以下のように考えた。まずは実験をしてみよう

1桁のとき　2, 3の2個

2桁のとき　22, 23, 32の3個

3桁のとき　222, 223, 232, 322, 323 の5個

4桁のとき　2222, 2223, 2232, 2322, 2323, 3222, 3223, 3232の8個

5桁のとき　22222, 22223, 22232, 22322, 22323, 23222, 23223, 23232,

32222, 32223, 32232, 32322,
32323 の 13 個

これらの結果から、桁数を変化させたときの該当する自然数の個数はフィボナッチ数列になるのではないかと予想した。これを一般化して示す。

(2)と(2, 3)の組み合わせを並べ替えることで考える。これにより 3 が連続で並ぶことを防いでいるが、このままだと最初に 3 がくるパターンがカウントできないので、最初が 2 になるか 3 になるかで場合分けして考える。

（ⅰ）最初が 2 の場合

(2)と(2, 3)の組合せは、(2)の個数 a と(2,3)の個数 b の組 (a, b) を挙げると、(0, 5), (2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1), (10, 0)の 6 パターンで、それらを並び替えることでできる個数はそれぞれ 1 個、15 個、35 個、28 個、9 個、1 個である。

（ⅱ）最初が 3 の場合

最初を 3 として、残り 9 桁で考える。(2)と(2, 3)の組合せは、(2)の個数 a と(2,3)の個数 b の組 (a, b) を挙げると、(1, 4), (3, 3), (5, 2), (7, 1), (9, 0)の 5 パターンで、それらを並び替えることでできる個数はそれぞれ 5 個、20 個、21 個、8 個、1 個である。

したがって、（ⅰ）と（ⅱ）で求めた個数を合わせて、答えは 144 個である。

この考え方を一般化し、桁数を n 桁にして、題意を満たす自然数の個数を a_n とすると、次のような式が成り立つ。

$$\begin{aligned}a_n = {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-k}C_k + \cdots + {}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ + {}_{n-1}C_0 + {}_{n-2}C_1 + \cdots + {}_{n-k-1}C_k \\ + \cdots + {}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}C_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\end{aligned}$$

床関数や天井関数を外すと、

（ア）$n = 2m+1$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= {}_{2m+1}C_0 + {}_{2m}C_1 + \cdots + {}_{2m-k+1}C_k \\ &\quad + \cdots + {}_{m+1}C_m + {}_{2m}C_0 + {}_{2m-1}C_1 \\ &\quad + \cdots + {}_{2m-k}C_k + \cdots + {}_{m}C_m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m-k+1)!}{k!(2m-2k+1)!} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m-k)!}{k!(2m-2k)!}\end{aligned}$$

（イ）$n = 2m$ $(m = 1, 2, \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= {}_{2m}C_0 + {}_{2m-1}C_1 + \cdots + {}_{2m-k}C_k \\ &\quad + \cdots + {}_{m}C_m + {}_{2m-1}C_0 + {}_{2m-2}C_1 \\ &\quad + \cdots + {}_{2m-k-1}C_k + \cdots + {}_{m-1}C_m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m-k)!}{k!(2m-2k)!} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m-k)!}{(k-1)!(2m-2k+1)!}\end{aligned}$$

これらを計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}a_{2m+1} &= \frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{9+4\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^m}{9+4\sqrt{5}} \times \frac{17\sqrt{5}+38}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$a_{2m}=\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{\left(-3\sqrt{5}-7\right)}{2\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^m}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{21\sqrt{5}+47}{2\sqrt{5}}$$

これは、$n=1$のときのフィボナッチ数列の第 3 項の 2 に等しく、$n=0$のときも一つ前の第2項である 1 と等しくなる。

これがフィボナッチ数列であることを示す。

（a）第k項が偶数番目の項であり、第$(k+1)$項が奇数番目の項であるとき

$$\begin{aligned}
&a_k+a_{k+1}\\
&=\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{-\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{55\sqrt{5}+123}{2\sqrt{5}}\\
&=\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{k+2}{2}}}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{-3\sqrt{5}-7}{2\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{k+2}{2}}}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{21\sqrt{5}+47}{2\sqrt{5}}\\
&=a_{k+2}
\end{aligned}$$

（b）第k項が奇数番目の項であり、第$(k+1)$項が偶数番目の項であるとき

$$\begin{aligned}
&a_k+a_{k+1}\\
&=\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{89\sqrt{5}+199}{2\sqrt{5}}\\
&=\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1}}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1}}{9+4\sqrt{5}}\times\frac{17\sqrt{5}+38}{\sqrt{5}}\\
&=a_{k+2}
\end{aligned}$$

よって、a_nはフィボナッチ数列の第 1 項と第 2 項を飛ばした数列になっているとわかる。また、同時にa_{n-2}を計算するとフィボナッチ数列の第n項が求められることも示すことができた。

さらに、3 がs個の連続する桁に現れないという条件に一般化して考える。いま、3 が 3 個の連続する桁に現れないとしたとき、(2), (3, 2), (3, 3, 2)の 3 つの組み合わせを並べ替えることにより、3 が最後の桁や、その次にも連続でくるパターンを数えるため、最後を(2), (2, 3), (2, 3, 3)の 3 パターンに分けて計算していけばよい。これがn桁の場合、個数を求める式を立式するのは難しいので、nに応じて個数がどのように変化していくのかを示すこととする。

表１　末尾の型ごとの個数

桁数	1	2	3	4	5	6
総数 a_n	2	4	7	13	24	44
2 (b_n)	1	2	4	7	13	24
23 (c_n)	(1)	1	2	4	7	13
233 (d_n)	(1)	1	1	2	4	7

項数が 1～4 のときは数え上げる。桁数が 3 であるとき、最後が 2 である個数は 4 個だが、それは 4 桁の場合で最後が 23 であるものの個数や、5 桁の場合で最後が 233 である者の個数と同じである。最後に 2 が現れるまでの項数は同じなので、(2), (2, 3), (2, 3, 3)の 3 パターンで表すことができる個数は同じである。つまり、最後が 2 である個数を b_n，最後が 23 である個数を c_n，最後が 33 である個数を d_n $(n \in \mathbb{N})$ とすると、

$$b_n = c_{n+1} = d_{n+2}$$

が成り立つ。また、いま求めたい自然数の総数は $b_n + c_n + d_n$ なので、言い換えると $b_{n-2} + b_{n-1} + b_n$ $(n \geq 3)$ ともいえる。

さらに、b_k, c_k, d_k のそれぞれの最後に 2 を加えたものが b_{k+1} の要素なので、

$$b_k + c_k + d_k = b_{k+1}$$

となる。よって、

$$b_{k-2} + b_{k-1} + b_k = b_{k+1} \ (k \geq 3)$$

なので、$\{b_n\}$ はトリボナッチ数列とわかり、$\{a_n\}$ も初項 2 のトリボナッチ数列といえる。

s がどんな自然数であっても同様の議論により、$\{a_n\}$ は初項を 2 として前の s 個を足すことで得られる s-ボナッチ数列であるといえる。

３－２　数列の問題

次の問題は参考文献において、代数に分類されていたが、数列に関する問題であり、解析学にも近いものである。

<u>問題２</u>

$a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で定まる実数列 $\{a_n\}$ がある。初項 a_0 がどんな正の実数であっても、$a_{1996} > 63$ であることを証明せよ。

＜南半球 1996 問 2＞(参考文献[1] 5.60)

（解答）

$a_0 > 0$ のとき、相加平均と相乗平均の関係から、$a_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_0} \geq 2\sqrt{a_0 \times \dfrac{1}{a_0}} = 2$ である。

そこで、$a_n > 0$ を仮定すると、

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} > a_n > 0$$

なので、$2 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1}$ である。

ここで、r を自然数として、$a_n \geq r$ ならば、$a_{n+r+1} > r+1$ であることを、背理法を用いて示していく。

いま、$a_{n+r+1} \leq r+1$ と仮定すると、

$a_{n+i} > \dfrac{1}{r+1}$ $(n \leq i \leq n+r)$ だから、

$$a_{n+r+1}=a_n+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{n+r}}$$
$$>r+(r+1)\times\frac{1}{r+1}=r+1$$
となり、仮定に矛盾する。よって、$a_{n+r+1}>r+1$である。したがって、
$$a_1\geq 2,\ a_4>3,\ a_8>4,\ a_{13}>5,$$
$$\cdots,\ a_{1952}=a_{1+3+4+\cdots+62}>62$$
である。しかし、ここから$a_{1996}>63$は導くことができないので、上の議論を、増加速度を変えて試してみる。

まず、$a_{n+2r+2}\geq r+2$であることを示す。つまり、$b_0=r\geq 3\ (r\in\mathbb{N})$として、$b_{k+1}=b_k+\dfrac{1}{b_k}$により数列$\{b_k\}$を定めるとき、$b_{2r+2}>r+2$であることを示す。

いま、$b_{2r+2}\leq r+2$とすると、
$$b_k=b_{k-1}+\frac{1}{b_{k-1}}>b_{k-1}+\frac{1}{b_k}$$
となり、同様にして、$b_{k-i}<b_k-\dfrac{i}{b_k}$を得る。よって、
$$r+2\geq b_{2r+2}=b_r+\sum_{i=1}^{r+2}\frac{1}{b_{2r+2-i}}$$
$$>b_r+\sum_{i=1}^{r+2}\frac{1}{b_{2r+2}-\dfrac{i}{b_{2r+2}}}$$
$$>b_r+\sum_{i=1}^{r+2}\left(\frac{1}{b_{2r+2}}+\frac{i}{b_{2r+2}^3}\right)$$
$$\geq b_r+\sum_{i=1}^{r+2}\left(\frac{1}{r+2}+\frac{i}{(r+2)^3}\right)$$
$$=b_r+1+\frac{r+3}{2(r+2)^2}$$
より、$b_r<r+1-\dfrac{r+3}{2(r+2)^2}<r+1$とわかる。ここで、前半部分と同様に変形して、
$$b_r=b_0+b_1+\sum_{i=2}^{r-1}\frac{1}{b_i}$$
$$>r+\frac{1}{r}+\frac{r}{r^2+1}+\sum_{i=1}^{r-2}\frac{1}{b_r-\dfrac{i}{b_r}}$$
$$>r+\frac{1}{r}+\frac{r}{r^2+1}+\sum_{i=1}^{r-2}\left(\frac{1}{b_r}+\frac{i}{b_r^3}\right)$$
$$\simeq r+\frac{1}{r}+\frac{r}{r^2+1}$$
$$+\frac{2r^2-8}{2r^2+6r+3}+\frac{r^2-3r+2}{2(r+1)^3}$$
となる。よって、
$$r+1>b_r+\frac{r+3}{2(r+2)^2}$$
$$>r+\frac{1}{r}+\frac{r}{r^2+1}+\frac{2r^2-8}{2r^2+6r+3}$$
$$+\frac{r^2-3r+2}{2(r+1)^3}+\frac{r+3}{2(r+2)^2}$$
$$>r+1$$
となり矛盾が生じる。

よって、$b_{2r+2}>r+2$である。したがって、$a_4\geq 3$より、
$$a_{12}>5,\ a_{24}>7,\ a_{40}>9,$$
$$\cdots,\ a_{1984}=a_{4+8+12+\cdots+124}>63$$
となり、$a_{1996}>a_{1984}>63$が示された。■

この考え方を使い、$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=0,1,2,\cdots)$の増加速度を議論していきたい。まず、$b_{2r+1}>r+2$であるかどうかを考える。$b_{2r+1}\leq r+2$と仮定して、同様に計算していく。

$$
\begin{aligned}
r+2 \geq b_{2r+1} &= b_r + \sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{b_{2r+1-i}} \\
&> b_r + \sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{b_{2r+1} - \frac{i}{b_{2r+1}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&> b_r + \sum_{i=1}^{r+1} \left(\frac{1}{b_{2r+1}} + \frac{i}{b_{2r+1}^3} \right) \\
&\geq b_r + \sum_{i=1}^{r+1} \left(\frac{1}{r+2} + \frac{i}{(r+2)^3} \right) \\
&= b_r + 1 - \frac{r+3}{2(r+2)^2}
\end{aligned}
$$

よって、$b_r < r+1+\dfrac{r+3}{2(r+2)^2} < b_r + \dfrac{4}{3}$.

ここで、

$$
\begin{aligned}
b_r &= b_0 + b_1 + \sum_{i=2}^{r-1} \frac{1}{b_i} \\
&> r + \frac{1}{r} + \frac{r}{r^2+1} + \sum_{i=1}^{r-2} \frac{1}{b_r - \frac{i}{b_r}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&> r + \frac{1}{r} + \frac{r}{r^2+1} + \sum_{i=1}^{r-2} \left\{ \frac{1}{r+\frac{4}{3}} + \frac{i}{\left(r+\frac{4}{3}\right)^3} \right\} \\
&\simeq r + \frac{1}{r} + \frac{r}{r^2+1} \\
&\qquad + \frac{54r^3+63r^2-273r-138}{2(3r+4)^3}
\end{aligned}
$$

となる。これを計算すると、$r \geq 1$ では矛盾は起きない。よって、問題２の解答のようにはならない。また、この証明では $b_{2r+1} < r+2$ を示したことにはならず、背理法を用いて示すことはできなかった。そこでグラフを用いて説明していく。先程の証明を用いて、

$$
\begin{aligned}
r+2 &\geq b_r + \sum_{i=1}^{r+1} \left(\frac{1}{b_{2r+1}} + \frac{i}{b_{2r+1}^3} \right) \\
&\geq b_r + \sum_{i=1}^{r+1} \left(\frac{1}{r+2} + \frac{i}{(r+2)^3} \right) \\
&= b_r + 1 - \frac{r+3}{2(r+2)^2}
\end{aligned}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
b_r &> r + \frac{1}{r} + \frac{r}{r^2+1} + \sum_{i=1}^{r-2} \left(\frac{1}{b_r} + \frac{i}{b_r^3} \right) \\
&> r + \frac{1}{r} + \frac{r}{r^2+1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-2} \left[\frac{1}{r+1+\frac{r+3}{2(r+2)^3}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{i}{\left\{ r+1+\frac{r+3}{2(r+2)^3} \right\}^3} \right]
\end{aligned}
$$

となる。これを計算すると $r=1$ では成立しないが、$r \geq 2$ では成立する。これをグラフにすると図１のようになる。

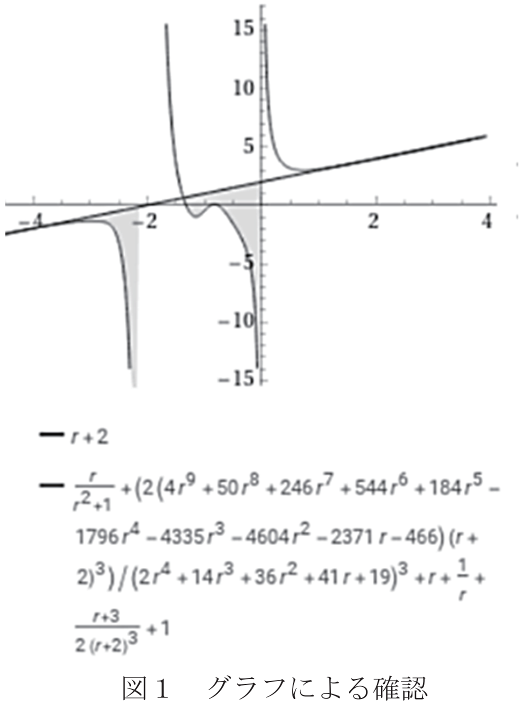

図１　グラフによる確認

上記より、2 つのグラフは $r \geqq 2$ でほぼ一致しているように見える。しかし、不等式の下側にあたる $r+2$ ではなく、b_r に関する多項式は近似によりわずかに小さくなっている。現時点では、この近似がどれだけ大小に影響を及ぼしているのかはわからない。この 2 つのグラフは、r を大きくしていくと確実に離れていく。

また、$a_1 = r = 2$ のとき、$a_6 \approx 3.83 < 4$ なので、$b_{2r+1} \le r+2$ は $r \ge 2$ で成立すると予想できる。つまり、

$$b_{2r+1} \le r+2 < b_{2r+2}$$

と予想できる。ゆえに、元の漸化式の増加速度が予想することができた。

４．今後の課題

問題 2 の不等式の近似の精密さをもう少しあげたい。マスター定理や Akra–Bazzi 法などこれを解決することにつながりそうな方法はいくつか見つけているので、これらを元に新たな検討ができれば良いと思う。

５．参考文献

[1] 「中学生からの数学オリンピック」,
安藤哲哉，数学書房(2006)

６．謝辞

本研究にあたり、ご指導くださいました川口先生、ありがとうございました。