

# カルマン渦と地球温暖化

5年B組 岸部 春輝  
指導教員 米田 隆恒  
藤野 智美

## 1. 要約

本研究では、地球の温暖化による地球の平均気温の上昇に伴うカルマン渦の挙動を考える。温度変化によるレイノルズ数への影響と、それをふまえた本渦体の運動、周波数の変化について調べた。

キーワード:カルマン渦, 地球温暖化, NS 方程式, アンドレートの粘度式

## 2. 研究の背景と目的

カルマン渦は規則的に発生し、建築物などに影響を及ぼすため、現在はそれを考慮した対策が講じられている。ところが、近年の地球温暖化による異常気象の急増により、様々な対策を見直す必要が出ている。カルマン渦の実被害は現在あまり見慣れないが考慮するべきだと思い本研究に至った。

## 3. 研究内容

### 3.1 カルマン渦の計算環境

#### 3.1.1 方針

カルマン渦のシミュレーションにあたり本研究で重要な数をおく。

慣性力と粘性力の比:  $Re$ (レイノルズ数)

周波数:  $f$

#### 3.1.2 計算するもの

本稿で用いる方程式は 2 次元非圧縮であるので

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ただし  $(u, v)$  は速度場の 2 次元ベクトル

$t$  は時間である。

(1) (2) を無次元化して整理すると

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu} \text{を用いることによって}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5)$$

のように整理できる。

これを、Mac 法 (時間ステップを 2 つに分解して解を更新) を利用してポアソン方程式をつくり計算解析をさせると、 $p$  についてポアソン方程式は

$$\nabla^2 p = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p = - \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = f \quad (6)$$

である。これを計算環境で再現した。

### 3.2 $Re$ に対する温度変化の影響

一般的に  $Re$  は動粘性係数  $\nu [m^2/s]$ 、密度を  $\rho [kg/m^3]$  流速代表値の円柱の直径か

ら  $Re = \frac{Ud}{\nu}$  である。また粘性係数  $\mu$  と動粘性係数  $\nu$  には  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

雲を単に液体の水であるとしてここでは考えるとアンドレードの粘度式を用い  $B$  比例定数、 $E_v$  粘性流動の活性化エネルギー、 $R$  気体定数、 $T$  絶対温度を用いて

$$\mu = B \exp\left(-\frac{E_v}{RT}\right) \quad (7)$$

表される方程式について

ある温度での粘度  $\mu_0$ 、温度変化後の粘度  $\mu'$  について計算すると

$$\mu_0 = B \exp\left(-\frac{E_v}{RT}\right) \quad (7^1)$$

$$\mu' = B \exp\left(-\frac{E_v}{RT'}\right) \quad (7^2)$$

とすると整理してまとめると

$$\ln \mu' = \frac{T}{T'} \ln \mu_0 \quad (8)$$

となるので  $T$  と  $\mu$  は反比例的に変化することがわかる。ここで  $Re$  は  $U, d$  が一定の時  $T$  が増加すると値が大きくなることがわかる。

### 3. 3 $Re$ と $St$ の関係

$St$  (ストローハル数) はカルマン渦が生成される時円柱で約 0.2 の値をとることが一般的に知られている。また  $St$  は  $f$  の導出過程であるので  $St$  を求めることにより周波数を求めることができる。ここで円柱の  $St$  数は  $Re$  数に対し依存性があるのでロシュコ (Roshko) の実験から約  $10^5$  までの値に対して以下の推測式は

$$St \approx 0.2035 \left(1 - \frac{21.0}{Re}\right) \quad (9)$$

が成り立つといわれていることから  $Re$  の値が増加すると  $St$  の値は増加することがわかる。ここで  $Re$  の値を変化させたときの周波数は

$$f = St \frac{U}{d}$$

から  $U, d$  が一定の時 (9) を踏まえて

$f, St, Re$  は一定の比をとるので

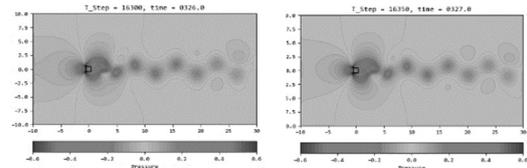
**周波数とレイノルズ数の関係**

( $Re = 70$  を基準とし  $f$  を 1 とする)

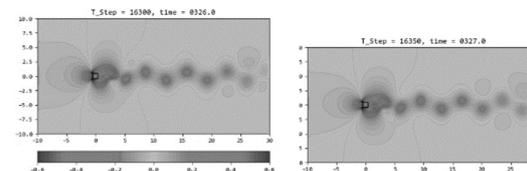
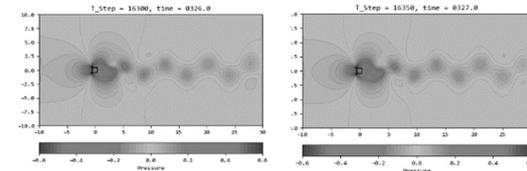
$Re$	50	70	80	200
$f$	0.9286	1	1.054	1.279

となった。これは  $Re$  の値に依存するので計算環境上で  $Re$  の値を変えて実装することにより確かめられる。

$Re = 70$

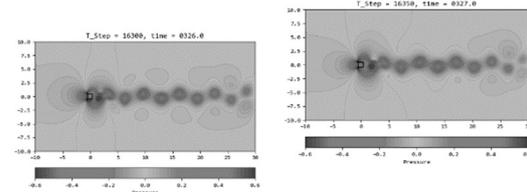


$Re = 60$



$Re = 80$

$Re = 120$



$Re$  の値が大きくなればなるほど渦の間隔が小さくなっていることがわかる。ここからカルマン渦の周波数は間接的に  $Re$  に支配されていることがわかる。

## 4. 結果

$T$  の値が増加することにより  $Re$  の値が大きくなりその結果  $f$  の値が微少だが変化するということが分かった。

## 5. 考察

今回は無次元数 $Re$ について温度変化による影響を考えたがこれでは外力としての熱エネルギーを考慮できていない可能性がある。

そのため 2次元非圧縮の外力項を含む NS 方程式を実装するべきだと思う。

## 6. 今後の展望

実装ができなかったが建物の固有振動数と $Re$ についての予測を立てる。

共振条件と $Re$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_{Re}}{2\pi}$$

となることは一般的に知られている。

そこである物体（建築物）を仮想したときこの物体の固有振動数をフックの法則から

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10)$$

から減衰係数を $c[N \cdot s/m]$ としたとき

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (11)$$

このときの減衰固有振動数 $\omega_d$ は

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

として求められるのでここで減衰を伴う強制振動に従うと求める強制振動による力の大きさ $F$ は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \omega_{Re} t \quad (12)$$

定常振動の式を

$$x = x_a \cos(\omega t - \varphi) \quad (13)$$

から振幅 $x_a$ と位相 $\varphi$ について

$$x_a = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega_{Re}}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega_{Re}}{\omega_n}\right)\right\}^2}} \frac{F}{k} \quad (14)$$

ここで一般的に $\frac{F}{k} = x_s$ とし $\frac{x_a}{x_s}$ の比をとるが

ここでは $F$ の値を求めるために振幅 $x_a$ を一定とすると(14)は以下のように

$$F = x_a k \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega_{Re}}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega_{Re}}{\omega_n}\right)\right\}^2} \quad (15)$$

ここから $\frac{\omega_{Re}}{\omega_n} = a$ とすると

$F$ に対しての変数 $a$ の変化を表す代表式は

$$(1 - a^2)^2 + (2\zeta a)^2 \quad (16)$$

ここで

(i)  $0 < a \leq 1$ のとき

(16)の値は $a \rightarrow 0$ になるにつれ1に近づきまた $a = 1$ で最小値をとる

(ii)  $1 \leq a$ のとき

(16)の値は $a$ の値の増加につれ発散するしたがって $F$ は $\omega_{Re}$ つまり $f$ の増加につれ大きくなる。

$\therefore F$ の値と $T$ の温度上昇は相関関係が見られると予想できる。

## 7. 参考文献

栗田 良夫 カルマン渦流量計(1979)

京都大学 2次元粘性流体のシミュレーション(1999)

構造計画研究所 固有振動数とは

(株)小野測器 減衰特性を表す係数

量子プロセス理工学専攻 強制振動

FC2 Home 流体力学

N.Miyamoto FE-19-TM-007 種々の断面形状における渦励振のストローハル数

二次元・非圧縮性・完全流体の力学(ラグランジュの渦定理とは何か)

気象庁気象研究所 雲の微物理過程の研究

## 8. 謝辞

今回の研究にあたり、顧問の米田先生、藤野先生にご指導いただきました。この場を借りて深くお礼申し上げます。