The background features five vertical columns of stylized, elongated shapes. Each shape is filled with a light blue color and has a thin red outline. The shapes are connected to each other and to the top and bottom horizontal lines by thin, dark blue vertical lines. The overall effect is a decorative border or pattern.

平成 22 年度

スーパーサイエンスハイスクール

サイエンス研究会 研究論文集

SUPER SCIENCE HIGHSCHOOL SCIENCE LABORATORY

NARA WOMEN'S UNIVERSITY SECONDARY SCHOOL

2010 年度 SSH 生徒研究論文集

目次

はじめに	p.1
奈良女子大学附属中等教育学校の SSH カリキュラム	p.2
研究論文	
物理班	
次世代型モーションキャプチャシステムの製作	p.5
バーサタイルコントローラーの開発に向けた構成要素の検証	p.15
抵抗ブラックボックスの法則性	p.25
太陽電池による距離の測定	p.27
マイクロ波の性質	p.31
LED 発電の研究	p.35
リニアモーターの研究	p.41
H8 マイコンによるマトリックス LED の制御	p.45
シミュレーションで交通渋滞を考える	p.51
PIC マイコンによる LED の制御	p.53
16 セグメント LED の制御	p.57
数学班	
ピタゴラス三角形の辺の長さに関する考察	p.59
フラクタル	p.83
黄金分割	p.88
結び目について	p.92
生物班	
ブレファリズマの膜形成反応についての研究	p.96
猿沢池の水質から七不思議を考える	p.100
プロトプラストの作成と細胞融合	p.112
音波と植物の成長の関連性	p.117
奈良公園のフン虫の研究	p.121
化学班	
金属陽イオン水溶液の分離操作	p.126
地学班	
天体までの距離の測定	p.131
火山の噴火	p.133

2010 年度 SSH サイエンス研究会 研究論文集

刊行にあたって

奈良女子大学附属中等教育学校では、本年度より、第Ⅱ期スーパーサイエンスハイスクール(SSH)研究開発をスタートいたしました。平成 17 年から 5 年間実施した第Ⅰ期 SSH において、理数に興味・関心のある生徒の課外活動として「サイエンス研究会」を創設し、数学・理科・科学技術に関する生徒の研究活動を、奈良女子大学をはじめとする国内外の研究諸機関と連携して支援してきました。

今年度からの第Ⅱ期 SSH においても、「サイエンス研究会」の活動を SSH 研究開発の大きな柱としております

本研究論文集は、数学班、物理班、化学班、生物班、地学班からなる「サイエンス研究会」の生徒たちが、自ら研究テーマを設定し、数学的リテラシーと科学的リテラシーを駆使し、どのように課題を解決していったか、その研究活動の軌跡であり、「サイエンス研究会」の生徒たちの課外活動の報告書ともいえるべきものであります。今年度も、生徒たちは、学内発表会を始め、各種の学会・科学コンテストに積極的に参加し、活発に活動成果を発表しました。

「サイエンス研究会」における活動において、さまざまな能力を持つ先輩後輩と互いに切磋琢磨し、時間をかけて 1 つのテーマを追求し、専門的なものの見方や考え方を学ぶことを通じて、論理的思考力や科学的態度を養うことは、将来どのような分野に進んでもその生徒にとって力となるものだと考えています。この研究活動が、単に知識や技能の集合体ではなく、狭い専門性を超えて、学問や研究に対する深い理解となってくれることを期待しています。今後さらに、「サイエンス研究会」が、しっかりと根を張り、枝を伸ばし、大木に育ってくれることを願っています。

本論文集が、全校の生徒たちの探究心・向上心をインスパイアし、自然科学的素養の育成に寄与し、さらには、今後の新たな科学教育の発展に寄与することを期待しております。皆様の忌憚のないご意見、ご助言、ご指導をいただければ幸いです。

最後になりましたが、SSH 運営指導委員の先生方、大学・研究機関の先生方、ご支援を賜りました皆様に、心より感謝申し上げますとともに、今後ともなお一層のご指導、ご支援いただきますようお願い申し上げます。

平成 23 年 3 月

奈良女子大学附属中等教育学校
校長 塚本 幾代
(生活環境学部教授)

2010年度教育課程表

奈良女子大学附属中等教育学校

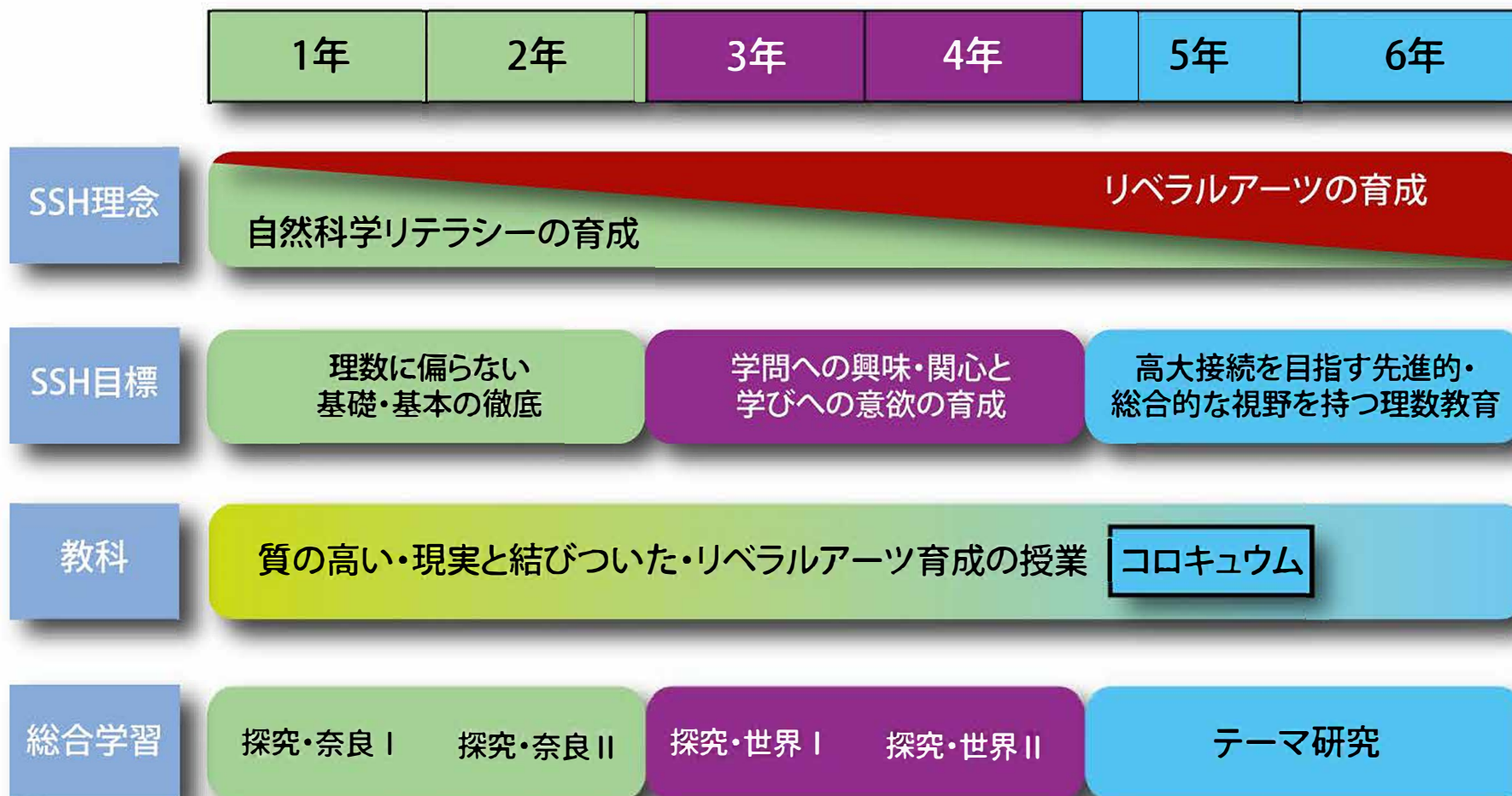
学年 時間	1年	2年	3年	4年	5年		6年		
	共通	共通	共通	共通	文系	理系	文系	理系	
1	国語基礎(4)	国語基礎(3)	国語総合(4)	国語総合(5)	現代文(2)		現代文(2)		
2					情報と表現(1)	現代社会(2)	古典(2)		古典(2)
3		社会・地理(3)					現代社会(2)	化学 I (3) 生物 I (3) 地学 I (3) *(3)	化学 I (3) *(3)
4					現代史(2)	現代史(2)			
5	数学基礎 I (4) ・代数 ・幾何	数学基礎 II (5) ・代数 ・幾何	数学探究 I A(3)	代数・幾何 II (3)			世界史B(3) 文化と社会(3) △(0)or(3)	生物 I (3) 物理 I (3) *(3)	化学 I (3) 生物 I (3) 地学 I (3) △(0)or(3)
6					情報と科学(1)	数学探究 I B(2)			
7	基礎理科 I (3)	基礎理科 II (4)	自然探究 I ・地球環境 (3)	自然探究 II ・物質とエネルギー ・生命科学 (4)			代数・幾何 III(3) 音楽 II (2) 美術 II (2) 生活デザイン II (2) △(0)or(2)or(3)	代数・幾何 III(3) *(3)	倫理(3) 音楽 III(2) 美術 III(2) 生活デザイン III (2) 数学特論 III IV(2) △(0)or(2)
8					音楽(2)	音楽(2)			
9	美術(2)	美術(2)	体育(3)	体育(2)			情報B(2)	体育(3)	体育(3)
10					工創基礎1 生活基礎1 (3)	工創基礎2 生活基礎2 (2)			
11	IE(3)	IE(3)	IE(Reading)(3)	IE(2)			IE(1)	IE(1)	IE(1)
12					IE(3)	IE(3)			
13	BE(1)	BE(1)	NET(1)	NET(1)			NET(1)	NET(1)	NET(1)
14					NET(1)	NET(1)			
15	道徳(1)	道徳(1)	探求・世界 I (2)	世界学(2)			Writing(0.5) NET(0.5) *(1)	数学特論 I II (2) △(0)or(2)	数理学(2) 倫理(2) 数学特論 I II(2) △(0)or(2)
16					HR(1)	HR(1)			
17	HR(1)	HR(1)	道徳(0.5)	道徳(0.5)			HR(1)	HR(1)	HR(1)
18					補講	補講			
19	探求・奈良 I (1)	探求・奈良 II (1)	補講	SSHテーマ研究 (1) △(0)or(1)			※テーマ研究(0.5) △(0)or(1)	※テーマ研究(0.5) △(0)or(1)	※テーマ研究(0.5) △(0)or(1)
20					探求・奈良 I (1)	探求・奈良 II (1)			

*選択必修: 標記の科目から必ず1科目を選択する

△自由選択: 選択しなくてもよいし、選択するときはその単位数になるよう標記の科目から選択する

6年の数学科の科目については、半期毎に単位認定を行う

奈良女子大学附属中等教育学校 中高一貫SSH概念図



奈良女子大学附属中等教育学校 SSH リテラシーとリベラルアーツ



奈良女子大学 他大学



附属中等教育学校

高大接続
カリキュラム

21 世紀のリベラルアーツ

自然科学リテラシー

授業・特別講義

コロキウム(対話)・学術の智

生活科学
リテラシー

人文社会科学
リテラシー

育成したい力のキーワード

- 言語能力・言語認識
- 批判的思考力
- 他者への寛容・理解
- 学び方

- 生命論
- 環境論
- 宇宙論
- 数理科学
- 科学技術社会論
-
- 人間とは何か
- 現代社会論
- 文化と社会
- 歴史探究
- 比較文化論
-

サイエンス研究会

- 「スーパー」な生徒の育成
- 科学の面白さの普及

数学的リテラシーの育成

科学的リテラシーの育成

生活科学リテラシーの育成

教材開発・出版

高大接続(学習面)

ESDに基づく海外連携
コア SSH

研 究 論 文

次世代型モーションキャプチャシステムの製作

4年A組 武田 優生

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は、独自に開発したハードウェアと Kinect を用いることにより、従来のものに比べて、非常に安価なモーションキャプチャシステムを製作することに成功した。

キーワード モーションキャプチャ、物理エンジン、Kinect、ジャイロセンサ、
画像処理、OpenNI、OpenGL、Bullet、3DCG、
ウェアラブルコンピューティング

2. 研究の背景

モーションキャプチャとは、実物の人物や物体の動きをデジタル化して記録する技術である。現在この技術は、映画のCG作成や、スポーツ選手の身体の動きなどのデータを収集するために使われている。

一般的に用いられている「光学式モーションキャプチャ」は、精度が高く、よりリアルなCG作成には欠かせない。しかし、複数のカメラやマーカ、専用のスタジオを用いて、人物や物体の動きを記録するため、動きが制限されてしまうだけでなく、モーションキャプチャを行う環境を用意するために、数千万円単位のコストがかかるという問題がある。

光学式モーションキャプチャの次に用いられている「機械式モーションキャプチャ」は、専用の装置を身につけてモーションキャプチャを行うため、光学式モーションキャプチャに比べ、非常に明るい場所や広い範囲を必要とする動きといった過酷な環境下でもモーションキャプチャを行うことができる。しかし、これもまた、専

用の装置を身につけるため、装置の重さなどによって動きが制限されてしまうという問題を抱えている。

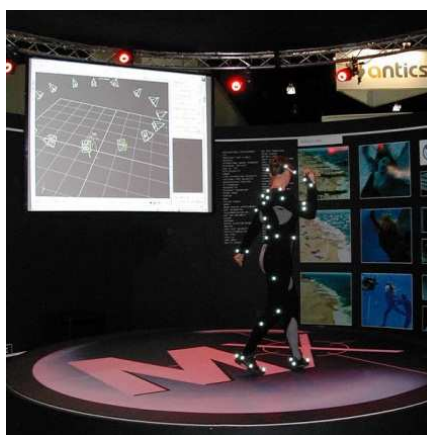


図1 光学式モーションキャプチャ
(Wikipedia より抜粋)

ところで、モーションキャプチャという技術は映画のCG作成と行った特殊な用途だけではなく、身近なものの操作に活用できるのではないかと考えられる。例えば、スマートフォンの普及と共に高機能化した「マルチタッチ機能」である。



図2 マルチタッチ機能を搭載したスマートフォン(iPhone4)

本来マルチタッチ機能は、複数の指の動きや位置情報を、タッチパネルを用いて取得することで、直感的な操作を可能にするものである。しかし、タッチパネルを用いて取得するため、2次元空間の位置や動きを取得することしかできない。また、公共の場に設置する場合、不特定多数の人が物理的に触れるため、衛生面での不安がある。

そこで、複数のカメラやマーカ、専用のスタジオを用意することなく、高精度なモーションキャプチャを実現することはできないかと私は考えた。

3. 本システムの概要

本システムは、Microsoft 社製ゲーム機 Xbox360 のコントローラーである Kinect と自作ハードウェアによって構成されている。

Kinect には、640*480 の画像を 30fps で出力できる RGB カメラと、その画像に対するカメラと物体の深度を取得する赤外線深度センサ、ユーザーの声を取得することができるマルチアレイマイクロフォン、そしてこれらの信号を処理するプロセッサが搭載されている。



図3 Kinect Microsoft 社製 Xbox360 コントローラ



図4 自作ハードウェア

また、自作ハードウェアには、2軸コンパスセンサと、2軸ジャイロセンサの2つのセンサ、これら2つのセンサの信号をワイヤレスでパソコンへと送信する XBee モジュールが搭載されている。

4. 研究内容

(1) 研究項目

【研究1】 OpenGL を用いて、3D オブジェクトを表示する。

【研究2】 Kinect から画像と深度センサの値を取得する。

【研究3】 Kinect を使い、ポインタッキングを行う。

【研究4】 回転運動の精度向上のため自作ハードウェアを製作する。

【研究5】 物理エンジンと組み合わせて、仮想空間の物体と干渉させる。

(2) 研究内容

[研究1] OpenGLを用いて、3Dオブジェクトを表示する。

OpenGLとは、Silicon Graphics社(SGI)が中心となって開発した2D/3D用グラフィックスのためのプログラムインターフェイスである。このOpenGLの動作確認をするため、立方体を表示することにした。立方体を表示するために必要な関数は、OpenGLにあらかじめ用意されているため、比較的簡単に動作確認をすることができた。

OpenGLを使用して立方体を表示するには、最低でも3つの関数が必要となる。まずはじめに、`glLightfv`で光源の位置を指定し、`glMaterialfv`という関数で、オブジェクトに対する光源の反射具合を設定する。最後に、`glutSolidCube(size)`を実行することで、立方体を表示させることができる。

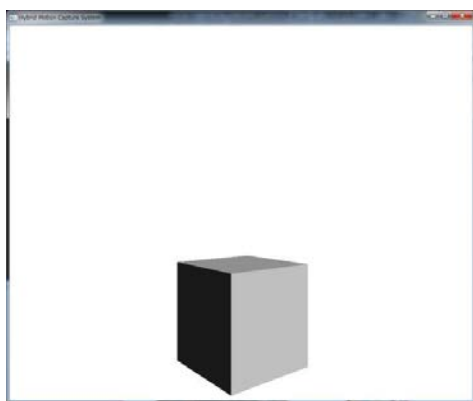


図5 OpenGLで立方体を表示する

次に、テクスチャのある3Dオブジェクトを表示することを試みた。しかし、OpenGL自体に3Dオブジェクトを読み込んで表示する機能がないため、

GLmetaseqというモデルローダを用いてメタセコイアという3DCGソフトのデータを読み込んだ。

ところが、このモデルローダでは、テクスチャとして貼りつけて使用する画像が、ファイル容量の大きい**bmp**ファイルと**tga**ファイルしか読み込むことができない。ファイル容量が大きいと、性能の良いコンピュータでしかプログラムを実行することができないという問題や、実行したとしても、画面を書き換える回数が少なくなってしまう、動作がカクカクしてしまうという現象が発生してしまう。

そこで、**libpng**というPNGデコーダをプログラムに組み込んだ。**Libpng**とは、PNG方式で圧縮された画像を展開するためのライブラリで、PNG公式のリファレンスライブラリであるため、PNGの仕様のほぼすべてをサポートしている。

このライブラリを使用すると、ファイル容量の少ないPNGファイルをテクスチャに使うことができる。

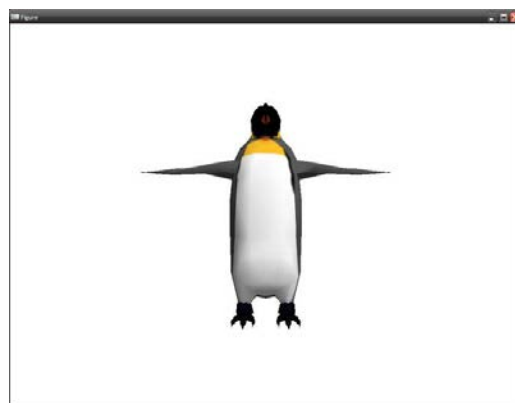


図6 PNG読み込みに対応したモデルローダでペンギンを3D表示している様子

【研究2】 Kinect から画像と深度センサーの値を取得する。

Kinect は、開発コードネームが Project Natal と呼ばれ、コントローラーを用いずにゲームの操作を行うゲームシステムを確立するために開発されてきた。実際の用途としては、ジェスチャーや音声認識を行い、直感的にゲームを操作するといったものである。

この Kinect の出力端子は USB であるため、パソコンに接続して制御することで、モーションキャプチャシステムに転用することができる。また、Microsoft 側も転用することを容認しており、Kinect の USB 接続はあえて暗号化していないという。



図7 Kinect と接続できる USB ケーブル

Kinect の制御には、OpenNI という Natural Interaction のためのフレームワークを用いて、ソフトウェアから制御する。Microsoft 社に Kinect の深度センサを提供している、PrimeSense 社や OpenCV を提供している WillowGarage 社らが立ち上げた OpenNI.org で提供されているオープンソースのライブラリである。

OpenNI には、Kinect に接続を行うデバイス部とそのデータの画像解析を行う、ミドルウェア部の2つを統合して扱うインターフェイスになっている。そのため、OpenNI をプロジェクトに追加し、Kinect に接続すると、Kinect からカメラの画像と赤外線深度センサからのデータを取得することができる。

赤外線カメラの画像と赤外線深度センサを重ねて表示すると、図8のように表示することができる。



図8 OpenNI でカメラと赤外線深度センサのデータを重ねて表示

また、ミドルウェア部の一部は、Prime Sensor NITE と呼ばれるプログラムをサポートしており、これのミドルウェアを使用すると、Kinect の画像データの中から背景を差分し、人物だけをトラッキングすることができる。

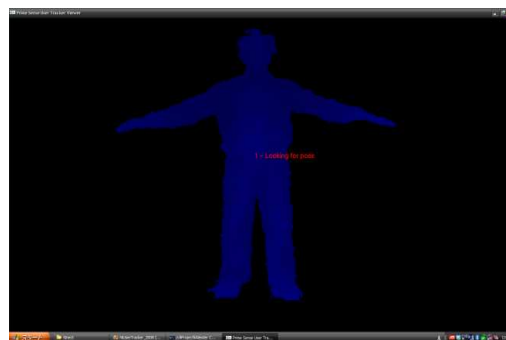


図9 NITE と Kinect を使い、人物トラッキングを行っている様子

【研究3】 Kinect を使い、ボーントラッキングを行う。

Prime Sensor NITE は、スケルトン処理と呼ばれる骨格モデルを表示するボーントラッキングも行うことができる。

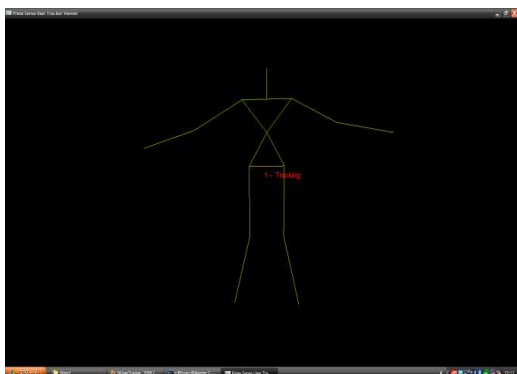


図 10 Prime Sensor NITE を使い、ボーントラッキングを行っている様子

これらを組み合わせることにより、人物をトラッキングしながら骨格モデルを表示することができた。

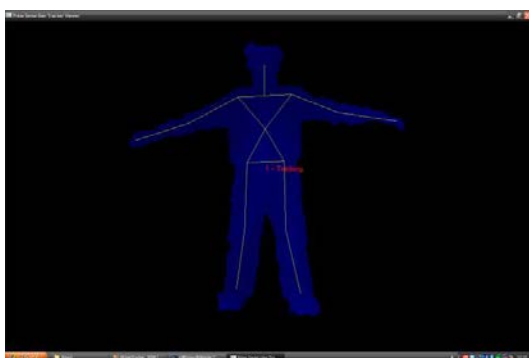


図 11 人物をトラッキングしながら、ボーンを表示している様子

【研究4】 自作ハードウェアと組み合わせて、精度を向上させる。

研究3により、Kinect を用いてボーントラッキングを行うことができた。

しかし、Kinect は深度センサを用いて、ユーザーを認識するため、その性質上、奥行きの変化が少ない運動、つまり回転運動に対してはうまく検知することができなかった。この動きは、タッチパネルとして使う場合には特に必要のない動きだが、遠隔会議システムなどを作成するときには必要となる。

そこで、自作のハードウェアを使い、Kinect のボーントラッキングの回転運動補正を行った。

自作のハードウェアには前述した通り、2軸のコンパスセンサと2軸のジャイロセンサの2つのセンサを搭載している。

2軸のコンパスセンサは、ヨー角の回転(Z軸の回転)を取得するために用いられる。このセンサとして、Honeywell International 社製2軸コンパスセンサ HMC6352 を採用した。



図 12 HMC6352 搭載 Sparkfun 社製2軸コンパスモジュール

このセンサの特徴は、I2C インターフェイスを用いて、2本のデータ線で現在の角度を、北向きを 0° とした絶対的な回転角を出力することである。分解能は 0.1° と、モーションキャプチャを行うには十分な精度である。これにより、ヨー角の角度は正確に取得できる。

しかし、このコンパスセンサは水平な平面上で使われることを想定しているため、許容範囲を超えて大きく傾いた状態で測定すると誤差が非常に大きくなってしまふ。そのため、ロール角の回転(X軸の回転)、ピッチ角の回転(Y軸の回転)の取得には使うことができない。

そこで、2軸のジャイロセンサを用いて、ロール角、ピッチ角の回転運動を取得することにした。今回、このセンサとして村田製作所の圧電振動ジャイロセンサ「ジャイロスター」を採用した。



図13 村田製作所の圧電振動ジャイロセンサ「ジャイロスター」を搭載した秋月電子通商の圧電振動ジャイロモジュール

しかし、ジャイロセンサであるため、特性上、相対的な値しか出力することができない。また、絶対的な回転角を出力するわ

けではないため、使用しているうちに誤差が大きくなってしまふ問題や、圧電振動ジャイロセンサゆえに、ドリフトと呼ばれる基準点が外部の振動によりずれてしまふ現象が起こり、正確な回転角が取得できなくなってしまうという問題がある。

そこで、このセンサを補正する演算を追加し、2軸ジャイロセンサだけでもロール角の回転とピッチ角の回転を取得できるようにした。

次に、これら2つのセンサのデータをPCへワイヤレスで送信するために、XBeeモジュールを搭載した。XBeeとは、IEEE802.15.4に準拠した2.4GHz帯無線通信モジュールで、115,200bpsの転送速度でPCと通信することができる。日本でのTELECの適応を受けており、マイコンと接続することで比較的簡単に無線通信をすることができる。XBeeにはさまざまなシリーズがあるが、今回は、「XBee Series1 Chip Antenna Model」を採用している。



図14 XBee Series1 Chip Antenna Model

また、自作ハードウェア側からのデータを受信できる距離を長くするため、PC側には10cm程度の長さを持つアンテナを外付けにした「XBee Series1 U.FL Antenna Model」を使用した。



図 15 XBee Series1 U.FL Antenna Model

外付けアンテナには、TELEC(財団法人テレコムエンジニアリングセンター)の認証が通っている、10cm程度のU.FLコネクタ接続のアンテナを使用した。

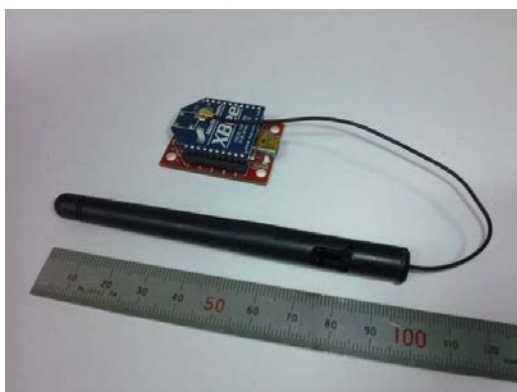


図 16 外付けアンテナ

これにより、センサ側の子機XBeeでは省スペースなチップアンテナを採用しながら、より長い転送距離を稼ぐことができた。

また、転送距離を延ばすためには、外付けのU.FLアンテナを垂直に立てる必要がある。そこで、設置を容易にするため、専用のケースの図面をCADで作成し、CNCフライス(コンピュータ数値制御フライス盤)を用いて2mmの亚克力板から、6枚の亚克力板を削りだし、組み立てた。



図 17 PC側XBee専用ケース

今回の用途では、PC側にセンサからのデータを受信するホスト用のXBeeが1台なのに対し、センサ側のXBeeが複数存在するため、スタートポロジ(ブロードキャスト)方式でデータを転送している。これにより、PC側のXBeeでセンサ側のXBeeを一括管理でき、子機側からのデータを一括受信することに成功した。

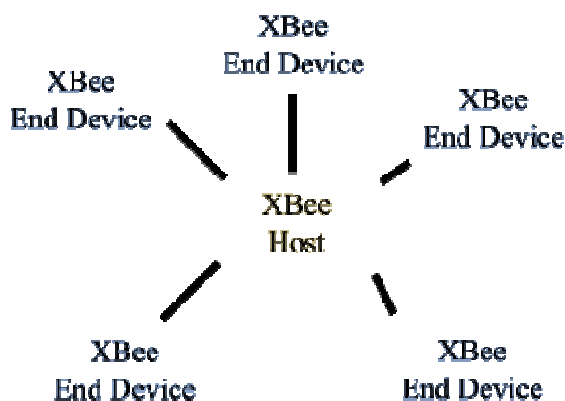


図 18 スタートポロジ
(ブロードキャスト)方式

さらに、この複数ある XBee に対して、ハードウェアの固有の名前と ID を振り分けて登録するソフトウェアを Visual Basic を用いて作成した。

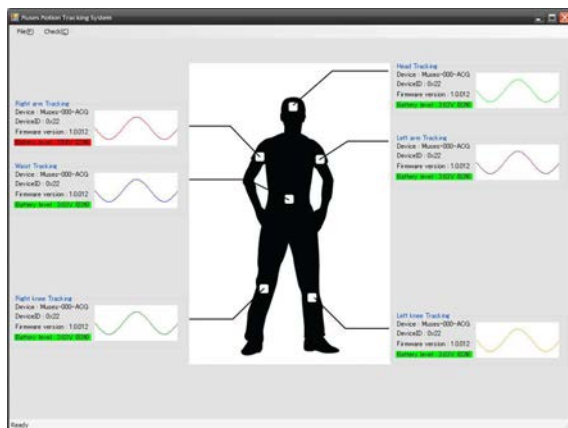


図 19 自作ハードウェア登録ソフト

このソフトウェアを使うことで、設置した自作ハードウェアの固有の名前と ID を登録し、CSV ファイルとして書き出すことができる。この情報をもとに、Kinect とハードウェアを組み合わせる。

[研究 5] 物理エンジンと組み合わせ、仮想空間の物体と干渉させる。

Kinect と自作ハードウェアを用いてモーションキャプチャを行うことで、仮想空間上の物体に触れることができるが、それらには、現実世界のような物理法則が働かないため現実味に欠ける。

そこで、物理エンジンを搭載することを考えた。仮想空間の物体ごとに、衝突判定や引力、反発係数、摩擦係数といったさまざまな係数を計算することで、現実世界の物理法則を働かせることができる。

物理エンジンとして、AMD が中心となって開発しているオープンソースな物理演算エンジンの”Bullet”を使用した。

Bullet は物理演算エンジンとして最適化されており、非常に高速に物理演算を行うことができる。

さまざまな係数を指定して Bullet でシミュレーションを行うとその結果が出力される。その出力された情報をもとに、OpenGL でオブジェクトを描画すれば、物体はまるで現実空間での動きかのように振る舞うことができる。

5. 考察

今回の研究で、Kinect を用いて全身の動きを取得することができたが、[研究 3]、[研究 4]、[研究 5]において、いくつかの問題点が挙げられる。

[研究 3 の問題点]

Prime Sensor NITE を用いてポインタラッキングを行ったが、激しい動きをするとポインタラッキングから外れてしまう。

これは、Kinect のカメラの更新周期が 30fps(秒間 30 枚)のため、高速な動きに対応できないからである。

そこで、自作ハードウェアを改良して高速な動きは自作ハードウェア側で取得し、Kinect のボーントラッキングに補正をかけることで改善ができるのではないかと考えている。

[研究 4 の問題点]

今回は、自作ハードウェアを汎用ユニバーサル基板上で作成したため、装置が大型化してしまった。また、コンパスセンサの出力はデジタル、ジャイロセンサの出力はアナログと、デジタル出力とアナログ出力が混在してしまい、アナログ出力であるジャイロセンサにノイズが乗ってしまうときがあった。

次回、ハードウェアを作成するときにはプリント基板を発注し、より小型化する。、使用する部品を再検討し、ノイズが乗りにくいように改善したいと考えている。

[研究 5 の問題点]

今回は、物理エンジンに **Bullet** を用いたが、これだけでは条件を指定するための係数が不足する場合があった。また、物理エンジンが非常に CPU パワーを必要とするため、最新の PC でしかまともに動作させることができなかった。

今後、改良していくにつれて、**Bullet** を徐々に廃止し、CPU パワーをあまり使わない物理エンジンを自分で作成し、実際に使用していきたいと考えている。

6. 今後の課題

物理エンジンを搭載することで、仮想空間がより現実に近い世界になった。

これらの技術に加え、私が今までに研究してきた母音認識システムを追加すれば、仮想空間上に表示した人物のモデルのモーフィング(口パク)を行うことができると考えられる。

これらの技術をすべて使うことができれば、高性能な遠隔会議システムを作成することができるのではないかと考えている。

今までの遠隔会議システムは、Web カメラからの画像とマイクからの音声をたよりに会議を行っていたが、このシステムが完成すれば、仮想空間上で実際に会議を行うことができる。さらに、身振り手振りを Kinect が検出し、話す内容に応じて口が動けば、より相手に意思が伝わりやすいのではないかと考えている。

また、現実のオブジェクトを、あらかじめ Kinect を用いて 3D オブジェクト化し、RFID(近距離無線個体識別技術)を使い登録しておけば、現実のオブジェクトを画面に近づけるだけで仮想空間上に表示することができるだろう。

これらをふまえて、今後は自作ハードウェアの小型化と会議システムの開発を行っていきたい。

7. 参考文献

[1] OpenNI - OpenNI.org

<http://www.openni.org/>

[2] MSDN ライブラリ - Microsoft japan

<http://msdn.microsoft.com/ja-jp/library/ms123401.aspx>

8. 謝辞

今回の研究にあたり、様々なアドバイスをいただいた顧問の米田先生、サイエンス研究会統括顧問の川口先生にはご指導、助言をいただきました。さらに、本校サイエンス研究会物理班の先輩方、メンバーにも多大な協力をいただきました。お世話になった方々に、この場をお借りして深く御礼申し上げます。

バーサタイルコントローラーの開発へ向けた構成要素の検証

4年C組 羽鹿 諒

指導教員 米田 隆恒

1. 概要

私は、以前「ウェアラブル・コントローラー」というものを開発した。現在行っている研究はこれをバージョンアップし、より実用性のあるものを開発することを目標としている。現在、この研究は「バーサタイルコントローラーの開発」として研究中である。よってここでは、現在開発中のハードウェアを構成する要素の検証結果を報告する。

キーワード コントローラー、SH2 マイコン、音声認識、モーショントラッキング、IMU、無線通信

2. 研究の背景と目的

以前私は「ウェアラブル・コントローラー」(図1)に関する研究を行っていた。



図1 ウェアラブル・コントローラー

これは、私たちが機械を操作する際、より直感的に、より簡単に操作できるように

と考えて開発したコントローラーである。

用いる際は腕に本体を、指にセンサ部分を装着し、ボタンを押しながら空中に図形を描く。すると、シリアルケーブルで接続した先のPCの画面に認識できた図形の名前が表示されるというものである。動作中の風景を図2に示す。



図2 動作中風景

原理を簡単に解説する。まず、指に装着しているセンサは加速度センサである。空中に図形を描く際、図形の頂点にさしかかると加速度センサから出力される信号には

大きな変動が生じる。この信号の変動をコントローラーは図形の頂点として読み替え、その頂点の数をカウントする。私は、図形の形を決める要素がその図形の頂点の数にあるということに気づいた。そこで、カウントした頂点の数をもとにユーザーが描いた図形を識別した。

しかし、ウェアラブル・コントローラーはあくまで図形の名前を取得するにとどまっており、実用的なものではなかった。

そこで、今回完全に別のハードウェアとして1からコントローラーを開発し直すことにした。より実用性のある新しいハードウェア、ユーザーインターフェイスを開発するためである。なお、この研究は現在も研究中であり、ここでは新しいコントローラーであるバーサタイルコントローラーを開発することを目標に、それに向けて必要な構成要素を検証した結果を報告する。

3. 研究内容

(1) 研究事項

【研究1】 信号処理の心臓部であるマイクロコントローラー(以下 MCU という)について

【研究2】 コントローラーの動きを計測するセンサについて

【研究3】 コントローラーが扱うアプリケーションについて

【研究4】 コントローラーの無線通信について

(2) 実際に行った研究

【研究1】

これまでの研究において、また、以前開発したウェアラブル・コントローラーにお

いても H8 という MCU を使ってきた。この MCU の優れている点として、入手性が高いことや国産の MCU としては安価に購入できること、使いやすいことなどが挙げられる。

しかし、この MCU は処理速度(計算速度)が遅い。一般に、MCU や CPU などの演算スピードを計測するためにベンチマークテストと呼ばれるものがある。これは、あらゆるプログラムのエッセンスを抽出し、作られている。いわばテスト用ソースコードのようなものである。これを用いて実際に MCU の処理速度を計算した結果がメーカーサイトに掲載されており、H8 は約 2.3MIPS となっている。MIPS とは、Million Instructions Per Second の略で、1秒間に何百万個の命令が実行できるかを表したものである。MIPS は、コンピューターの処理速度に関する情報でよく使われる。H8 のこの数値は、同レベルの MCU よりは高い方であったが、バーサタイルコントローラーを実現するには、さらに高い計算能力が必要であると考えている。また、H8 はコマンド環境(CUI)でしか開発ができなかった。図3に CUI の例を示す。

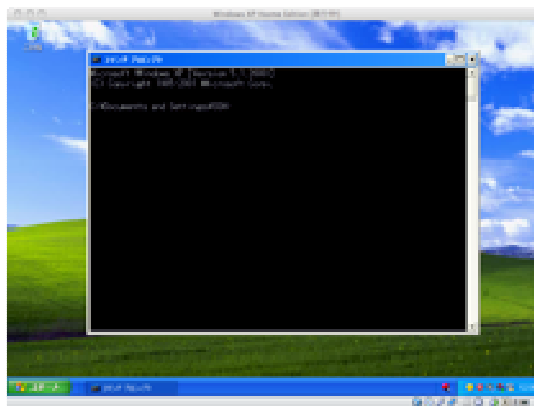


図3 コマンド環境

コマンド、つまりコンピューター用の単語のようなものでしか MCU の開発ができないため、MCU の細部の調整や処理速度の向上などを行うことが難しい。これは、MCU 上で処理を行うアプリケーションにとっては致命的である。そこで、新しい MCU として SH-2 マイコンに目を付けた。また、その中でも H8 と MCU 本体が同じサイズである SH7125F というものをピックアップした。このマイコンの特徴をあげると、まず処理速度が H8 と比較して格段に速いということがある。図 4 に表を示す。

H8 tiny	SH2
2.3MIPS	65MIPS

図 4 演算性能比較

さらに、開発環境が充実していることが挙げられる。まず、E10A-USB というデバッガを用いて開発することができる点である。E10A-USB の画像を図 5 に示す。



図 5 E10A-USB

これは、MCU 内部にアクセスして処理速度を優先するかプログラムの大きさを優先するか、など様々な設定を行いながら MCU を効率よく動かすために必要である。

また、HEW(図 6 : High-performance Embedded Workshop)とよばれる統合開発環境の存在も大きい。

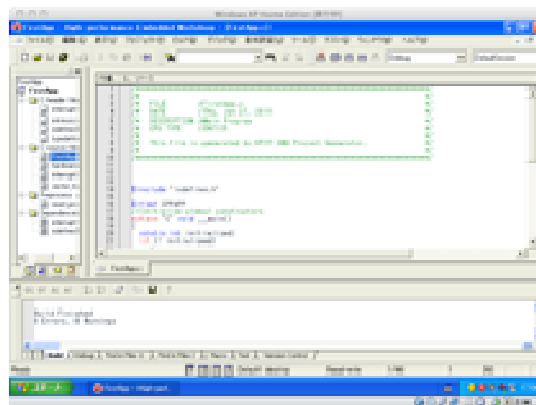


図 6 HEW 画面

これと E10A デバッガを組み合わせることで、プログラムの 1 行単位で MCU を動作させたり、MCU をチューニングしたりすることが可能となる。現在は、市販されている SH7125 ボードを用いてオリジナルのテストボード(図 7)を作製し、実験開発を行っている。なお、使用している開発用のプログラムコンパイラは、フリーで公開されている KPIT GNU Tools という、GCC(以下に詳細を記す)ベースのものを用いている。



図7 オリジナルテストボード

さらに、私は今回 Unix 環境でのプログラム開発を行えるよう、独自で C コンパイラおよびデバッガをビルドし、パッケージ化することを行った。上記のような、Windows で用いることができるパッケージはあったものの、Unix 環境で用いることができるものはなかったからである。今回は、インターネット上にフリーで公開されている GCC(GNU Compiler Collection) や GDB(GNU Debugger)、さらに組み込み MCU 向けの開発環境を提供するライブラリである Newlib, binutils といったソースコードパッケージを組み合わせ、MacOSX(v10.5、Leopard)上でビルドした。図8に MacOSX 上でコンパイラを動作させている様子を示す。



図8 コンパイラを動作させている様子

[研究2]

以前開発していたウェアラブル・コントローラーでは、加速度センサ(図9)のみを用いてプロトタイプを作製していた。

しかし、これには問題があった。それは、正確な運動が取得できないということである。ウェアラブル・コントローラーに用いていたのは、2軸(x, y 軸方向)の加速度センサであったため、上下の手のぶれや、微振動を検知することができなかった。また、加速度センサの信号の大きな変化しか捉えていなかったことも問題点である。つまり、頂点の数をカウントしていただけなので、三角形を描かなくても、うまく3回大きな振動を加えてやるだけで三角形と認識していたのである。この問題は、その他の図形でも同様に起こり得る事象である。



図9 加速度センサ

そこで、私はジャイロセンサに着目した。これは、物体の傾きを計測するセンサで、一般的には角速度を計測するものである。このジャイロセンサと加速度センサを組み合わせることで、正確な物体の動きをハードウェアでトラッキングすることができる。さらに、本来は物体の傾きを知るためのセンサなので、そのまま傾きと加速度を計測

したり、どのぐらいの傾きかを角度として計測したりすることも可能である。図 10 に一般的なジャイロセンサ素子の写真を示す。



図 10 ジャイロセンサ素子

今回、試験的にセンサモジュールを作製した。これは一般に、IMU(慣性センサ)という名前で行われている。使用したセンサは以下の通りである。また、作製したセンサモジュールの写真を図 11 に、センサ部を拡大した写真を図 12 に示す。

- ・ 加速度センサ:ADXL335
- ・ ジャイロセンサ:IDG-650(x, y 軸)
- ・ ジャイロセンサ:ISZ-650(z 軸)

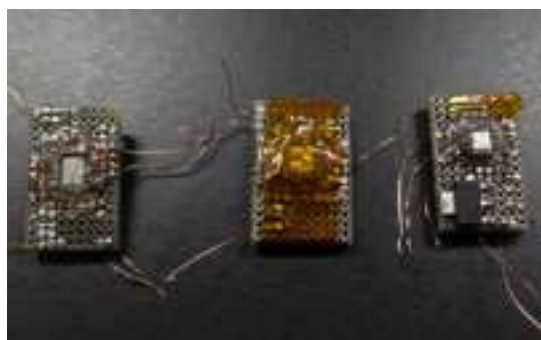


図 11 作成した IMU モジュール



図 12 センサ部拡大写真

現在は MCU に接続してセンサからの出力を読み込ませ、数値化したデータを無線で PC へと送信する実験を行っている。

[研究 3]

私はウェアラブル・コントローラーを開発する以前に、自作ハードウェアのみで人の発する声、母音を認識するという研究を行っていた。この研究は難易度が高すぎたために一度断念していた。しかし、今回の研究を行うにあたり、音声認識について調査を行った。対象としたのは、音声認識の原理と音声認識プログラムの開発に関するものである。

まず、音声認識プログラムについては、Julius(ジュリアス)というものがある。Julius は、京都大学の河原研究室が中心となって研究、開発を行っているオープンソースの汎用大語彙連続音声認識エンジンである。ここではシステムの構造が非常に難しいので詳細な説明は割愛するが、音声認識の世界ではよく用いられる確率モデルの 1 つである、隠れマルコフモデル(Hidden Markov Model、HMM とも言う)を用いてシステムが構築されている。ソースコードから公開されており、ユーザーのシステム上でビルドし、動作させることが可能であ

る。低スペックマシンでインターネット接続環境がなくても使えることや、完全にシステムがフリーであることが利点として挙げられる。音声認識の原理を簡単に解説する。一般的な音声認識システムにおいてよく用いられるアルゴリズムは、隠れマルコフモデルに基づく「ビタビアルゴリズム」というものである。これは、観測された事象系列を結果として生じる隠された状態の並びの中にある最も確からしい並びを探すというものである。

また、音声認識は原理が複雑だけでなく、ソフトウェアの容量や必要とするシステムも MCU レベルのものでは到底できないことがわかった。Julius の紹介において低スペックのマシンでも動作すると記したが、これは MCU の性能に比べれば遥かに高いものだ。例えば、Julius を例に挙げると、音声認識を行うのに最低限必要なシステムパッケージで約 30MB ある。これは一般的な「マイコン」と呼ばれる IC に搭載できるシステムサイズより遥かに大きい。そこで、図 13 のような方法を考えた。また、以下のシステム案では無線通信の方法として、Bluetooth を例として解説する。

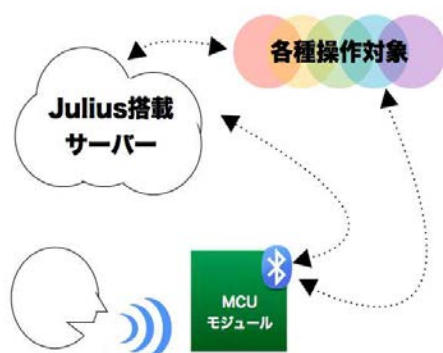


図 13 ハードウェア音声認識システム案

動作手順は、まずユーザーが MCU モジュール上のマイクに話す。この MCU モジュールには Bluetooth 通信機能がついており、外部の機器との無線通信が可能である。この Bluetooth 機能を通して Julius が動作しているサーバーにアクセスする。このとき、MCU モジュールで取得した音声データをサーバーへと送り、サーバー上で音声認識を行う。その後、サーバーから直接、もしくは MCU モジュールに一旦結果を返してから操作の対象となる機器に Bluetooth 経由で接続し、操作するというものである。

しかし、MCU の音声入力(厳密には A/D 変換機能)は音声認識に適するレベルに達していなかったため、これは使えなかった。一般的に、音声認識を行う際には 16 ビット、16KHz という分解能で音声データを読み込むことが必要とされる。

次に、ウェアラブル・コントローラーでも行ってきた、人の動きを解析するモーションセンシングについて説明する。今回の研究を行うにあたり、以前より精度を向上させることを目標にした。ソフトウェアについては現在研究を進めているので、ハードウェアの面については[研究 2]を参照されたい。ここでは、モーションセンシングを応用したアプリケーションに関して解説する。

まず、遠隔操作できる黒板を考えている。システムを図 14 に図示する。



図 14 遠隔操作黒板

ここでは、教室を例として解説する。このシステムを用いるには、教室にスクリーンとプロジェクター、Bluetooth 通信機能が搭載された PC が必要である。動作手順は、自作ハードウェアを用いて空中に図形や文字を描くと、その動きをハードウェアで分析し、Bluetooth を介して PC に送信し、プロジェクターから投影されるというものである。非常にシンプルであるが、ハードウェアのみで実際に手元の動きを解析し、再現できるかどうかは難点である。ただ、これが実現すれば教室中のどこからでも黒板にメモを残したり、板書をしたりといったことが可能である。次に、ホームコントローラーである。システムを図 15 に図示する。

システムの流れは、ここでは普通の家庭を想定する。このシステムも基本的には遠隔操作黒板と同様である。PC に Bluetooth を経由してハードウェアからの信号を送る。ただ、図 15 にもあるように、ホームコントロールという名前の通り、ドアや窓などの建具や、家電製品などを動かせる必要がある。そこで、別にコントロー

ル回路を作製し、高出力のモーターやソレノイドなどのアクチュエータで制御することになる。

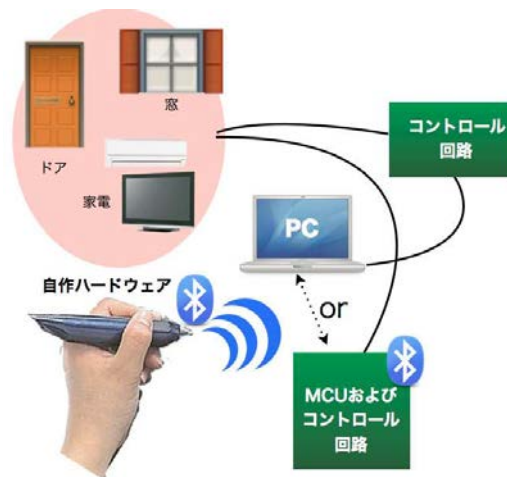


図 15 ホームコントロールシステム

これが実現すると、家中の家電製品や家の建具を簡単に動かすことができるのではないかと考えている。

さらに、加速度センサやジャイロセンサは本来運動量を計測するためのセンサである。よって、物理の授業などで使える教材に応用できるのではないかと考えた。それをまとめたものが以下の案である。システムを図 16 に図示する。



図 16 モーションセンシングシステム

このシステムの構造はここまでに解説した 2 つのシステムとほぼ同じである。しか

し、ここでは、自作ハードウェアをコンパクトに作る必要がある。また、用途によっては PC 側でソフトウェアを用意し、物理エンジンなどを組み込んでアニメーションを表示することも必要であると考えられる。

使用用途としては、ボールや振り子などにハードウェアを取り付け運動の様子を観察することなどがある。これが実現すると、目視やストップウォッチを見ながら行うような精度の悪い実験ではなく、精度の良い正確な実験を行うことができると考えられる。

[研究 4]

無線通信については、世界中で様々な種類のもが用いられている。また、各国で細かく規格が決められている。特に日本では、電波法の制限によって私たちが自作ハードウェアに用いることができる無線通信モジュールはかなり種類が限られてくる。

今回、私は 3 種類の通信規格について調べ、実際にモジュールを実験できたものは実際に通信テストを行い、それぞれのメリット、デメリットを検証した。

まずは、無線 LAN である。近年、スマートフォンやネットブックの流行によって一般のユーザーにも Wi-Fi 通信という名前で浸透してきている。私たちが使うことができる無線 LAN モジュールとして、CF(Compact Flash)という規格のコネクタがついているモジュールが存在する。図 17 にモジュールの例を示す。



図 17 無線 LAN モジュール

今回、実験することはできなかったが、一般に無線 LAN は 10~30m 程度の通信をすることが可能であるとされている。汎用性が高く、通信速度も速い上、特にこのモジュールは MCU に直結することができるため、非常に有用である。

しかし、[研究 3]に示したように、小型のモジュールにおさめなければならない場合はこのようなサイズのアダプタは使えない。また、消費電力が他の無線通信方法よりも大きいため、小型のハードウェアには実装することが難しい。

次に、Bluetooth モジュールである。Bluetooth モジュールの例を図 18 に示す。



図 18 Bluetooth モジュール

今回、このモジュールについても実験することができなかったが、一般的に無線 LAN と同様に、10~30m 程度の通信が可能とされている。また、多チャンネル同時通信が可能なことでも知られている。つま

り、1つのポイントに対して複数のデバイスが通信する、いわゆるブロードキャスト通信が可能なのである。また、近年はPCや携帯電話、家電製品にも多く取り入れられるようになったため、開発さえできれば多数の機器と通信をすることができる。さらに、モジュール本体が小型なので、自作ハードウェアなどに簡単に組み込んで使うことができる。

しかし、このようなモジュールは入手性があまりよくない。また、機械を少ししか作らない場合はこのモジュールでコストが大幅にかかってしまう場合がある。また、場合によってはチップのファームウェアをオリジナルにカスタマイズする必要があるため、高度な技術が必要なことがある。

最後に、ZigBee モジュールである。図19にモジュールの例を示す。



図19 ZigBee モジュール
(写真はXBee モジュール)

今回、実験できたのがこのモジュールである。これはハードウェアを自作する上で、無線化が必要な場合によく使われるモジュールである。ZigBee 自体は、家電製品向けの短距離無線として知られている。通信距離は Bluetooth 同様、10~30m 程度である。消費電力はきわめて少なく、乾電池

1本で数ヶ月~数年動作できるほどである。

ここでは、図20のような実験を行った。



図20 XBee 実験概要図

簡単に説明するとまず、2つのXBeeモジュールを用意し、片方には電池をつなぎ持ち運びができるようにする。もう一方はPCにつなぎ、電波強度および電波の届く状況を観察した。なお、今回はどの程度届くかのみ調べた。場所は、本校の理科講義室、理科講義室前の廊下、理科講義室の前の廊下の曲がり角の地点である。

まず理科講義室は電波が届いた。これにより、普通の教室や家の部屋のなかでは電波が届くことになる。続いて、理科講義室前の廊下である。この地点は最初、電波強度が弱いため電波が届かないことが懸念されたが、結果的には廊下の端から端まで約60m電波が届いた。

しかし、唯一理科講義室前の廊下の曲がり角は電波が届かなかった。距離は2m~3m程度しか離れていないのだが、校舎が鉄骨で組み立てられているからか、電波が届かなかった。

事前に調べた結果でも、手軽に使えて安価な反面、電波が届きにくく、長距離の通信や別室同士の通信などには向いていない

ことがわかっていた。だが、予想以上に電波が届かなかった。

3種類のモジュールを比較して考えたが、同室内なら通信ができることや、安価で小型であることから現在は XBee モジュールを用いて無線通信の実験を行っている。

4. まとめと今後の課題

今回は長期間にわたり、さまざまな研究要素の実験を行い、それぞれの要素を調べていった。今回の実験結果をもとに、本研究につなげていきたい。

5. 参考文献

- [1] 「ADXL335 データシート」、アナログデバイセズ社
- [2] 「SH7125F マイコンボード」、秋月電子通商
- [3] 「SuperH™ファミリ用 E10A-USB エミュレータ ユーザーズマニュアル 別冊 SH7125、SH7124 ご利用時の補足説明」、ルネサスエレクトロニクス社
- [4] 「IDG-650 Dual-Axis Gyro Product Specification」、インベンセンス社
- [5] 「ISZ-650 Single-Axis Z-Gyro Product Specification」、インベンセンス社
- [6] 「SH7125 グループ、SH7124 グループ ハードウェアマニュアル」、ルネサスエレクトロニクス社
- [7] 「SH7125 CPU ボード M3A-HS25 ユーザーズマニュアル」、ルネサスエレクトロニクス社
- [8] 「STK-7125 ハードウェアマニュアル」、アルファプロジェクト社
- [9] 「STK-7125EVB ハードウェアマニュアル」、アルファプロジェクト社

[10] Julius 公式サイト、
<http://julius.sourceforge.jp/>

6. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、サイエンス研究会物理班顧問の米田先生には研究に関するアドバイスをいただきました。

音声認識や研究の進め方など、研究の行い方については(株)国際電気通信基礎技術研究所(ATR)の野間春生さん、多田昌裕さん、吉田俊介さん、水戸和さん、荻田紀博さん、平田康夫さん、足立隆弘さんをはじめ、多数の研究員の方にご教示いただきました。

また、SH2 マイコンおよび E10A デバッガの取り扱いについては、(株)たけびしでシステム開発を行われている方々にご教示いただきました。

この場を借りて御礼申し上げます。

抵抗ブラックボックスの法則性

2年A組 西上 魁人
指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は、中の見えない回路をテスターで測定して中の回路を推測していく授業を受けた。この抵抗ブラックボックスは端子が6個ある。その端子間に抵抗が必ずあるとした場合について、ある法則を発見することができたので報告する。

キーワード 抵抗ブラックボックス、直列つなぎ、並列つなぎ、法則性

2. 研究の背景と目的

授業で中の回路が見えない「抵抗ブラックボックス」(図1)が扱われた。私は測定値から予想される回路の法則性を求めようとしたが、それはあまりにも複雑で、規則的には考えることができなかった。

そこで、それらの法則を見つける過程として、端子間には必ず抵抗が入っているものとして法則性を探すことにした。



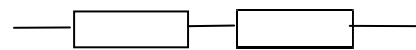
図1 抵抗ブラックボックスとテスター

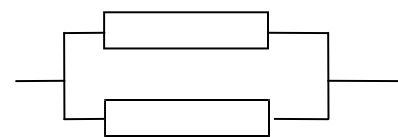
3. 研究内容

法則性を考える前に、合成抵抗を導きだす基本的な計算について簡単にまとめ

ておく。ここでの抵抗はすべて 100Ω とする。直列つなぎの場合、つながっている抵抗どうしの値を足し合えば、それらの抵抗の合成値が求められる。並列つなぎの場合は、抵抗を逆数にして足し合わせ、最後に再び逆数をとると合成値が求められる。

実際の計算例は以下の通りである。


$$100\Omega + 100\Omega = 200\Omega$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$
$$\therefore R = 50\Omega$$

次に、抵抗がすべての端子間にある場合について考える。最初から6端子の場合を考えるのは困難なので、最初は端子数を少なく設定して考えていく。また抵抗の値はすべて等しく、周りを囲うように接続している場合を考える。以下、端子間の測定値を $R(\Omega)$ として、抵抗1本

の抵抗値を $X(\Omega)$ とする。また、図2以降、直線は抵抗 X を示す。

1端子の場合は何もつなぎようがないので考えない。また、2端子の場合は測定値 R がそのまま答 X になる。したがって、 $X=R$ である。3端子の場合は、抵抗が1つ(①-②)と2つ(①-③-②)の並列になる。

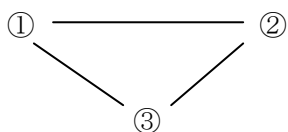


図2 3端子の構成

これを計算すると以下のようになる。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{X} + \frac{1}{2X} = \frac{3}{2X} \quad \text{より、} \quad X = \frac{3}{2}R.$$

このとき、分子が3になっていることから端子の個数と関係しているのではないかと考え、「答の式の分子は端子数と等しくなる」と仮説を立てた。この仮説を4端子の場合に検証した。

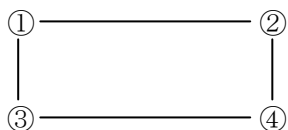


図3 4端子の構成

図3の4端子回路では、測定方法として①②間の測定か、①④間の測定の2種類がある。

まず、①②間の測定値を R とすると、

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{X} + \frac{1}{3X} = \frac{4}{3X} \quad \text{より、} \quad X = \frac{4}{3}R.$$

次に①④間の測定値を R とすると、

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2X} + \frac{1}{2X} = \frac{2}{2X} = \frac{1}{X} \quad \text{より、}$$

$X = R$ となる。

このように、4端子の場合は2通り考えられるが、となり同士(①②)を測定し

た場合、3端子と同じような式の形を示したので、仮説を次のように修正した。

4. 仮説

となり同士の端子の測定値 R から、 X の値は次の式で求められる。

$$X = \frac{(\text{端子の個数})}{(\text{端子の個数})-1} \times R$$

5. 検証

上記の仮説を5端子の場合で検証する。

5端子のとなり同士の測定値 R から、

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{X} + \frac{1}{4X} = \frac{5}{4X} \quad \text{ゆえ、} \quad X = \frac{5}{4}R \text{ とな}$$

り、5端子の場合、仮説は正しいことが示せた。この法則を7端子、8端子の場合にあてはめてもうまくいった。

6. 結論

端子数を N とし、端子間の抵抗がすべて等しく、周りを囲むように結んだとき、となり同士の端子をテスターで測定した値を R とすると、抵抗1本の値 X は次の式となることがわかった。

$$X = \frac{N}{N-1} R$$

7. 今後の課題

この抵抗ブラックボックスについて、さらに多くの法則を見つけていきたい。

8. 謝辞

最後に、今回の研究をするにあたってご指導して下さった顧問の米田先生に深く御礼申し上げます。

太陽電池による距離の測定

2年C組 田中 一輝

2年C組 玉置翔太郎

指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

太陽電池の発電量は何によって決まるのだろうか。今回は、太陽電池に当てる光の強さと、太陽電池に発生する電圧の関係を調べた。その結果、光の強さと発生する電圧の間に規則性があることがわかった。また、この結果を用いて、太陽電池から光源までの距離の測定に利用できることがわかったので報告する。

キーワード 太陽電池、光の強さ、発電電圧、距離測定

2. 研究の背景と目的

本校では太陽光発電を行っている。本校の1年間の発電量のデータを見ると、夏は発電量が多く、冬は少なかった。私たちは、なぜそのようになるか疑問に思い、調べようと思った。

夏と冬発電量の違いの原因として、日照時間や明るさ、太陽高度の差などが考えられる。今回私たちは、太陽電池に当たる光の明るさと、太陽電池に発生する電圧(以下「発電電圧」という)の間の関係を調べることにした。

(2) 仮説1の検証実験

スタンドに豆電球を上向きにして固定し、その上方に太陽電池を水平にセットする。太陽電池の表面から豆電球のフィラメントまでの距離(以下単に「距離」ということにする)を金属定規で精密に測定する。太陽電池の発電電圧はデジタルテスターで測定する。

豆電球にかける電圧 6 V を一定にすると、電流も一定であり、したがって豆電球の明るさは一定である。

距離を 30 mm から約 10 mm ずつ遠ざけながら発電電圧を測定する。

3. 研究内容

3-1 光源からの距離と発電電圧の関係

(1) 仮説1

最初に太陽電池に豆電球の光を当ててみると、電球を近づけると発電電圧が高くなり、遠ざけると発電電圧が低くなった。このことから、次の仮説1を立てた。

<仮説1>

光が強いほど発電電圧は高くなる

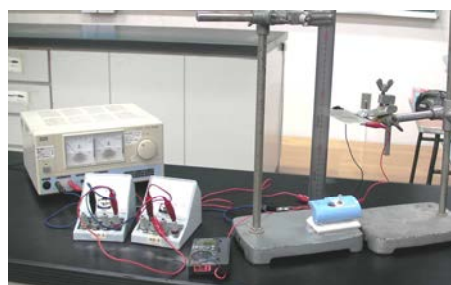


図1 実験装置

距離 [mm]	発電電圧 [V]
0	
30	0.680
40	0.600
50	0.527
60	0.500
70	0.442
80	0.388
90	0.347
100	0.308
110	0.273
120	0.238
140	0.186
160	0.148
180	0.120
200	0.098
220	0.082
240	0.069
260	0.059
280	0.052
300	0.043
320	0.038
341	0.034
380	0.028
400	0.025

表 1 測定データ

(3) 距離と発電電圧の測定結果

表 1 は、距離と発電電圧の測定結果である。このことから、距離が小さいほど電圧は高く、距離が大きいほど発電電圧は低いことがわかった。

(4) 考察

実験結果から、距離が小さいということは、太陽電池に当たる光が強いということである。したがって、仮説 1 「光が強いほど発電電圧は高くなる」は正しいことがわかった。

3-2 距離と発電電圧の詳細

(1) 仮説 2

ここで私たちは、表 1 の数値データに注目した。すると、距離が 200 mm から 400 mm へ 2 倍になるとき、発電電圧は 0.098 V から 0.025 V へと約 4 分の 1 倍になっている。表 1 の数値をグラフ化してみると、図 2 のような規則性のあるグラフができた。

そこで、次の仮説 2 を立てた。

<仮説 2 >

電球と太陽電池の距離が 2 倍になると、太陽電池の発電電圧は 4 分の 1 倍になる。

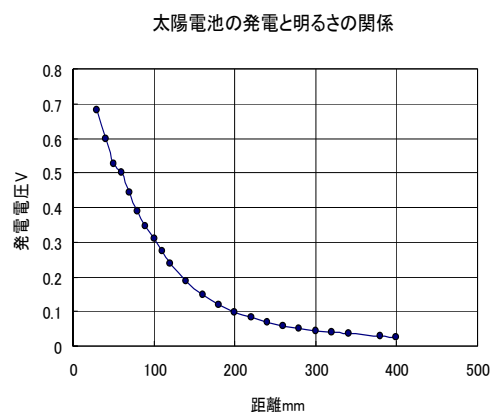


図 2 太陽電池の発電電圧と距離の関係

(2) 仮説 2 の考察

光が遠くまで伝わる時、図 3 のように距離が 2 倍になると面積は 4 倍になるか

ら、明るさが4分の1倍になって、発電電圧が4分の1倍になるように思える。たしかに、表1のデータから距離が200 mmから400 mmになるとき、発電電圧は4分の1倍になっている。しかし、表1の50 mmと100 mmの場合や100 mmと200 mmの場合では、4分の1倍とはなっていない。

したがって、仮説2は正しくない。

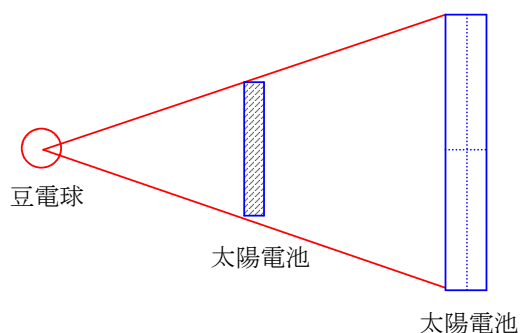


図3 明るさが4分の1倍になる

3-3 明るさと発電電圧の測定関係

(1) 明るさと発電電圧の測定

豆電球からの距離と明るさの関係は、「距離が2倍になると面積は4倍になるから、明るさは4分の1倍になる」という仮説は正しそうなのに、なぜ仮説2は正しくないのだろうか。

仮説2では、発電電圧を測っているのであり、太陽電池にあたる明るさを測っているのではないことに気づいた。そこで、明るさを2倍にすると、発電電圧が何倍になるかを調べることにした。

豆電球を2個用意し、それぞれ1個の場合、発電電圧が同じになるように豆電球の明るさを調節する。次に、豆電球を2個同時に点灯したときの発電電圧を測定する。その結果、表2のデータが得られ、グラフ

は図4のようになった。

距離 [mm]	発電電圧		
	LED A点灯 [mV]	LED B 点灯 [mV]	LED Aと LED B 同時点灯 [mV]
46	518.0	528.0	769.0
70	343.7	356.3	563.0
79	314.1	318.1	517.0
94	245.2	255.7	431.0
109	207.4	204.3	369.0
127	149.7	156.5	283.3
146	117.5	120.6	235.2
162	95.8	101.3	191.6
172	93.9	89.8	173.0
191	75.3	77.7	145.8
199	66.7	72.9	134.3
219	53.2	60.2	112.1
249	41.9	46.2	88.2
252	41.2	46.6	87.7

表2 明るさを2倍にしたときの
発電電圧

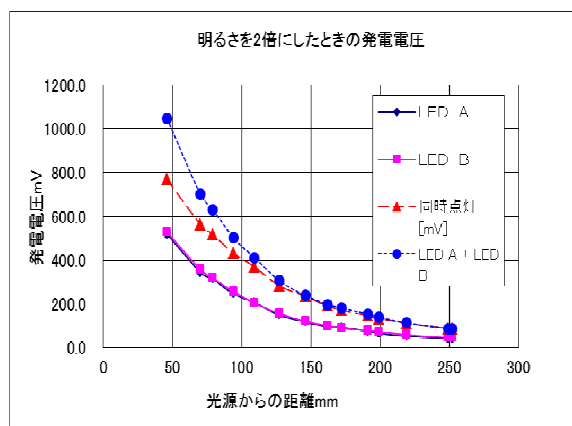


図4 明るさを2倍にしたときの
発電電圧のグラフ

(2) 考察

図4のグラフの実線は1個を点灯したときの発電電圧である。点線は発電電圧が1個のときの2倍になると仮定したときのグラフである。しかし、実際は、2個のLEDを同時に点灯させたとき、発電電圧は長破線のグラフとなった。

距離が146 mmより遠いときは、発電電圧は、ちょうど2倍になっている。しかし、距離が146 mmより近いほど、発電電圧は2倍よりも小さくなった。なぜこのようになるのかは、今のところわからない。

4. 結論

距離が約200 mm以上では、豆電球と太陽電池の距離が2倍になると、太陽電池に当たる光の明るさは、4分の1倍になり、発電電圧も4分の1倍になる。つまり距離を離すと、光の強さは弱くなる。

距離が200 mmより近くなるほど、図2のように発電電圧は大きくなる。

しかし、今のところでは、距離と発電電圧の関係を説明することはできない。

ところで、豆電球の明るさが決まっているならば、図2を用いることによって太陽電池から豆電球までの距離を知ることができる。たとえば、発電電圧が0.5 Vならば距離は5 mmであり、発電電圧が0.1 Vならば距離は15 mmである。

5. 今後の展開

表1を説明する数式を見つけない。ある程度予測は立てているが、説明が難しいので今回はふれないでおく。表1を用いて距離測定に使えるようである。ただし、光を出す物体の明るさをどうやって調べるかが問

題である。また、利用できる場所としては、太陽などの光が入らないトンネルの中などで利用できるだろう。

6. 謝辞

この研究にあたりご指導くださったサイエンス研究会顧問の米田先生にこの場をお借りして深くお礼申し上げます。

マイクロ波の性質

2年B組 寺川 峻平

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

マイクロ波実験装置を使用し、マイクロ波の性質を理解するために様々な実験を行った。この論文ではその実験結果を報告する。

キーワード マイクロ波、オシロスコープ、電圧、反射

2. 研究の背景と目的

現代社会では様々な電波が利用されており、電波についての知識を持つことは重要であると考えられる。

今回の研究の目的は大きく分けて2つある。まずは、電波の中でも「マイクロ波」と呼ばれるものの性質を調べること。そして、オシロスコープなどの実験器具についての正しい知識を得ることである。

3. 研究内容

マイクロ波の一種は電子レンジや携帯電話にも使われている。マイクロ波とは、電波の周波数による分類の一つであり、「マイクロ」は、電波の中で最も短い波長域であることを意味する。今回はマイクロ波を用いて4つの実験を行った。

実験にはマイクロ波発生装置(以下、送信機という)、マイクロ波受信装置(以下、受信機という)、オシロスコープ、アルミ板、ばねを使用した。送信機の規格は24 GHzである。

送信機から受信機にマイクロ波が到

達すると、受信機の出力が変化するという仕組みである。

受信機の出力端子にオシロスコープを接続し、受信機から出力された波形が表示されるようにした。これによって、受信状況を詳しく調べることができるようになった。

基礎実験として、送信機と受信機の間にも何も無い状態で受信機がマイクロ波を検知したときの波形を調べた。その結果、超高周波の波が出力されることが確認できた(図1)。

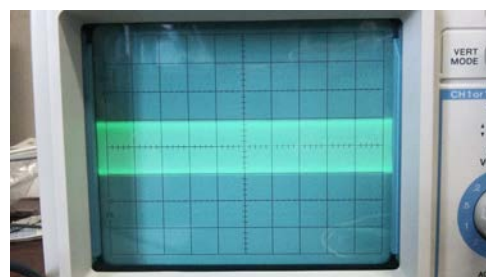


図1 超高周波の波形

周波数とは、電気振動などの現象が単位時間あたりに繰り返される回数のことであり、高周波とはこの振動が単位時間あたりに多いもののことである。

マイクロ波が検知されたときの出力電圧は約 20 mV であった。

〈実験 1〉

送信機と受信機との間に遮蔽物を設置し、マイクロ波が検知されるかどうかそれぞれ 1 回ずつ計 4 回計測した。遮蔽物には以下のものを使った。

- ・アルミ板 (厚さ 0.8 mm)
- ・コピー用紙 (A4 版 厚さ 0.1 mm)
- ・分厚い辞書 (A5 判 厚さ約 45 mm)
- ・手のひら

[結果]

遮蔽物にアルミ板を用いたときにはマイクロ波が検知されなかった(図 2)。

コピー用紙を用いたときにはマイクロ波が検知された(図 3)。

分厚い辞書を用いたときにはコピー用紙を用いたときよりも出力される信号の電圧が低かった(図 4)。

手のひらを用いたときにはマイクロ波が検知されなかった(図 5)。

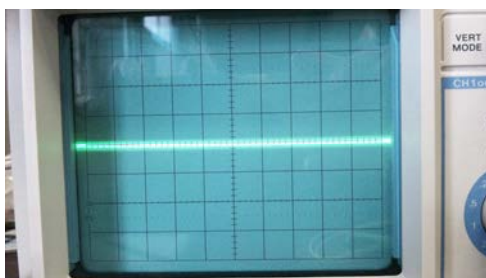


図 2 厚さ 0.8 mm のアルミ板

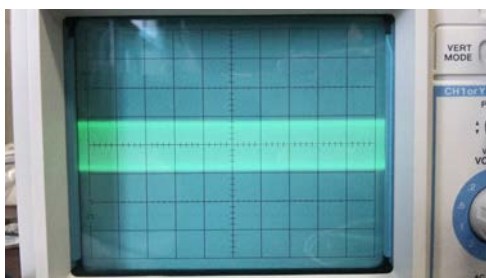


図 3 厚さ 0.1 mm のコピー用紙

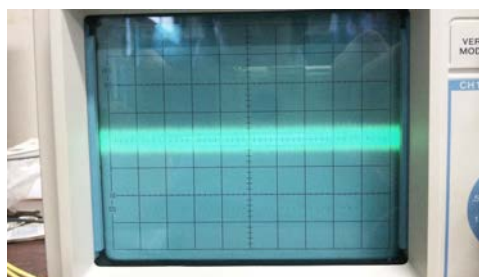


図 4 厚さ 45 mm の辞書

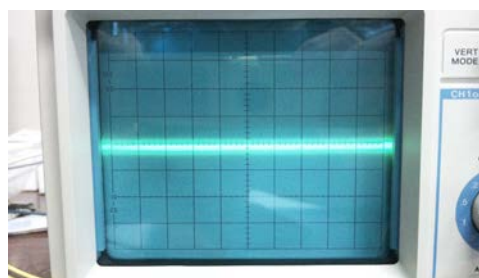


図 5 手のひら

〈実験 2〉

送信機、受信機、アルミ板を図 6 のように配置し、マイクロ波が検知されるかどうかを調べる。

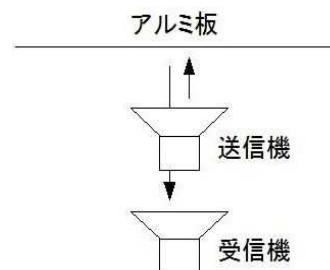


図 6 実験器具の配置

[結果]

検知された。

〈実験 3〉

実験 2 のアルミ板と送信機(受信機)の間隔を変えて、出力される波形の変化を調べる。

[結果]

出力された信号の電圧が、アルミ板を約 3 mm 動かすごとに大きくなったり小さくなったりした。

〈実験4〉

送信機と受信機との間に金属製の格子を設置し、マイクロ波が検知されるかどうか調べる。また、格子の間隔を広げたり狭めたりして、どのような信号が出力されるか調べる。

実験に用いる格子には自由に間隔を調節できる大きめの押しばねを用いた。ばねを設置するときに、ばねの向きがマイクロ波の波と平行になるようにする。

図7 使用した押しばね



[結果]

ばねの長さを固定して、図8のように移動させると、出力された信号の電圧が、ある一定の周期で大きくなったり小さくなったりした。

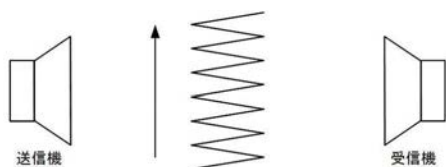


図8 実験のようす

また、ばねを縮めて行き、ばね線の間隔が 5 mm 程になるとマイクロ波が

遮断されて検知されなくなった。

4. 考察

上記の実験結果から、マイクロ波の性質を考える。

(i) マイクロ波は人体と金属を通り抜けることができないが、紙は通り抜けることができる。人体は金属と同様、通電性があるからだろうか。

(ii) 実験2から、マイクロ波は金属によって反射されることがわかる。

(iii) 実験3において、電圧が最も低いときはアルミ板の位置が図9のようになって入射波と反射波が打ち消しあって 0 V となり、電圧が最も高いときはアルミ板の位置が図10のようになって入射波と反射波が互いに強め合っていると考えられる。図9、図10では入射波を実線、反射波を破線で表す。

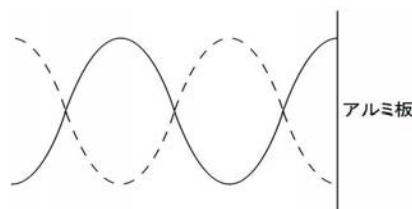


図9 打ち消しあう場合

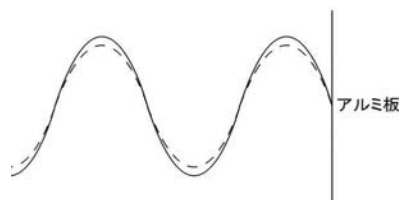


図10 強めあう場合

また、これらの2つの現象は1つの波長で2回ずつ繰り返される(図11)。

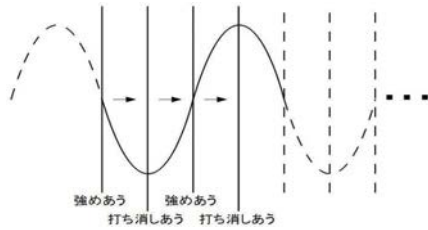


図 11 1つの波長のようす

マイクロ波の波長(m)は、
 電波の速度(m/s)÷周波数(Hz)
 で求めることができる。電波の速度
 を 30 万 m/s、周波数を送信機の規格
 である 24GHz と仮定すると、
 波長=30 万 (m/s)÷24 (GHz)
 =0.0125 (m)
 =12.5 (mm) …①

また、実験結果の 3 mm ごとに電圧
 が変化するという現象は、1つの波
 形の中で電圧が変化する回数を図 11
 より 4 回とすると、

$$3 \text{ (mm)} \times 4 = 12.5 \text{ (mm)} \quad \dots \text{②}$$

となり、①と②から、実験 3 によっ
 てマイクロ波の波長を測定するこ
 とが可能であるということがわかった。

(iv) 実験 4 において、マイクロ波がば
 ねの隙間を通った場合は受信機で検
 知される。しかし、マイクロ波がば
 ねに当たった場合、金属を通り抜ける
 ことができないので、受信機では検
 知されないと考えられる。したがっ
 て、極細かな格子を使えば金属の板
 を使ったのと同じような遮蔽効果が
 得られると考えられる。

5. 今後の課題

今回は回折という現象について実験

していないので、今後それについても
 調べたい。また、今回の実験では位置
 決めなどを目測で行っていた。これを
 改め、実験の精度向上を目指したいと
 考えている。

6. 参考文献

- [1] マイクロ波 - Wikipedia
[Ja.wikipedia.org/wiki/電波](http://ja.wikipedia.org/wiki/電波)
- [2] 電磁波 - Wikipedia
[Ja.wikipedia.org/wiki/電磁波](http://ja.wikipedia.org/wiki/電磁波)
- [3] 電波 - Wikipedia
[Ja.wikipedia.org/wiki/電波](http://ja.wikipedia.org/wiki/電波)
- [4] 周波数と波長
<http://bakuretsu.atso-net.jp/bakuretsu/radio/kiso/05.html>

7. 謝辞

今回の研究では顧問の米田先生や物
 理班の先輩方に様々なご指導を頂きま
 した。この場をお借りして、深くお礼
 申し上げます。

LED 発電の研究

2年C組 竹岡 建介
指導教員 米田 隆恒

1. 研究の概要

私は昨年の研究において、発光ダイオード(以下 LED という)の仕組みを調べ、LED を使った発電に関する実験をした。その過程で生じた様々な疑問を解決するために、「LED 発電」の再実験と、「LED 発電」とは逆の発想に立った「LED の臨界電圧と波長」についても調べた。その結果、臨界電圧と波長の間に明確な関係があることがわかったので紹介する。

キーワード 発光ダイオード、LED、光の波長、発電、臨界電圧

2. 研究の背景と目的

研究の目的は、最近家庭でも普及しつつある LED の仕組みを研究し、LED についての理解を深めることである。

私は昨年から LED 発電について研究してきた。LED は電圧を加えると特定の色の光を出す装置である。ところが、LED に光を当てると LED が太陽電池と同様に発電をするということを授業で学習した。そこで、この現象を「LED 発電」とよび、この現象をくわしく調べようと思った。

たとえば赤色の LED の光を、緑色を出すことのできる LED に当てたとき、緑色の LED は何Vの電圧を発電できるかというものである。しかし、昨年の段階では、測定結果を説明することができなかった。

今年の研究では、昨年の実験を再度行い、測定精度の向上を目指した。また、先行研究[1]を参考にして、昨年の実験とは逆の発想で、各色(赤・青・緑・黄・橙・白)の LED を点灯するのに必要な最低電圧(以下「臨界電圧」という)と、LED の出す光の波長を計測し、臨界電圧と波長の関係性を研究した。

3. LED 発電の研究

(1) 仮説1

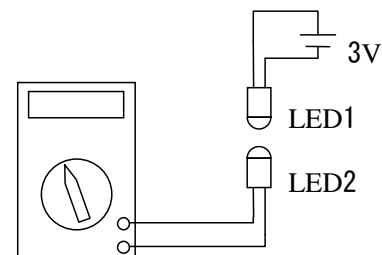
<仮説1>

LED の光を他の LED に当てたときに発電する発電量は、同じ色かその色に近い色ほど発電量が多い。

(2) 仮説1の検証実験

発電量として今回は発電した電圧を測定することにする。

LED での発電電圧を測定するために、図1のような装置を準備した。図1のように、LED1 を 3V の電圧で点灯させ、その光を LED2 に当て、LED2 の発電電圧をデジタルテスターで計測する。LED1 と LED2 の距離は 2 mm とした。



デジタルテスター

図1 実験装置

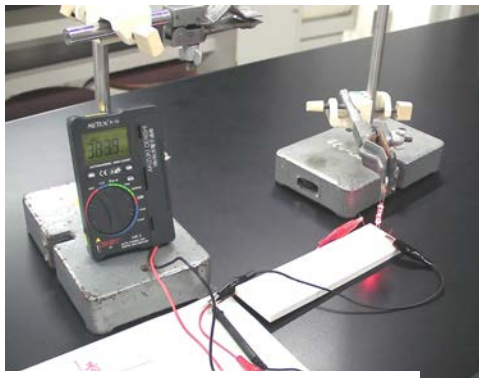


図2 発電電圧の測定装置

(3) 測定結果と考察

上記の方法で測定した結果を表1に示す。表1より、赤色同士・黄色同士などの発電結果は仮説1の通り、同じ色の組み合わせのとき発電電圧が最も大きかった。しかし、橙色同士や緑色同士などの結果は、異なる色の組み合わせに比べて発電電圧が大きいとは言えず、仮説1が正しいとは判断できない。以上の結果から、「同じ色同士の発電電圧は大きくなる」ということを証明することはできなかった。

この実験から、「黄色 LED を点灯、赤色 LED で発電」の組み合わせが2番目に発電電圧が高いということがわかる。なぜこのような結果が出たのかが、今回の実験から生じた課題である。

表1 発電結果

		発電側LED[V]					
		赤	黄	橙	緑	青	白
光源側LED [V]	赤	1.538	1.337	0.487	0.177	0.57	0.093
	黄	1.542	1.576	0.101	0.101	0.216	0.165
	橙	1.363	1.336	0.125	0.125	×	×
	緑	1.025	1.293	0.032	0.032	×	×
	青	1.438	1.492	×	1.215	0.4~1.3	×

表中の×は、数値が不安定であった

4. LEDの臨界電圧の測定1

(1) 実験装置と実験結果

先の実験において、LEDに光を当てると発電する。しかし、その実験結果が何を意味するかわからなかった。そこで、LED発電とは逆の発想で、LEDにかかる電圧を少しずつ大きくしていったとき、光を出し始める電圧(臨界電圧)を測定することにした。図3が回路図、図4が測定結果である。

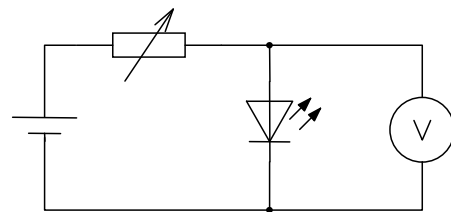


図3 臨界電圧測定の回路図

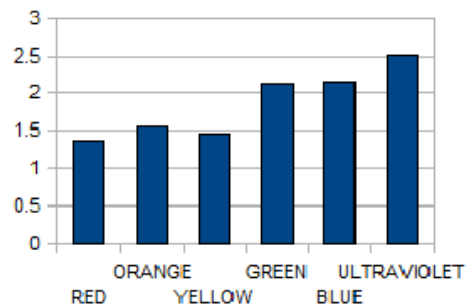


図4 臨界電圧の測定結果[V]

(2) 仮説2

図4の結果、ULTRAVIOLET(紫外線)を出すLEDの臨界電圧が一番高く、赤色を出すRED(赤色)の臨界電圧が一番低いということがわかる。

昨年の実験の際、LEDの光を分光したことがあり、そのとき、光の波長に広がりがある、つまり、スペクトルに広がりがあるとわかった。そこで、このスペクトルの

広がりや臨界電圧と何らかの関係がある
と考えてみた。

例えば青色の LED の場合、図 5 のよ
うに、緑色から紫色の手前の青色までの色
が含まれており、さまざまな色を出す必要
があるので臨界電圧が高いのではないだ
ろうかと考えられる。このように、さま
ざまな色を含む光を出す LED を「混合
色 LED」ということにする。一方、赤
色 LED は、図 6 のようにスペクトル
の幅が狭いので、臨界電圧が低いと予
想できる。そこで、次のように仮説 2
を立てることにする。

<仮説 2>

青色 LED のように混合色 LED(スペ
クトル幅が広い)の臨界電圧は高く、赤
色 LED のように単色 LED(スペクトル
幅が狭い)の臨界電圧は低い。



図 5 青色 LED のスペクトル



図 6 赤色 LED のスペクトル

(3) 仮説 2 の検証実験

仮説 2 を検証するために、LED の発光
色の波長を図 7 のスペクトルビジョンで
測定した。

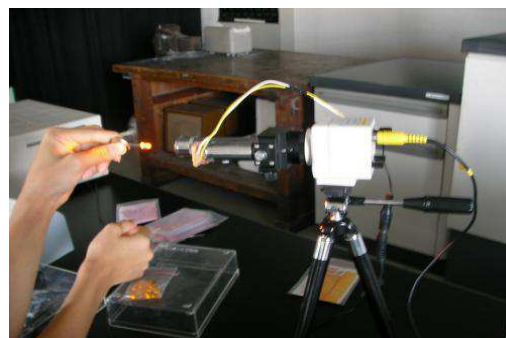


図 7 スペクトルビジョンによる
波長測定

緑色 LED は、スペクトル幅が広く、混
合色であり、図 4 のデータから臨界電圧は
高いので、仮説 2 に反しない。一方、黄色
LED は図 8 のようにスペクトル幅が赤色
から緑色まで広がっている混合色である
にもかかわらず、図 4 のデータから臨界電
圧は低い。したがって、黄色 LED は仮説
2 に反する。

以上より、仮説 2 は正しいとはいえない
ことがわかった。



図 8 黄色のスペクトル

5. LEDの臨界電圧の測定2

(1) 回折格子による光の波長の測定

スペクトルビジョンでは、波長をうまく測定できなかった。そこで、先行研究[2]を参考にして、回折格子を用いてLEDの波長を測定し、臨界電圧と波長の関係をくわしく調べようと考えた。

図9は、青色LEDを点灯させ、スリットで光をしぼり、回折格子を通過させ、スクリーン上の光の位置を測定しているところである。回折格子は1mmに500本の溝のあるものを使った。位置の測定から、波長を計算する方法は難しいので、顧問の米田先生に教えていただいた公式を用いてExcelで計算した。図10は計算の元になる図である。

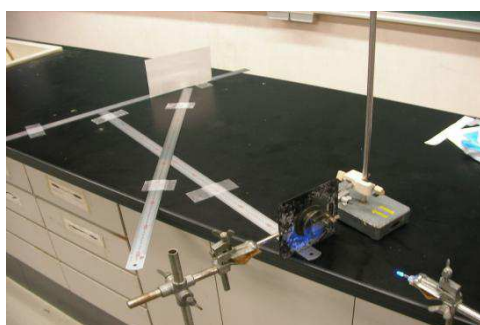


図9 青色LEDの波長測定

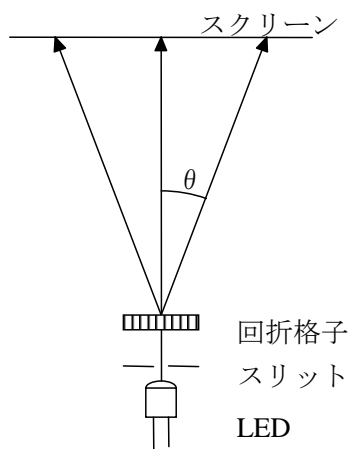


図10 波長測定の間

(2) 実験結果と考察

測定結果とそのグラフを表2および図11に示す。

実験結果から、臨界電圧はスペクトル幅とは無関係であるということがわかる。したがって、仮説2は間違いであることがわかった。青色LEDや緑色LEDなどの混合色LEDの臨界電圧は高く、赤色LEDなどの単色LEDは電圧が低いという仮説は間違いであった。

表2 回折格子によるLEDの発光波長の測定

LEDの色	臨界電圧[V]	中心波長[nm]
赤	1.37	702.0
黄	1.45	551.5
橙	1.55	587.5
緑	2.12	504.5
青	2.15	456.0
紫外線	2.50	417.5

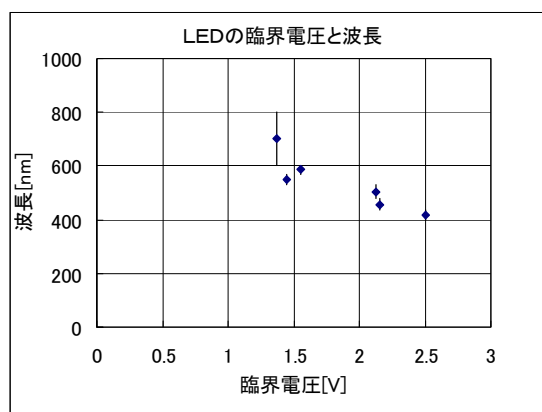


図11 黄色のスペクトル
(グラフ中の縦の線は、波長の幅を示す)

(3) 臨界電圧に関する結論

回折格子による実験からいえる結論は、臨界電圧は光の波長と密接に関係するということである。つまり、波長が短いLEDほど臨界電圧は高く、波長が長いLEDほど臨界電圧は低くなる。

しかも、図 11 のグラフから、波長が短い紫色に近づくほど臨界電圧は規則的に高くなっていることがわかった。

6. LED 発電の疑問についての考察

3.(3) で述べた LED 発電に関する疑問を解く鍵は、思わぬことに今回の波長測定実験にあった。3.(3)の実験では、「黄色 LED を点灯、赤色 LED で発電」の組み合わせが 2 番目に発電電圧が高かった。これは次のようにして説明できる。

(1) 仮説 3

<仮説 3 >

黄色 LED の光の中に赤色の波長が入っていて、これが赤色 LED を発電させる。

(2) 仮説 3 の検証

実際に、スペクトルビジョンで黄色を分光してみた結果(図 12)は、仮説 3 と一致していることがわかった。つまり、黄色 LED の光を赤色の LED にあてたとき、黄色 LED 光の中の赤色の光が赤色 LED をつよく発電させたと考えられる。

しかし、図 12 では緑色が含まれるのに、表 1 の結果では、緑色 LED の発電電圧が低いのはなぜかという疑問が残る。



図 12 黄色のスペクトル

7. まとめと今後の展開

今回の研究から、LED の光のスペクトルには幅があるということ、LED の色と臨界電圧の間には美しい関係があるということなどがわかった。

また、今回の研究では、立てた仮説と実験結果が異なる結果になってしまい残念だが、今回の実験で新たな疑問や課題がたくさん生まれた。今後そのような疑問や課題を解決するために継続して実験をやっていききたい。たとえば、発電については、光の強さを変えて発電電圧を調べる必要がある。

8. 参考文献

- [1] 「LED についての研究」、羽鹿諒、武田優生、奈良女子大学附属中等教育学校 2007 年度 SSH サイエンス研究会研究論文集
- [2] 「レーザーの波長の変化と温度の相関性」、古川雄規、小山諒子、山本奈都美、大橋美紗希、中井美嘉、奈良女子大学附属中等教育学校 2009 年度 SSH サイエンス研究会研究論文集)

9. 謝辞

この研究にあたり、ご指導くださったサイエンス研究会顧問の米田隆恒先生にこの場をお借りして深くお礼申し上げます。

リニアモーターの研究

2年C組 小掠 公平

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私はリニアモーターの簡易模型を製作し、その模型を用いて磁力、電流、力の関係を実験で調べた。その結果、フレミングの左手の法則が成り立っていることを実証できたので報告する。

キーワード リニアモーター、磁石、電流、力、フレミングの左手の法則

2. 研究の背景

近年、様々な場所でリニアモーターが利用されている。私はこれに興味をもち、調べてみたところフレミングの左手の法則が関係していることを知った。フレミングの左手の法則とは、電流の向きと磁力線の向きが与えられたとき、電流にはたらく力の向きを決める法則である。

棒をのせる。

- 2本の銅のレールの1本ずつに+と-の電圧を加え、金属棒に電流が流れるようにする。この際、金属棒は2本の銅のレールに垂直になるようにのせておく。また、その金属棒が磁石に触れないように注意する。

3. 研究1

研究目的は、リニアモーターを製作し、フレミングの左手の法則が成り立っているかどうかを調べることである。

(2) 仮説1

最初に予備実験として、①～⑤の仮説を立て、実験を行うことにした。

<仮説1>

(1) リニアモーターの製作

フレミングの左手の法則が成り立っているかどうかを調べるために、簡易リニアモーターを製作する。以下にその手順を示す。

- 銅のレールを2本平行に並べる。
- レールの中に、フェライト磁石をすべて同じ向きにして並べ、両面テープで固定する。このとき、磁石の高さが銅の棒より、高くなってはいけない。
- 2本のレールに垂直になるように、金属

①すべての磁石を、N極を上に向けて電流を流すと、金属棒が動く。

②電流の向きを①と逆にすると、金属棒の進む向きが①と逆になる。

③磁石の極(N極・S極)を逆にすると、金属棒の進む向きが①と逆になる。

④電圧を0Vにすると、金属棒の動きが遅くなる。

⑤磁石を取り除くと、金属棒の動きが遅くなる。

ただし、実験④以外は電流の強さは同じである。また、磁石の強さは同じである。

(3) 実験結果

- ①：金属棒は動いた。
- ②③：金属棒は①と逆の向きに進んだ。
- ④⑤：金属棒は動かなかった。

(4) 実験結果からわかったこと

- (A) フレミングの左手の法則で示された向きに金属棒は動いた。
- (B) 電源の+と-を入れ替えると金属棒の進む向きが逆になる。
- (C) 磁石のN極とS極を入れ替えると金属棒の進む向きが逆になる。
- (D) 電流や磁力線の向きを逆にしたときもフレミングの左手の法則にしたがって、金属棒は動いた。
- (E) 電流が流れなくなると、金属棒は進まなくなる。
- (F) 磁力がなくなると、金属棒は進まなくなる。
- (G) フレミングの左手の法則は、電流と磁力線のどちらが欠けても、金属棒に力が働かなくなること示す。
- (H) また何度も使用しているうちに、だんだん金属棒が動かなくなってきた。その原因を調べた結果、銅のレールのさびによって電流が流れにくくなり、金属棒の動きが弱くなっているのに気がついた。

これらから、次のことがわかった。

- (I) 金属棒や銅のレールがさびていたり、汚れていたりすると動きが弱くなる。

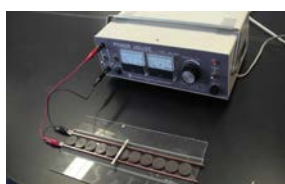


図1 実験の様子

4. 研究2

ここで、上記(E), (F)から新たな課題が生じた。

(1) 新たな課題

④や⑤とは逆に、電圧や磁力を強くしたらどうなるのだろうか。

そこで、次の仮説2を立て実験した。

<仮説2>

- ⑥電圧を①のときよりも強くすると、力も強くなる。(ただし、磁石は①と同じ)
- ⑦磁石をより強力なネオジウム磁石に変えると力が強くなる。(電圧は実験①と同じ)

(2) 実験結果

- ⑥：金属棒の動く速さは、元の速さより少し速くなった。
- ⑦：元の速さと変わらなかった。

(3) 実験結果からわかったこと

- (J) 電圧を強くすると、力が強くなる。
- (K) 磁力を強くしても強さは変わらない。
また⑥では、銅のレールと金属棒の間で火花が大量に飛んでいた。そこから、次のことがわかる。
- (L) 電圧を上げすぎると、銅の棒と金属棒の間で火花が飛び散る。

5. 研究3

(1) 課題

金属棒は本当に、銅のレールからの電気によって、動いているのだろうか。

そこで、次の仮説3を立て実験した。

<仮説3>

- ⑧銅の棒の表面に、電気を通さないスティックのりを塗ると、表面からの電気

を通さなくなるので動かなくなる。

(2) 実験結果

金属棒は動かなくなった。つまり、電気は銅の棒の表面を伝わり、金属棒に流れるということがわかる。

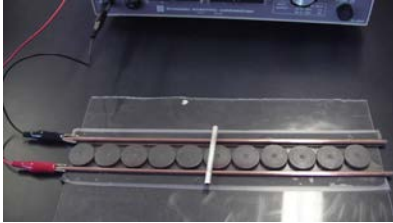


図2 動きの止まっている様子

6. 研究4

⑥と⑦では、電圧や磁力の違いがはっきりせず、微妙な差だったので、もっと違いのはっきりした実験装置を考えてみることにした。

そこで、反応を大きく感じられるように細い銅線に電流を流し、そこからわかる反応を探っていくことにした。

その結果、次のような実験装置ができた。

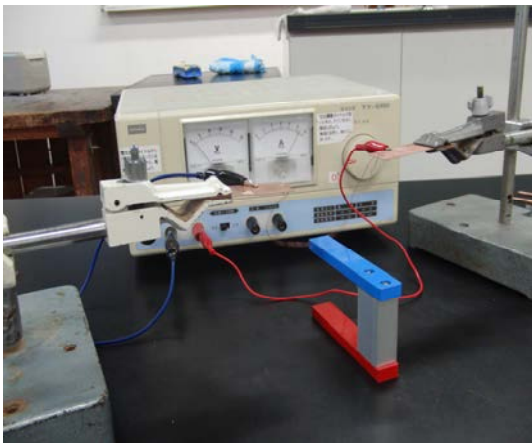


図3 新実験装置

装置は、2つのスタンドに銅の板を同じ高さで向かい合うように固定し、そこに端

をフック状にした銅線を掛け、下にU字型磁石を置き、電気を流す。

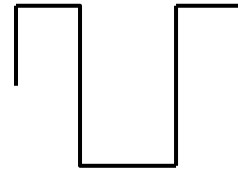


図4 フック状の銅線

すると、フレミングの左手の法則により銅線が前後に揺れる。そのとき触れる方向などを、チェックした。①～⑦に対応して、仮説4として①'～⑦'を実験によって確かめることにした。

(1) <仮説4>

- ①' 電源をつなぐと、片側に揺れた後、振り子のようにまた反対側に揺れる。
- ②' 電流の向きを逆にすると、①' と反対側に揺れた後、①'と同じように振り子のように動く。
- ③' 磁力の向きを逆にすると、①' と反対側に揺れた後、①'と同じように振り子のように動く。
- ④' 電圧がなくすと、フレミングの左手の法則が働かなくなり、動かない。
- ⑤' 磁力がなくなると、④'と同様の理由で動かなくなる。
- ⑥' 電圧を強くすると、①' より大きく、速く揺れる。
- ⑦' 磁石を強くすると、⑥' と同じく、①'よりは大きく、速く揺れるが、磁石から離れると、当然、力は弱くなるので⑥'ほど大きく、速くは揺れない

(2) 実験結果

- ①' : 片側に上がったあと、磁石より少しあがったままの状態そこから小

- さく、上がり下がりを繰り返した。
- ②'：電流の向きを逆にすると①'とは反対側に、①'と同じように上がり下がりを繰り返した。
- ③'：磁力の向きを逆にすると、①'とは反対側に、①'と同じように上がり下がりを繰り返した。
- ④'：電気を流さなくすると、まったく動かなかった。
- ⑤'：磁力を無くすとまったく動かなかった。
- ⑥'：電圧を大きくすると、①'より、導線は激しくあがり、その後は①'と同じような運動を繰り返した。
- ⑦'：磁力を強くすると、⑥'と同様に、①'より高く上がり、さらに①'や⑥'より高い位置で上がり下がりを行った。

(3) わかったこと

- (M) ②'～⑤'より、レールの実験と同様に、フレミングの左手の法則が成り立つことがわかった。
- (N) ⑥'より、レールの実験の際より反応の違いがよくわかった。
- (O) ⑦'より、レールの際には変わりのなかった磁力の違いによる力の強さの違いも、この実験では力が強くなっていることを確認することができた。

つまり、電圧でも磁力でもその大きさを大きくすれば、金属棒や銅線の動きも大きく、速くなるということがわかった。

7. 研究5

(1) 新たな仮説

<仮説5>

- ⑨レールの所々に、一定間隔でのりを塗り、2.5 Aの電流を流すときも、5.0 Aの電流を流すときも、銅の棒は止まる。

(2) 実験結果

2.5 Aのときは、初めは動いていたが、のりの塗った所に来ると、止まってしまった。しかし、5.0 Aのときは、2.5 Aのときより速く動き、のりの塗った場所でもスピードは落ちたが止まることはなかった。

やはり電圧が強いほうが、速く強く走ることができることがわかった。

8. まとめと今後の課題

リニアモーターを用いた今回の実験によって、フレミングの左手の法則が成り立っているということを証明することができた。また、電圧や磁力の強さと力の大きさの関係もわかった。

しかし、銅の棒や導線の動きを正確に計ることができなかった。また、さびや汚れ、摩擦などの影響が大きいことに途中で気づいたので、それらに影響されずに力の大きさを測る方法を考えていきたい。

また、この装置を応用し、手軽に使える玩具や乗り物などに利用する方法を考えていきたい。

9. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、米田先生には多大なご指導していただきました。この場で深く感謝申し上げます。

H8 マイコンによるマトリクス LED の制御

1年C組 青木 雅典

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

最近、街中でよく電光掲示板を見るようになった。私も、一度はこのようなものを作りたいと思っていた。そこで今回、マイコン制御の学習を兼ねて、H8 マイコンを使用してマトリクス LED の制御を行った。

キーワード H8 マイコン、マトリクス LED、ダイナミック点灯方式、JIS コード

2. 研究背景と目的

最近、公共施設やお店の広告など、ほとんどの場所で電光掲示板が使用されるようになった。電光掲示板とは、LED(発光ダイオード)を格子状に配置したり、液晶を用いたりすることにより、文字や絵などを表現するものである。私は今回、H8-3664F マイコン(以下 H8 マイコンという)を用いて、8×8 のマトリクス LED(以下 LED という)を制御し、電光掲示板のようなものを作ろうと考えた。

しかし、普通の電光掲示板の仕組みをそのまま H8 に組み込もうとすると H8 自身に文字パターンを記憶させなければならない。すると、どうしても LED 上で表現できる文字の種類に限りが出てしまい、実用性がなくなってしまう。

そこで私は、Visual C# 2008 を用いた自作アプリケーションを作成した。そして、指定した文字をビットマップデータに変換した後、そのデータを RS-232C シリアル通信(以下シリアル通信という)を用いて H8 に送信し、LED 上で文字として表現するという方法を採用した。

ここでは、そこに至るまでの研究経過を報告する。

3. 研究内容

(1) 研究事項

目標は、自作アプリケーションを使用して、パソコンで入力した文字を LED にスクロール表示させることである。



図1 H8 3664F

(ルネサス エレクトロニクス,
動作周波数 16MHz)

＜研究1＞H8 マイコン単独で、プログラムに組み込んだビットマップデータをLEDにスクロール表示させる。

＜研究2＞パソコンと H8 マイコン間でシリアル通信を行い、キー入力した1文字をリアルタイムでLEDに表示させる。

＜研究3＞自作アプリケーションを使用して、入力した文字列をLEDにスクロール表示させる。

(2) 研究方法とその結果

はじめに、今回の研究で使用する回路を設計・製作する。

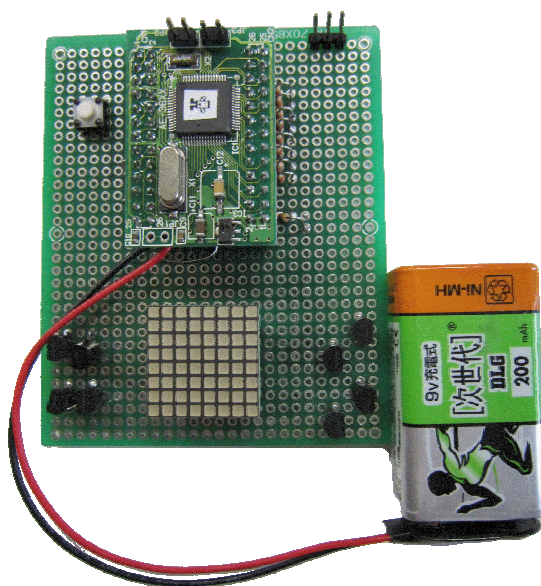


図2 製作したマトリクスLED
制御ボード

この回路には、主に次のような部品を使用している。

- ・ AKI-H8 3664F マイコンボード
(秋月電子通商)
- ・ DotMatrixLED-LT5027E
(SHARP, 赤・緑2色点灯)

- ・ トランジスタ-2SC1815
(東芝, NPN型)
- ・ 炭素皮膜抵抗 1/4W-3種
- ・ 両面スルーホールユニバーサル基板
- ・ その他(配線コード、はんだなど)

今回の研究は、主にこの回路(以下LED制御ボードという)を使用して行っていく。

＜研究1＞

ここでは、LED制御ボードで電光掲示板と同じような動作をさせる。ただし、文字のビットマップパターンはH8マイコン本体に記憶させておく。

まず、プログラムを作成する前に、マトリクスLEDを制御する方法を考えた。今回は、「ダイナミック点灯方式」を採用した。ダイナミック点灯方式とは、人間の目の残像効果を利用したもので、表示させる部分を高速で切り替え、まるでそれぞれの部分が同時に光っているかのように見せる方法である。

この方式を取り入れた理由は、2つある。一つは、LEDのすべてのピンを直接H8マイコンのIOポートに接続していくと、IOポートのピン数が足りなくなってしまうことである。もう一つは、図3のように点灯させたいときに、LEDをH8に直接つないでいると、うまく表示できなくなってしまうということである。

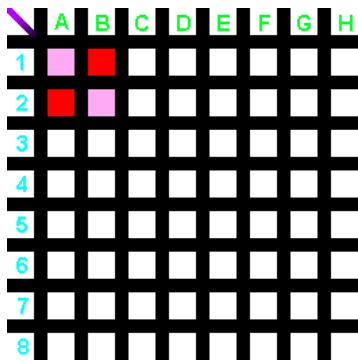


図3 表示させるパターン

■…点灯させたい部分

■…点灯に表示されてしまう部分

ここで、図3について、説明とその解決策を述べておく。図3において、数字側を+電源、アルファベット側を-電源に接続するものとする。

いま、図の濃い部分■(A・2とB・1)を点灯させたいとする。このために、+電源は1と2のみONにし、-電源は、AとBにのみ電流が流れ込むようにする。すると、点灯させたい部分に加え、A・1とB・2(■の部分)も光るようになってしまうため、正しく文字を表現することができなくなってしまう。

そこで、ダイナミック点灯方式を利用する。つまり、まずAにのみ電流が流れ込むようにするとA列のパターンが点灯し、次にBにのみ電流が流れ込むようにするとB列のパターンが点灯する。こうすることで、LEDの点灯場所を一つずつ処理していくことになり、最初のように光らせたくないところが点灯する現象を抑えることができる。

これでLED制御の問題が解決した。次は、実際に電光掲示板のようなプログラムを組んでいく過程である。

LED制御ボードの方は、ダイナミック点

灯の回路を製作した。GND側は、トランジスタ(2SC1815)のスイッチング作用を利用してコントロールする(図4)。一方、+電源側は、それぞれのピン(図3の1~8)をH8マイコンのIOポートに接続し、LEDのON, OFFを出力する。

すると、実際にはLED上で表示する文字を8x8のビットマップデータで書き出したものを縦方向に割り、それを数値化することで表現できることになる(図5)。

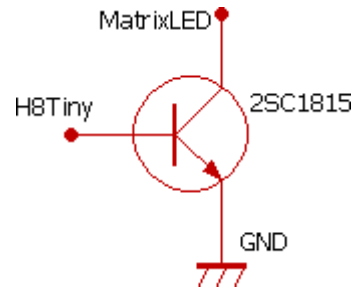


図4 トランジスタの

スイッチング回路部分

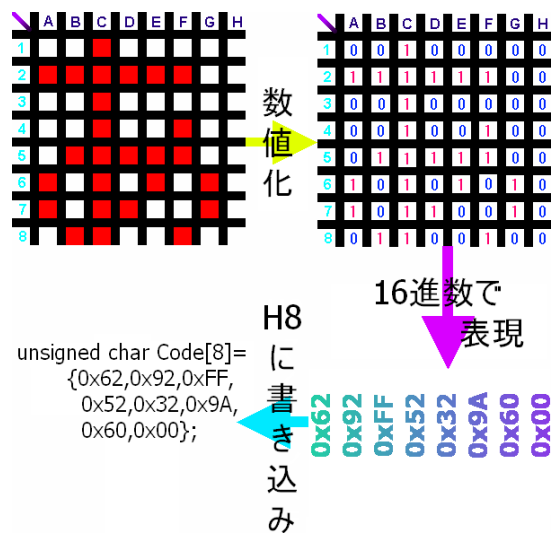


図5 文字パターンをH8マイコンに記憶させるまでの流れ

実際のプログラムは次のように設計した。

まず、表示させたい文字をつなげた状態のビットマップデータを作成し、数値化したものをキャラクタ型の配列変数に入れておく。次に、For 文を回してビットマップデータを一行ずつずらしながら読んでいき、それを LED に表示させる。すると、まるで文字列がスクロールしているかのようにみえるという仕組みである (図 6)。

これで、H8 マイコンのみでマトリックス LED の制御を行い、電光掲示板のようなものを製作することができた。

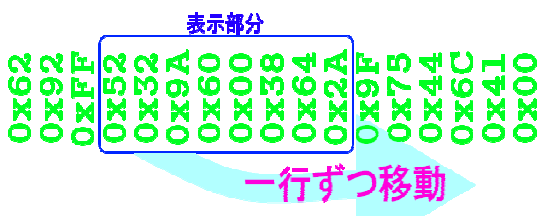


図 6 ビットマップコードを
ずらして読むときのイメージ

<研究 2 >

ここでは、パソコンで入力した文字をリアルタイムで表示させていく。また、今回も文字のビットマップパターンは H8 マイコン本体に記憶させておく。

ここからは、シリアル通信を用いて研究を行っていくため、まずは H8 マイコンをパソコンとシリアル通信させてみた。

私が使用している AKI-H8 3664F マイコンボードには、既にシリアル通信ドライバ IC が実装されているため、マイコン側では、通信速度(ボーレート設定)や割り込み許可などを設定するだけでよい。また、パソコン側では今回、数字や文字の送受信を行うだけなので、ターミナルエミュレーターソフト(Tera Term)を使用して通信を行った。

図 7 は、H8 マイコンとパソコン間で行われるシリアル通信の全体像である。プログラムは、キー入力データをパソコンから H8 マイコンに送信すると、H8 はその文字の表示データを読み込み、LED に表示する、というものである。

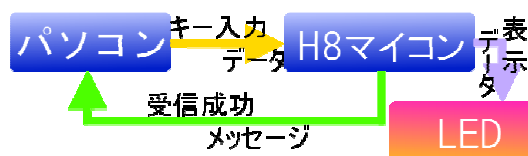


図 7 H8 マイコンとパソコン間での
シリアル通信の全体像

Tera Term では日本語の通信ができないことやプログラム上での処理のしやすさなどを考えて、今回はアルファベットと数字を表示できるようにする。仕組みは簡単であり、パソコンから送られてきた ASCII コードでキーを判定し、条件処理で LED に文字を表示するというものだ。また、ビットマップパターンは、あらかじめ研究 1 と同じ方法で作成しておき、条件処理を行うときに選択して使用する。

これで、入力文字のリアルタイム表示が成功した。対応しているキーならば、どこを押してもリアルタイムに表示できる。しかし、<研究 1 >、<研究 2 >ともに文字のビットマップパターンをすべて手作業で作成しているため、文字の変更が困難であり、あまり実用性が感じられない。

そこで、<研究 3 >ではアルファベットや数字の他に、ひらがなやカタカナ、漢字なども表示でき、8×8 の BDF 形式データならば、どんなフォントも使用できるというようなシステムを開発する。ここで、BDF

形式とは、ビットマップフォントの形式の一種であり、X Window System 用フォントでもある。

<研究 3 >

ここでは、自作アプリケーションを使用して、入力した文字を LED 上にスクロール表示させる。

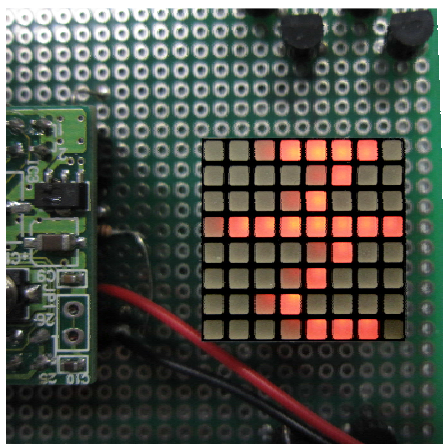


図 8 実際に動作させているところ

開発中の自作アプリケーション(図 8)は、以下のようなことを行う。

- ①表示させる文字列をパソコンから入力(取得)する。
- ②文字列を JIS コードにエンコードし、あらかじめ用意したビットマップデータベース(以下ビットマップ DB という)から JIS コードを検索し、ビットマップデータを取得する。
- ③取得したビットマップデータをバイト配列に格納しておき、シリアル通信で H8 マイコンに送信する。
- ④H8 マイコン側で、受信したデータを研究 1 と同じ方法で、スクロール表示する。

上記の内容をもう少し詳しく説明する。アプリケーションは Visual C#でプログラミングしている。



図 9 開発中の自作アプリケーション

文字列を JIS コード(ISO-2022-JP)にエンコードする理由は、BDF 形式のフォントデータが JIS コードで表記されていることが大きな理由であるが、それ以外にも、エスケープシーケンスから文字種の判別を行うことができるなどのメリットがある。

パソコンでキー入力された文字をビットマップデータへ変換するために、今回は自分で構築したビットマップ DB を使用した。データベースのフォーマットは図 10 のような形式にしている。

私は、8×8 の BDF 形式データから、JIS コードとビットマップデータを抽出し、データベースとして書き出すプログラムも作成した。つまり、これを使用すると、フォントさえあれば様々な文字が使用できるということになり、非常に便利になる。将来的には、このプログラムもメインアプリケーションの機能の一つに取り入れようと考えている。

なお、今回は恵梨沙フォント(恵梨沙フォントPJ, BDFフォント)を使用した。

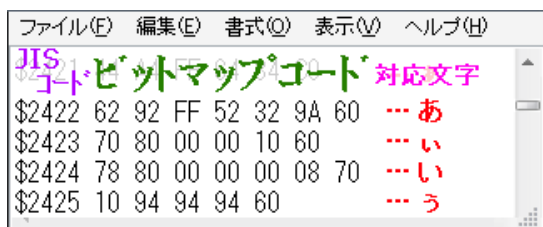


図10 自分で構築したデータベースのフォーマット

H8側のLED制御プログラムは、基本的に研究2と同様なので、ここでは説明しないことにする。

5. 考察

今回製作したLED制御ボードは、主に次のような問題点があった。

- ①赤色点灯時、下2段のみ少し暗くなる。
- ②ときどき、ある一列が光らなくなることがある。
- ③H8メモリ上の関係で、ある一定の文字数よりも多くは表示できない。

これらの問題点の原因と解決方法を私は以下のように考えている。

①については、H8マイコンの構造上、接続しているIOポートのピンは、周りと比べて出力電流が低くなっている。解決策としては、バッファICを利用する、又は使用する抵抗の抵抗値を落とすということが挙げられる(すでに対処している)。

②については、LEDボード裏面の配線に、線を重ねてしまったところがあるため、そこから発生している接触不良かと考えられる。

③については、H8に完全にデータを送っ

てから文字をスクロールしているためである。解決策として、スクロールをしながら少しずつ受信するという方法が挙げられる。

6. 今後の課題

現在の自作アプリケーションは、まだ開発段階であるため、操作性やエラー処理、項目設定などの機能に欠ける。そのため、今後はエラー対処やデザイン、設定項目の増加など機能拡大を図った上で、今まで作成してきたプログラムを一つのアプリケーションとしてまとめていきたい。

また、現在はLEDの赤色の部分しか制御できないので、今後は緑色の部分も制御できるように機能を拡張しようと考えている。

7. 参考文献

- [1] 「ぼくらのマイコン・ロボット工作」 横井浩史、松下光次郎、CQ出版(2006)
- [2] 「Visual C# 2008 逆引き大全 555の極意」 池谷京子、増田智明、国本温子、秀和システム(2009)
- [3] Microsoft社、Visual C# デベロッパーセンター
<http://msdn.microsoft.com/ja-jp/vcsharp/default.aspx>
- [4] Renesas Electronics社、H8/3664 グループ データシート
<http://japan.renesas.com/>

8. 謝辞

今回の研究にあたり技術指導をしてくださった本校サイエンス研究会物理班顧問の米田先生、及びアドバイスをくださったサイエンス研究会物理班の先輩方に、この場をお借りして深く御礼申し上げます。

シミュレーションで交通渋滞を考える

1年B組 村田 宏暁

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は顧問の先生から、信号の動きをシミュレーションすることで交通渋滞を減らす研究が行われていると聞き、興味を持った。そこで、私は交通渋滞をシミュレーションするプログラムを作り、渋滞の発生について調べることにした。本論文では、その研究内容を紹介したい。なお、今回のプログラムはすべてJAVA言語で作成した。

キーワード シミュレーション、交通渋滞、JAVA

2. 研究の背景と目的

私が現在行っている研究は、パソコンを用いて信号の動きをシミュレーションすることであり、渋滞の発生の仕組みについて調べるといえるものである。具体的にいうと、直角に交わる二本の道を走る自動車の動きと信号の動きを制御することにより、交通渋滞の起こり方を調べようというものである。渋滞の発生の仕組みについては現在も研究中有るため、現段階でわかったことを報告する。

した。さらに、プログラム実行中にも信号の間隔を変えることができるようにすることにより、信号の間隔と渋滞の発生の関係を調べやすくした。なお、このプログラムは自動車のスピードや車間距離などの個体差や信号以外による交通渋滞の発生などは考慮していない。また、信号が両方赤である時間は設けていない。

3. 研究方法とその結果

(1) 研究内容

今回は研究の第一段階として、2本の道が直角に交わる状況のもとで、プログラム(図1)を作成し、信号の変わる時間間隔や交通量、自動車の動きを変えることにより、交通渋滞の発生との関係について調べることに

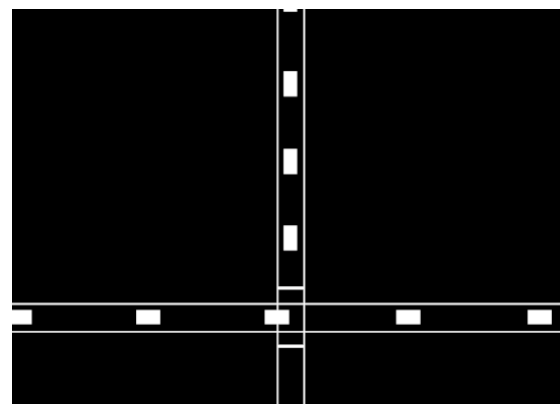


図1 プログラム実行中の
スクリーンショット

(2) 結果

今回はそれぞれの道の交通量、信号の間隔、自動車の最高速度や加速度などを変えることによって、下記のような動きをすることがわかった。

- ・交通量がどちらかの道に偏っているときは、交通量が多い方の信号が青である時間を長くすると渋滞が起こりにくい。
- ・そのときの信号の長さの比と交通量の比を等しくしないほうが良い。
- ・交通量が「ある一定の量」を超えると、信号の変わる時間間隔をどれだけ長くしても交通渋滞が発生する。
- ・ただし「ある一定の量」は最高速度や加速度などを変えると、それに応じて変化する。

にも多くのアドバイスをいただきました。この場で深く感謝申し上げます。

4. 今後の課題

今回は上で述べたようなことがわかった。今後は交通量などと交通渋滞の発生との関係や「ある一定の量」の変化などについて調べたい。

5. 参考文献

[1] 「やさしいJAVA 第二版」、高橋麻奈、風工舎(2002年)

[2] <http://www.mm2d.net/applet-howto/>

6. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ、多くの先生方に多大なご指導をいただきました。また、先輩方

PIC マイコンによる LED の制御

1 年 B 組 田村 拓也

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

クリスマスツリーなどに使われる LED の電飾を、PIC マイコンを用いて再現することができた。また、CCP モジュールの PWM モードを用いることにより、電圧を一定にしたまま LED の点灯の仕方を制御することに成功した。しかし、プログラムが長く、多少強引なため大幅に修正する必要がある。

キーワード PIC、LED、PWM、C 言語

2. 研究の背景と目的

最近、クリスマスツリーなどでよく電飾を見かける。その電飾はほとんどの場合、3種類に分かれる。点灯しているもの、点滅しているもの、そしてグラデーションになっているものである。

これらの機能をすべて PIC18F2320 マイクロコンピュータ(以下 PIC という)で制御することにした。PIC マイコンとは、マイクロコンピュータの一種で、書き込んだプログラムを実行し、LED などに信号を送ることのできるものであり、C 言語によるプログラミングが可能である。

一般に、LED などの明るさを変えるためには電圧を変える必要がある。しかし、私は電圧を一定にしながらか明るさを変えることを試みた。そこで、CCP モジュールの Pulse Width Modulation (PWM)モードを用いた。また、PWM はモーターの速度制御やスイッチング電源の電圧制御などに応用が利くため、その練習にもなると考えた。



図1 今回使用した PIC18F2320

3. 研究内容

(1) 仮説

PWM を使用することにより、電圧を変えずに発光ダイオード(LED)を点灯や点滅、あるいは様々なパターンで光らせることができる。

(2) 点灯実験

プログラムはすべて C 言語である。PIC の命令のいくつかを説明する。

- while 文...条件式が成立している間のみ繰り返し実行文が実行される文
- if 文...条件式が成立した場合のみ実行

される文

・for 文...指定した回数分のみ実行文が実行される文

まず LED を点灯させるためには、PIC の I/O ポートから電圧を出力する必要がある。マイコンのポート A に 4 つの LED を接続し、点灯の命令

```
LATAbits.LATA0 = 1
```

をすることで点灯が可能であることを確認した。

(3) 点滅実験

点灯の命令を出し、少し後に消灯の命令をする。これを繰り返すことにより点滅が可能となった。

```
while(1)
{
    LATAbits.LATA0 = 1;
    Delay10KTCYx(200);
    LATAbits.LATA0 = 0;
    Delay10KTCYx(200);
}
```

ここで、「Delay10KTCYx(200);」とは、0.2 秒待つという命令である。

(4) シリアル通信

シリアル通信とは、PC と PIC を通信させることである。しかし、PIC はそのままではシリアル通信ができないため、専用の IC を取り付ける必要があった。そのため今回は、RS232C(シリアル通信)用ドライバ IC(SP3232ECP)を使用した。

なお、PC 側は Visual Basic でプログラムを使用した。



図2 SP3232ECP

(5) タイマ 2 モジュール

タイマ 2 とは、カウンタレジスタ (TMR2) と周期レジスタ (PR2) を持っているタイマである。PWM 用の周期カウンタに使用したり、SPI のシリアル通信用クロックに用いたりする。

内部クロックを入力として TMR2 でカウントし、オーバーフローになると割り込みを発生させるという動作をする。

(6) パルス幅変調

LED は点灯しているとき、実際は非常に早く点滅している。しかし、人間の目には残像現象により点灯しているようにしか見えない。これを利用し明るさを変える(変化したように見せかける)ことができる。つまり、この PWM を用いれば明るさを変えることができる。

基本的な原理は、パルスの「1」と「0」の割合を可変にすることである。それにより、通電する時間の平均であるエネルギーを可変制御しようというものである。CCP モジュールの PWM は上で説明したタイマ 2 に依存している。

まずはじめに、デューティ値を 0.1 秒間

隔で上げて行き、10ビットより大きくなると0に戻すという作業を行った。

```
unsigned int duty;
int i;
LATAbits.LATA1 = 1;
OpenPWM1(0xFF);
OpenTimer2(TIMER_INT_OFF&T2_PS_1_1 & T2_POST_1_1);
duty = 0;
while(1)
{
    SetDCPWM1(duty++);
    if(duty > 0x3FF){
        duty = 0;
        Delay10KTCYx(100);
    }
}
```

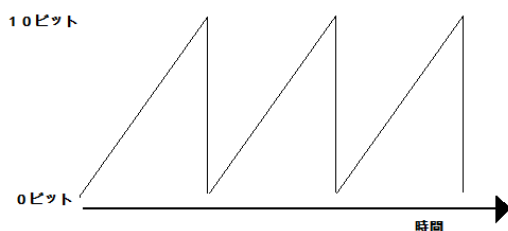


図3 デューティ値の変化

しかし、これではデューティ値が上がり10ビットになったら、0に戻すことをPICマイコン内でしているだけになる。そこで、if文を用いて0ビットから10ビットまで1ビット間隔でLEDの明るさを変えることにした。それにより、2秒間隔で暗くなることに成功した。

たとえば、次のプログラムは1023(10ビット、16進数で3FF)になると、0.002秒間LEDが点灯し0.018秒間消灯する。これを

100回繰り返すというものだ。しかし、途中で何らかの理由で動かなくなった。

```
if(duty > 0x3FF){
    for(i=0; i < 100; i++){
        LATAbits.LATA1 = 1;
        Delay10KTCYx(2);
        LATAbits.LATA1 = 0;
        Delay10KTCYx(18);
    }
}
```

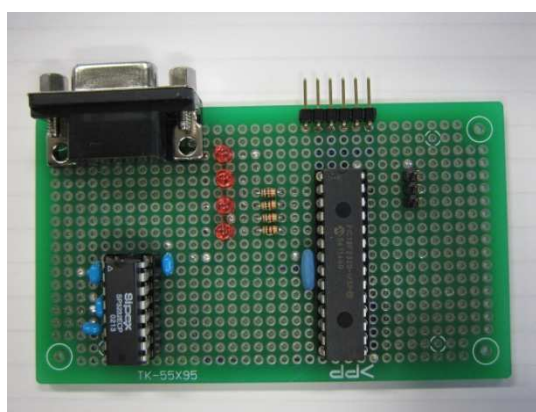


図4 今回完成したPICボード

4. 考察

今回の研究によりPICマイコンでLEDを様々なパターンで制御できることがわかった。

5. 今後の課題

今回の問題点として、

- (1) PWMが動かない
- (2) 一番上のLEDのみが反応し動作するということがあげられる。

(1)について、現在のプログラムではPWMの仕組みとは違う方法のプログラムになってしまった。予定ではLED本体のパルスの幅を変えないといけませんが、強引に

数値を変えてパルス幅を変えてしまった。そのためプログラムを大幅に修正する必要がある。

(2)については、PIC ボードの導線を長く引きすぎたため接触不良になり、回路を見直す必要がある。

今後、赤外線センサを用いて距離に応じて LED の色を変えるようにしたい。現在、10 バーLED アレイを接続中である。



図5 10バーLED

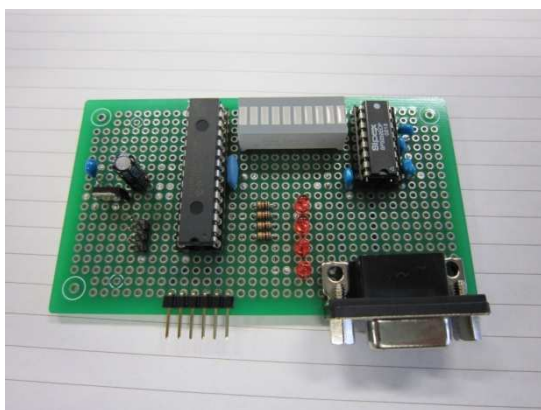


図6 現在の PIC ボード

6. 参考文献

- [1]「改訂版電子工作のための PIC18F 本格活用ガイド」、後関哲也著、技術評論社
- [2]「改訂版 C 言語による PIC プログラミング入門」、後関哲也著、技術評論社

[3]Microsoft 社, PIC18F2320 データシート
<http://ww1.microchip.com/downloads/en/evicedoc/39599c.pdf>

7. 謝辞

今回の研究にあたってご指導くださった顧問の米田先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございました。

16 セグメント LED の制御

1 年 A 組 上田 樹

1 年 A 組 船井遼太郎

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

デジタル時計などに使用される 7 セグメント LED に比べ、より細かく、より多くの文字などを表示することのできる 16 セグメント LED を用いてマイコンで制御することにより、LED にアルファベットなどを表示させることができたので報告する。

キーワード H8 マイコン、セグメント LED、配列変数

2. 研究の背景と目的

デジタル時計などは、表示の仕方が単純であるにも関わらず、わかりやすく数字を表示することができる。私たちは同じ仕組みでより多くのものを表せないかと考えた。デジタル時計などの 7 セグメント LED は、0 ~ 9 までしかうまく表示することができない。そこで、より多くの文字(アルファベットなど)を表示することのできる、16 セグメント LED を使用することにした。



図 1 16 セグメント LED

また、16 セグメント LED は H8 3664f マイコンで制御することにし、プログラムは C 言語で作成した。

3. 研究内容

目標は、アルファベットと数字を LED に順番に表示することである。

(1) アルファベットを表示させる

まず、16 セグメントのセグメントを 1 本ずつ制御して文字を表示させた。今回は、出力ピンの多い、ポート 5 とポート 8 を使用した。出力は

```
IO.PDR8.BIT.B5=1;
```

などで制御できる。これはポート 8 のビット 5 (以下「p85」と表す)に電流を出力するという意味である。

(2) 点滅

点滅は、指定した時間だけ処理を止められる関数 `Meswait`(引数を 1 秒単位で指定する)を使用して切り替える。実際のプログラムでは、

```
IO.PDR8.BIT.B5=1;
    (p81 に電気を流す)
```

```
Meswait (1);
    (1 秒処理を止める)
```

```
IO.PDR8.BIT.B5=0;
    (p81 に電気を流さない)
```

というようになる。これを使い、アルファベットと数字を1秒ごとに切り替え、順番に表示させることに成功した。

(3) プログラムの短縮

ここまでで一応目的は達成できたが、プログラムが長いものになってしまった。そこで、ビット指定からバイト指定にしてプログラムを短縮した。バイト指定とは、IOポートの8個の出力ピンをまとめて制御することであり、これを使うと、セグメント8本はビット指定だと8文かかる制御であるが、バイト指定にすると同じ制御を1文にすることができる。したがって、16セグメントLEDでの1文字は16進数で2バイトで表すことができる。次に配列を用意し、その1つ1つに、文字を表示させるときの命令を16進数にして、表示させたい順番に入力し、for文で配列を順番に出力させていけば、プログラムをさらに短くすることができる。これらを使用して、プログラムの長さを約15分の1にすることができた。

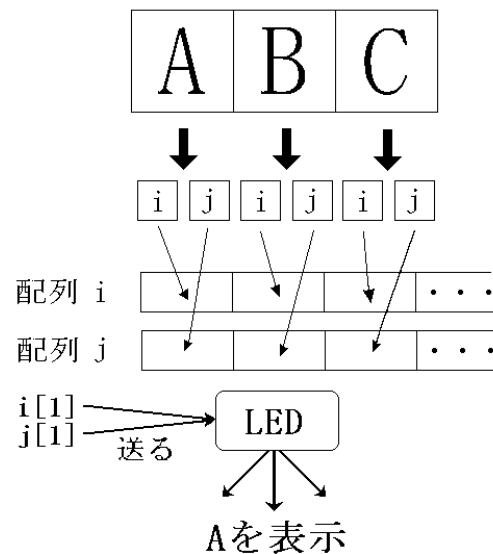


図3 マイコンの処理イメージ

4. 今後の課題

今回の研究においては、自由に文字を表示させることができなかった。そこで今後、基盤にボタンを取り付け、押されたボタンに応じてアルファベットなどを表示できるようにしようと考えている。

5. 参考文献

- [1]「ぼくらのマイコン・ロボット工作 ペットボトルとH8Tinyで作ろう」,横井 造史、松下光次郎共著、CQ出版社
- [2]「猫でもわかるC言語プログラミング」、桑井康孝著、Softbank Creative

6. 謝辞

今回の研究にあたり指導して下さった顧問の米田先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にもご指導、ご協力していただきました。ありがとうございました。

ピタゴラス三角形の辺の長さに関する考察

4年A組 清水 悠平
4年B組 森 宇宏
4年C組 佐藤 圭
4年C組 西井 良徳
指導教員 川口 慎二

1. 概要

サイエンス研究会数学班は、昨年度に続けてピタゴラス三角形に関する研究を行ってきた。今年度は、ピタゴラス三角形の辺々や面積に条件を加えた場合、どのように条件を満たす三角形を生成できるかについて考察した。特に、2辺の長さが連続する自然数である場合について、興味深い結果を得ることができたので報告する。

キーワード ピタゴラスの定理(三平方の定理)、ピタゴラス三角形、ピタゴラス数
既約、平方数、フェルマーの定理

2. 緒言

私たちははじめに、既約なピタゴラス三角形の生成方法を数式によって求めることができた。またこの数式を用いて、「辺が連続している」や「面積が等しい」などの条件を満たすピタゴラス三角形をどのようにすれば求められるかを考えた。

3. 研究内容

3-1. ピタゴラス三角形とは

ピタゴラス三角形とは、3辺の長さを整数で表すことができる直角三角形である。また、よく知られているように直角三角形の3辺の間には、次の**ピタゴラスの定理**(定理1)が成り立つ。

定理1 (ピタゴラスの定理)

直角を挟む2辺の長さが x, y である直角三角形の斜辺の長さを z としたとき、

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots(1)$$

が成り立つ。

このとき、等式(1)を**ピタゴラス方程式**という。そして、ピタゴラス三角形の3辺の長さの組み合わせを**ピタゴラス数**という。

あるピタゴラス三角形を自然数倍に拡大すると、新しい直角三角形ができる。新しくできた直角三角形は、各辺が自然数であり、もとの三角形に相似であるから、これもまたピタゴラス三角形となる。このように、あるピタゴラス三角形を2倍、3倍、4倍、…としていくと、次々に新たなピタゴラス三角形ができる。つまり、1つのピタゴラス三角形

から無数のピタゴラス三角形が生み出される。これを記号で表現しよう。一般に、3辺が x, y, z (z を斜辺とする) であるピタゴラス三角形を組 (x, y, z) と表すことにする。このとき、 (kx, ky, kz) (k は自然数) はすべてピタゴラス三角形になる。

例えば、 $(3, 4, 5)$ という組み合わせのピタゴラス三角形からは、 $k=2$ とした場合は $(6, 8, 10)$ 、 $k=3$ とした場合は $(9, 12, 15)$ というピタゴラス三角形がそれぞれ得られる。

このように、ある1つのピタゴラス三角形から、無限に多くのピタゴラス三角形を生成することができる。

3-2. 既約なピタゴラス三角形

2つの整数 a, b が**既約**であるとは、これらの最大公約数が1であるときをいう。このとき、 a, b は**互いに素**であるともいう。また、ピタゴラス三角形が既約であるとは、3辺のうち、どの2つの辺の長さも既約になっているときをいう。

例えば、 $(3, 4, 5)$ 、 $(5, 12, 13)$ 、 $(15, 8, 17)$ などである。これらは既約なピタゴラス三角形である。そこで、既約なピタゴラス三角形を求めるために3辺の性質を調べた。

定理2

辺 y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形は、すべて

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

($m > n$) から求められる。ただし、 m, n はパリティ(偶奇性)が異なり、既約な任意の2数である。また、 y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) は、このような2数 m, n によって一意的に定まる。

定理3

y が偶数であるようなすべてのピタゴラス三角形 (x, y, z) は

$$x = kl, y = \frac{k^2 - l^2}{2}, z = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

によって表される。ただし、 k と l は互いに素な奇数であり、 $k > l$ を満たす。

さらに y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) はこれによって一通りに表される。

y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形を無限に求めたければ、まず k に奇数 $3, 5, 7, 9, \dots$ を順に当てはめ、 l に k よりも小さく k と互いに素な奇数を順に当てはめる。そして、定理3によって x, y, z の値を計算すればよい。

定理3によって求められた最初の20個の既約なピタゴラス三角形を表1に示す。

表1 既約なピタゴラス三角形(一部)

k	l	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65
11	1	11	60	61
11	3	33	56	65
11	5	55	48	73
11	7	77	36	85
11	9	99	20	101

あらゆるピタゴラス三角形を求めるためには、既約なピタゴラス三角形に自然数を次々にかけていけばよい。このようにして、

y が偶数であるようなあらゆるピタゴラス三角形を得ることができる。さらに、 x と y を入れ替えたピタゴラス三角形を追加すれば、すべてのピタゴラス三角形が得られる。

次節以降では、このような性質を用いて、特別な条件を満たすピタゴラス三角形を調べていく。

3-3. 100 未満の辺をもつピタゴラス三角形

3 辺の長さがいずれも 100 を超えないようなピタゴラス三角形をすべて求めるためには、斜辺の長さが 100 以下であるような三角形を求めれば十分である。なぜなら、斜辺は直角三角形の中で最も大きな辺だからである。

また、ここでいうピタゴラス三角形とは、定理 2 のような y が偶数である三角形のみを指す。表 1 をみると、条件を満たす k はたった 16 個しかない。なぜなら $k \geq 15$ とすると、

$$z = \frac{k^2 + l^2}{2} > \frac{15^2}{2} > 100$$

となってしまう、100 を超えてしまうからである。

さらに、表 1 の最初の 7 個は辺を 2 倍することができる（そうしても斜辺の長さは 100 を超えない）。よって、新たに 7 個のピタゴラス三角形が得られる。同様に最初の 5 個は 3 倍、最初の 3 個は 4 倍または 5 倍、最初の 2 個は 6 倍または 7 倍、最初の 1 個は 8 倍から 19 倍まですることができるため、合計 50 個のピタゴラス三角形を求めることができる。

そこで、私たちは得られる辺の長さの制限とピタゴラス三角形の個数の間に規則性

があるのではと考え、同様の方法で斜辺が 200 未満の場合、300 未満の場合、とさらに調べてみた。結果は表 2 の通りである。

表 2 各辺に制限を付けた場合のピタゴラス三角形の個数

100未満の場合	50個
200未満の場合	93個
300未満の場合	182個
400未満の場合	270個
500未満の場合	384個
600未満の場合	491個
700未満の場合	588個
800未満の場合	688個
900未満の場合	796個
1000未満の場合	827個

また、その結果をグラフにしたものが下の図 1 である。

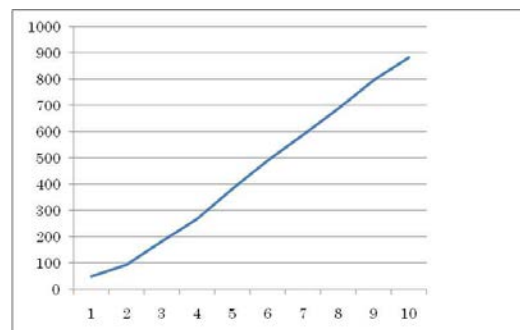


図 1 各辺に制限を付けた場合のピタゴラス三角形の個数のグラフ

表 2 と図 1 のグラフから、得られる辺の長さの制限とピタゴラス三角形の個数は比例関係にあるのではないかと考えた。そこで便宜上、「未満」を「以下」に変更し、さらに大きな数についても調べた。その結果が、表 3 である。

ここで、 n を制限した辺の長さとし、 $P(n)$ をピタゴラス三角形の個数とする。

表3 各辺に制限を付けた場合の
ピタゴラス三角形の個数

～以下	～個		
		3100	3291
100	52	3200	3414
200	127	3300	3536
300	210	3400	3665
400	295	3500	3792
500	387	3600	3906
600	486	3700	4026
700	583	3800	4158
800	684	3900	4292
900	781	4000	4416
1000	886	4100	4541
1100	989	4200	4658
1200	1101	4300	4789
1300	1210	4400	4917
1400	1318	4500	5039
1500	1429	4600	5173
1600	1543	4700	5297
1700	1658	4800	5426
1800	1762	4900	5557
1900	1885	5000	5681
2000	1994	5100	5819
2100	2113	5200	5950
2200	2227	5300	6070
2300	2348	5400	6208
2400	2460	5500	6333
2500	2567	5600	6475
2600	2690	5700	6604
2700	2802	5800	6742
2800	2926	5900	6861
2900	3054	6000	7008
3000	3172	6100	7135

6200	7262	11000	13891
6300	7396	11100	14022
6400	7528	11200	14172
6500	7674	11300	14320
6600	7797	11400	14457
6700	7930	11500	14606
6800	8074	11600	14748
6900	8207	11700	14895
7000	8345	11800	15032
7100	8481	11900	15185
7200	8602	12000	15320
7300	8748	12100	15466
7400	8881	12200	15618
7500	9009	12300	15747
7600	9160	12400	15899
7700	9296	12500	16041
7800	9437	12600	16180
7900	9556	12700	16330
8000	9706	12800	16466
8100	9837	12900	16615
8200	9986	13000	16764
8300	10117	13100	16903
8400	10245	13200	17057
8500	10398	13300	17203
8600	10528	13400	17343
8700	10672	13500	17489
8800	10801	13600	17640
8900	10943	13700	17781
9000	11077	13800	17933
9100	11220	13900	18077
9200	11359	14000	18227
9300	11504	14100	18363
9400	11626	14200	18515
9500	11775	14300	18664
9600	11908	14400	18811
9700	12069	14500	18961
9800	12190	14600	19093
9900	12345	14700	19238
10000	12471	14800	19390
10100	12613	14900	19535
10200	12751	15000	19675
10300	12899	15100	19817
10400	13047	15200	19977
10500	13185	15300	20121
10600	13325	15400	20279
10700	13474	15500	20424
10800	13602	15600	20569
10900	13757	15700	20720

ここで、先程と同様に、 x 軸を n 、 y 軸を個数 $P(n)$ としたグラフにしてみた。

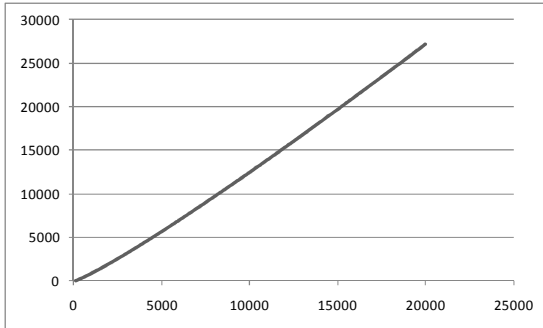


図2 x 軸を n 、 y 軸を $P(n)$ としたグラフ

ここでも、 n と個数 $P(n)$ との関係は比例になると推測した。そこで、 $\frac{P(n)}{n}$ を計算し、図2のグラフの傾きについて調べた。

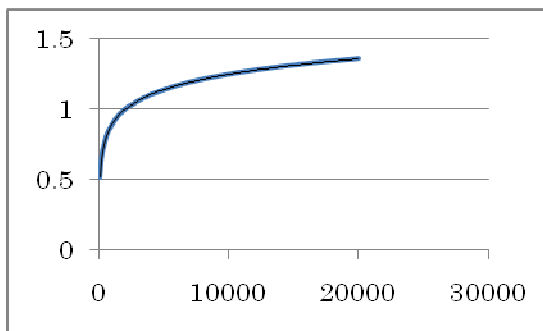


図3 表2のグラフの傾き

この結果より、 $\frac{P(n)}{n}$ の値が一定ではないため、比例関係でないことがわかった。また、図3のグラフが対数関数のグラフを平行移動したものと一致することもわかった。表3及び図2、図3からは明確な規則性を見つけることはできなかったので、今後の課題としたい。

3-4. 連続する整数を2辺にもつピタゴラス三角形

定理2において x, y はどちらも奇数であるため連続することはない。よって、以下の2つの場合が考えられる。

① y, z が連続するピタゴラス三角形

② x, y が連続するピタゴラス三角形

まず①の場合について考える。 y, z は、定理3より

$$y = \frac{k^2 - l^2}{2}, z = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

である。ここで、 z は斜辺であるので $y < z$ が成り立つ。つまり

$$\frac{k^2 + l^2}{2} - \frac{k^2 - l^2}{2} = \frac{2l^2}{2} = l^2 = 1$$

が成り立てばよい。 l は自然数であるため、 $l=1$ となる。したがって、定理3において $l=1$ とすれば、 y, z が連続するピタゴラス三角形を得ることができる。

実際に y, z が連続するピタゴラス三角形を表4に示す。

表4 y, z が連続するピタゴラス三角形

k	l	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
7	1	7	24	25
9	1	9	40	41
11	1	11	60	61
13	1	13	84	85
15	1	15	112	113
17	1	17	144	145

次に②の場合について考える。先程と同様にして、定理1の式から考える。

$$x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

が成り立てばよい。しかし、この式から k, l を効率的に求めることはできなかつた。そこで先程の表 1 より、 y, z が連続しているときの k, l について注目すると、 (k, l) は $(3,1), (7,3), (17,7), \dots$ となった。実際に (k, l) に対する (x, y, z) を表 5 に示す。

表 5 y, z が連続しているときの k, l

k	l	x	y	z
3	1	3	4	5
7	3	21	20	29
17	7	119	120	169
41	17	697	696	985
99	41	4059	4060	5741
239	99	23661	23660	33461
577	239	137903	137904	195025
1393	577	803761	803760	1136689
3363	1393	4684659	4684660	6625109
8119	3363	27304197	27304196	38613965
19601	8119	159140519	159140520	225058681
47321	19601	927538921	927538920	1311738121
114243	47321	5406093003	5406093004	7645370045
275807	114243	31509019101	31509019100	44560482149

表 5 から (k, l) がわかれば、 (x, y, z) を得ることができる。表 5 から以下のことが類推できる。ここで、 k_n を n 番目の k の項、 l_n を n 番目の l の項とする。

- (i) k の第 n 項は、 l の第 $n+1$ 項に一致する。つまり、 $k_n = l_{n+1}$ 。
- (ii) l の第 n 項は第 $n-1$ 項の 2 倍したものと第 $n-2$ 項の和となる。つまり、 $l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2}$ 。
- (iii) $x-y$ の値は 1 と -1 が交互で出てくる。

このうち、(ii) の漸化式

$$l_{n+2} = 2l_{n+1} + l_n$$

を解いてみた。まず (i) の事実より $l = a_n$ とすると、 $k = a_{n+1}$ と表すことができる。

よって、特性方程式は、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + a_n \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n &= 0 \end{aligned}$$

から、 $x^2 - 2x - 1 = 0$ となる。

ここで、白銀 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ が現れているが、なぜ白銀 2 次方程式が現れたかについてはわからないので、今後の課題としたい。

さて、ここで $x^2 - 2x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、

$$\alpha = 1 - \sqrt{2}, \quad \beta = 1 + \sqrt{2}$$

となる。解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、もとの漸化式に代入すると、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} &= \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\ a_{n+1} - \alpha a_{n+1} &= \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \beta a_n &= \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) \\ &= \alpha^{n-1}(3 - \beta) \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= \beta^{n+1}(a_2 - \alpha a_1) \\ &= \beta^{n-1}(3 - \alpha) \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、②-③より、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)a_n &= \alpha^{n-1}(3 - \beta) - \beta^{n-1}(3 - \alpha) \\ &= 3(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \alpha^{n-1}\beta - \alpha\beta^{n-1} \\ &\quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

ここで、①から、 $3 = \alpha + \beta - \alpha\beta$ を④に代入すると、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)a_n &= (\alpha + \beta - \alpha\beta)(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) \\ &\quad + \alpha^{n-1}\beta - \alpha\beta^{n-1} \\ &= \alpha\beta^{n-1} - \alpha^n + \beta^n - \alpha^{n-1}\beta \\ &\quad - \alpha\beta^n + \alpha^n\beta + \alpha^{n-1}\beta - \alpha\beta^{n-1} \\ &= \beta^n - \alpha\beta^n - \alpha^n + \alpha^n\beta \\ &= \beta^n(1 - \alpha) - \alpha^n(1 - \beta) \end{aligned}$$

となる。

さらに、 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$ 、 $\beta = 1 + \sqrt{2}$ より、

$$\begin{aligned} \{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\}a_n \\ = \beta^n \{1 - (1 - \sqrt{2})\} - \alpha^n \{1 - (1 + \sqrt{2})\} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2}a_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n \text{ となる。}$$

したがって、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ とわかる。

ゆえに、

$$k_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}, \quad l_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$$

と表せる。よって、

$$x = kl, \quad y = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

さらに、解と係数の関係①から、次のよう

に、 x, y, z を表すことができる。

$$\begin{aligned} x = kl &= \left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \right) = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^n}{4} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n\beta^n \times \beta + \alpha^n\beta^n \times \alpha}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n\beta + (-1)^n\alpha}{4} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n(\alpha + \beta)}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n \times 2}{4} = \frac{\frac{\alpha^{2v+1} + \beta^{2v+1}}{2} + (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ より、 $x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}$ となる。また、

$$\begin{aligned}
y &= \frac{k^2 - l^2}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{\alpha^{2n+1} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2}}{4} - \frac{\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{4}}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n}}{8} = \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2 - 1) + \beta^{2n}(\beta^2 - 1) + 2\alpha^n\beta^n(\alpha\beta - 1)}{8} \\
&= \frac{\alpha^{2n}(1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1) + \beta^{2n}(1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1) - 4(-1)^n}{8} = \frac{2\alpha^{2n}(1 - \sqrt{2}) + 2\beta^{2n}(1 + \sqrt{2}) - 4(-1)^n}{8}
\end{aligned}$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{2}, \quad \beta = 1 + \sqrt{2} \text{ より、 } y = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - 2(-1)^n}{4} = \frac{\frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} - (-1)^n}{2}.$$

ゆえに、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ より、 $y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$ とわかる。さらに、

$$\begin{aligned}
z &= \frac{k^2 + l^2}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{\alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2}}{4} + \frac{\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{4}}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} + \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{8} = \frac{-2(-1)^n + 2(-1)^n}{8} = \frac{\alpha^{2n}(1 + \alpha) + \beta^{2n}(1 + \beta)}{4} \\
&= \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}
\end{aligned}$$

とわかる。

$$\text{以上より、 } x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}, \quad y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}, \quad z = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2} \quad \text{となる。}$$

そこで、以下の2つのことを確かめた。

【1】 x と y の差が1である。

【1】については、 x と y の差をとると、

$$x - y = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2} - \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$$

【2】 ピタゴラス方程式が成り立つ。

$$= (-1)^n$$

【1】と【2】が成り立つと、 (x, y, z) は、

より、 x と y の差は1と-1とを振動するこ

x, y が連続するピタゴラス三角形であると

とがわかった。つまり、 x と y の絶対値は

いえる。

$|x - y| = 1$ となる。

【2】について、 $x^2 + y^2 - z^2$ に先程の x, y, z を代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= \left\{ \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2} \right\}^2 - \left(\frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - \alpha^{4n} - \beta^{4n} + 4}{16} + \frac{-2\alpha^{4n+1} - 2\alpha^{2n+1}\beta^{2n} - 2\alpha^{2n}\beta^{2n+1} - 2\beta^{4n+1}}{16} \\ &= \frac{\alpha^{4n}(\alpha^2 - 2\alpha - 1) + \beta^{4n}(\beta^2 - 2\beta - 1) + 4 - 2\alpha - 2\beta}{16} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、ピタゴラス方程式が成り立つことがわかった。

よって、 $x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}$, $y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$, $z = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$ に、 n を順次代

入していくことにより、 x, y が連続するピタゴラス三角形を求めることができる。

3-5. メスネーラの恒等式

前節で求めた y, z が連続するピタゴラス三角形を他の方法でも求めることができる。その方法のうち、メスネーラの恒等式を用いるものがある。

定理4 (メスネーラの恒等式)

すべての自然数 n に対して、 $(10n - 5)^2 + \{50n(n - 1) + 12\}^2 = \{50n(n - 1) + 13\}^2$ が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (10n - 5)^2 + \{50n(n - 1) + 12\}^2 = 100n^2 - 100n + 25 + (50n^2 - 50n + 12)^2 \\ &= 100n^2 - 100n + 25 + 2500n^4 + 2500n^2 + 144 - 5000n^3 - 1200n + 1200n^2 \\ &= 2500n^4 - 5000n^3 + 3800n^2 - 1300n + 169 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (50n^2 - 50n + 13)^2 = 2500n^4 + 169 - 5000n^3 - 1300n + 1300n^2 \\ &= 2500n^4 - 5000n^3 + 3800n^2 - 1300n + 169 \end{aligned}$$

(左辺) = (右辺) より、この恒等式は成り立つといえる。■

メスネーラの恒等式に $n=1, 2, 3, \dots$ を順次代入していくと、 y, z が連続するピタゴラス三角形が生成されていく。実際にメスネーラ恒等式を用いて、 y, z が連続するピタゴラス三角形を求めた結果が表6である。

表6 メスネーラの方程式により求めたピタゴラス三角形

n	x	y	z
1	5	12	13
2	15	112	113
3	25	312	313
4	35	612	613
5	45	1012	1013
6	55	1512	1513
7	65	2112	2113
8	75	2812	2813

すべてのピタゴラス三角形の y, z が連続していることがわかる。よって y, z が連続するピタゴラス三角形を求める方法が2つ示すことができた。

3-6. $x-y=\pm 1$ が成り立つときの三角比

まず、図4のようなピタゴラス三角形 (x_n, y_n, z_n) を考える。

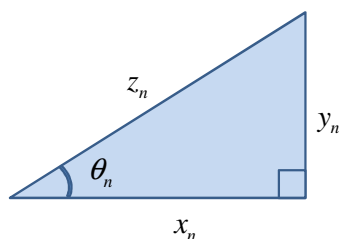


図4

図4の三角形について、

- ① $n \rightarrow \infty$ としたときの θ_n の三角比
- ② y, z が連続する、つまり x, y, z が連続するピタゴラス三角形の2つについて考察する。

① $n \rightarrow \infty$ としたときの三角比を考える。

ここで、私たちはこの三角形が直角二等辺

三角形に近づくのではないかと考えた。なぜなら、三角形が大きくなるにつれて x, y の差の絶対値1が無視できるようになると考えたからである。

実際に θ_n の正弦、余弦、正接をそれぞれ求めてみると、

$$\sin \theta_n = \frac{y_n}{z_n}, \quad \cos \theta_n = \frac{x_n}{z_n}, \quad \tan \theta_n = \frac{y_n}{x_n}$$

となる。そこで、それぞれの極限をとると、次のようになった。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{a_{2n+1} + a_{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} - (-1)^n}{\frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} + \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - 2(-1)^n}{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^{2n} + \beta^{2n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha^{2n+1}}{\beta^{2n}} + \beta - \frac{2(-1)^n}{\beta^{2n}}}{\frac{\alpha^{2n+1}}{\beta^{2n}} + \beta + \frac{\alpha^{2n}}{\beta^{2n}} + 1} \\
&= \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \sin \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{a_{2n+1} + a_{2n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + 2(-1)^n}{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^{2n} + \beta^{2n}} \\
&= \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \cos \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{a_{2n+1} + (-1)^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{a_{2n+1}}}{1 + \frac{(-1)^n}{a_{2n+1}}} = 1 \\
&= \tan \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

これらの結果から、 θ_n は 45° に近づいていくということがわかり、 $n \rightarrow \infty$ とした三角形は直角二等辺三角形となる。
 ②について考察する。定理 1 の条件のもと 3 辺が連続するピタゴラス三角形について考える。主に方法は 2 つある

[方法 1] 新たな文字を用いて求める。

[方法 2] 3-4 節で求めた、式をもとに生成する。

[方法 1]

x, y, z は連続しているので、

$$x = n-1, \quad y = n, \quad z = n+1$$

(n は $n > 1$ を満たす自然数) とおく。この 3 数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1$$

から、

$$n^2 = 4n, \quad n(n-4) = 0 \quad \text{となり、}$$

$n > 1$ なので、 $n = 4$ である。

よって、この条件を満たすものは (3, 4, 5) のみであることがわかる。

[方法 2]

3 辺が連続しているとは、3-4 節の x, y が連続するとき、かつ y, z が連続するときと言い換えることができる。

3-4 節より、

$$x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2},$$

$$y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2},$$

$$z = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$$

と表すことができる。 y, z は連続するので、 $y+1=z$ である。したがって、

$$\frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2} + 1 = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$$

となる。

これを解くと、 $a_{2n} = -(-1)^n + 2$ となる。

表 7

(i) n が奇数のとき

$a_{2n} = 3$ である。 a_n の一覧

(表 7)において、2 番目が 3 なので、 $2n = 2$ より、 $n = 1$ 。

これは n が奇数であるという、仮定を満たす。

n	a_n
1	1
2	3
3	7
4	17
5	41
6	99

表 8

(ii) n が偶数のとき

$a_{2n} = 1$ である。 a_n の一覧

(表 8)において 1 番目が 1 なの

で、 $2n = 1$ より $n = \frac{1}{2}$ 。

これは n が偶数(自然数)であるという仮定に反するので不適。

(i), (ii)より、 $n = 1$ のみである。すなわち $(x_n, y_n, z_n) = (3, 4, 5)$ のときのみであることがわかった。

[方法 1], [方法 2]のどちらの方法であっても、3 辺が連続するピタゴラス三角形は(3, 4, 5)のみであるとわかる。

また、辺の長さが等差数列となるものを求めることも容易である。上述の[方法 1]と同じように、自然数 k を公差として、3 辺を

$$n - k, n, n + k$$

とする。この 3 数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n - k)^2 + n^2 = (n + k)^2$$

$$n^2 - 2kn + k^2 + n^2 = n^2 + 2kn + k^2$$

から、

$$n^2 = 4kn, \quad n(n - 4k) = 0$$

となり、 $n > k$ から、 $n = 4k$ である。

この条件を満たすものは(3k, 4k, 5k)であり、これらはすべて(3, 4, 5) と相似なものである。

以上から、3 辺が連続するものは(3, 4, 5)のみであり、3 辺が等差数列となるのは(3, 4, 5)に相似なものに限る。

3-7. 面積が等しいピタゴラス三角形

ピタゴラス三角形の面積は $x \times y (= xy)$ によって容易に求めることができる。

実際に小さいものからその面積を求めた結果を下の表 9 に示す。

表 9

x	y	z	ΔABC
3	4	5	6
5	12	13	30
15	8	17	60
7	24	25	84
21	20	29	210
35	12	37	210
9	40	41	180
45	28	53	630
63	16	65	504

表 9 から (21, 20, 29) と (35, 12, 37) は面積が等しく 210 であることがわかる。

そこで、斜辺が 37 以下のものについて考える。実際に斜辺が 37 以下のものの面積を求めた結果を表 10 に示す。

表 10 から、異なった斜辺の長さで同じ面積となる最小の三角形は (21, 20, 29) と (35, 12, 37) であることがわかる。

表 10

x	y	z	△ABC
3	4	5	6
6	8	10	24
5	12	13	30
9	12	15	54
15	8	17	60
12	16	20	96
7	24	25	84
15	20	25	150
10	24	26	120
21	20	29	210
30	16	34	240
35	12	37	210

また、ピタゴラス三角形(15,112,113)の面積は840と(21,20,29),および(35,12,37)の面積の4倍に等しい。面積が4倍であることから、(21,20,29),(35,12,37)の辺を2倍した(42,40,58),(70,24,74)と面積が等しいことがわかる。よって、(15,112,113),(42,40,58),(70,24,74)の3つはどれも異なる斜辺をもつ、同じ面積のピタゴラス三角形である。ちなみに、3つの既約なピタゴラス三角形のうち異なる斜辺をもち、同じ面積であるもののうち最小なもの組み合わせは

$$(4485,5852,7373)$$

$$(19019,1380,19069)$$

$$(3059,8580,9109)$$

であり、いずれも面積 S は $S = 13123110$ となる。

3-8. ヘロン三角形、有理三角形

これまで、各辺が整数で表される直角三角形について考えてきたが、この章では各辺が整数の直角三角形とは限らない三角形を考える。

このような三角形をヘロン三角形という。

また明らかに、ピタゴラス三角形はヘロン三角形の一部である。

ここで、ヘロン三角形を求める方法をいくつか紹介する。

[方法1] 三角不等式

$$|b-c| < a < b+c$$

を満たす3数 a, b, c を選び、三角形 (a, b, c) を与えるという方法である。

例えば $a = 2, b = 3, c = 4$ とすると

$|2-3| < 4 < 2+3$ であり、またこの3数は三角形を作ることができる。ちなみにこの三角形の内角はすべて整数値ではなく、その面積は $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ となった。この例では、各辺は整数であるが内角と面積は整数にならなかった。

この方法では、内角はどれも整数ではなかった。そこで、ある1つの角が整数であり、各辺が整数である三角形を計算で求める方法を紹介する。

[方法2] 次の定理がある([2]参照)。

定理5 ([2])

$$\begin{cases} a = m^2 + n^2 + mn \\ b = m^2 - n^2 \\ c = 2mn + n^2 \end{cases} \quad \dots(2)$$

これらの式(2)を満たす△ABC(これを (a, b, c) とする)は $\angle A = 120^\circ$ であり、各辺が整数である三角形を表す。

(証明) 図5のような三角形ABCを考える。

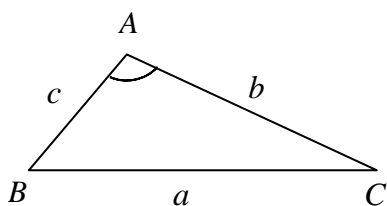


図5

余弦定理から

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(2)式より、

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(m^2 - n^2)^2 + (2mn + n^2)^2 - (m^2 + n^2 + mn)^2}{2(m^2 - n^2)(2mn + n^2)} \\ &= \frac{(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + (4m^2n^2 + 4mn^3 + n^4)}{2(2m^3n + m^2n^2 - 2mn^3 - n^4)} \\ &\quad - \frac{(m^4 + n^4 + m^2n^2 + 2m^2n^2 + 2mn^3 + 2m^3n)}{2(2m^3n + m^2n^2 - 2mn^3 - n^4)} \\ &= \frac{2m^3n - m^2n^2 + 2mn^3 + n^4}{-2(-2m^3n - m^2n^2 + 2mn^3 + n^4)} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、 $0^\circ < A < 180^\circ$ より $\angle A = 120^\circ$ となる。■

例えば、定理5において、 $m = 5$, $n = 3$ とすると、

$$\begin{cases} a = 5^2 + 3^2 + 5 \times 3 = 49 \\ b = 5^2 - 3^2 = 16 \\ c = 2 \times 5 \times 3 + 3^2 = 39 \end{cases}$$

こうして、 $\angle A = 120^\circ$ で各辺が整数の三角形(49,16,39)を求めることができた。

[方法3] 図6のように2つのピタゴラス三角形(5,12,13)と(35,12,37)を用意する。ここで、長さが12である辺同士を合わせると、新たに各辺が整数ではある鈍角三角形(13,40,37)を作ることができる。

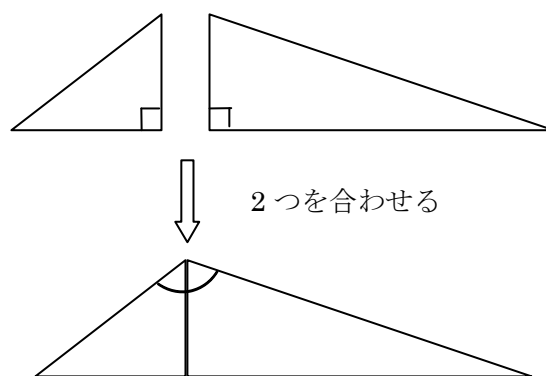


図6

ちなみに、この場合の鈍角はおよそ $23^\circ + 71^\circ = 94^\circ$

となっている。また、その面積は、(5,12,13)と(35,12,37)の面積をあわせたもの、つまり $30 + 210 = 240$ となる。[方法3]で求めると、各辺だけでなく面積も整数となる。

ここで[方法3]について注目する。[方法3]のように、直角を挟む辺が等しいピタゴラス三角形はいくらでも求めることができる。

2つのピタゴラス三角形(a_1, b_1, c_1)と(a_2, b_2, c_2)を考える。このとき、 b_1 と b_2 が

その最小公倍数になるように、2つのピタゴラス三角形を拡大すると、 b_1 と b_2 が対応する辺が等しいピタゴラス三角形の組を作り出すことができる。

このようにして、各辺と面積が整数で表される三角形を、2つのピタゴラス三角形を用意することで無限に求められることがわかった。

しかし、各辺と面積が整数で表される三角形が、すべて2つの直角三角形によってできているわけではない。

例えば、(65,119,180)を考える。この3数は

$$\begin{aligned} |65-119| < 180 < 65+119 \\ 54 < 180 < 184 \end{aligned}$$

を満たし、またこの三角形の面積はヘロンの公式を用いて、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{182(182-65)(182-119)(182-180)} \\ &= \sqrt{2683044} \\ &= 1638 \end{aligned}$$

となった。確かに面積は整数となっている。

ここで、(65,119,180)がピタゴラス三角形の組み合わせでないことを示す。

もし、(65,119,180)がピタゴラス三角形の組み合わせだとすると、その三角形の高さが整数となるはずである。

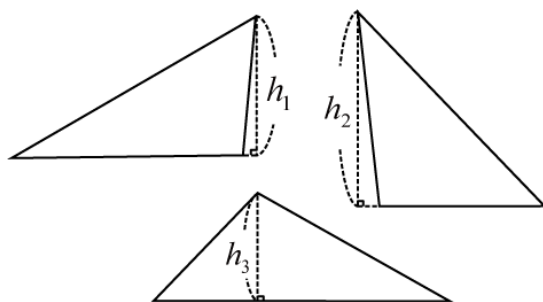


図7

図7のようにそれぞれの辺を底辺とすると、その高さは

- 底辺が 65 のとき $3276 \div 65 = 50.4$
- 底辺が 119 のとき $3276 \div 119 = 27.5294\dots$
- 底辺が 180 のとき $3276 \div 180 = 18.2$

となって、どの場合も高さが整数でないことがわかった。すなわち、(65,119,180)が2つのピタゴラス三角形の組み合わせではない。

では、ここから3辺が連続しかつ面積と各辺の長さが整数である三角形を考える。まず、その性質として、それが直角をはさむ1辺を共有する2つのピタゴラス三角形によってできているという点が挙げられる。それを証明する。

定理6

3辺が連続しかつ面積と各辺の長さが整数である三角形は、直角をはさむ1辺を共有する2つのピタゴラス三角形によってできている。

(証明)

まず、このような三角形のうち最小の辺が奇数であることを示す。

背理法を用いる。最小の辺が偶数 $2k$ であるとすると三角形は $(2k, 2k+1, 2k+2)$ となる。ヘロンの公式から、三角形の面積は

$$s = \frac{2k + 2k + 1 + 2k + 2}{2} = \frac{6k + 3}{2}$$

となる。ヘロンの公式を変形して、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$16S^2 = 2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)$$

下の式に、 S と3辺を代入して、

$$4(4S^2) = (6k+3)(2k+3)(2k+1)(2k-1)$$

$$= 4(3k^2+8k+2)(4k^2-1)+4k^2-1$$

ここで、左辺は4で割り切れるが、右辺は4で割ると1余り、矛盾が生じる。したがって、三角形の最小の辺は奇数である。

そこで、最小の辺を $2k-1$ とすると、三角形は $(2k-1, 2k, 2k+1)$ となる。このとき上と同様に三角形の面積の平方は

$$S^2 = 3k^2(k^2-1)$$

となる。この等式から k^2 は S^2 の約数であることがわかる。よって、背理法を用いて k が S の約数であることがわかる。すると、 S は整数 h を用いて、 $S = kh$ と表せる。

一方、辺 $2k$ に対する高さを h_1 とすると、 $S = kh_1$ と表すことができる。

これらの2式を比べると、 $h = h_1$ であることがわかる。つまり、辺 $2k$ に対する高さは整数となることがわかる。

さらに、 $S^2 = 3k^2(k^2-1)$ と $S = kh$ を比べると、

$$3k^2(k^2-1) = k^2h^2$$

ここで、

$$h^2 = 3(k^2-1) = (2k+1)^2 - (k+2)^2$$

$$h^2 = 3(k^2-1) = (2k-1)^2 - (k-2)^2$$

より

$$(2k+1)^2 = h^2 + (k+2)^2$$

$$(2k-1)^2 = h^2 + (k-2)^2$$

つまり、ピタゴラス方程式が成り立ち、 $(2k+1, h, k+2)$ と $(2k-1, h, k-2)$ がピタゴラス三角形であることがわかる。これらのピタゴラス三角形をはり合わせると、 $(2k-1, 2k, 2k+1)$ という三角形ができる。したがって、3辺が連続する三角形がピタゴラス三角形の組み合わせによってできて

いることがわかった。■

ところで、

$$(2k+h \pm 2, 3k+2h, 4k+2h \pm 1)$$

(複号同順)という2つの三角形を考える。

次の計算から、これらの三角形がピタゴラス方程式を満たすことがわかる。

$$(2k+h \pm 2)^2 + (3k+2h)^2 - (4k+2h \pm 1)^2$$

$$= 4k^2 + h^2 + 4 + 4kh + \pm 4h \pm 8k$$

$$+ 9k^2 + 4k^2 + 12kh$$

$$- 16k^2 - 4h^2 - 1 - 16kh \mp 4h \mp 8k$$

$$= -3k^2 + h^2 + 3.$$

ここで、上の証明より、

$$3(k^2-1) = h^2$$

$$3k^2 = h^2 + 3$$

とわかるので、

$$(2k+h \pm 2)^2 + (3k+2h)^2 - (4k+2h \pm 1)^2$$

$$= -3k^2 + h^2 + 3$$

$$= 0$$

となり、ピタゴラス方程式が成り立つことがわかる。

ここで、これらの三角形は $(3k+2h)$ という辺を共有している。そこで、2つのピタゴラス三角形を組み合わせると、

$$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$$

という三角形ができる。この三角形は明らかに、3辺が連続する整数で表せる三角形である。

このことから、ある3辺が連続する整数である三角形があれば、新たに同じ性質を持つ三角形を求めることができるということがわかる。

例えば $(3, 4, 5)$ という三角形を考える。こ

のとき、 $(2k-1, 2k, 2k+1) = (3, 4, 5)$ となるのは、 $k=2$ のときである。また、 $S=6$ から $h=3$ である。

これらの数を

$$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$$

に代入して、 $(13, 14, 15)$ という三角形ができる。この三角形の面積はヘロンの公式から、

$$S = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$$

より、確かに面積が整数になっている。

さらに、 $(13, 14, 15)$ から新たな三角形を作る。この場合、

よって、 $(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$ から $(51, 52, 53)$ が得られた。この三角形の面積は、

$$S = \sqrt{78 \times 27 \times 26 \times 25} = 1170$$

となり、面積も確かに整数になっている。

また、この方法によって3辺が連続する整数である三角形を無限に求められることがわかった。

では、3辺の長さや面積が整数である三角形を求めるにはどうすればよいかを考える。この問題は、各辺と面積が有理数である三角形を求めることと同値である。このように、各辺と面積が有理数で表せる三角形を**有理三角形**とよぶ。

有理三角形は、別の2つの有理三角形の組み合わせであることを証明する。

定理7

有理数の辺をもつどんな三角形においても、三角形の内部に引いた高さは、それに垂直な辺を2つの有理数比に分ける。

(証明) 図8のような三角形 (a, b, c) を考える。そして、 a, b の正射影をそれぞれ a_1, b_1 とする。

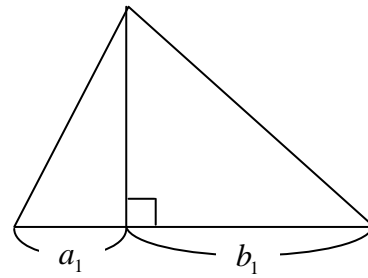


図8

まず仮定から、 $a_1 + b_1 = c$ …(3) であることがわかる。高さ h は、三角形 (a, b, c) を2つの直角三角形に分ける。その三角形は (a_1, h, a) と (b_1, h, b) であるので、ピタゴラス方程式から、

$$a_1^2 = a^2 - h^2, \quad b_1^2 = b^2 - h^2.$$

よって、 $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$ 。ここで(3)式から、

$$\begin{aligned} c(a_1 - b_1) &= (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) \\ &= a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$a_1 - b_1 = \frac{a^2 - b^2}{c}$$

となる。一方、(3)から

$$a_1 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}, \quad b_1 = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}.$$

この等式から、 a_1, b_1 は有理数である。

したがって、有理数の辺をもつ三角形において、三角形の内部に引いた高さは、それに垂直な辺を2つの有理数比に分けるということが証明された。

ここで、もし各辺だけでなく面積も有理数ならば、すべての高さも有理数になるということがわかる。

なぜなら、辺 c に対する高さを h とする

と、 $S = \frac{ch}{2}$ から $h = \frac{2S}{c}$ である。

したがって、辺と面積が有理数ならば高さも有理数になることがわかる。

すると、ある有理三角形を考えたとき、辺 c に対する高さを h とすると、上の証明から、分けられる2つの直角三角形は各辺が有理数となり、有理三角形はそれとは別の2つの有理三角形の組み合わせによってできているということが証明された。■

次に、各辺と中線が有理数である三角形について考える。

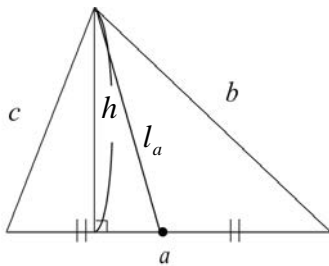


図9

辺 a へおろした中線を l_a とする。すると、中線定理より、

$$b^2 + c^2 = 2\left(l_a + \frac{a^2}{4}\right)$$

$$4l_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

この公式から、各辺と中線が有理数である三角形が求められる。

例えば、(68,85,87)が中線と各辺が有理数である三角形であることがわかる。実際、

$$l_a = 79, l_b = \frac{131}{2}, l_c = \frac{127}{2}$$

とすべての中線が有理数になっている。

他にも、(127,131,158)や(204,255,261)という三角形も中線と各辺が有理数になっている。

3-9. ピタゴラス三角形と平面上の点

(a,b,c) を既約なピタゴラス三角形とする。この三角形に x 座標 $\frac{a}{c}$ 、 y 座標 $\frac{b}{c}$ をもつ平面上の点 $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ を対応させる。するとピタゴラス方程式 $a^2 + b^2 = c^2$ から

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

となる。よって、点 $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ は原点を中心とした半径1の円、つまり単位円上に存在する。

つまり、1つのピタゴラス三角形について、単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の正の有理数座標を持つ点、つまり、単位上の有理点に対応する。逆に、点 (x,y) を円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の正の有理数座標をもつ、つまり x,y が方程式 $x^2 + y^2 = 1$ を満たす正の有理数であると仮定すると、

$$x^2 + y^2 = 1 = \frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

$x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ とみなすことができる。

よって、この点 (x,y) と既約なピタゴラス三角形 (a,b,c) を対応することができた。

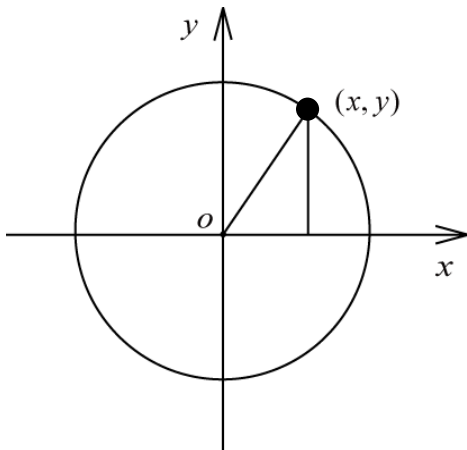


図 10

こうして、既約なピタゴラス三角形と、単位円上の有理点で第一象限にあるものとの間に 1 対 1 の対応がつけられる。

定理 8

2 つの任意の実数 x_1, x_2 を $0 < x_1 < x_2 < 1$ と定める。この 2 数 x_1, x_2 に対して、既約なピタゴラス三角形 (a, b, c) がただ 1 つ存在して、それに対応する単位円上の点 (x, y) は $x_1 < x < x_2$ を満たす。

(証明) $0 < x_1 < x_2 < 1$ であることから、

$$1 < \frac{1+x_1}{1-x_1} < \frac{1+x_2}{1-x_2}.$$

これより、 $1 < \sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}} < \sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}}.$

有理数の稠密性から、 $\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}}$ と $\sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}}$

の間には有理数 $\frac{m}{n}$ はいくらでも存在するので、 m, n は互いに素で、 m が奇数、 n が偶数とおくことができる。よって、

$$\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}} < \frac{m}{n} < \sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2} &= 1 - 2 \times \frac{n^2}{n^2 + m^2} \\ &= \frac{n^2 + m^2 - 2n^2}{n^2 + m^2} \\ &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より、

$$x_1 < \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} < x_2$$

となる。

定理 2 より、

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$$

とおくと、既約なピタゴラス三角形が得られ、 $x_1 < \frac{a}{c} < x_2$ になる。

よって、この三角形に対して単位円上の点 (x, y) が対応し、 $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ であり、 $x_1 < x < x_2$ となる。■

よって、この三角形に対して単位円上の点 (x, y) が対応し、 $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ であり、 $x_1 < x < x_2$ となる。■

この結果から、第一象限の単位円上にある 2 点を取ると、その間には必ず既約なピタゴラス三角形に対応する点があることがわかった。言い換えると、 $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ を満たす任意の角 α に対して、角 α にいくらでも近い鋭角を持つ有理数辺の直角三角形を得ることができる。すべての辺が有理数なので、うまく拡大するとピタゴラス三角形を得ることができる。

このようにして、任意の角に近いものを作ることができる。その中で角が 45° に限

りなく近いピタゴラス三角形を作ること
 ができるが、 45° のピタゴラス三角形は存在
 しない。理由は以下の通りである。

まず、ピタゴラス三角形に限らず各辺が
 整数の任意の三角形 ABC について考える。
 この三角形について、余弦定理を適用する
 と、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

である。

ここで a, b, c は整数なので、 $\cos A$,
 $\cos B$, $\cos C$ は有理数となる。これより、
 $\cos A, \cos B, \cos C$ のうち 1 つでも無理数
 となると、 a, b, c のうち少なくとも 1 つは
 無理数となる。

$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より、 45° のときは a, b, c
 のうち少なくとも 1 つが無理数である。よ
 って、1 つの角が 45° であり、各辺が整数で
 あるような三角形は存在しない。

3-10. 自然数の逆数を辺としてもつ直角 三角形

まず $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ の直角三角形について考
 える。三平方の定理より、

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。これを变形した $x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$
 より、 $x^{-2} < z^{-2}$ とわかる。これを解くと、
 $z < x$ となる。

ここで、 z, x の最大公約数 d と互いに素

な 2 数 a, c を用いて、 $x = da, z = dc$ と表す
 ことができる。

すると、 $\textcircled{1}$ より、

$$y^2 z^2 + x^2 y^2 = x^2 y^2$$

$$y^2 (x^2 - z^2) = x^2 z^2$$

$$y^2 (a^2 - c^2) = (dac)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

このことから、 y^2 が $(dac)^2$ の約数である。

よって、 y は dac の約数であるといえる。

したがって、整数 b が存在して、

$$yb = dac \quad \dots \textcircled{3}$$

とできる。これを $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$y^2 (a^2 - c^2) = y^2 b^2$$

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

a, c は互いに素な数なので、 b, c も互いに
 素である。よって、 $\textcircled{4}$ を变形すると、

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。つまり、三角形 (b, c, a) は既約なピ
 タゴラス三角形である。だから、定理 2 よ
 り、互いに素な整数 m, n ($m < n$) によつて、

$$b = m^2 - n^2, c = 2mn, a = m^2 + n^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$b = 2mn, c = m^2 - n^2, a = m^2 + n^2 \quad \dots \textcircled{7}$$

のどちらかが成り立つ。

また a, b, c は互いに素であり、 $\textcircled{5}$ から b
 と ac は互いに素でなければならぬ。する
 と、 $\textcircled{3}$ より、 d は b で割り切れなければなら
 ぬ。だから、自然数 δ が存在し、 $d = b\delta$
 が成り立つ。

$$x = da = \delta ab, y = \delta ac, z = dc = \delta bc$$

が成り立つので、 $\textcircled{6}$ より、

$$x = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2)\delta$$

$$y = 2mn(m^2 + n^2)\delta$$

$$z = 2mn(m^2 - n^2)\delta$$

⑦より、

$$x = 2mn(m^2 + n^2)\delta$$

$$y = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2)\delta$$

$$z = 2mn(m^2 - n^2)\delta$$

を得る。

一方、任意の自然数 m, n, δ ($n < m$) に対して上の等式により、 x, y, z を定義し、等式⑥および⑦により b, c, a を定義すると、

$$x = \delta ab, y = \delta ac, z = \delta bc$$

になる。こうして、得られた x, y, z の値は、先程の方程式 $y^2(x^2 - z^2) = x^2z^2$ および $b^2 + c^2 = a^2$ を満たすから、 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$

も満たす。

したがって、方程式 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$ のあらゆる正の整数解は、等式

$$x = (m^4 - n^4)\delta$$

$$y = 2mn(m^2 + n^2)\delta$$

$$z = 2mn(m^2 - n^2)\delta$$

あるいは、

$$x = 2mn(m^2 + n^2)\delta$$

$$y = (m^4 - n^4)\delta$$

$$z = 2mn(m^2 - n^2)\delta$$

から得られる。ここで δ は任意の自然数であり、 m, n をみたく $m > n$ は互いに素な整数である。

実際に直角三角形を求める。最も小さい整数解を求めるために、 $m = 2, n = 1, \delta = 1$ とおく。すると上の式より、 $x = 15, y = 20, z = 12$ となる。よって、

$$\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} = \frac{1}{12^2}$$

が得られる。ちなみに、 $m = 3, n = 1, \delta = 1$ のときは、 $x = 80, y = 60, z = 48$ 、つまり、

$$\frac{1}{80^2} + \frac{1}{60^2} = \frac{1}{48^2}$$

が得られる。また、 $m = 3, n = 2, \delta = 1$ のときは、 $x = 65, y = 156, z = 60$ 、よって

$$\frac{1}{65^2} + \frac{1}{156^2} = \frac{1}{60^2}$$

が得られる。

また、3辺の長さが平方数の逆数の場合について考える。

同様に、ピタゴラスの定理より、

$$\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = \frac{1}{z^4}$$

が成り立つ。

しかし、フェルマーの定理より上の式を満たす x, y, z は存在しない。よって、3辺の長さが平方数の逆数であるような直角三角形は存在しない。

3-11. フェルマーの問題

ここで1つの問題を紹介する。フェルマー(Fermat)は1643年に、メルセンヌ(Mersenne)へある手紙を送った。その内容とは、

直角をはさむ2辺の和と斜辺とが平方数であるようなピタゴラス三角形を見つけよ。

というものである。この問題は、ピタゴラス三角形 (x, y, z) において、 $x^2 + y^2 = z^2$, $x + y = p^2$ が成り立つ整数解を求めることと同じである。フェルマーはこのような三角形の中で最小なもの、

456548602776

1061652293520

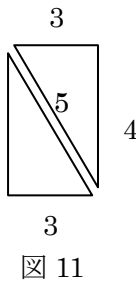
4687298610289

を辺とする三角形であると述べていて、実際にこれは正しいことがわかっている。

3-12. 各辺と対角線が自然数になる直方体

1つのピタゴラス三角形があれば、そこから各辺及び、対角線が自然数である長方形を得ることができる。

また逆に、そのような長方形からピタゴラス三角形を得ることができる。この問題を3次元空間と認識すると各辺と対角線が自然数で表せられる直方体をどのように見つけるかという問題になる。直方体の各辺を x, y, z 、また対角線を t とすると



$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

が成り立つ。逆に x, y, z および t が上の方程式を満たすと、 x, y, z は直方体の辺の長さとなり、 t はその対角線の長さとなる。

他に、各辺と対角線が自然数で表すことができる直方体を求めることは、上の方程式を満たす整数解を求めることと同値である。

はじめに、 x, y, z のうち少なくとも2つは偶数であることを示す。まず、すべてが奇数であると仮定する。奇数の2乗は4で割ると1余るため、 $x^2 + y^2 + z^2$ を4で割ると3余ることがわかる。しかし、 t^2 は平方数であるため、等号は成り立たない。

次に、 x, y, z の1つだけが偶数であるとすると $x^2 + y^2 + z^2$ は4で割ると2余る。しかし、 t^2 は平方数であるためこちらも等

号が成り立たない。よって x, y, z のうち少なくとも2つは偶数であることがわかった。

さらに、 x, y, z, t のうち少なくとも1つは3の倍数であることを示す。

x, y, z のうち、1つも3の倍数でないと仮定すると t は3で割り切れないといけないことを示す。

まず、3の倍数でない数を2乗すると、3で割ったときに1余る。 x, y, z のいずれも3で割り切れないのだから、それらの平方の和、つまり t^2 は3で割り切れる。したがって、 t は3の倍数でなければならない。

よって、 x, y, z, t のうち少なくとも1つは3の倍数であることがわかった。

任意の自然数 x に対して、方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

を満たすような3数 y, z, t の組が無数に存在することを示す。

n が任意の自然数のとき、 x が奇数ならば、

$$x, y = 2n, z = \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2,$$

$$t = \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2 + 1$$

は明らかに自然数であり、方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

を満たす。

また、 n が任意の自然数のとき x が偶数ならば、

$$x, y = 2n + 1, z = \frac{x^2}{2} + 2n^2 + 2n,$$

$$t = \frac{x^2}{2} + 2n^2 + 2n + 1$$

は明らかに自然数であり、方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

が成り立つ。

任意の偶数の組 x, y に対して方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ を成り立たすような整数 z, t が存在する。

数 x, y がともに偶数のとき、 $x^2 + y^2$ は 4 で割り切れるから、

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4} - 1, t = \frac{x^2 + y^2}{4} + 1$$

は自然数で、 x, y, z, t は方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

を満たす。

数 x, y のうち一方が偶数、もう一方が奇数であるときも、方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ を成り立たすような整数 z, t が存在する。

数 $x^2 + y^2 \pm 1$ は偶数となり、

$$x, y, z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2}, t = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2}$$

は方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ を満たす。

そこで、これまでの式を用いて直方体を求めてみよう。ここでは、 x が奇数の場合を考える。よって、 $x = 3$ 、 $n = 4$ としてみよう。

$$x, y = 2n,$$

$$z = \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2, t = \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2 + 1$$

この等式より、

$$x = 3$$

$$y = 2 \times 4 = 8$$

$$z = \frac{3^2 - 1}{2} + 2 \times 4^2 = 4 + 32 = 36$$

$$t = \frac{3^2 - 1}{2} + 2 \times 4^2 + 1 = 4 + 32 + 1 = 37$$

となり、 $(x, y, z, t) = (3, 8, 36, 37)$ が求められた。実際、この 4 数は

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 = 1369$$

を満たしている。

よって、ここまですを整理すると、直方体

の 2 辺を表す数は両方ともが奇数であるという場合以外は、他の辺と対角線を表す残りの z, t も与えることができる。

次に、対角線が自然数で表されて、3 辺が連続するような直方体は存在しないことを示す。ここで、直方体の 3 辺を $(y-1, y, y+1)$ 、対角線を整数 t で表すとすると、

$$(y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2 = t^2$$

$$3y^2 + 2 = t^2$$

が成り立つ。

ここで、 y が奇数のときは、 y^2 を 8 で割ると 1 余り、左辺 $3y^2 + 2$ を 8 で割ると 5 余る。しかし、8 で割って 5 余る数は平方数にはなりえない。また、 y が偶数のときは、左辺 $3y^2 + 2$ は 4 で割ると 2 余る。しかし、そのような数も平方数にはなり得ない。

各辺が自然数で表せるような直方体の対角線は 2^k または $2^k \times 5$ の形にはならないことを示す。ここでは $k \geq 0$ となる整数である。

実際、負でない整数 k が存在して、 $t = 2^k$ とするとき、方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ が自然数の解を持つと仮定する。

このような k の中には最小のもの m が存在する。しかも方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ の左辺の和 $x^2 + y^2 + z^2$ は x, y, z が正の整数のときは 3 より小さくはなり得ないから、 $m > 2$ である。 $x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2m}$ で、3 数 x, y, z のうち少なくとも 2 つは偶数であることを考えると、残りの 1 つも偶数でなければならないことがわかる。よって、整数 x_1, y_1, z_1 が存在して、 $x = 2x_1$ 、 $y = 2y_1$ 、 $z = 2z_1$ とかける。

すると、 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (2^{m-1})^2$ となる。

このとき、最初の仮定であった、不定方程式 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (2^k)^2$ において、 m の最小性に反するため、直方体の対角線は $t = 2^k$ という形にはならないことが証明された。

次に、 $t = 2^k \times 5$ という形にはならないことを証明する。そこで、上と同様に $t = 2^k \times 5$ とするとき、このような k の中には最小のもの m が存在する。

まず、 $m = 0$ のときを考える。このとき、 x, y, z について、 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ が成り立つことがわかる。ここで、上述のように x, y, z, t のうち1つは3の倍数でなければならず、 t は3の倍数ではない。そこで x が3の倍数であると仮定する。すると、

$$y^2 + z^2 = t^2 - x^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$$
 が成り立ち、 $(y, z, 4)$ がピタゴラス方程式を満たす。しかし、このとき4が斜辺となっているが、斜辺が4であるピタゴラス三角形は存在しないので矛盾する。したがって、 $m = 0$ のときは成り立たない。

次に、 $m > 0$ の場合を考えよう。 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ より、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2m} \times 5$$
 が成り立つ。ここで、右辺は偶数なので、 x, y, z はすべて偶数でなければならない。

よって、 x_1, y, z という整数が存在して $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ を満たすことがわかる。したがって、 x_1, y, z の3数は

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (2^{m-1} \times 5)^2$$
 を満たす。しかしこれは、 m が不定方程式

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (2^k \times 5)^2$$

を満たす最小の値であるということに反する。したがって、直方体の対角線は $t = 2^k \times 5$ という形にもならないことが証明された。

直方体の対角線について、上述とは逆に、辺が整数表すことができる直方体の対角線の長さになり得ないのは、 2^k という形と $2^k \times 5$ という形のみであるということ、フレヴィッツ (Hurwitz) が証明している。つまり、100以下の整数について考えると、

1,2,4,5,8,10,16,20,32,40,64,80

のような数が直方体の対角線の長さになり得ないのである。

4. 今後の課題

本年度は、研究の中で直角をはさむ辺と斜辺が連続するピタゴラス三角形について深く考えた。特に三角形の個数に関する研究を進めていきたい。また、この研究に伴い、整数論などの分野も学んでいきたい。

5. 参考文献

- [1] 「ピタゴラスの三角形」, B. シェルピンスキー著, 銀林 浩訳, 東京図書(1993)
- [2] 「1つの角の大きさが決まっていて、3辺の長さがすべて整数である三角形のつくり方」, 山田 潤
- [3] Rational triangles, D.N. Lehmer, Amer. J. of Math.22, (1900)

6. 謝辞

顧問の川口先生には、各発表会および本稿についてさまざまなアドバイスをいただきました。ありがとうございました。

フラクタル図形

4年C組 金池 綾夏
指導教員 川口 慎二

1. 概要

私はフラクタル図形とフラクタル次元について、その定義や簡単な性質を学んだ。自然界にも多く見られるというフラクタル図形について、学習したいくつかの事例を紹介しながら、フラクタル図形の意味について考えてみた。その経過を報告する。

キーワード 自己相似性、フラクタル図形、フラクタル次元、非整数次元

2. 緒言

自然に存在する植物の葉脈や巻貝の殻などには同じ形を繰り返していくものが多いことを知った。私はそれらに興味を持ったので、フラクタル図形について学ぶことにした。

3. 研究内容

■フラクタルとは

1975年にマンデルブロが「砕けた石」という意味のラテン語から命名した非整数次元を持った図形や構造のことをいう。このような図形は、**自己相似性**という特徴がある。

■フラクタル次元

フラクタル図形は、そのマイクロな部分を見ると、非常に複雑な形をしている。この複雑さのレベルを定量化するために用いられている量が**フラクタル次元**である。

■直線、平面、立体からわかる次元の性質
1辺の長さが1の線分、正方形、立方体

の各辺をそれぞれ5等分した場合、1次元では $5^1 = 5$ (個)の線分ができ、2次元では $5^2 = 25$ (個)の正方形ができる。また、3次元では $5^3 = 125$ (個)の立方体ができる。

このように、1辺を $\frac{1}{n}$ に分割すると、線

分、正方形、立方体ではそれぞれ n^1 , n^2 , n^3 個の相似な図形ができる。この指数が「次元」の数字を表している。

■フラクタル図形の事例

[1] カントール集合

カントール集合は次のように構成される。

①線分 $C_0 = [0,1]$ から $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ を取り除き、

これを $C_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ とする。

②この C_1 から

$$\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)$$

を取り除き、 C_2 とする。つまり、

$$C_2 = \left\{ [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\} \setminus \left\{ \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right) \right\}$$

$$= [0,1] \setminus \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2} \right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2} \right) \right\}$$

となる。

③この C_2 から

$$\left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3} \right) \cup \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3} \right) \cup \dots \cup \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3} \right)$$

を取り除く。これを C_3 とする。つまり、

C_3

$$= C_2 \setminus \left\{ \left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3} \right) \cup \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3} \right) \cup \dots \cup \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3} \right) \right\}$$

$$= [0,1] \setminus \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2} \right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2} \right) \right.$$

$$\left. \cup \left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3} \right) \cup \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3} \right) \cup \dots \cup \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3} \right) \right\}$$

となる。

④以下、この操作を繰り返していく。

⑤このとき、 $C_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$ をカントール集合

という。

C_0 _____

C_1 _____

C_2 — — — — —

C_3 - - - - -

⋮

C_∞

図1 カントール集合

さて、 C_k の長さを L_k 、 C_k を構成する線

分の本数を n_k とすると、

C_0 のとき、 $L_0 = 1$, $n_0 = 1$,

C_1 のとき、 $L_1 = \frac{1}{3}$, $n_1 = 2$,

C_2 のとき、 $L_2 = \frac{1}{3^2}$, $n_2 = 4$,

C_3 のとき、 $L_3 = \frac{1}{3^3}$, $n_3 = 8$, ...

となるため、

C_k のとき、 $L_k = \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3} \right)^k$, $n_k = 2^k$

となることがわかる。

すると、カントール集合 C_∞ の構成方法から、

$$L_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k = 0$$

となる。この式の意味は、 k を ∞ まで大き

くしていくと、 $\left(\frac{1}{3} \right)^k$ の値は限りなく 0 に近

づくということである。また、線分の本数

$$n_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k = \infty$$

と限りなく大きくなることがわかる。

[2] コッホ曲線

コッホ曲線の構成は次のようである。

①線分 $K_0 = [0,1]$ を用意する。

②中央の $\frac{1}{3}$ を取り除いた上に、1 辺が $\frac{1}{3}$ の

テントを貼り付ける。これを K_1 とする。

- ③次に、長さが $\frac{1}{3}$ である K_1 の各辺に同じ操作を繰り返し、長さが $\frac{1}{3^2}$ のテントをそれぞれ貼り付けて、 K_2 とする。
- ④この作業を無限回くりかえす。
- ⑤このとき、得られた曲線を K_∞ をコッホ曲線という。

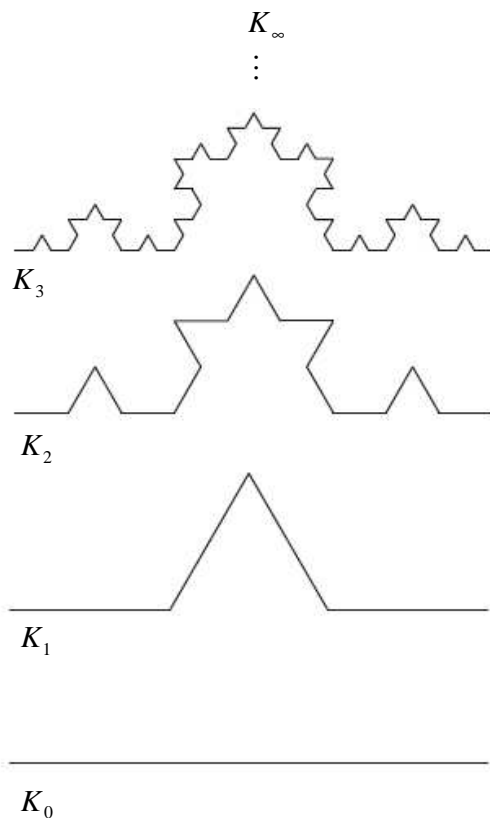


図2 コッホ曲線

ここで、 K_j の長さを L_j 、 K_j を構成する辺の本数を N_j とすると、

$$K_0 \text{ のとき、 } L_0 = 1, N_0 = 1,$$

$$K_1 \text{ のとき、 } L_1 = \frac{4}{3}, N_1 = 4,$$

$$K_2 \text{ のとき、 } L_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2, N_2 = 16,$$

$$K_3 \text{ のとき、 } L_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3, N_3 = 64, \dots$$

となるため、

$$K_j \text{ のとき、 } L_j = \left(\frac{4}{3}\right)^j, N_j = 4^j$$

となるのがわかる。したがって、

$$N_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty,$$

$$L_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} L_j = \infty$$

となる。

[3] シェルピンスキーのギャスケット

シェルピンスキーのギャスケットは次のように構成される。

①1辺の長さが1である正三角形を用意し、これを S_0 とする。

②この正三角形 S_0 の3辺の中点を結んでできた、辺の長さが S_0 の $\frac{1}{2}$ である4個の正

三角形のうち、中央の正三角形のみを取り除く。これを S_1 とする。

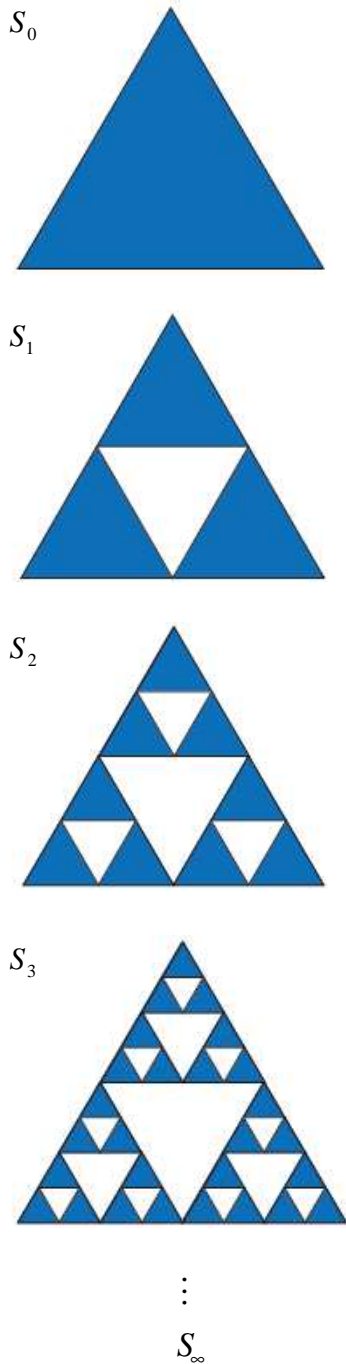
③この操作をもう一度繰り返すと、 S_1 を構成する3個の正三角形の3辺の中点を結んでできた、辺の長さが S_1 の $\frac{1}{2}$ 、つまり S_0 の

$\frac{1}{4}$ である12個の正三角形のうち、それぞ

れの中央にある正三角形3個を取り除く。これを S_2 とする。

④この作業を無限回繰り返す。

④このとき、得られた曲線を $S_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ を
シェルピンスキーのギャスケットという。



ここで、 S_k の周の長さを l_k 、面積を Δ_k と
すると、

$$S_0 \text{ のとき、 } l_0 = 3, \quad \Delta_0 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$S_1 \text{ のとき、 } l_1 = \frac{3^2}{2}, \quad \Delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{4^2},$$

$$S_2 \text{ のとき、 } l_2 = \frac{3^3}{2^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{4^3},$$

$$S_3 \text{ のとき、 } l_3 = \frac{3^4}{2^3}, \quad \Delta_3 = \frac{\sqrt{3}}{4^4}, \quad \dots$$

となるため、

$$S_k \text{ のとき、 } l_k = \frac{3^{k+1}}{2^k}, \quad \Delta_k = \frac{\sqrt{3}}{4^{k+1}}$$

となることがわかる。したがって、

$$l_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} l_k = \infty,$$

$$\Delta_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0$$

となる。

■フラクタル次元

フラクタル図形は一般に「**非整数次元**」
をもち、これがフラクタル図形の複雑さを
表しているといえる。

元の図形を n 個に分割し、できた同じ図
形の個数を m とするとき、**相似次元 D** を

$$D = \log_n m = \frac{\log_{10} m}{\log_{10} n}$$

$$= \frac{\log(\text{元の図形と相似な同じ図形の数})}{\log(\text{等分割した数})}$$

と定める。相似次元などを総称して、**フラ
クタル次元**ともいう。

そこで、実際に上述のフラクタル図形の
フラクタル次元を計算してみよう。

まずは、カントール集合 C_∞ のフラクタ
ル次元を D_c とすると、

図3 シェルピンスキーのギャスケット

$$D_C = \log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \doteq \frac{0.301}{0.477} = 0.6310$$

となる。これより、カントール集合は、0次元(点)よりは複雑であるが、1次元(線分)よりは単純ということが出来る。

次に、コッホ曲線 K_∞ のフラクタル次元を D_K とすると、

$$D_K = \log_3 4 = \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \doteq \frac{0.602}{0.477} = 1.262$$

となり、非整数次元になることがわかる。これは、コッホ図形の複雑さが「2次元に近い直線的な性質」をもっているが、直線のように単純ではなく、「2次元的な複雑さ」もあわせてもっているということを示している。

また、シェルピンスキーのギャスケット S_∞ のフラクタル次元 D_S は、

$$D_S = \log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \doteq \frac{0.477}{0.301} = 1.585$$

となり、コッホ図形より複雑であるが、2次元までの複雑さをもたないような図形であるといえる。

このように、フラクタル次元は図形の複雑さをはかる指標となっている。

また、コッホ図形において、コッホ図形を描く操作を繰り返すと、長さは無限大になる。ギャスケット図形において、図形を描く操作を繰り返すと、面積は無限小になる。このことから、フラクタル図形の見かけの大きさは有限であっても、長さが無限大、面積がゼロという状態が生じることがわかった。これはフラクタル図形の重要な性質であるといえる。

4. 今後の課題

今後はさらにフラクタル図形の性質を学

習するとともに、なぜ自然界にフラクタル図形の構造をもつものが多く存在するのかについても考察していきたい。

また、フラクタル次元のなかには、ハウスドルフ次元というものもあると知った。かなり計算が難しいようであるが、調べてみたいと考えている。

5. 参考文献

- [1] 「フラクタル」、本田勝也、朝倉書店
- [2] 「フラクタル幾何学」、Kenneth Falconer 著、服部久美子、村井浄信訳、共立出版

6. 謝辞

顧問の川口先生には、さまざまな面でご指導いただきました。ありがとうございました。

黄金分割

4年B組 今江 菜摘
指導教員 川口 慎二

1. 概要

私は黄金分割について、その定義や簡単な性質を学んだ。黄金分割が見られるものとして、正五角形とペンタグラムの関係や黄金長方形について学習した。その結果を報告する。

キーワード 黄金分割、黄金比、正五角形、ペンタグラム、黄金長方形

2. 緒言

数学ではもちろん、それ以外の分野、例えば音楽や美術、建築、さらには自然界でも見られる黄金分割に私は興味を持った。そして、本年度はまず、黄金分割の多様な性質について学んだ。

(証明)

黄金分割の定義より、

$$a : M = M : m,$$
$$am = M^2.$$

$a = M + m$ なので、代入すると

$$(M + m)m = M^2.$$

両辺を m^2 で割ると、

$$\frac{M}{m} + 1 = \left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{M}{m} - 1 = 0 \text{ から、}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$M > 0, m > 0 \text{ より、} \frac{M}{m} > 0.$$

$$\text{ゆえに、} \frac{M}{m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ となる。}$$

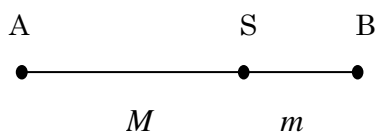
したがって、Sが黄金分割になるとき、

$$M : m = (1 + \sqrt{5}) : 2. \quad (\text{Q.E.D.})$$

3. 研究内容

3-1. 黄金分割の定義

1つの線分ABを大きい方の切片と小さい方の切片の比が、線分全体と大きい方の切片の比に等しいように点Sで分けることを**黄金分割**という。



線分ABの長さを a 、大きい方の切片の長さを M 、小さい方の切片の長さを m とすると、黄金分割の値が計算で求められる。

定理1

Sが黄金分割になるのは、

$$M : m = (1 + \sqrt{5}) : 2$$

となる場合である。

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$ である。この比 $\frac{M}{m} =$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のことを、**黄金比**という。

3-2. 正五角形

[1] 正五角形の対角線

黄金分割は、正五角形のいろいろな場所に現れる。五角形ABCDEを正五角形とする。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 2

(a) 正五角形ABCDEの頂点を共通の端点としない2本の対角線は互いに他を黄金分割する。

(b) 対角線の長さの一边の長さに対する比率は $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(証明)

(a) 対角線ACと対角線BEの交点Qに注目する。正五角形の一辺ABと対角線CEは平行なので、

$$QC : QA = CE : AB.$$

AB=DE, CE=ACより、

$$QC : QA = AC : DE. \dots \textcircled{1}$$

DE // AC, CD // BEより、四角形QCDEは平行四辺形である。

ゆえに、QC=DE $\dots \textcircled{2}$

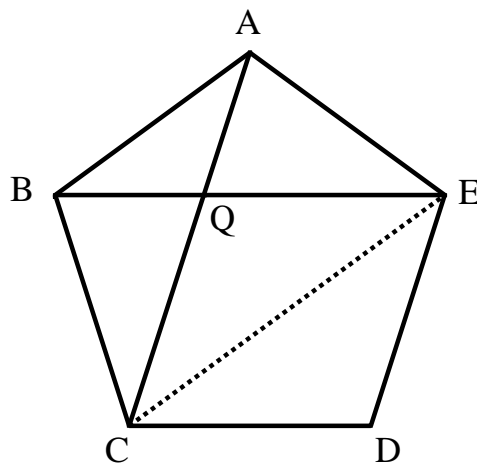
①, ②より、QC : QA = AC : QC.

ゆえに、Qは線分ACを黄金分割しているとわかる。対角線ACは任意の対角線より、(a)は証明された。

(b) (a)から、 $\frac{AC}{QC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

ここで、QC=DEなので、

$$AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times DE \quad (\text{Q.E.D.})$$

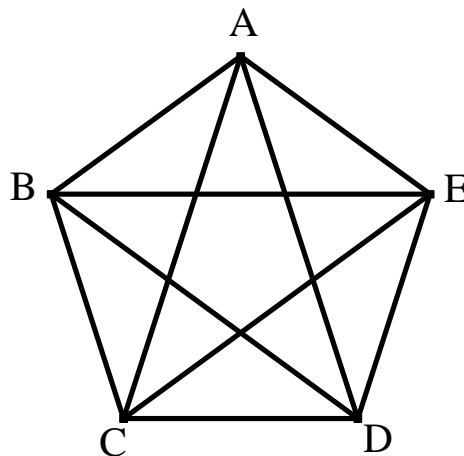


[2] 黄金三角形

二等辺三角形において、斜辺と底辺の長さの比が $\frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$ であるとき、この三角形を**黄金三角形**という。五角形ABCDEを、一辺が1である正五角形とすると、 $\triangle ACD$, $\triangle BDE$, $\triangle CEA$ はいずれも黄金三角形である。

定理 3

黄金三角形の底角は 72° であり、頂角は 36° である。



(証明)

黄金三角形ACDが正五角形ABCDEにはめ込まれていて、その頂角は $\angle \alpha$ 、底角は $\angle \beta$ であるとする、

$$\angle EBD = \angle ACE = \angle BDA = \angle CEB = \angle \alpha.$$

AB // CEより、 $\angle BAC = \angle ACE = \angle \alpha$.

同様に考えると、他の9つの角も $\angle \alpha$ となる。ここで、 $\angle \beta = \angle ACD = 2\angle \alpha$

したがって、 $\triangle ACD$ の内角の和は、 $2\angle \beta + \angle \alpha = 5\angle \alpha$ となるから、

$$\angle \alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

$$\angle \beta = 36^\circ \times 2 = 72^\circ \text{ となる。}$$

(Q.E.D.)

[3] ペンタグラム

正五角形の各辺を互いに交わるまで延長してできた図形をペンタグラム(星型五角形)という。

定理4

ペンタグラムにできる5つの小三角形がそれぞれ黄金三角形になっている。

(証明)

正五角形ABCDEの各辺を延長して、交わった交点をそれぞれF, G, H, I, Jとする。

$\triangle FAE$ と $\triangle FHI$ において、

$$\angle AFE = \angle HFI \text{ (共通) } \dots \textcircled{1}$$

GJ // HIより、同位角は等しいので、

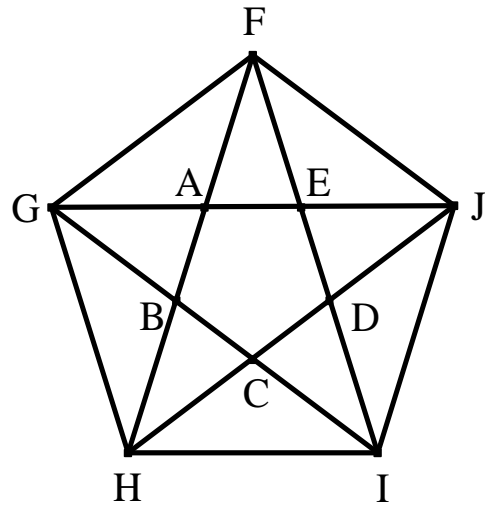
$$\angle FAE = \angle FHI, \angle FEA = \angle FIH \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、 $\triangle FAE \sim \triangle FHI$.

ゆえに、3辺の比が等しく、 $\triangle FHI$ は斜

辺と底辺の長さの比が $\frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$ の黄金

三角形なので、 $\triangle FAE$ も黄金三角形である。 $\triangle GBA$, $\triangle HCB$, $\triangle IDC$, $\triangle JDE$ も同様である。(Q.E.D.)



3-3. 黄金長方形

縦と横の辺の長さの比が、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$ の長方形を黄金長方形という。

定理5

正方形ABCDにおいて、各辺の黄金分割点をとることによって、黄金長方形を内接させることができる。

(証明)

正方形 ABCD の各辺を下図のように点 P, Q, R, S で黄金分割する。

三角形における辺と平行線の定理(またはその逆)より、PS // BD, QR // BD.

よって、PS // QR である。

同様に、PQ // PS であることもわかる。

したがって、四角形 PQRS は平行四辺形である。さらに、四角形 PQRS の辺は正方形 ABCD の対角線に平行なので、それらは互いに直交する。

つまり、PQRS は長方形である。

いま、 $\triangle APS$ と $\triangle BQP$ において、

$$\angle PAS = \angle QBP = 90^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

$$AP : BQ = AP : PB = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$$

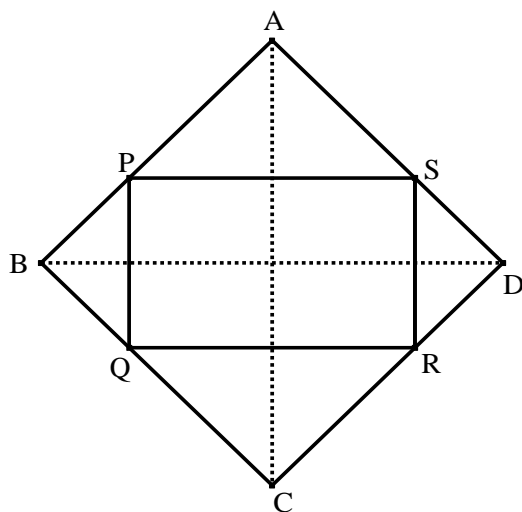
$$= AS : BP \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、2辺の比とその間の角が等しいので、 $\triangle APS \sim \triangle BPQ$ である。

$$\text{ゆえに、} \textcircled{2} \text{より、} PS : PQ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1.$$

したがって、正方形 ABCD の各辺の黄金分割点をとると、黄金長方形が内接する。

(Q.E.D.)



4. 今後の課題

本年度は、この研究の手始めとして、黄金分割の基本的な性質や定理を学んだ。来年度は、黄金長方形とプラトン立体の関係から調べていきたい。そして、最初に興味を持った数学以外の分野での黄金分割につ

いても研究していきたい。

5. 参考文献

[1]「黄金分割」、アルプレヒト・ベルンハルト著、柳井浩訳、共立出版

6. 謝辞

顧問の川口先生には、さまざまな面でご指導いただきました。ありがとうございました。

結び目について

4年B組 東 美弦
指導教員 川口 慎二

1. 概要

サイエンス研究会数学班4年は、日常生活でよく使われる結び目を数学的に取り扱う方法を学習した。この論文では、その内容を報告する。

キーワード 結び目、同値、不変量、斜影図、ライデマイスター移動、
交点条件、階数

2. 研究の背景と目的

生物の研究において、DNAが超螺旋状態になっていることを知り、また数学の分野で「結び目理論」というのがあり、DNAとも関係があるということを知った。数学の視点から生物の分野を見ることに興味を抱いたので、今回は結び目について学習した。

ると、一方はきれいな円周になるが、もう一方はならない。両端をつないできれいな円周ができないとき「ほどけない」ということにする。

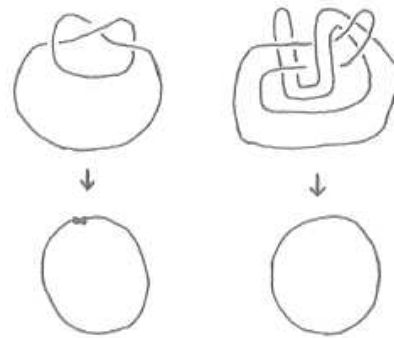


図2 「ほどける」と「ほどけない」

3. 研究内容

3-1. 結び目の定義

図1のように、同じ「結び目ができている」状態でも、ひもの両端を引っ張ると、ほどけるものとほどけないものがある。



図1 2つの「結び目」

ここで、「ほどけない」という概念をはっきりさせておく。図1のひもの端と端をつなぎ、結び目を左右に引っ張ってみる。す

空間の中にある輪のことを「結び目」とよぶことにする。ただし、輪を空間の中でどのように動かしてもきれいな円周ができない輪を「ほどけない結び目」といい、また2つの結び目に対して、一方を許された範囲の空間の中で変形をすると他方が得られるとき、2つの結び目は「同値である」という。

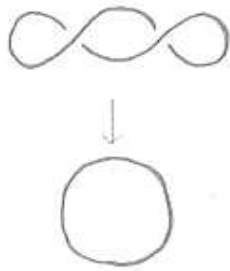


図3 同値な結び目

空間内の結び目を平面の上で表したものを結び目の「射影図」という。

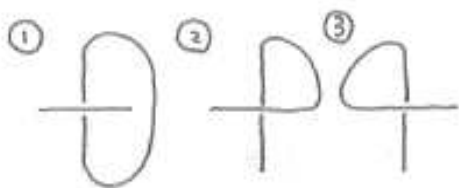
3-2. 同値と不変量

ある集合の中の要素がいくつかのグループにはっきり分類されているとき、その集合に「同値関係」が与えられたといい、同じグループに属するグループのことを「同値類」ともいう。同じ同値類に属するものに共通する性質のことを、その同値関係に関する「不変量」と呼ぶ。

つまり「結び目の同値」というのは、空間内の結び目全体の集合に対して、「結び目を切らないように動かす」変形と「拡大したり縮小したりする」変形を「同値変形」と考えたときの同値関係を考えているのである。

3-3. 結び目の個数

交点数が1個の結び目を考える。まず交点を1個用意し、その1つの端と他の3つの端をつなぐ。これは次の3通りが考えられる。



次に、残りの2点をつなぐ。



①は2つのきれいな円周になってしまう。②③もひねるときれいな円周になるので交点が0個になってしまう。よって交点が1個の結び目は存在しない。

交点が2個の結び目を考える。上と同じ考え方で「2つの円ができる」ことと「交点数が変わる」ことが起こらないように端と端をつなぐ。すると次の4通りが考えられる。

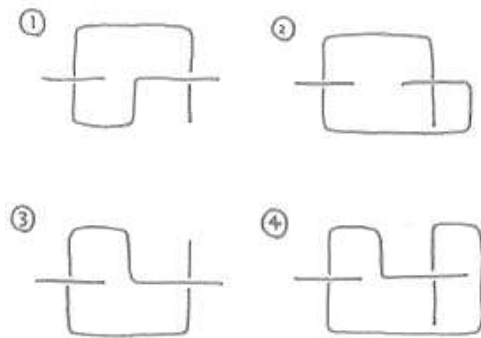
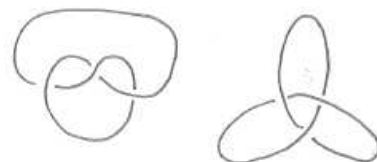


図4 交点数が2個の場合を考える

しかし、ここから交点を増やさずに端と端をつなぐことはできない。よって交点数が2個の結び目は存在しない。

3-4. ライデマイスター移動



平面上で同値である、この2つの結び目を射影図として、変化の過程を見てみる。

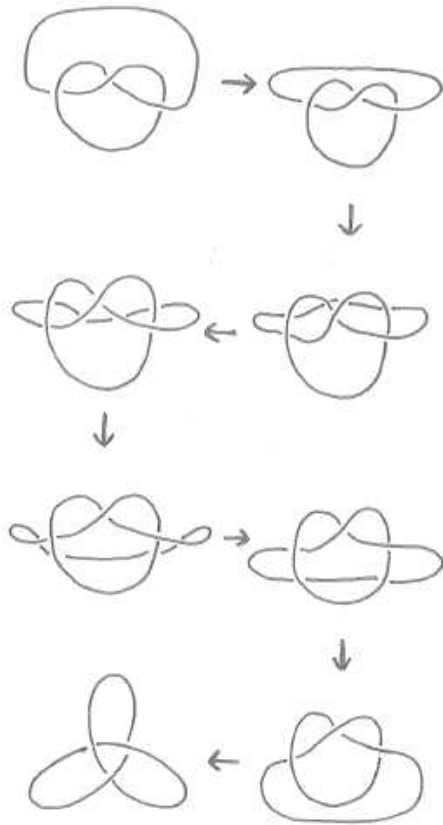
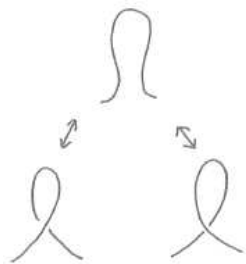


図5 射影図の変形過程

この変形は、平面上の図形としての同値変形ではないが、空間内の結び目としての同値変形であり、一定のパターンがある。



①ライデマイスター移動I



②ライデマイスター移動II



③ライデマイスター移動III

図6 ライデマイスター移動

空間内の同値な変形はすべて、このライデマイスター移動の組み合わせで実現できる。つまり、「結び目の空間内の同値変形」は、「結び目の射影図の平面上の同値変形」と「ライデマイスター移動」によって可能になるのである。

3-5. 階数

交点の数が n の結び目の射影図では、 n 個の曲線ができる。これらの曲線のことを結び目の「射影図の定める弧」という。

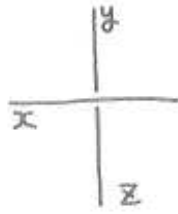


(交点数)=1

(交点数)=3

図7 交点数と弧の本数

p を自然数として、1つの弧に 0 から $p-1$ までの整数のうちの1つを対応させたものをその弧の「重み」といい、すべての弧に重みがついた射影図を「重みのついた射影図」とよぶ。また、 p を2以上の整数とする。整数 a と b に対して、 $a-b$ が p で割り切れるとき、 a と b は「 p を法として合同である」といい、 $a \equiv b \pmod{p}$ と表す。重みのついた射影図において1つの交点の周りに着目したとき、



となっている(x, y, z は重み)。ここで、条件 $2x \equiv y+z \pmod{p}$ を考える。図を 180 度回転させると y, z が入れ替るが、この条件は y と z のどちらを選んでも矛盾なく定義されている。これを「交点条件」という。

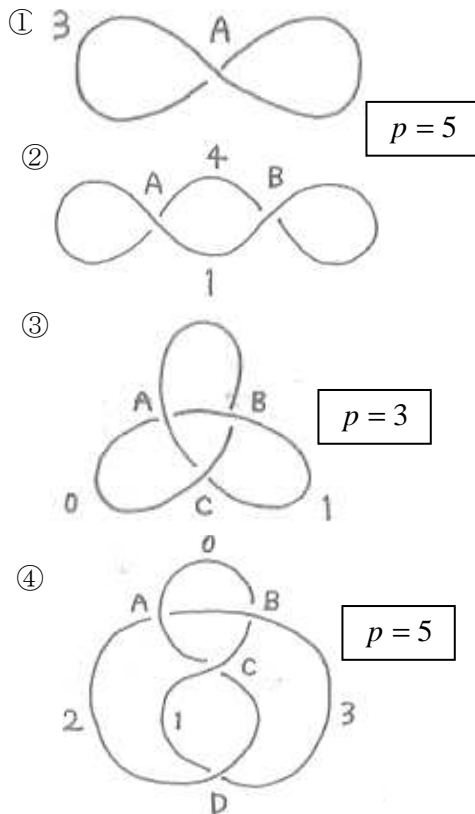


図8 さまざまな結び目の事例

図8①の交点Aでは、 $x = y = z = 3$ であるから、 $2 \times 3 \equiv 3 + 3 \pmod{5}$ となり、交点条件をみたす。図8②の交点Aでは $x = 1$, $y = 4$, $z = 1$ なので $2 \times 1 \equiv 4 + 1 \pmod{5}$ となり、交点条件をみたさない。

③では、交点A : $2 \times 2 \equiv 1 + 0 \pmod{3}$ 、

交点B : $2 \times 1 \equiv 2 + 0 \pmod{3}$ 、交点C : $2 \times 0 \equiv 2 + 1 \pmod{3}$ となっている。さらに④では、交点A : $2 \times 0 \equiv 2 + 3 \pmod{5}$ 、交点B : $2 \times 3 \equiv 0 + 1 \pmod{5}$ 、交点C : $2 \times 1 \equiv 0 + 2 \pmod{5}$ であり、交点D : $2 \times 2 \equiv 1 + 3 \pmod{5}$ となっている。

また、これらの図はすべての交点で交点条件をみたす結び目の射影図である。このような重みのことを「適切な重み」という。そして、結び目の斜影図に対して、適切な重みのついた斜影図の個数のことを(p を法とした)「階数」と呼ぶ。

交点のない斜影図に対しては交点条件が存在しないので、適切な重みとして0から $p-1$ までのどれを選んでもよく、 p 個の値をとることができる。だから、階数は p である。また、交点が1個の斜影図に対する交点条件は $2x \equiv x + x \pmod{p}$ であり、これはすべての x について成り立つ。だから、斜影図の階数は p であるとわかる。

4. 今後の課題

本年度は、参考文献を輪読し、結び目を数学的にみることについて考えたので、今後は「結び目の斜影図の階数が結び目の不変量となっている」ことを証明し、また、結び目を生物分野まで広げてDNAにも関連づけていきたい。

5. 参考文献

[1]「結び目のはなし」、村上斉、遊星社(1990)

6. 謝辞

顧問の川口先生には、さまざまな面でご指導いただきました。ありがとうございました。

ブレファリズマの膜形成反応についての研究

5年B組 井上 なずな
指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

昨年から引き続き、ブレファリズマの膜形成についての研究を行った。前研究においてはブレファリズマに膜形成を誘導する薬品を発見した。今回はその追実験と、新たに他の薬品を使用し膜形成が誘導される時の条件を探る実験を行った。今回はその過程と成果について報告する。

キーワード マルチプレート、遠心分離機、ニュートラルレッド、サフラニン、食紅、メチルグリーンピロニン

2. 研究の背景と目的

ブレファリズマは、ストレス付加条件下で膜状のものを形成することが知られている。これまでの研究で、ブレファリズマにニュートラルレッドを加えると膜形成が生じることを確認した。ニュートラルレッドで確認できたのは粘液状の膜だったが、それとは別にカプセル状の膜をブレファリズマが形成する現象も観察されている。そこで、今回はニュートラルレッドを使った追実験を行うことで、粘液状の膜形成はカプセル状の膜形成と同じ現象なのかを確かめる。さらに、なぜニュートラルレッドが膜形成を引き起こすのか、他の薬品を使って実験を行い、その共通点について考察する。上記2つを本研究の目的とし、新たな薬品として、サフラニンと食紅を使用することとした。ニュートラルレッドと似た特性(赤くて細胞を固定しない)を持つものならば膜形成を引き起こすのではないかと考えたためである。生物の実験でよく使用される、

赤い染色液の酢酸オルセインは細胞を固定してしまうため除外した。

3. 研究内容

<実験の準備>

実験条件を常に同じにするために、実験に用いるブレファリズマの密度を揃えた。ブレファリズマの培養液を質量が同じになるように2本、ないし4本の遠沈管にわけ、1000 rpm で5分間遠心分離機にかける。その後フィルターに通して、溶液中に浮遊するゴミを取り除く。これを濃縮ブレファリズマ(密度は200 μ l中127匹)と呼ぶことにする。マルチプレートに濃縮ブレファリズマ500 μ lをいれ、実験に使用した。

<実験 I > 赤色色素に対するブレファリズマの膜形成実験

ニュートラルレッドが膜形成反応を引き起こすか追実験を行い、またニュートラルレッドに似た性質を持つ薬品を使い、その

物質に対する反応を見る。各薬品の濃度は前回の研究で使用した、0.1%のニュートラルレッドを基準とした。

①ニュートラルレッド

これまでに膜形成を引き起こすことがわかっているニュートラルレッドの確認実験を行った。準備した濃縮ブレファリズマに0.1%ニュートラルレッドを20 μ l加えたものを顕微鏡で観察した。その結果、膜形成が確認できた(図1)。それに加え、自身が作った膜から抜け出そうともがいているブレファリズマを観察できた(図2)。また、すでに本体がぬけでた後と思われる抜け殻の膜も発見した(図3)。抜け殻には上部にやぶれた後があり、やはりブレファリズマは膜を作った後に自分で膜を破って外に抜け出していると思われる。

②サフラニン

濃縮ブレファリズマに0.5%サフラニン溶液を20 μ l加えたところ、サフラニンが濃すぎて観察することができなかった。そこで10 μ lに変更したところ観察することができ、ブレファリズマは細胞壁が破れ中身が流出したようになり、すべて死んでしまった(図4)。

③食紅

食紅0.01gに対して水を100 μ l加え、溶液を作った。この食紅溶液20 μ lを、濃縮ブレファリズマに加えて顕微鏡で観察した。食紅は大きめの赤い粒子のようにみえた。ブレファリズマは食紅の粒子のなかで特に問題なく活動していた(図5)。

④まとめ

サフラニンに関してはほとんどの個体が死んでしまい、食紅はブレファリズマになんの影響も与えていそうにないという結果を得た。ここから、細胞膜を通り抜けることが可能な物質がブレファリズマの膜形成に影響を与えるのではないかという仮説を立てた。メチルグリーンピロニンという染色液は細胞内部にあるRNAとDNAを染色するため、この条件に見合うのではと考え、これを使って実験を行うことにした。

<実験II>核(酸)染色液に対するブレファリズマの膜形成実験

核染色液であるメチルグリーンピロニンが膜形成反応を引き起こすかどうか確かめるための実験を行った。結果、ニュートラルレッドで確認したものと類似の膜形成反応が見られた。また、膜を抜け出して泳いでいく個体を確認し動画に収めることができた(図6および図7)。この実験でメチルグリーンピロニンが膜形成を引き起こすことが確認できた。

4. 考察

今回の実験では以下のことがわかった。
①食紅は膜形成を引き起こさない、②ニュートラルレッドとメチルグリーンピロニンはブレファリズマの膜形成を引き起こす。さらに、ニュートラルレッドとメチルグリーンピロニンの共通点として、核(DNA)を染色する染色液であることが挙げられる。
ブレファリズマが膜を形成する条件として、高密度の粒子が細胞外にあることなく、それらの粒子が細胞内に入り込もうとすることが必要である。では、どのような

性質をもつ物質が細胞に入り込むことができるのだろうか。私は、(i)小さい粒子である、(ii)脂質と親和性がある、という性質を考えた。これは、実験 I の結果から立てた仮説とも一致している。ブレファリズマは、核を染色する染色液の粒子を体内に入れないように、膜に吸着させてその場から抜け出すという方法で身を守っているのではないだろうか。このことに加えて、食紅が膜形成を引き起こさなかったという結果から、ブレファリズマが膜形成反応を起こすのは、細胞膜を通り抜けられるほどの小さな粒子の物質か、細胞膜の主成分である脂質と親和性がある物質だと推測できる。

しかし、この仮説には疑問も残る。今回の実験ではサフラニンが膜形成を引き起こさなかった。サフラニンもニュートラルレッドやメチルグリーンピロニンと同様に核を染色する染色液であるのに、なぜこのような結果になったのだろうか。

5. 今後の課題

今後の課題として、サフラニンで膜形成が起こらなかった理由を突き止めたいと思う。ここで、濃度が濃すぎたということが推測できる。実験ではニュートラルレッドは濃度 0.1%のものを、サフラニンは 0.5%のものをニュートラルレッドのちょうど半量使用した。観察中もサフラニンは他の薬品と比べて濃いように感じ、ブレファリズマもすぐに死んでしまっていた。また、サフラニンはアミノ基をもつため塩基性である(図 8 参照)。塩基性の物質は細胞に害をなすため、サフラニンは膜形成を引き起こした他の薬品よりも毒性が強いということも考えられる。次は、より濃度の低いもので

試すなどし、その結果を考察していきたい。また、物質を膜に吸着させてその場から抜け出すという仮説が正しいかどうか確かめたい。そのために、赤以外の色の薬品を使用して実験を重ねる。赤い薬品を加えても、膜についている赤色が薬品に由来するものなのか、ブレファリズマが持っている赤色素のブレファリズミンなのかはわからないからだ。さらに、膜形成を誘導する物質の条件が、小さい粒子であることなのか、脂質と親和性を持つことなのかを突き止めたい。この2つの条件に見合う物質について、それぞれ実験を行っていく。これらを明確にできれば、膜形成の仕組みが解明されると考える。

6. 参考

<http://www.sigmaaldrich.com/japan/product-catalog-jp.html>

7. 謝辞

この研究に関して櫻井先生に多くのご指導をいただきました。深く感謝します。

8. 画像

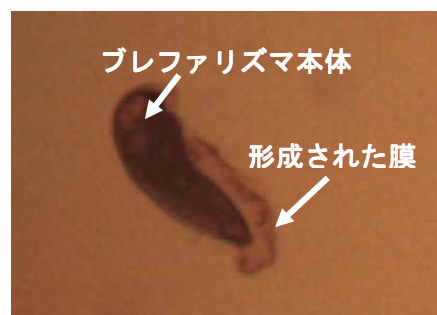


図1 ニュートラルレッド(膜形成)

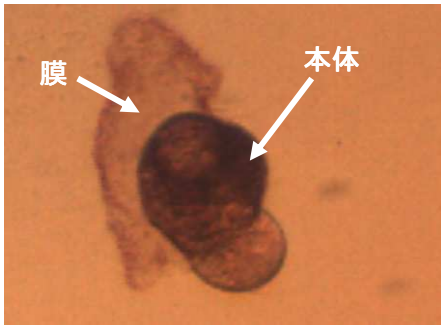


図2 ニュートラルレッド
(抜け出そうとしている。)

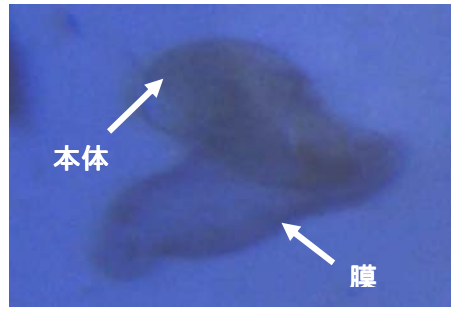


図6 メチルグリーンピロニン

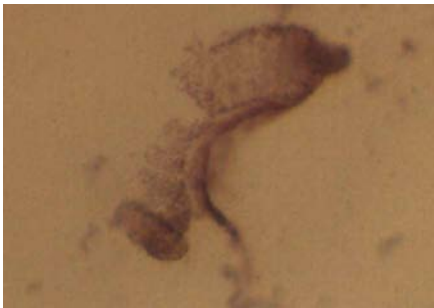


図3 ニュートラルレッド(抜け殻)



図7 チルグリーンピロニン(抜け殻)

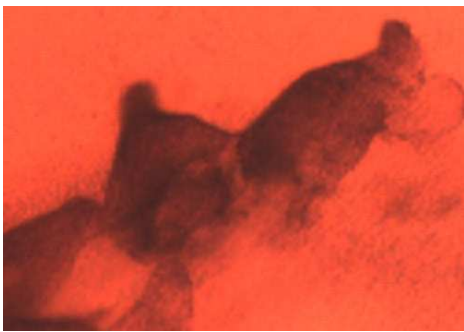


図4 サフラニン(死亡)

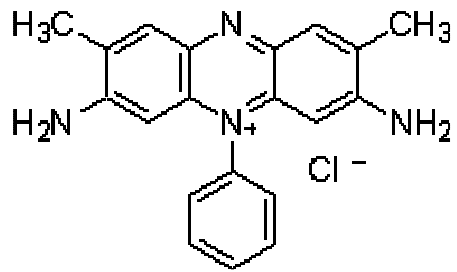


図8 サフラニン



図5 食紅

猿沢池の水質から七不思議を考える

4年B組 野依 莞奈
4年C組 浪江 智子
4年C組 坂田 咲
1年B組 赤木 美穂
1年C組 狩田 帆乃夏
指導教諭 矢野 幸洋

1. 要約

猿沢池の水質およびプランクトンについて調査した。その結果から、猿沢池の七不思議についての考察および検証実験をした。また、プランクトンの培養実験では、様々な状況下での実験を行った。

キーワード プランクトン、培養、クロロフィル

2. 研究の背景と目的

古くから、奈良八景として親しまれてきた池、猿沢池。本校近くの猿沢池には

『澄まず 濁らず 出ず 入らず

蛙はわかず 藻が生えず

魚が七分に 水三分』

という七不思議がある。

約一年間の調査により、気象条件によって発生するプランクトンの種類や個体数に変化があることがわかった。

発展として、上記の七不思議に焦点をあて、七不思議は事実であるのか、また、なぜそのような現象が起こるのかを調査するため、今までの定期調査に加え、クロロフィルの抽出実験とプランクトンの培養を行うことにした。

これらの実験を行うために、定期調査を行うデータ班と、培養実験を行う培養班とに分かれて活動した。

3. 研究内容

活動Ⅰ，活動Ⅱは主にデータ班が、活動Ⅲは培養班が担当し、次の実験を行った。

Ⅰ. 環境データとプランクトンの採集、観察

(1) 実験方法

(1) プランクトンネットを使用し、あらかじめ決めた5か所(次ページの図参照)できれいに水洗いしたフィルムケースに1本分の水を採集した。気温、天候を①の場所で調べた。

(2) 採集した直後に、その水を利用して pH, COD, リン酸, 硝酸, 水温を調べた。

(3) 持ち帰ったサンプルを、それぞれ 30ml ずつ遠心分離管に入れ、約 2 分間遠心分離した。

(4) 底に沈殿したプランクトンを吸い上げ、プレパラートに 1 滴ドロップし、スライドガラスを 1 枚ずつ作製した。

(5) スライドガラスを端から順にまんべんなく観察した。このとき、植物プランクトンについては、個体数の少ないもののみカウントし、個体数の多いものはどの種類が主に多かったのかを記録した。動物プランクトンについては、形の残っている物のみカウントし、すべての種類について数を数えた。pH, 気温, 水温の測定はデジタルpH計を用いて、COD, 硝酸, リン酸については、パックテストを用いて測定した。天気は肉眼で確認した。原則的に定期的な調査・観察を目標としているが、行事などにより抜ける場合があった。

池全体の様子をより詳しく調査するため、周囲の状況や、環境に特徴のある5か所を設定した。各箇所を回る時間差は、それぞれ約10分以内なので、気象条件の影響などは特に考慮しないことにする。

<調査地点>

- ① 
 - ・池沿いの歩道
 - ・地面は石畳
 - ・水深は約 55cm
- ② 
 - ・池沿いの歩道
 - ・地面は石畳
 - ・近くに鳩が多い
- ③ 
 - ・池沿いの植え込み
 - ・地面は砂
 - ・他の場所より人の往来が少ない
- ④ 
 - ・池沿いの道路
 - ・地面はアスファルト
 - ・池中に排水溝がある
- ⑤ 
 - ・池沿いの道路
 - ・地面はアスファルト
 - ・柳の木の真横

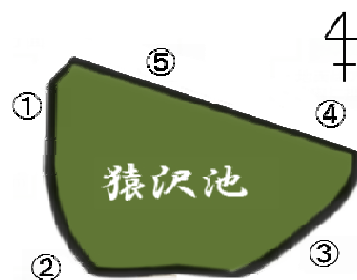


図1 猿沢池全体図

写真はすべて2010年7月22日に撮影したものである。

(2) 実験結果

表2の8月6日より、5か所のpHとプランクトンについての測定を、表4の10月21日より5か所すべてにおいて測定を始めた。

表4の⑤の水温とpHについては、pH計の不具合により、参考値とする。各表における空欄は、測定ができなかったために結果がないことを表す。なお、観察できたおもなプランクトンの写真を、本論文の最後に掲載した。

実験結果は、以下の表のとおりである。

表1

	07/13(火) 14:30~①	07/21(水) 14:00~①
天気	雨	晴れ
気温	28.5	28
水温	27	
pH	9.75	9.87
COD	20	
硝酸塩	0.2	
リン酸	0.02	
種類数	11	

表 2

2010年 08月 06日 (木) 14:00					
	①	②	③	④	⑤
天気	晴れ 時々 曇り				
気温	36				
水温	34.4				
pH	9.62	9.44	9.44	9.26	9.33
COD	20				
硝酸	0.2未満				
リン酸	0.05				
種類数	12	11	11	9	11

表 6

2010年 11月 04日 (木) 16:00					
	①	②	③	④	⑤
天気	晴れ				
気温	19				
水温	17.9	17.2	17.2	18	17.7
pH	9.41	9.37	9.34	9.42	9.44
COD	18		16.5	17	17
硝酸	0.2未満		0.2未満	0.2未満	0.2未満
リン酸	0.05		0.05未満	0.05未満	0.05
種類数	7	9	5	9	5

表 3

2010年 10月 14日 (木) 16:00					
	①	②	③	④	⑤
天気	晴れ				
気温	25.7	25.7	25.7	25.7	25.7
水温	24.8	24.7	24.4	24.4	24.6
pH	9.81	9.8	9.78	9.84	9.72
COD					
硝酸					
リン酸	0.05	0.05	0.05	0.1	0.05
種類数	12	11	11	9	11

表 7

2010年 11月 18日 (木)					
	①	②	③	④	⑤
天気	晴れ				
気温	14.8				
水温	12.9	12.8	12.3	14.1	15.1
pH	9.13	9.19	8.96	9.24	8.96
COD	7	10	11	19	12
硝酸	0.2未満	0.2未満	0.2未満	0.2未満	0.2未満
リン酸	0.02未満	0.02未満	0.02未満	0.02未満	0.02未満
種類数					

表 4

2010年 10月 21日 (木) 16:00					
	①	②	③	④	⑤
天気	晴れ				
気温	23.5				
水温	22.6	21.9	21.6	21.6	23.7
pH	9.97	9.88	9.86	9.56	9.8
COD	20	17	20	20	20
硝酸	0.2未満	0.2未満	0.2未満	0.2未満	0.2未満
リン酸	0.05未満	0.05	0.05	0.05	0.05未満
種類数	13	11	8	9	13

表 8

2010年 11月 25日 (木)					
	①	②	③	④	⑤
天気	晴れ				
気温					
水温	15.7	15.8	14.7	15.8	15.8
pH	8.6	8.75	8.71	8.6	8.5
COD	12	12	12	15	12
硝酸	0.2未満	0.2	0.2未満	0.2未満	0.2未満
リン酸	0.02未満	0.02	0.02未満	0.02未満	0.02
種類数	10	11	5	4	5

表 5

2010年 10月 28日 (木) 16:00					
	①	②	③	④	⑤
天気	曇り時々 雨				
気温	17.9				
水温	18.1	15.5	15.6	17.5	16.9
pH	9.81	9.66	9.73	9.71	9.68
COD	18	15	18	20	19
硝酸	0.2	0.2未満	0.2未満	0.2	0.2
リン酸	0.05未満	0.05未満	0.05未満	0.05未満	0.05未満
種類数	4	5			

表 9

2010年 12月 16日 (木)					
	①	②	③	④	⑤
天気	曇り				
気温	6.5				
水温	7.6	7.5	7.5	7.4	8.1
pH	7.89	8.75	7.91	7.51	8.01
COD	6	5	5	5	8
硝酸	0.2未満	0.2未満	0.2未満	0.2未満	0.2未満
リン酸	0.02未満	0.02未満	0.02未満	0.02未満	0.02未満
種類数					

以上より、次のことがわかった。

- (1) 表 10 より、プランクトンは、特定の種類が急激に個体数が増える傾向にあった。
- (2) 表 10 とグラフ 3 より、気温と水温が下がると、COD も低下し、個体数や種類数も減少した。また、夏場の暑い時期は特に動物プランクトンの数が増えた。
- (3) 表 10 より、年中を通して藍藻類が多く確認できているが、緑藻類は少なかった。また、珪藻類は、暑い時期に種類数、個体数ともに多く確認できた。
- (4) 11 月 25 日の観察時に、顕微鏡下で受精卵と思われるのを複数個確認した。
- (5) 冬場気温が下がると、池の水は澄み、夏場気温が高い時期になると、濁りが濃くなっていた。
- (6) リン酸、硝酸は年間を通して大きな変化はなかった。
- (7) ①～⑤の各箇所において、pH は大きな違いはなかったが、COD は排水溝近くの④のみ、数値が低かった。

図 3 →

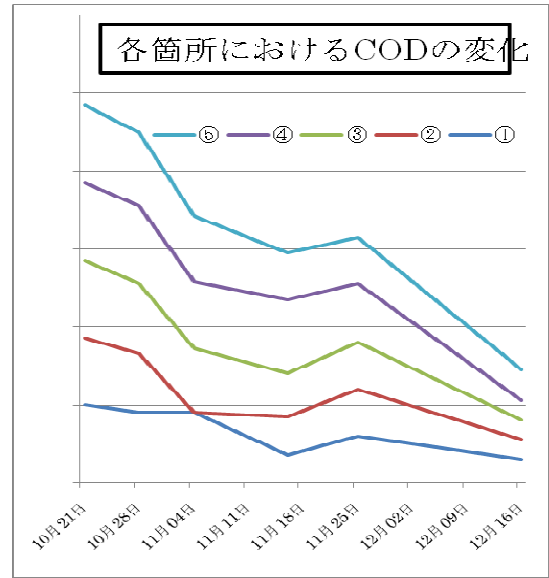


図 2

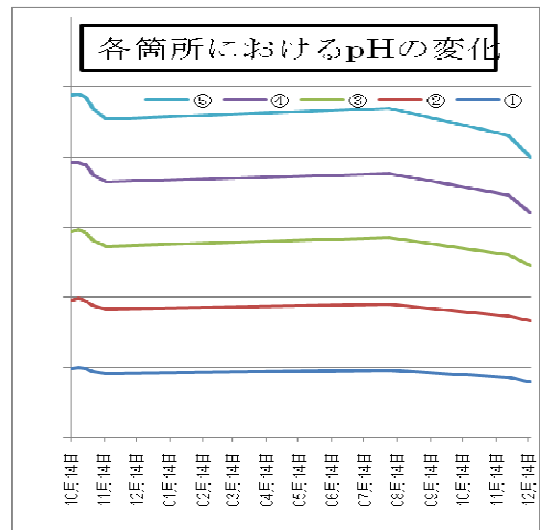
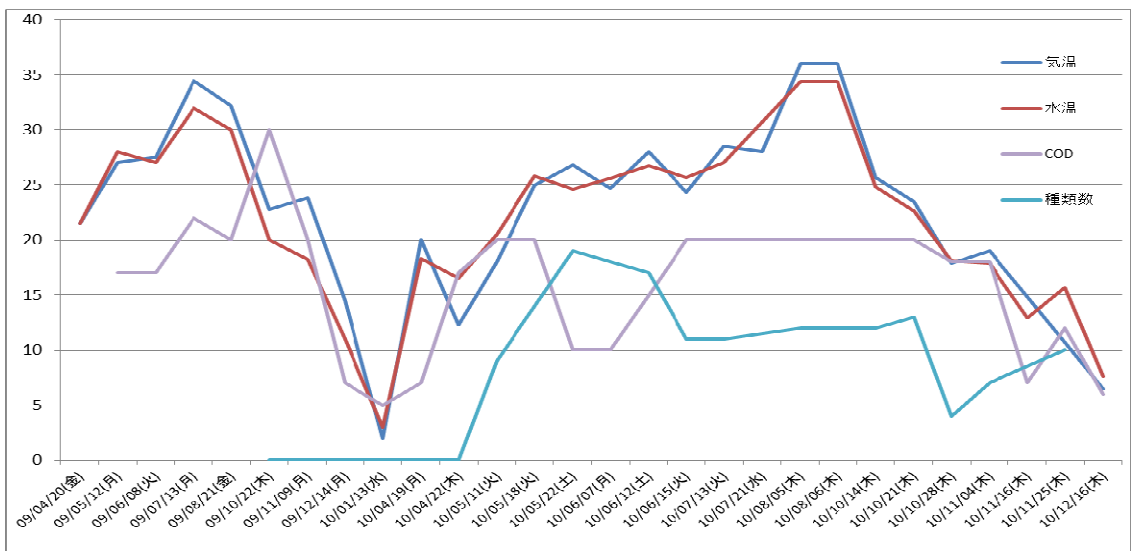


図 4



II. クロロフィルの抽出実験

(1) 実験方法

① プランクトンのろ過

実験 I (1)と同じ方法で採集した水 200ml をメスシリンダーで測りとり、ろ過装置でろ過をする。このろ紙の吸着物を使用する。

② 90%アセトンの作製

90%のアセトンを 60ml つくる。

③ クロロフィルの抽出

①でろ過したろ紙を、ろ過した面が下になるように、90%アセトン 50ml を入れたビーカーに入れ、超音波洗浄機で 30 秒間洗浄する。

④ 吸光度の測定

2本のセルに、③の上澄み液と 90%アセトンをそれぞれ 3分の2ほど入れ、分光光度計で 750nm, 663nm, 645nm, 630nm で吸光度を測定する。

⑥ クロロフィル数の測定

上澄み液の測定値から、90%アセトンの測定値を引き(引いたものをそれぞれの波長における測定値とする)、以下の式に数値を当てはめてそれぞれのクロロフィル量を算出する([1]参照)。

Chl.a	$(11.64A - 2.16B + 0.10C) a \div (VL)$
Chl.b	$(20.97B - 3.94A - 3.66C) a \div (VL)$
Chl.c	$(54.22C - 14.81B - 5.53A) a \div (VL)$

- ・ A = 750nm の測定値 - 663 nm の測定値
- ・ B = 750nm の測定値 - 645 nm の測定値
- ・ C = 750nm の測定値 - 630 nm の測定値
- ・ V = 濾過量 = 0.2 L
- ・ L = セルの長さ = 5 cm
- ・ a = アセトン溶液の量 = 50 ml

このとき、上澄み液の測定値から、90%アセトンの測定値を引いておく。

表 13 はそれぞれの植物プランクトンがどのクロロフィルを保有しているかを示したものである。保有しているものに○をつける。

	藍藻	珪藻	緑藻
クロロフィルa	○	○	○
クロロフィルb			○
クロロフィルc		○	

表 13 ([4]参照)

(3) 実験結果

2010.11.06	上澄み液	90%アセトン
750nm	0.0742	0.0568
663nm	0.1572	0.0715
645nm	0.1112	0.0713
630nm	0.1045	0.0742

このとき、

$$A=0.0638, B=0.0225, C=0.0129$$

これを代入して計算すると、

Chl.a=34.8, Chl.b=8.66, Chl.c=0.67 となる。

2010.11.27	上澄み液	90%アセトン
750nm	0.0634	0.058
663nm	0.1168	0.0695
645nm	0.0905	0.0695
630nm	0.087	0.072

このとき、

$$A=0.0419, B=0.0156, C=0.0096$$

これを代入して計算すると、

Chl.a=15.1, Chl.b=6.34, Chl.c=2.88 となる。

2011.01.29	上澄み液	90%アセトン
750nm	0.0704	0.0634
663nm	0.0865	0.0743
645nm	0.0837	0.0746
630nm	0.0856	0.0768

このとき、

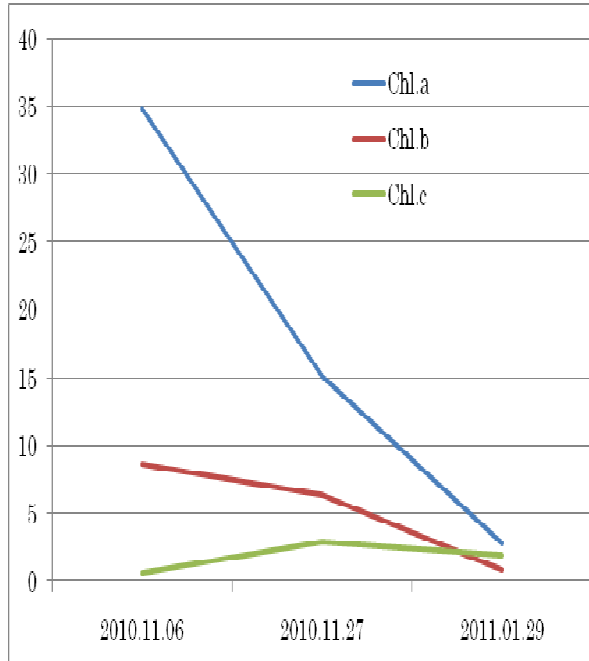
$$A=0.0052, B=0.0021, C=0.0018$$

これを代入して計算すると、

Chl.a=2.8, Chl.b=0.85, Chl.c=1.89

※Chlはクロロフィルの略である。

図 6



(1)図 6 より、11 月から 1 月にかけて、植物プランクトンの数が減っていることがわかる。

(2)クロロフィル b をもつ緑藻類は減少している一方で、クロロフィル c をもつ珪藻類は増加していることがわかる。

(3)緑藻類が表 10 の結果よりも多いことがわかる。

III. プランクトンの培養及び純粋培養

培養班の目的は、今までのデータから、猿沢池には藍藻類が多いことがわかったので、その藍藻類を増やし、特徴を調べることによって池の環境を推測することである。

III - 1. 実験その 1

身近な水のなかで、どれが一番培養に適

しているか調べる。

(1) 実験方法

① A：水道水、B：水道水(滅菌済)、C：蒸留水、D：蒸留水(滅菌済)、E：汲み置き水、F：汲み置き水(滅菌済)をそれぞれ用意する。

② A～F を、試験管に 10ml ずつ入れ、ハイポネックスを 1, 2 滴入れる。

③ A～F にそれぞれ 0.3ml ずつ遠心分離した資料を入れる。

④ 23℃の常温庫で 5 日間保管する。

⑤ 5 日後 A～F をそれぞれ約 3 ml ほど遠心分離し、顕微鏡で観察する。

(2) 実験結果

表 14

	藍藻			緑 珪藻					
	ミクロキスティス・ペーゼンベルギー	M・イクチオブラーベ	アファノカプサ	テトラスポラ・ラクストリス	アウラコセイラ・アンピグア(変種)	ハリケイソウ	ホシガタケイソウ	ジュウジケイソウ	ヌサガタケイソウ
2010/4/26									
水道水	●		△		○		○	○	
水道水 滅菌	○			△	○		○		△
蒸留水	○	●			○	○			
蒸留水 滅菌	○	○				△			
汲み置き水	○	○		△	○	●	○		
汲み置き水 滅菌	●	○					○	○	○

●…多く確認された ○…確認された

△…少数確認された

表 14 より、汲み置き水もしくは B では

他に比べて種類数が多く確認できた。それに比べ、D ではマイクロキスティス属以外ほとんど確認できなかった。

Ⅲ - 2. 実験その2

どの液性のものが、珪藻や藍藻が増えやすいのかを調べる。

(1) 実験方法

- ① 蒸留水に pH 計で測りながら NaOH を加え、pH 9 のアルカリ性水溶液を作る。
- ② 蒸留水に pH 計で測りながらストローで息を吹き込み pH6.2 の酸性水溶液を作る。
- ③ ①と②で作った水溶液と、中性の蒸留水を試験管にそれぞれ 10ml を 3 本ずつ取る。
- ④ 各水溶液に、それぞれ 1 ml の遠心分離したプランクトンを入れ、23°C の常温庫で 7 日間保管した後、顕微鏡で観察する。

(2) 実験結果

表 15

	藍藻		緑藻		珪藻				
	ミクロキスティス・ペーゼンベルギー	M・ノバセツキ	スタウラストールム・セバルデイ	サヤミドロ	テトラスポラ・ラクストリス	アウラコセイラ・アンビグア(変種)	ハリケイソウ	ホシガタケイソウ	ジュウジケイソウ
2010/6/22									
酸性	5		3	2	1	15	1	4	
中性	8	1							
アルカリ性	16	1				3		5	1

表 16

	藍	緑	珪	計
酸性	5	6	20	31
中性	9			9
アルカリ性	17		9	26
合計	33	6	29	

各表の数値は、個体数を表す。

Ⅲ - 3. 実験その3

プラナリアなどを培養する際によく使われる Volvic と、SMB (繊毛虫類の生理食塩水) 中でプランクトンの培養を試みる。

また、SMB と Volvic の成分は表 17 の通りである。

	Volvic	SMB
Mg	0.33	0.1
Na	0.5	1.5
Ca	0.29	0.4
K	0.16	0.05 (mM)

表 17

(1) 実験方法

- ① Volvic 500ml、SMB 500ml にそれぞれ遠心分離済みの試料を 5 ml ずつ加える。
- ② そのまま常温で 3 週間保管した後、顕微鏡で観察する。

(2) 実験結果

表 18

SMB	緑藻
	セネデスムス
	クンシヨウモ
	○ ○
水温: 10.8°C	
pH: 7.65	

表 19

Volvic	珪藻	緑藻	原生
	ハリケイソウ	セレナストルム	ハルントマンネラ
	ササノハケイソウ	グラキレ	コルピディウム
	● ●	○	△ △
水温: 11.5°C			
pH: 8.42			

(1) 双方の水は緑に濁り、水面に藻のようなものが張っていた。

(2) Volvic は全体的にみると SMB に比べ無機塩類が多く、見られたプランクトンの種類、特に珪藻類はケイ素がない所では発生

しないのにも関わらず、多く確認できた。

(3) SMB では緑藻類が多く確認できた。

5. 考察

I. 環境データとプランクトンの採集、観察

図2, 図3, 図4のグラフと②~⑥より、気温が上昇するとプランクトンの活動が活発になり、種類数個体数ともに増え、10月頃に産卵した後、動物プランクトンは気温の低下とともに減少し、植物プランクトンも減ることにより、池が夏場より澄んでいたのではないかと考えられる。

このことより、七不思議の『澄まず 濁らず』の部分は、植物プランクトンが関係しているのではないかと考えられる。

また、夏場に生物が活発化することにより、池内に有機物が増え、養分が豊富になったことで珪藻類が増え、池の濁りが増し、光合成によって生きている藍藻類が珪藻類よりも少なくなったと考えられる。

今のところ、5か所の調査地点は、変化の様子はほとんど同じであり、大きな差は見受けられないことから、周囲の環境や排水溝などは池にさほど影響を与えていないと考えられる。

リン酸と硝酸の値はほとんど毎回一定値であり、猿沢池ではこれらはあまり重要でないと考えられる。

II. クロロフィルの抽出実験

11月27日のデータより、aがcを上回っていることと、毎回の観察(表10)ではあまり緑藻類が観察されないことから、緑藻類は持っているクロロフィルの量が多いと考えられる。

III. プランクトンの培養及び純粋培養

III - 1. 実験その1

表13より、Dにプランクトンが少なかったのは、蒸留水は栄養素となる物質をほとんど含んでおらず、さらに滅菌することによってさらにプランクトンの栄養素となるものが無くなってしまったためと考えられる。

この実験での課題としては、プランクトンの栄養素となるものを調べ、それらを加えて実験することが挙げられる。

また、今回動物プランクトンが確認できなかったため、それについての培養方法も調べていきたい。

III - 2. 実験その2

表15と表16から珪藻類は酸性の環境で増えやすい傾向があり、藍藻類はアルカリ性の環境で増えやすい傾向があるということがわかる。

III - 3. 実験その3

(2)より、無機塩類が多いとプランクトンが増えやすいと考えられる。珪藻類が増えたのは、元々体内に持っていたケイ素、また元々池の中にあつたケイ素が試料の中に紛れ込んでいたためではないかと考えられる。また、(3)より、緑藻類は養分となる無機塩類が少ないところでも、日光さえ当たっていれば培養することができるのではないかと考えられる。

6. 今後の課題

I. 環境データとプランクトンの採集、観察

(1) データの欠落が多いので、管理やまとめ

を徹底する。

(2) 一週間に一度の採集を目標にする。また、次回採集時から、濁度の計測も行う。

(3) 1時間おきに採集と観察を行い、時間単位での池の変化の様子を調べ、今までのデータと比較する実験を行う。

(4) 『澄まず 濁らず』以外の七不思議も説明していきたい。

(5) また、猿沢池の地理的状況について、役所に問い合わせる。

II. クロロフィルの抽出実験

(1) なるべく隔月で実験を行うようにする。

(2) ろ過実験の際の環境データを必ず採集時にとっておく。

(3) プランクトンの観察も行うようにする。

(4) 実験方法やろ過量などは、現在安定した結果が得られているので、この方法で実験を続けていきたい。

III. プランクトンの培養及び純粋培養

珪藻類、緑藻類は培養の手掛かりをつかむことができたので、さらに研究を進め純粋培養が出来る段階までもっていきたい。

藍藻類は上手く培養できなかつたので、研究をすすめ、藍藻類の純粋培養を進めたい。

7. 参考文献

[1] 『新編 湖沼調査法』、西條八東、三田村緒佐武、講談社サイエンティフィック(1995)

[2] 『やさしい 日本の淡水プランクトン 図解ハンドブック』、一瀬諭、若林徹哉 合同出版株式会社(2005)

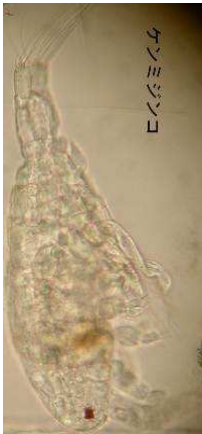
[3] 『奈良公園内の池沼、河川の水質』、一伊達統、久良美幸、上岡 岳、奈良教育大学

(1994)

[4] 『改訂版 フォトサイエンス生物図録』、鈴木孝仁、数研出版(2007)

8. 謝辞

今回の研究にあたり、実験や調査の方法を教えてくださいました、高津高校生物研究部の顧問の元根先生はじめ部員の皆様、指導していただきました矢野先生、櫻井先生に、深く感謝申し上げます。



ケンミジンコ



ケンミジンコ (ノープリウス期)



ツボワムシ



スパシテイウム



ノロの卵(?)



ノロ



ゾウミジンコ



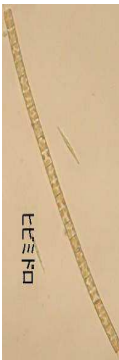
ゾウミジンコモドキ



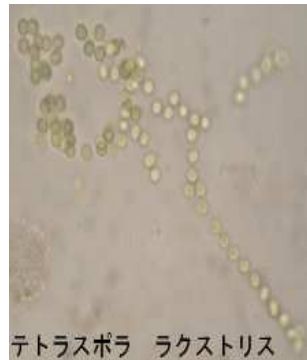
アミメジミシロ



アオミドロ



アオミドロ



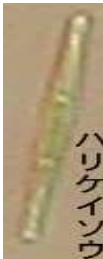
テトラスポラ ラクストリス



スタクラストム・セバルティ



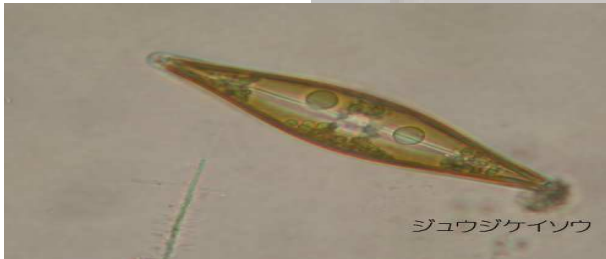
フタツノクンショウモ (変種)



ハリケインウ



ホシガタケイソウ



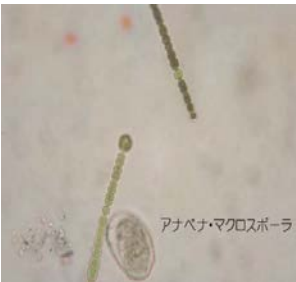
ジユウジケイソウ



ミクロキスティス・ペーゼンベルギー



ミクロキスティス・ノバセッキ



アナヘナ・マクロスポーラ

プロトプラストの作成と細胞融合

4年B組 東 美弦
4年B組 藤岡 侑里
4年B組 細井 映美
4年B組 増田 奈津実
指導教諭 矢野 幸洋

1. 要約

さまざまな植物の細胞を、細胞壁を分解して薬品を用いて融合させることに成功した。その結果、植物の種類によってプロトプラストのできやすさや細胞融合のしやすさに差があることがわかった。

キーワード プロトプラスト、酵素液、細胞融合、細胞融合液、遠心分離

2. 研究の背景と目的

酵素液によって細胞壁を分解した状態の細胞を「プロトプラスト」という。異種の植物のプロトプラストを混ぜ合わせて薬品で処理すると、プロトプラスト同士がくっついて細胞融合が起こり、雑種細胞が作られる。これまでも、細胞融合によって、ジャガイモとトマトの雑種である「ポマト」やオレンジとカラタチの雑種である「オレタチ」、ハクサイとキャベツの雑種である「バイオハ克蘭」などが作られている。これらの同じ科の植物同士による細胞融合による新植物の開発は既に行われていたが、今回私たちは様々な違う科同士の植物を用いて細胞融合を行い、新種の植物の雑種細胞の作成を試みた。

3. 研究内容

<プロトプラストの作成手順>

セルラーゼ 1 g、ペクチナーゼ 0.4 g、マ

ンニトール 13.2 g をメスフラスコに入れ、蒸留水を加えて酵素液 100 ml を作る。ビーカーに細かく刻んだ試料、酵素液を入れて 25℃ に設定したインキュベータに入れ、一晚放置後おだやかに攪拌する。液をホールスライドガラスにとって顕微鏡で観察する。

<細胞融合液の作成手順>

ポリエチレングリコール 33 g、グルコース 3.6 g、塩化カルシウム 0.05 g、リン酸二水素カリウム 0.01 g に蒸留水を加え、100 ml にする。これを「細胞融合液」とよぶ。

<融合の手順>

プロトプラストが入った酵素液をろ過してから、遠心分離を行って、濃縮されたプロトプラストを含む液を作る。

ホールスライドガラスの二ヶ所にプロトプラストの入った液を 1 滴ずつ滴下した後、その間に細胞融合液を 1 滴滴下する。細胞

が崩れないように気をつけながらゆっくりと混ぜ合わせる。10分位放置した後、混ぜ合わせた液にカバーガラスをかけて顕微鏡で観察する。

<実験1>

材料に、ホウレンソウ、サツマイモ、ニンジンを用い、その結果を示す。数字は酵素液に入れてから経過した日数を表す。

表1 実験1の結果

	2日目	3日目	色
ホウレンソウ	○	△	緑
サツマイモ	×	×	—
ニンジン	×	○	橙

○…プロトプラストができた

△…プロトプラストが分解され過ぎていた

×…プロトプラストができなかった

—…不明

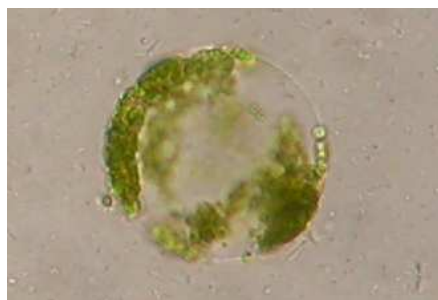


図1 ホウレンソウのプロトプラスト

<実験2>

材料にニンジン、ホウレンソウ、ジャガイモ、ダイコンを用いる。

実験1から、ニンジンはホウレンソウよりもプロトプラストができるのが遅かったので、同じ日にプロトプラストができて融合できるように酵素液に入れる日にちを1

日ずらした。その結果を次に示す。

表2 実験2の結果

	2日目	3日目	色
ニンジン	○	△	橙
ホウレンソウ	/	○	緑
ジャガイモ	/	×	—
ダイコン	/	×	—

1日目にニンジンだけを酵素液に入れ、2日目にホウレンソウ、ジャガイモ、ダイコンを酵素液に入れた。



図2 ニンジンのプロトプラスト



図3 ホウレンソウのプロトプラスト

ニンジンとホウレンソウのプロトプラストを細胞融合させたところ、うまく融合できなかった。

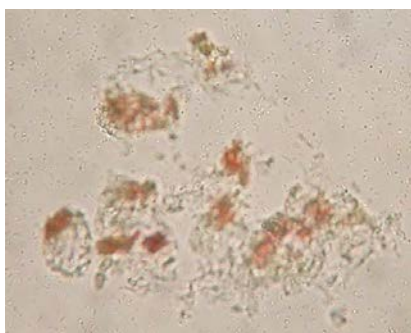


図4 分解されたニンジンの
プロトプラスト



図6 ブロッコリーのプロトプラスト

次に、以下の組み合わせで細胞融合を行った。その結果を示す。

<実験3>

実験2より、ニンジンのプロトプラストは酵素液に入れて2日目には分解されすぎてしまうことがわかったので、酵素液に入れる日は、ずらさないことにした。

材料にはニンジン、ホウレンソウ、ジャガイモ、ブロッコリースプラウト（ブロッコリーと表示）を用いた。その結果を次に示す。

表3 実験3の結果

ニンジン	○
ホウレンソウ	○
ジャガイモ	×
ブロッコリー	○

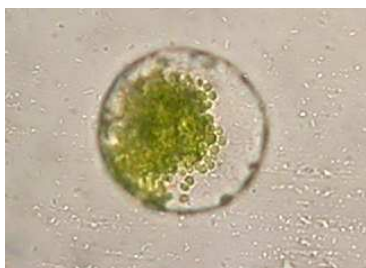


図5 ホウレンソウのプロトプラスト

表4 組み合わせと実験結果

ニンジンとホウレンソウ	○
ホウレンソウとブロッコリー	○
ニンジンとブロッコリー	×

○…細胞融合ができた、×…できなかった

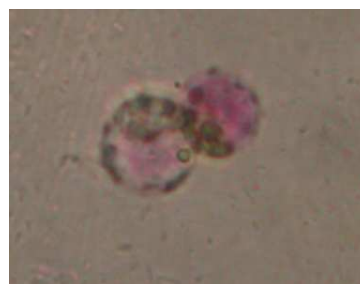


図7 ホウレンソウとブロッコリーの細胞融合

<実験4>

材料にサニーレタス、ニンジン、サザンカ、チンゲンサイ、ハクサイ、アスパラガス、ホウレンソウを用いた。その結果を次に示す。()内はプロトプラストの色を示す。

表5 実験4の結果

	プロトプラストの可否
ホウレンソウ	○
サニーレタス	○ (緑と赤)
サザンカ	○ (ピンク)
チンゲンサイ	○ (緑)
ニンジン	○
ハクサイ	×
アスパラガス	×

次に、以下の組み合わせで細胞融合を行った。その結果を示す。

表6 組み合わせと実験結果

チンゲンサイとサニーレタス	×
チンゲンサイとニンジン	○
チンゲンサイとサザンカ	◎
サニーレタスとニンジン	○
サニーレタスとサザンカ	◎
ニンジンとサザンカ	○

◎は特に明確に確認できたもの。

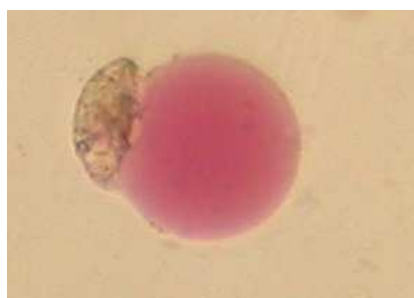


図8 チンゲンサイとサザンカ

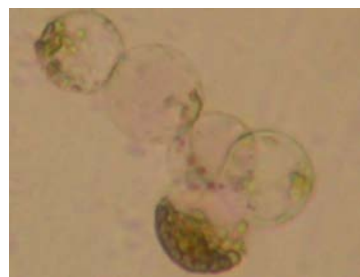


図9 サニーレタスとニンジン

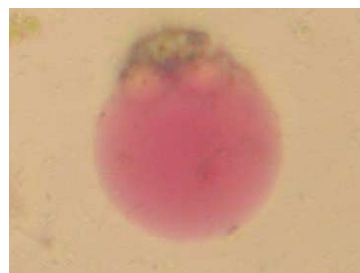


図10 サニーレタスとサザンカ①



図11 サニーレタスとサザンカ②

酵素液を入れて2日目に観察したものの中で、きれいに融合できたものを、翌日もう一度観察したところ、全体的にプロトプラストの数が減少していて、チンゲンサイとサザンカ、サニーレタスとニンジン は分解され過ぎていた。

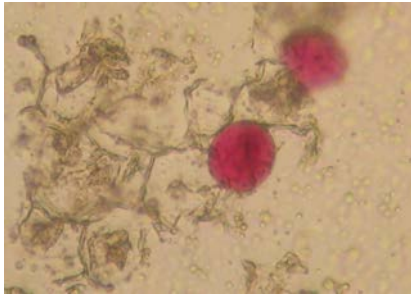


図 12 チンゲンサイとサザンカ

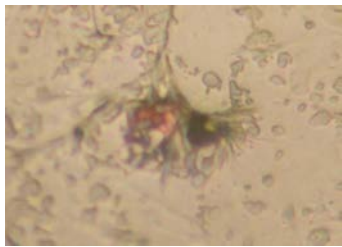


図 13 サニーレタスとニンジン

4. 考察

サツマイモ、ジャガイモ、ダイコン、ハクサイ、アスパラなどの硬くて色が薄い植物ではプロトプラストが確認できなかった。

植物の種類によって多少の差はあるが、酵素液に入れてからほぼ1日できれいなプロトプラストができる。また、硬い植物より柔らかい植物のほうが、プロトプラストができるまでの時間が短いことがわかった。

ツバキ科とアブラナ科、ツバキ科とキク科の植物同士で、特に明確に細胞融合が観察できた。他にも、違う科の植物同士で細胞融合が観察できたため、同じ科同士でなくても細胞融合は行えることがわかった。

5. 今後の課題

今回、細胞融合に成功したので、実際に雑种植物の栽培についての研究を進めたい。

6. 参考文献

[1]「高等学校生物Ⅱ」太田次郎、本川達雄

編、啓林館(2004)

[2]「わかりやすいバイオテクノロジー」三位正洋、評伝社(1985)

7. 謝辞

サイエンス研究会生物班の活動において、矢野先生には多大なご指導を賜りました。この場で深く感謝申し上げます。

音波と植物の成長の関連性

5年A組 小山 諒子

指導教諭 矢野 幸洋

1. 概要

巷で「植物に音楽を聴かせるとよく育つ」や「モーツァルトの曲が特に良いらしい」などといわれているのを耳にすることがある。しかしそれが本当かどうか、真偽を科学的に調べたいと思い今回の研究を行った。

キーワード 植物、成長、音楽、音波

2. 研究の背景と目的

人間は音楽を聴くと気分が高揚したり、落ち着いたりする。これは音楽が人間の脳に影響を与えているからであり、その効果は音楽療法という分野でも証明されている。しかし、脳を持たない植物にも音楽は影響するのだろうか。

「植物に優しい言葉をかけて育てるとよく育ち、逆に罵ると枯れてしまう」という俗説がある。以前、それを自宅のパンジーを使って試したところ、罵った株は枯れず、どちらの花もほとんど差はなくきれいに咲いたことがあった。

よって、要約で述べた、「植物に音楽を聴かせるとよく育つ」という説も本当かどうか疑わしく思えてきた。

そこで私は、まず「音波」が植物の成長に影響を与えるかどうか調べることにした。また、仮に植物に音波を当て続けることによって成長に変化が見られるというのであれば、音が植物のどの器官に影響を与えているのか、直接的な要因を突き止めたいと考えて今回の研究を行った。

3. 研究内容

一定の周波数の音波を出し、その音波に近い場所に置いた植物、少し離れた場所に置いた植物、ほぼ無音の状態の場所に置いた植物の間に、成長の差が見られるかを調べた。

また、条件を揃えるために今回はカラスムギの種子をあらかじめ発芽させておき、長さを切り揃えて実験に用いた。

4. 実験

<準備>

①雑巾にカラスムギの種子を100粒程撒き、2～3日おいて発芽させる。

②芽が10cmほどに伸びたもの(図1)を摘み取り、先端10mmを切り取って実験前の芽の長さを全て同じにしておく。

③切り取った芽の先端を1つずつ、水を張ったフィルムケースに入れる(図2)。このようにして、水分不足および重力の影響を受けないよう工夫した。

④音源装置(図3)を発泡スチロールの箱の中に置く。

⑤10 mm に切り揃えた芽の入ったフィルムケース(図4)を音源装置のスピーカー部分に近い場所(半径 5 cm~10 cm)と少し離れた場所に各数個ずつ設置する。

⑥箱の蓋を締めて外部からの音と光を遮断し人気のない静かな場所に置く。このとき、箱に布を被せて音が漏れにくくした。

<実験>

⑦箱の中の音源装置から周波数 1 kHz の音波を絶えず流し続け、日を置いて芽の長さを測定する。

⑧対照実験として、別の発砲スチロールの箱に数個のサンプルを置いて蓋を閉め、外部からの音と光を遮断して人気のない静かな場所に置く。こうすることによって、なるべく無音の環境を作った。



図1
発芽・成長した
カラスムギ



図2
フィルムケースに
入れた芽の先端

音源装置

フィルムケース

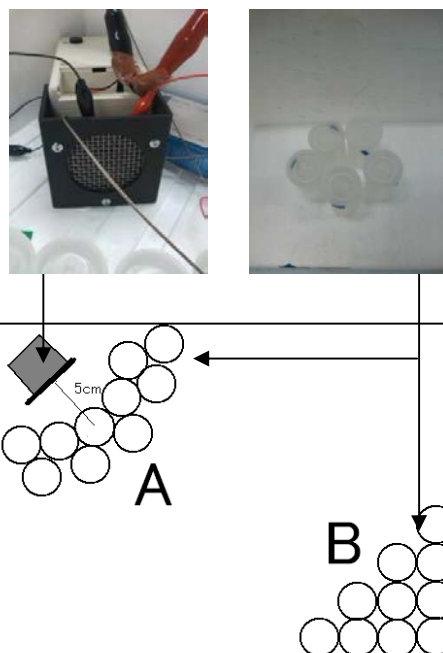


図3 音源装置を入れた箱内部の模式図

5. 仮説

実験を行うにあたって、3つの仮説を立てた。

なお、スピーカーに近い場所に置いたケースをA、少し離れた場所に置いたケースをB、対照実験に用いたケースをCとする。

<仮説1>

「音が芽の成長を助長し、芽はA, B, Cの順に早く成長する」

<仮説2>

「音が芽の成長を妨げ、芽はC, B, Aの順に早く成長する」

<仮説3>

「音は芽の成長に影響を及ぼさず、A, B, Cの成長の早さに差は見られない」

6. 観察結果

日ごとに観察した芽の長さの測定結果を表にまとめ、長さの平均を求めた。それから、どの長さの芽がどれくらいあるかを集計し、グラフにまとめた。

表1 実験結果

一日後(cm)				二日後(cm)			
A	B	C		A	B	C	
1.3	1.1	1.1		1.2	1.4	1.5	
1.1	1.2	1.2		1.4	1.4	1.2	
1.2	1.3	1.4		1.4	1.3	1.5	
1.3	1.3	1.3		1.3	1.3	1.4	
1.1	1.1	1.3		1.2	1.5	1.3	
1.1	1.2	1.5		1.5	1.4	1.2	
1.4	1.1	1.4		1.2	1.4	1.4	
1.3	1.4	1.2		1.4	1.3	1.3	
1.2	1.3	1.3		1.5	1.4	1.3	
1.3	1.4	1.3		1.4	1.3	1.4	
1.4	1.2	1.2		1.4	1.3	1.3	
1.3	1.2	1.1		1.3	1.2	1.3	
1.2	1.3	1.4		1.4	1.3	1.4	
平均	1.25	1.24	1.28	平均	1.35	1.35	1.35

一週間後(cm)			
A	B	C	
1.7	1.5	1.7	
1.8	2	1.8	
1.3	1.7	2	
1.6	1.8	1.8	
1.9	1.9	2	
1.8	1.7	1.7	
2	2	1.9	
1.8	1.8	2	
1.5	2	2	
1.8	1.9	1.4	
1.9	1.8	1.8	
2	1.6	1.9	
2	1.7	1.5	
平均	1.78	1.8	1.81

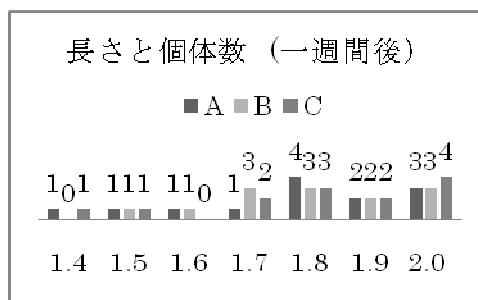
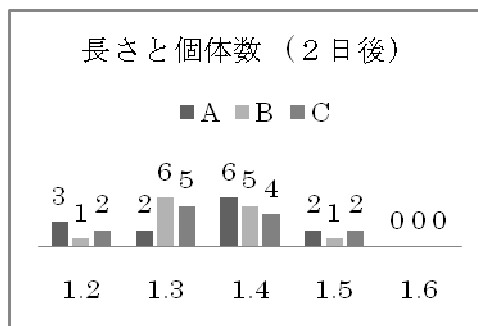
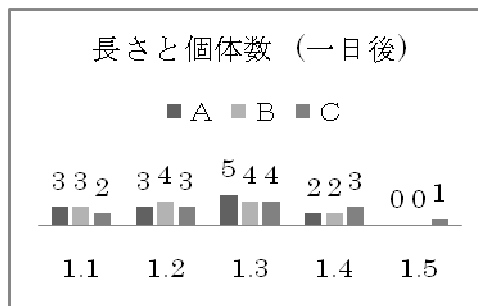


図4 実験結果のグラフ

縦軸：本数(本)／横軸：長さ (cm)

7. 実験結果

伸びた芽の長さを測っていったところ、3種類とも伸び方や長さの平均値には大きな差は見られなかったが、長さと個体数の分布を調べると、1日後は差がないが2日後には差が見られた。

平均値だけを見ると今回の実験では、仮説3「音は芽の成長に何の影響も及ぼさず、A, B, Cともに成長の早さに差

は見られない」が正しかったといえる。

しかし、長さと個体数の分布の面から見て見ると、何も影響がないと言い切ることもできないように思われた。

8. 考察

実験では大きな差は見られなかったものの、ごく僅かな変化が起こっているかもしれないということを考えた。それに今回の実験で用いた個体数はそれぞれ 10 数個程度だったので、かなり大雑把なデータしか取れなかったようにも思う。

また、「音波は植物の成長に何の影響も及ぼさない」という結論はあくまで今回の実験においての話なので、例えば土に根を張った植物を用いる、音源装置の周波数を変える、音波ではなく何らかの楽曲を流すなど、条件を変えるとまた異なった結果が得られるかもしれないと考えた。

9. 今後の展望

今回は、対象植物に切り揃えた芽を用い、音源に単調な音波を用いて実験を行った。しかし、条件を変えると結果も多少は変わるのではないかという仮説を立てた。今後の実験では、

- ・ 個体数をもっと増やし、実験データをより確かなものにする
- ・ 果物、花をつける植物を使う（味や色に変化はあるかを見る）。
- ・ 成長したものをを用いるのではなく、種子または球根の状態から実験を行う。
- ・ 単調な音波ではなく、ヒーリング効果があるとされている楽曲を流す。

などのことを試してみたい。

それから、最低限の条件だけを揃え、関

連性があるかどうか大まかな傾向を掴んでみてから精密な実験を行うこともよいであろう。

10. 謝辞

今回の研究・実験を行うにあたり、実験装置と「音」についての情報を提供して下さった物理の米田先生、そして多大なご指導、丁寧なアドバイスをして下さった指導教諭の矢野先生に、この場を借りて深く御礼申し上げます。本当にありがとうございました。

奈良公園のフン虫の研究

3年A組 高田 桃子
3年B組 室 采音
3年B組 藪内晶友美
3年C組 宮井 萌子
3年C組 寒河 智美
指導教諭 矢野 幸洋

1. 要約

フン虫はにおいを手がかりにしてフンに集まる。フンのにおいが弱い時や紙粘土で作った偽のふんでも、フンに近い色に集まった。地面の色については生活している場所に近い色に集まった。ASTY Campにおける生物ワークショップでの実験、観察の結果を紹介する。

キーワード フン虫、シカのフン、色、におい

2. 研究の背景と目的

私たちの通っている学校は奈良公園の近くにあり、登下校の時は鹿を見かける。鹿のフンは牛や馬のフンに比べて、虫が集まっているところをあまり見ない。しかし、鹿のフンにも虫が集まるということを矢野先生から聞き、そのフン虫について興味を持った。

夏休みにフン虫について韓国や台湾の生徒とともに研究する ASTY Camp という機会を私たちは得た。7月30日に予備調査を行い、8月17日～8月22日まで本調査を行った。調査をしているときに、フン虫がフンを巣まで運ぶところを見つけ、ビデオに撮ることができた。

フン虫には「フンの中で生活するもの」と「フンを巣に運び生活するもの」の2種類がいる。今回、私たちは「フンを巣に運び生活するもの」であるルリセンチコガネ

(図1)を使って実験を行なった。

具体的には、フン虫がフンを巣まで運ぶときに、フンを何によって判別しているのか、においなのか、色を区別しているのかなどについて調べた。



図1 ルリセンチコガネ

3. 研究内容

<実験 I>フンの色およびにおいについての研究

(1) 目的

フン虫はフンの色とにおいのどちらによっ

て自分に必要なフンを区別しているのかを調べる。そのために人間にとってにおいの異なる湿ったフン、乾いたフン、アクリル絵の具、食紅を用いた。

(2) 仮説

フン虫はシカのフンを色ではなく、においで区別しているのであろう。

(3) 方法

- ①奈良公園に行き、においが強いものとして湿ったシカのフン、においが弱いものとして乾いたシカのフンおよびフン虫を採集する。
- ②食紅、アクリル絵の具(ピンク色と黄緑色)を使ってフンに色をつけ、下表のように記号で表す。

表1 フンの乾湿と色の分類

	無着色	食紅 (紅色)	ピンク 色	黄緑色
湿った フン	A1	A2	A3	A4
乾いた フン	B1	B2	B3	B4

※1 ピンクと赤はフンの色(茶色)に近い色として、黄緑は草に近い色として使用した。

※2 人間にとってのにおいの強さはアクリル絵の具>湿ったフン>乾いたフン>食紅 となった。

- ③白色のトレー(縦20 cm×横30 cm)にフン虫を4匹とA1とB1を入れ、30分間観察する。また、A2とB2、A3とB3、A4とB4についても同様に行う。

(4) 結果

4匹のフン虫がフンに近づいた延べ回数を次に示す。

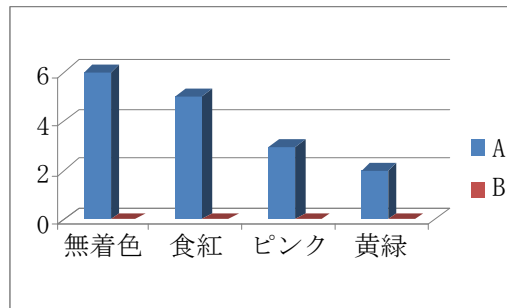


図2 実験結果

湿ったフンの無着色、食紅、ピンク色の絵の具、黄緑色の絵の具の順に多く集まり、フンを食べていた。乾いたフンには無着色でも集まらなかった。

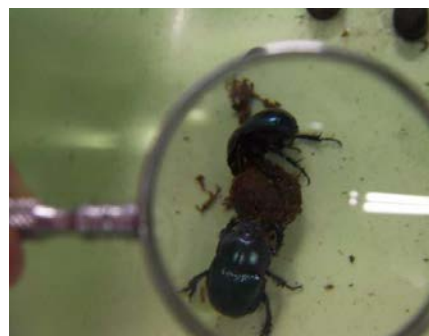


図3 無着色のフンに集まり食べている様子

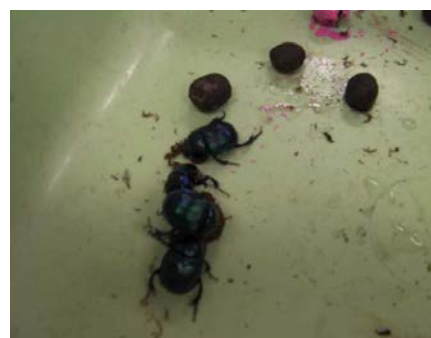


図4 食紅のフンに集まり、食べている様子



図5 黄緑のフンを食べている様子



図6 ピンクのフンを食べている様子

<実験Ⅱ>フンの色と地面の色についての研究

(1) 目的

フン虫は地面の色やフンの色が違った場合において、どのような行動をとるのか調べる。そのために、フンの形をした紙粘土で偽のフンを作ったり、地面の色を変えたりして実験する。

(2) 仮説

フンの色が茶色ではなく、他の色ならばフン虫は寄り付かないだろう。また、地面も同様に自然に近い色(茶色)ではない色には寄り付かないだろう。

(3) 方法

[Ⅱ-a]偽のフンの色を変える

- ①紙粘土とアクリル絵の具を用いて、茶色・緑色・白色のフンをそれぞれ複数個ずつつくる。

- ②①でつくった偽のフンを緑色と茶色、緑色と白色、白色と茶色の組み合わせでそれぞれを順にケージ(縦25 cm×横70 cm×高さ30 cm)の中へ入れる。
- ③フン虫8匹を2種類の偽のフンが入っている②のケージの中へ入れる。
- ④フン虫の行動を観察する。

[Ⅱ-b]地面の色を変える

- ①フン虫が普段住んでいる地面の色(茶色)の折り紙とその他の色(今回は桃色・白色・緑色・紫色・黒色・黄色)をそれぞれ1枚ずつケージに入れる。
- ②①のケージの中へフン虫8匹を入れる。
- ③フン虫の行動を観察する。

(4) 結果

[Ⅱ-a] 偽のフンの色を変える

偽のフンを入れた時のフン虫の様子を次の表に示す。

表2 実験Ⅱ-aの結果

色の組み合わせ	緑色と茶色	緑色と白色	茶色と白色
フン虫の様子	茶色の方に近づきフンの下に穴を掘ろうとした。	どちらにも近づかなかった。	茶色の方に近づきフンの下に穴を掘ろうとした。



図7 緑色と茶色で茶色に近づくフン虫



図8 白色と茶色で茶色に近づくフン虫

[II-b] 地面の色を変える

地面の色を茶色と他の色とを比較した時のフン虫の様子を次の表に示す。

表3 実験II-bの結果

地面の色 (折り紙 の色)	茶 と 桃	茶 と 白	茶 と 緑	茶 と 紫	茶 と 黒	茶 と 黄
フン虫が 移動した 色	茶 色	白 色	茶 色	茶 色	茶 色	茶 色

表3のフン虫の行動は半数以上が移動している色を示し、ほとんどが茶色へ移動した。白色へ移動した場合でも、何匹かは茶色にも移動していた。

また、すべての色において、フン虫は始

めの方は端のほうをゆっくりと動いて、しばらくして移動する場所に違いが見られた。



図9 茶色と白色では白色に多く集まった



図10 茶色と黄色では茶色に多く集まった

4. 考察

(1) フンの色とにおいについての研究についての考察

- ・においが強い湿ったフンにフン虫が多く集まり、乾いたフンには全く集まらなかったことから、フン虫はにおいによってフンを見分けると考える。
- ・アクリル絵の具と食紅で着色したものは、アクリル絵の具のにおいが強くフンのにおいを弱くしてしまい、その結果食紅の方が多く集まったと考える。
- ・食紅とアクリル絵の具でもフン虫の何匹かは近づいており、しかも色によってフン虫が近づいた数が違うので、色もある

程度は区別していると考える。

- ・フン虫が湿ったフンに、乾いたフンよりも多く集まってきたのは、本当ににおいの違いだけなのか、湿ったフンの栄養成分が多いことやフンのかたさなども原因となっていないか疑問点が残る。

(2) フンの色と地面の色についての研究についての考察

- ・フン虫は、偽のフンでも地面の色でも茶色に多く集まったことから、フンを色の違いによって区別していると考える。
- ・フン虫は茶色の偽のフンの下へもぐろうとしていたことから、色の違いが分かり、形もある程度区別できると考える。
- ・フン虫は茶色の折り紙をしいた場所に多く集まったことから、普段生活している地面の色を好むのではないかと考える。

5. 今後の課題

次のような課題が浮かび上がった。今後、機会見つけてさらに研究していきたい。

- ・フン虫は本当にすべての色の区別ができるのか。あるいは人間が見えない色が見えるのか。
- ・白色と茶色で地面の色を比べた際に、なぜ白色の方にフン虫がより多く集まったのか。
- ・フン虫は湿ったフンの方に多く集まり、乾いたフンには集まらなかった。その原因は本当ににおいの違いだけなのか、フンの栄養成分やフンのかたさは影響していないのだろうか。

6. 参考文献

[1]「奈良公園の糞虫」、佐藤 宏明他、奈良

公園の自然、奈良教育大学(1994)

[2]「糞虫」、谷 幸三、母と子のための奈良県の動物、奈良新聞社(1976)

[3]「奈良公園」、谷 幸三、自然観察路ガイド、平凡社(1984)

7. 謝辞

春日大社の皆さんには、快く飛火野の実験観察の許可証を発行していただきました。感謝申し上げます。

活動とまとめにおいては矢野先生のご指導を賜りました。また、現地での観察と討論では櫻井先生、本校卒業生の村井さんおよび英語科の宮本先生にはご指導を賜りました。この場で深く感謝申し上げます。

金属陽イオン水溶液の分離操作

2年C組 坂野 文香

2年B組 安浪 涼花

指導教諭 越野 省三

1. 要約

サイエンス化学班は放課後に集まって研究活動を行っている。普段から疑問に思ったことを実験により解決するような展開してきた。今回は、イオンの性質についての実験を行い、考察した。本稿では、その一例を紹介したい。

キーワード 金属陽イオン水溶液、分離操作、電気、ろ過

2. 研究の背景と目的

最近、美容・健康関係でよくマイナスイオンなどイオンという言葉を目にする。

イオンとはどういうものなのか、どんな効果があるのか、知らなかった。

また、色の着いた水溶液を使ったり、作ったりしたいと思ったのでイオンの水溶液は色がきれいなイメージがあったので、イオンの実験をして調べてみようと思った。

なぜ金属陽イオンをテーマとしたのかというと、以前炎色反応の実験をしたとき、調べた物質にアルカリ金属のイオンが含まれていることがわかった。そこで、今回も金属陽イオンを調べることにした。

3. 研究内容

実験の概要を説明する前にイオンについての基礎知識をまとめておく。

金属陽イオン水溶液は、混ぜると沈澱してしまうもの、危険物質が発生するものがあるので、慎重に使用する薬品を選ぶ必要がある。

物質には、水溶液にすると電気を通す電解質と電気を通さない非電解質がある。このとき、電気を通すものは粒子にわかれています。その電気を帯びた粒子をイオンという。また、水に溶けてイオンに分かれる物質を電解質(イオン性物質)、分かれぬ物質を非電解質(分子性物質)という。

I. 水溶液の中にイオンが含まれているかを調べる実験

<実験方法>

(1) エタノール・食塩水・石灰水・硫酸・塩化銅水溶液を用意する。

(2) それぞれの薬品をビーカーに入れ、中に電池とプロペラを導線でつないだ陽極と陰極を入れて電気を通す。

(3) プロペラが回れば電気が通っていれば、水溶液中にイオンを含んでいる。一方、プロペラが回らなければ電気が通っていないため、水溶液中にイオンを含んでいない。

<結果>

塩化銅でこの実験をしたとき、この実験は電気分解と同じ現象であるから、陰極のほうはサビみたいになり、こすると光沢が出た。陽極の近くの水は脱色作用がある。また、食塩水でこの実験をすると塩素ガス(有毒)が発生した。

エタノールは金属陽イオンを含んでいない。それ以外の水溶液は金属陽イオンを含んでいることがわかった。調べたところ、食塩水に入っている金属陽イオンはナトリウムイオン、石灰水に入っている金属陽イオンはカルシウムイオン、塩化銅水溶液に入っている金属陽イオンは銅イオン、硫酸にはイオンが入っているが金属陽イオンでないことがわかった。



図1 塩化銅水溶液の沈殿

II. 金属陽イオン水溶液が本当にイオンを含んでいるのか確かめる実験

<実験方法>

実験 I で調べてイオンを含むと分かった水溶液(塩化銅水溶液、食塩水、石灰水)に水酸化ナトリウム水溶液とアンモニア水溶液を加える。

※水酸化ナトリウム水溶液とアンモニア水溶液は少量と多量。

<結果>

①塩化銅水溶液の場合

NaOH 少→青白色沈殿

NaOH 多→青白色沈殿

NH₃ 多→青白色沈殿

NH₃ 少→深青色沈殿



図2 塩化銅水溶液の場合の様子

②食塩水の場合

NaOH 少→沈殿を生じない

NaOH 多→変化なし

NH₃ 少→沈殿を生じない

NH₃ 多→変化なし



図3 食塩水の場合の様子

③石灰水の場合

NaOH 少→白色沈殿

NaOH 多→白色沈澱

NH₃ 少→沈澱を生じない

NH₃ 多→変化なし



図4 石灰水の場合の様子

それぞれ銅イオン、ナトリウムイオン、カルシウムイオンであることがわかった。

III. 電気を流してイオンを移動

<実験方法>

- (1) 湿らせたろ紙の上に赤と青それぞれのリトマス紙を置く。
- (2) その上に各薬品を染み込ませた糸を置く。
- (3) ろ紙の両端をワニ口クリップで付ける。
- (4) その先に豆電球と電池をつなげる。
- (5) 電気を流し、結果をみる。

<結果>

反応しなかった。置く時間が短かったのか、方法が精密でなかったのが原因だったと思う。正しく実験すると、

酸性→青色リトマス紙が赤に

アルカリ性→赤色リトマス紙が青に
という反応が見られたと思われる

IV. 金属陽イオン水溶液の分析

実験 I ~ III で金属陽イオンを含む水溶液はどれなのかはわかったので、それを分析する。今までにでてきた水溶液を混ぜると沈澱してしまうので、越野先生の指示のもと硝酸亜鉛、硝酸銅、硝酸銀、硝酸ナトリウム、硝酸カルシウム、硝酸鉄の6つに絞って実験することにした。



図5 6つの薬品を混ぜたもの

- (1) 前述の6つの薬品に希塩酸を加える。



図6 希塩酸を加えた様子

- (2) 硫化アンモニウムを加え、煮沸してからろ過する。
- (3) アンモニア水を加え、ろ過する。
- (4) 硫化アンモニウムを加え、ろ過する。
- (5) 炭酸アンモニウムを加え、ろ過する。

(6) それぞれろ過した後の反応、沈殿物、色を観察する。



図7 硫酸アンモニウムを加えたところ



図8 得られた沈殿

<結果>

(1) は白になるはずだったが、薄緑がかっているので失敗していると考えられる。

(2) は黒くなっているのに、(2) だけを見ると成功だが(1) で失敗しているため、(1) の緑の影響を受けていると考えられる。

(3)、(4) も(1) の失敗の影響を受けたため、失敗したと考えられる。

(5) では今まで少しずつのろ過がうまく

できていないところがあったため、白になるはずが、黄色になってしまった。

4. 考察

それぞれの実験からイオンは目に見えないこと、イオンにもいろいろな種類があることがわかった。今回調べたイオンは最初の目的であった美容関係や健康関係のものではなかった。きっかけはマイナスイオンを深く知ることだったけど、いろいろ調べていくとマイナスイオンは、今回私達の調べた化学的なイオンとは全く別物で、商品名であることを知った。また、金属イオンの大部分は陽イオンであることもわかった。

5. 今後の課題

今回の実験では簡単だと思ってやったものが意外とできなかつたりした。だから、実験は丁寧にやろうと考えた。

また、資料に頼っていたので自分達でもう少しできるといいと思った。今後は資料に頼らないでできるようなもう少し簡単な実験や自分で考えた実験をやっていきたい。

6. 参考文献

- [1] 「化学総合資料」(サイエンスビュー)、島根正幸、実教出版株式会社(2010)
- [2] 「理科資料」星沢芦也、東京法令出版株式会社
- [3] 「スーパー理科辞典」、石井忠浩、受験研究社(2008)

7. 謝辞

サイエンス研究会化学班の活動において、越野先生に多大なご指導を賜りました。この場で、深く感謝申し上げます。

天体までの距離の測定

2年B組 大本 真緒
2年B組 勝井 美有
2年C組 岩崎 暖
指導教諭 藤野 智美

1. 要約

サイエンス研究会地学班2年生は、天体について興味を持ち、星までの距離を測る方法について研究を行っている。天体は遠く離れた高いところに位置しており、そのような物体までの距離を測定する方法を考察した。

キーワード 天体、距離、星、三角測量

2. 研究の背景と目的

宇宙の数多くの星々は、空にはりついたように見え、地球からの距離はすべて等しいように思われる。しかし、実際には、広大な宇宙の中に天体はまばらに散らばっており、星と地球との距離はそれぞれ違っている。そこで、地学班は星までの距離を測ることを目的とした。その測定データをもとに星座の立体模型を作ろうと考えた。その前段階として、遠くにある高さのある物体までの距離の測定方法を自分たちで考えることにした。

3. 研究内容

<方法1> 自分たちのアイデア

地学班は最初、何も知らない状態からどのようにして遠く離れた物体までの距離を測定するかを考えた。以下にそのアイデアを示す。

<測量方法>

図1のように、以下の条件を満たす2つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ を用意する。

- 条件1 ABの長さは等しい
- 条件2 $\angle B=90^\circ$ の直角三角形とする
- 条件3 $\triangle ABC$ の辺の比は
 $AB : BC : CA=3 : 4 : 5$,
 $\triangle ABD$ の辺の比は
 $AB : BD : DA=1 : \sqrt{3} : 2$
とする。

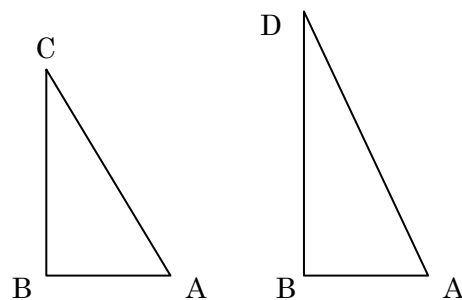


図1 $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$

この2つの三角形を、図2のように重ね、図2のABを測定したい物体の高さとする。これらの条件のもと、以下の手順に従って

測定を行った。

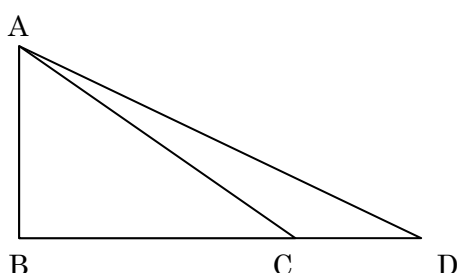


図2 2つの三角形を重ねる

(1) $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ の縮図を作成し、 $\angle BCA$, $\angle BDA$ の大きさを測定した。このとき、上記の条件1～3を考慮し、 $\triangle ABC$ については $AB=3\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$, $CA=5\text{ cm}$ として、 $\triangle ABD$ については、 $AB=3\text{ cm}$, $BD=5.1\text{ cm}$, $DA=6\text{ cm}$ とした。その結果、 $\angle BCA=37^\circ$, $\angle BDA=30^\circ$ となることがわかった。

(2) 頂点 A(物体の頂点)からスズランテープを用いて、 $\angle BCA=37^\circ$ となるように $\triangle ABC$ を作り、頂点 B の位置を決めた。このとき、辺 BC は辺 AB と垂直になるように注意した。

(3) $\triangle ABD$ の位置についても同様の作業を行い、頂点 D の位置を決めた。このとき、 $\angle BDA=30^\circ$ となるようにした。

(4) 頂点 C と頂点 D の間の距離である CD の長さを測定した。 $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ の辺の比より、 $BC : BD=4 : 5.1$ なので、この2辺の比の差である 1.1 が CD の長さに相当することになる。その結果、 $AB : CD=3 : 1.1$ となるので、AB(すなわち物体の高さ)を求めることができる。

<測定結果および計算の過程>

測定の結果は $CD=59.8\text{ cm}$ であった。よ

って、 $AB : CD=3 : 1.1$ の比を利用すると、 $AB : 59.8=3 : 1.1$ より、 $AB=163.09\text{ (cm)}$ とわかる。

実際に物体の高さを測定した値と比較したところ、ほとんど誤差を生じさせずに物体の高さをもとめることができた。以上のことから、この測量方法は離れた物体の高さを求められる方法の1つであるといえる。

4. 考察

ここまでの実験により、離れた物体の高さを求める方法を1つ発見することができた。しかし、この測定方法の問題点として、測定したい物体の頂点に紐をつけて測定しなくてはいけないため、山のように、より高い物体の高さの測定方法には向かないことがわかる。天体までの距離にも応用は利かない。よって、今後の課題としては、遠く離れたところにある、高さの大きい物体の高さを測定する方法を考察する必要がある。文献等を調べていたら、三角測量という手法にたどり着いた。今度はこの測定方法について調べていき、天体までの距離の測定に生かしていきたい。

5. 謝辞

本論文を書くにあたり、指導していただいた藤野先生に深く感謝いたします。ありがとうございました。

火山の噴火

2年A組 中森 春奈
2年C組 行松 美樹
指導教諭 藤野 智美

1. 要約

サイエンス研究会地学班は、研究活動の1つとして、火山の噴火について調査を行っており、現在は特に火山からの噴出物に注目して火山噴火の仕組みを考察している。この論文では、その一例を紹介する。

キーワード 火山、噴火、マグマ、噴出物、火山灰、岩石

2. 研究の背景と目的

私達が火山の研究を始めたのは、2010年4月のアイスランドでの大規模な火山噴火の報道を目にしたことがきっかけである。大きく上がる噴煙と被害の影響は、私たちの予想以上のものであり、火山の仕組みに興味を持ちはじめた。また、日本は世界有数の火山大国であり、2011年になってからも鹿児島県にある新燃岳が噴火している。このようなことから、火山噴火を身近な自然現象として感じるようになり、火山の噴出物に注目しながら火山の仕組みについて詳しく調べていくことにした。

3. 研究内容

(1) 火成岩の観察

火山の噴火の様式は、火山の形に由来している。その火山の形を決めるものがマグマの粘性である。そのため、火山を知るためには、その火山をつくりあげているマグマについて調べるのが重要である。

マグマとは、高温の岩石が融けてドロド

ロの液体の状態になったものである。その中に溶け込んでいる水蒸気などの気体成分や、高温液体のマグマから結晶になってきた鉱物もすべて含んだものをマグマとよんでいる。このマグマが地上に出てきて固まった岩石を火成岩という。マグマの性質を分析するために、私たちはまず、火成岩の薄片を偏光顕微鏡で観察した。

<観察>火成岩の観察

群馬県の角閃安山岩、茨城県の黒雲母花崗岩・晶質石灰岩、千葉県の斑レイ岩などを観察した。

<結果>

一見、ただの石に見える岩石も、その薄片を観察すると、様々な色の物質が含まれていることがわかった。これが鉱物である。鉱物にはたくさんの種類があり、色、形、材質など様々な観点から違いがみられた。中には、傷のような線が入っているものもあつたり、偏光板をかぶせた後、薄片を顕微鏡の上で回転させたりして角度を変えてみると、色が変わる鉱物があつた。

(2) 火山灰の観察

(1)の観察の結果を受けて、さらにマグマからの噴出物について調べてみることにした。そこで、火成岩が細かくなってできた火山灰について調べた。マグマが爆発によってバラバラになった火山砕屑物の中で大きさが2 mm以下のものを火山灰という。火山からの小さな噴出物である火山灰について調べることで、マグマに含まれる鉱物についてより詳細に観察を行うことが目的である。

<観察>火山灰の観察

まず、桜島の火山灰を洗うことから始めた。容器の8分目まで水を入れ、押し洗いする。その後、濁った上澄み液を捨てる作業を20回程度行った。はじめは真っ黒だった上澄み液が、だんだんと透明になっていく様子が確認できた。同時に、火山灰が徐々に本来の色を取り戻していき、いくつかの鉱物が含まれていることが肉眼でもわかるようになっていった。

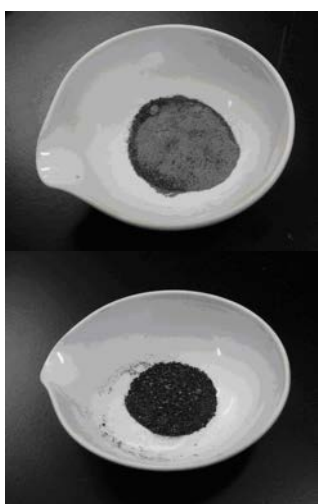


図1 (上)洗浄前／(下)洗浄後

その後、洗った火山灰を実体顕微鏡で観察した。黒、白、オレンジ、茶色、透明な

色など、様々な鉱物が含まれていることが分かった。そこで、色ごとに1粒1粒ピンセットで取り分けていった。大小も様々で、簡単にとれる大きなものもあったが、粉のような小さなものもあった。また、磁石や鉄を近づけてみると、くっついたものもあったので、磁石の性質を持っているものもあるとわかった。

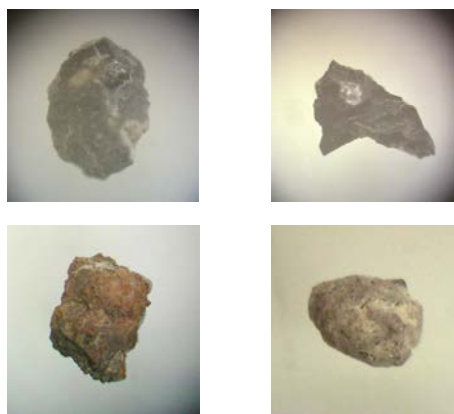


図2 火山灰中に含まれていた鉱物

4. 考察

火山灰は様々な種類から成り立っていることがわかった。これからは色ごとに取り分けた火山灰について、それぞれの成分を分析して、もっと探っていきたい。また、同じ黒色でも、磁石にくっついたものとくっつかなかったものがあったので、そのことについても調べたい。火山灰はマグマが冷めて固まった中の一部なので、マグマの組成、冷め方などからこのような違いが生まれたのではないかと予想している。

5. 今後の課題

色ごとにとりわけた鉱物の種類を調べ、火山の性質とどのような関係性があるかを調べたい。最終的には、火山灰をみるだけで、どんな火山なのかがわかるようになりたい。また、現地での観察も行いたい。

2010年度SSHサイエンス研究会
生徒研究論文集

2011年(平成23年) 3月31日 発行

国立大学法人 奈良女子大学附属中等教育学校
〒630-8305 奈良市東紀寺町1丁目60-1

TEL. 0742-26-2571

FAX 0742-20-3660

<http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/>