The background features a repeating pattern of vertical, elongated, teardrop-like shapes. Each shape is filled with a light green color and has a thin red outline. These shapes are connected by thin, vertical blue lines, creating a chain-like effect. The pattern is set against a white background and is framed by a thick green border at the top and bottom.

平成 23 年度

スーパーサイエンスハイスクール

サイエンス研究会 研究論文集

SUPER SCIENCE HIGHSCHOOL SCIENCE LABORATORY

NARA WOMEN'S UNIVERSITY SECONDARY SCHOOL

平成 23 年度 SSH サイエンス研究会
研究論文集

奈良女子大学附属中等教育学校

平成 24 年 3 月 31 日

平成 23 年度 SSH 生徒研究論文集

目次

はじめに	p.1
奈良女子大学附属中等教育学校の SSH カリキュラム	p.2
研究論文	
物理班	
ブレッドボードを用いた 7 セグメント LED の制御	p.5
Visual Basic による文字認識ソフトの作成	p.7
万有引力シミュレータの作成	p.12
シミュレーションで交通渋滞を考える	p.17
PIC マイコンによる小型液晶ディスプレイの制御	p.23
電磁力の研究	p.27
太陽電池による距離の測定(2)	p.31
マイクロ波の性質の研究	p.33
インタラクションボールの開発	p.39
モーションキャプチャ技術を応用した広告システムの開発	p.45
数学班	
素数の並びに規則はあるか	p.49
既約なピタゴラス三角形の個数に関する近似式	p.57
生物班	
マツタケの人工培養を目指して	p.77
猿沢池の水質から七不思議を考える	p.81
猿沢池の環境調査に関する追実験	p.87
化学班	
漂白作用 一酸素系漂白剤と塩素系漂白剤の違い	p.91
地学班	
エネルギーの変換効率について	p.95

刊行にあたって

奈良女子大学附属中等教育学校では、平成 22 年度より、第Ⅱ期スーパーサイエンスハイスクール（SSH）研究開発を実施しております。平成 17 年度から 5 年間実施しました第Ⅰ期 SSH において、理数に興味関心のある生徒の課外活動として「サイエンス研究会」を創設し、数学・理科・科学技術に関する生徒の研究活動を、奈良女子大学をはじめとする国内外の国内外の研究諸機関と連携して支援してきました。学校を卒業後も能力を伸ばしていく科学的素養を持った人間を育成することをめざす第Ⅱ期 SSHにおいてもサイエンス研究会の活動を SSH 研究開発の大きな柱としております。

本研究論文集は、数学班、物理班、化学班、生物班、地学班からなる「サイエンス研究会」の生徒たちが、自ら研究テーマを設定し、どのように課題を解決していったか、その研究活動の軌跡であり、生徒たちの課外活動の報告書とでもいうべきものであります。これらの活動について、生徒たちは、学内発表会を始め、各種の学会・科学コンテストに積極的に参加し、広く活動成果を発表するとともに、大きな成果をあげました。

「サイエンス研究会」における活動では生徒たちは、学年を超えた様々な能力を持つ先輩後輩とのやりとりや、一線の研究者との交流を通して、未知の課題に取り組む姿勢や困難を克服した時の喜びを知ることができました。このような経験は、将来どのような分野に進むにしても、その生徒にとって大きな力になるものと確信しています。そういった意味で、この報告集を単なる知識や技能の集合体にとらえるのではなく、生徒たちの人間的成長の証と観てとらえていただければ幸いです。また、同時に、今後新たな科学技術の発展に寄与できる人材の育成も視野に入れて、皆様から忌憚のないご意見、ご助言、ご指導をいただければと思います。

最後になりましたが、SSH 運営指導委員の先生方、大学・研究機関の先生方、そして様々なご支援を賜りました皆様に、心より感謝申し上げますとともに、今後なお一層のご指導、ご支援をいただきますようお願いいたします。

平成 24 年 3 月

奈良女子大学附属中等教育学校
校長 小林 毅
(大学院人間文化研究科教授)

2011年度教育課程表

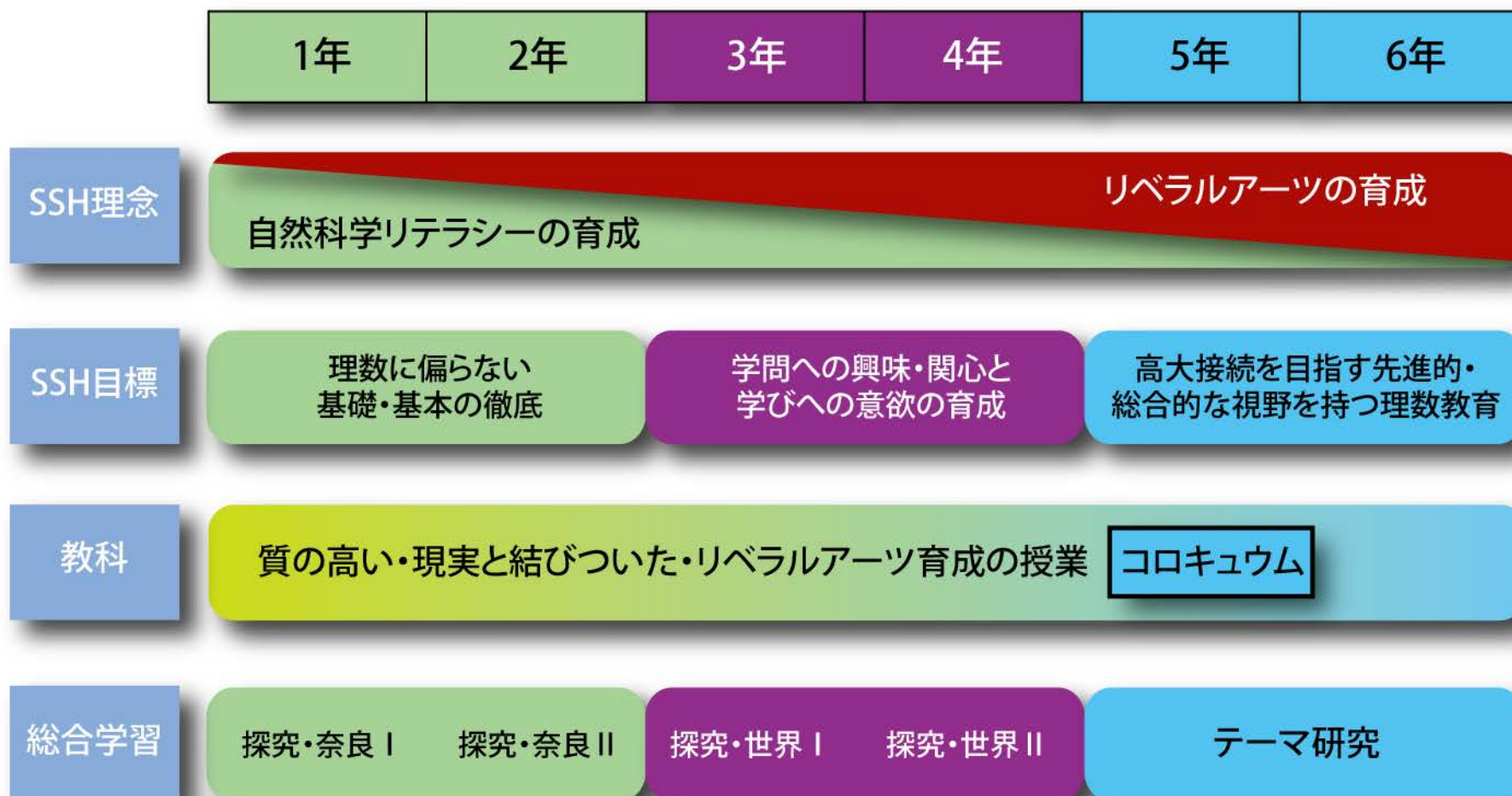
奈良女子大学附属中等教育学校

学年 時間	1年		2年		3年		4年		5年		6年					
	共通	共通	共通	共通	共通	共通	文系	理系	文系	理系	文系	理系				
1	国語基礎(4)	国語基礎(3)	国語総合(4)	国語総合(5)	現代文(2)				現代文(2)							
2					古典(2)				古典(2)							
3					古典講読(1)				日本史B(3)		日本史B(3)		世界史B(3)		世界史B(3)	
4					情報と表現(1)	現代社会(2)	現代社会(2)	化学 I (3)	化学 I (3)	地理B(3)* ⁽³⁾		政治・経済(3)* ⁽³⁾		政治・経済(3)* ⁽³⁾		
5	社会・地理(3)	社会・歴史(3)	現代史(2)	現代史(2)	化学 I (3)		化学 I (3)		世界史B(3)		世界史B(3)					
6					生物 I (3)		生物 I (3)		政治・経済(3)		政治・経済(3)		化学 II (4)			
7					地学 I (3)* ⁽³⁾		地学 I (3)* ⁽³⁾		△(0)or(3)		△(0)or(3)		△(0)or(4)			
8					日本史B(3)		日本史B(3)		世界史B(3)		世界史B(3)		化学 II (4)			
9	数学基礎 I (4) ・代数 ・幾何	数学基礎 II (5) ・代数 ・幾何	数学探究 I A(3)	数学探究 II A(3)	世界史B(3)		世界史B(3)		政治・経済(3)		化学 II (4)					
10					地理B(3)* ⁽³⁾		地理B(3)* ⁽³⁾		△(0)or(3)		△(0)or(3)		△(0)or(4)			
11					化学 I (3)		化学 I (3)		政治・経済(3)		政治・経済(3)		化学 II (4)			
12					生物 I (3)		生物 I (3)		△(0)or(3)		△(0)or(3)		△(0)or(4)			
13	情報と科学(1)	基礎理科 I (3)	基礎理科 II (4)	自然探究 I ・地球環境 (3)	世界史B(3)		生物 I (3)		化学 I (3)		物理 II (4)					
14	基礎理科 I (3)				倫理(3)		生物 I (3)		生物 I (3)		生物 I (3)		物理 II (4)			
15					△(0)or(3)		△(0)or(3)		△(0)or(3)		△(0)or(3)		△(0)or(4)			
16	音楽(2)				音楽(2)	音楽(2)	自然探究 II ・物質とエネルギー ・生命科学 (4)	解析 III (3)		解析 III (3)		基礎理科(2)		物理 II (4)		
17	美術(2)	総合数学(3)* ⁽³⁾		総合数学(3)* ⁽³⁾				総合数学(3)* ⁽³⁾		発展現代文(2)		物理 II (4)				
18	美術(2)	美術(2)	技術総合 家庭総合 (2)	音楽 I (2)	代数・幾何 III (3)		代数・幾何 III (3)		選択漢文(2)		物理 II (4)					
19					音楽 II (2)		音楽 II (2)		音楽 II (2)		△(0)or(2)		△(0)or(4)			
20	工創基礎 1 生活基礎 1 (3)	美術(2)	技術総合 家庭総合 (2)	音楽 I (2)	生活デザイン II (2)		生活デザイン II (2)		古典講読(1)		物理 II (4)					
21					△(0)or(2)or(3)		△(0)or(2)or(3)		△(0)or(2)or(3)		△(0)or(2)or(3)		△(0)or(3)			
22	工創基礎 2 生活基礎 2 (2)	工創基礎 2 生活基礎 2 (2)	体育(3)	家庭総合(2)	Reading(2)		Reading(2)		日本史特講(2)		代数・幾何 IV / 特論(3)					
23					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		代数・幾何 IV / 特論(3)			
24					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(3)			
25					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(3)			
26	体育(3)	体育(2)	保健(1)	体育(2)	情報B(2)		情報B(2)		世界史特講(2)		代数・幾何 IV / 特論(3)					
27					Reading(2)		Reading(2)		地理特講(2)		地理特講(2)		代数・幾何 IV / 特論(3)			
28					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(3)			
29					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(3)			
30	IE(3)	IE(3)	IE(1)	IE(Reading)(3)	体育(3)		体育(3)		数学特論 III IV (2)		解析 IV / 特論(5)					
31					Topic Studies II(3)		Topic Studies II(3)		数学特論 III IV (2)		数学特論 III IV (2)		解析 IV / 特論(5)			
32					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
33					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
34	BE(1)	BE(1)	NET(1)	IE(Writing)(1)	生活科学(2)		生活科学(2)		数学特論 III IV (2)		解析 IV / 特論(5)					
35					Reading(2)		Reading(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
36					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
37					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
38	NET(1)	NET(1)	情報の科学(1)	NET(Speaking)(1)	Topic Studies I(3)		Topic Studies I(3)		倫理(3)		数学特論 I II (2)					
39					Reading(2)		Reading(2)		音楽 III (2)		音楽 III (2)		数学特論 I II (2)			
40					△(0)or(2)		△(0)or(2)		美術 III (2)		美術 III (2)		数学特論 I II (2)			
41					△(0)or(2)		△(0)or(2)		生活デザイン III (2)		生活デザイン III (2)		数学特論 I II (2)			
42	道徳(1)	道徳(1)	探求・世界 I (2)	探求・世界 II (2)	Writing(0.5) NET(0.5)* ⁽¹⁾		Writing(0.5) NET(0.5)* ⁽¹⁾		数学特論 III IV (2)		解析 IV / 特論(5)					
43					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
44					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
45					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
46	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	HR(1)	HR(1)		HR(1)		生活デザイン III (2)		数学特論 III IV (2)					
47					Writing(0.5) NET(0.5)* ⁽¹⁾		Writing(0.5) NET(0.5)* ⁽¹⁾		生活デザイン III (2)		生活デザイン III (2)		数学特論 III IV (2)			
48					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		数学特論 III IV (2)			
49					△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		数学特論 III IV (2)			
50	HR(1)	HR(1)	HR(1)	HR(1)	HR(1)		HR(1)		数学特論 III IV (2)		解析 IV / 特論(5)					
51					HR(1)		HR(1)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
52					HR(1)		HR(1)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
53					HR(1)		HR(1)		△(0)or(2)		△(0)or(2)		△(0)or(5)			
54	AG(1)	AG(1)	補講	SSHテーマ研究 (1) △(0)or(1)	AG(1)		AG(1)		補講・AG(1)		補講・AG(1)					
55					補講・AG(1)		補講・AG(1)		SSHテーマ研究(1)		SSHテーマ研究(1)		SSHテーマ研究(1)			
56					△(0)or(1)		△(0)or(1)		SSHテーマ研究(1)		SSHテーマ研究(1)		SSHテーマ研究(1)			
57					△(0)or(1)		△(0)or(1)		△(0)or(1)		△(0)or(1)		△(0)or(1)			

*選択必修: 標記の科目から必ず1科目を選択する △自由選択: 選択しなくてもよいし、選択するときはその単位数になるよう標記の科目から選択する

6年の数学科の科目については、半期毎に単位認定を行う

奈良女子大学附属中等教育学校 中高一貫SSH概念図



奈良女子大学附属中等教育学校 SSH リテラシーとリベラルアーツ



奈良女子大学 他大学



附属中等教育学校

高大接続
カリキュラム

21 世紀のリベラルアーツ

自然科学リテラシー

授業・特別講義

コロキウム(対話)・学術の智

生活科学
リテラシー

人文社会科学
リテラシー

育成したい力のキーワード

- 言語能力・言語認識
- 批判的思考力
- 他者への寛容・理解
- 学び方

生命論
環境論
宇宙論
数理科学
科学技術社会論
.....

人間とは何か
現代社会論
文化と社会
歴史探究
比較文化論
.....

サイエンス研究会

- 「スーパー」な生徒の育成
- 科学の面白さの普及

数学的リテラシーの育成

科学的リテラシーの育成

生活科学リテラシーの育成

教材開発・出版

高大接続(学習面)

ESDに基づく海外連携
コア SSH

研 究 論 文

ブレッドボードを用いた7セグメント LED の制御

2年A組 船井 遼太郎
指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

私は顧問の先生からユニバーサル基盤のはんだ付けだけではなく、ブレッドボードを用いても様々なものを制御できることを教えていただいた。そこでブレッドボードに興味を持ったので今回はそれを用いて、7セグメント LED の制御に関する研究の途中経過を報告する。

キーワード ブレッドボード、7セグメント LED

2. 研究の背景と目的

私は、はんだ付けの最中にもよくミスをすることがある。そのときに、はんだ付けが不要なブレッドボードについて知り、これなら考えた通りの回路が上手く製作できるかもしれないと考え、以前から行っていた7セグメント LED の制御に用いてみた。

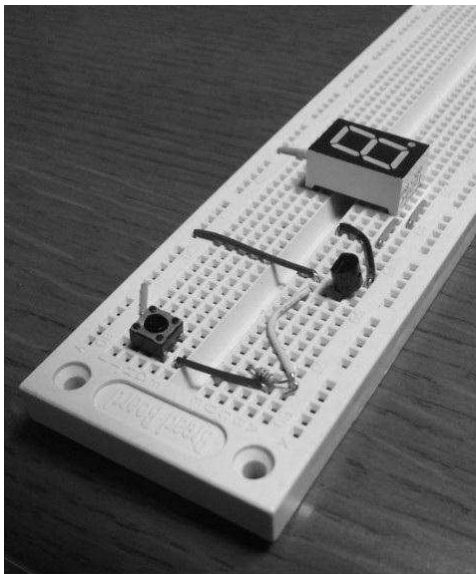


図1 製作中の回路

3. 研究内容

まず、回路図エディタの「水魚堂」というソフトを用いて7セグメント LED の回路図作成をする。

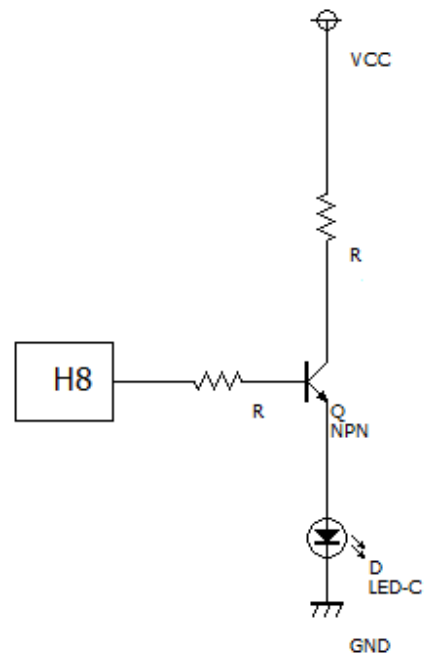


図2 7セグメント LED の回路図

目標は、ブレッドボードを用いて7セグメント LED を制御することである。しかし、

ブレッドボードを扱うことが初めてなので、H8 マイコンではなく、代わりにタクトスイッチを用いて制御することにした。スイッチを押したら電流が流れ、離せば電流は流れなくなる単純なもので、7 セグメント LED の1セグメントだけ(1つのピンだけに接続する)を光らせることを目標とした。回路の中には npn 型のトランジスタをはさみ、回路のスイッチングとともに電流を増幅しているため、念のため抵抗をはさんだ。

4. まとめと今後の課題

今回の研究では、7セグメント LED ではなく LED を光らせるという実験途上のようなものになった。次の目標は、DIP スイッチに全てのピンをつないで制御していきたいと思う。また、7セグメント LED の制御に使っていたタクトスイッチから H8 マイコンに切り替えてより精密な 7セグメント LED の制御を行いたいとも思う。

5. 参考文献

- [1]「僕らのマイコン・ロボット工作」
横井造史、松下光次郎、CQ 出版(2006)
- [2]武蔵野電波のブレッドボーダーズ
<http://pc.watch.impress.co.jp/docs/2008/0904/musashino008.htm>
- [3]「ソルダレス・ブレッドボード」の達人
<http://akizukidenshi.com/download/akibread.pdf>

6. 謝辞

今回のサイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ多くの先生、先輩方から多大なご指導を賜りました。この場で深く感謝申し上げます。

Visual Basic による文字認識ソフトの作成

2年A組 上田 樹

指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

私は看板などに読めない漢字を見つけたとき、その漢字の読みがわからないと意味を調べることも困難であると感じた。携帯などについている文字認識ソフトでは、文字の大きさや行の間隔が決められていてうまく認識することができない。そこで、写真に撮った文字を認識するソフトを、Visual Basic を用いて作成することにした。

キーワード 文字認識、Visual Basic、ビットマップ、ピクセル

2. 研究の背景と目的

看板などを見て、読めない漢字や知らない言語の文字などを見つけたとき、そのたびに意味を調べるのは大変である。そこで、それらをすべて写真に撮るだけで文字を認識できればよいと感じた。写真に撮った文字を認識する場合、文字が写真のどの位置にどんな大きさであっても認識できるようにしなければならない。そこで、まず、文字の位置、大きさ、文字の判定を行うソフトを作成することにした。

3. 研究内容

(1) 文字の位置を特定する

携帯電話などについている文字認識ソフトは、図1のように読み取る文字の位置や大きさ、行の間隔が決められており、文字の行間がそろっていない手書き文字やすでにとった写真から認識することはできない。そこで、図2のように文字が写真のどこにあっても認識できるように、文字の位置を調べるプログラムを作成した。

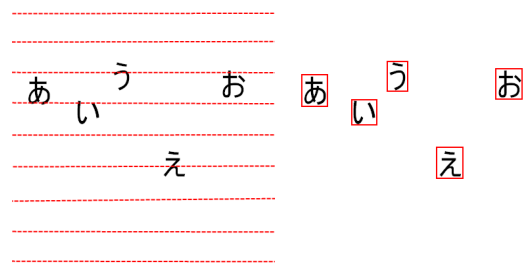


図1

図2

文字の位置を特定するためには、上下左右の端の座標を取得する必要がある。

まず、文字の左端を特定するために、図3のように画像の左端から1ピクセルずつ右にずらして見ていき、一番初めに見つかった、黒が含まれている列のx座標を「左端」として保存する。同様に、上の端も特定することができる。

次に、文字の右端を特定するために、図4のように先ほど特定した左端から1ピクセルずつ右にずらして見ていき、一番初めに見つかった、黒が全く含まれていない列のx座標を「右端」として保存する。同様に、下の端も特定することができる。



図3 文字の左端の特定方法

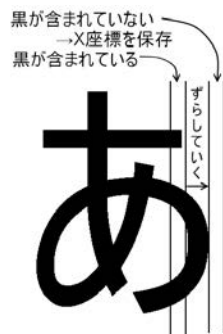
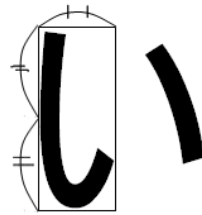


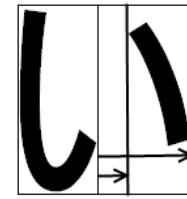
図4 文字の右端の特定方法

これにより、文字を四角く囲うことができる。しかし、このままでは、「い」などのように全体が繋がっていない文字を正確に囲うことができない。そこで、四角に囲ったとき、図5のように文字の幅が高さの半分以下なら、図6のようにもう一度左端を求める処理を行い、さらに右端を求める処理を行い、そこを右端とすることで、全体の繋がっていない文字も正確に囲うことができた。また、縦でも同じようにすることで、「う」のような縦に繋がっていない文字も読み取ることができた。



横が縦の半分以下

図5



もう一度左端、右端を調べる

図6

次は、2文字目以降の読み取りである。2文字目以降は、左端の特定時に図7のように前の文字の右端からずらしていく。これを画像の右端まで繰り返すと、右端までの1行分の文字を切り出すことができる。

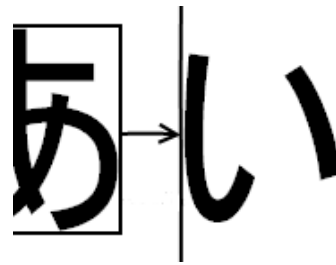


図7 2文字目の読み取り

さらに、2行目以降の読み取りが必要である。図8のように一つ上の行の下の端から2行目の上の端を探す場合、文字が揃っていれば可能だが、図9のように行間が開いていないと認識できない。そこで、上の端の特定方法は変更せず、文字の特定時にすでに切り出したものと重なっていないければ囲うという方法を使用した。

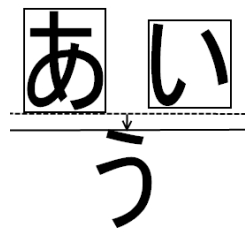


図8

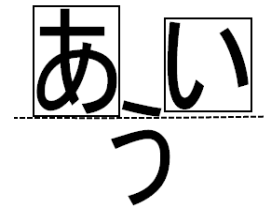


図9

ここまでの処理で、文字の位置、大きさが揃っていない場合でも文字を切り出すことができるようになった。

(2) 画像を2値化する

ここまでの処理では、白と黒の文字は読み取れるが、色付きの文字は読み取ることができない。そこで、2値化(画像を白と黒の2色だけにする)処理を行った。

しかしこれだけでは、背景が紺など黒に近い色の場合、2値化時に背景も黒になってしまう、文字が認識できなくなってしまう。そこで、最初に画像全領域のRGB値の平均値を求め、全体の平均より黒に近いピクセルを黒、それ以外を白とした。

また、画像の四隅のピクセルは字がないので、四隅の色の平均が全体の色の平均より濃い(黒に近い)場合、白黒反転処理を行うようにした。これにより、黒地に白の文字の場合も読み取れるようになった。

(3) 文字を判定する

<方法1> 重ねる判定方法

この方法は、最初にパソコン内のフォントから判定用データベースを作る。画像から切り出した文字の画像を、先程作った判定用データベースと重ね、重なったピクセル数で判定するという方法である。

切り出した画像の大きさを判定用データに合わせ、また元の大きさが大きい場合、大きな文字の判定用データベースを別で作成し、文字の大きさがある程度大きい場合には大きい文字の判定用データベースに重ねて判定するようにしたところ、50%程度の精度で判定できるようになった。

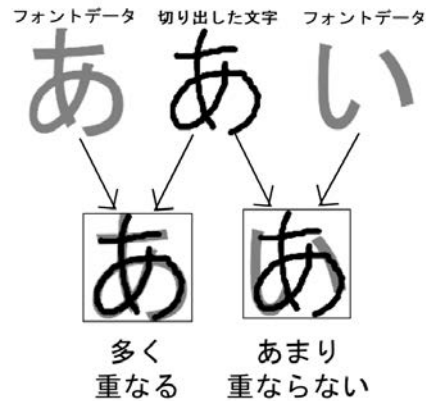


図10 重ねる判定方法

<方法2> 白黒パターンでの判定方法

方法1では、処理にかなり時間がかかった。また、重ねているだけなので、この方法でこれ以上精度を上げるのは困難であると感じた。そこで、新たな方法を考案した。

図11のように白を0、黒を1として、白と黒の入れ替わりが何回あるかを記録し、縦横それぞれで判定用データベースと比べ、最も近いものをその文字の読みとした。この方法では、かなりの速度で判定することができた。

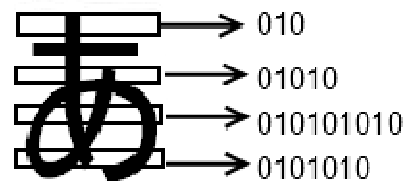


図11 白黒パターンの作成

しかし、精度がかなり低く、原因を調べたところ、字の線の端が荒れており、結果に影響が出ているとわかった。そこで、切り出した画像を縮小し、線の荒れを小さくした。これにより、ある程度精度は上がったが、細かい部分がつぶれてしまい、読み

取れないことがある。そこで、線の荒れのみを消せる縮小の割合を判定する方法と線の荒れを修正できる方法を共に現在考案中である。

(4) 背景を読み取る

写真などの場合、背景は単色ではない。影などもつき、単に背景の平均色を求めるだけではうまく判定できない。そこで、画像内の各ピクセルの濃さ(0~255, 0に近いほど黒に近い)を調べ、色の濃さとその濃さのピクセル数をグラフにした。

そして、文字の色、背景の色はそれぞれ色の濃さが片寄っていると考え、その結果、図 12 のようにピークが得られた。これらのピークは、文字もしくは背景の主となっている色であると考え、その部分だけで平均色を求めた。これにより、ある程度写真からも読み取れるようになった。

また、このグラフのピークが文字と背景の2つ以外にあり、さらにその幅が狭い場合は、背景がグラデーションであると判断し、その幅の狭い複数個のピークの両端以外を平均色の判定には影響しないようにすることで読み込めるようにした。

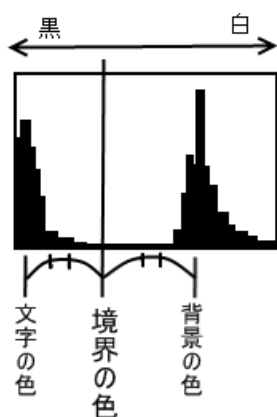


図 12 色の濃度の分布

(5) 文字データの保存による高速化

フォントから方法 2 で作成した判定用データベースは、起動するたびに生成するため、起動に時間がかかってしまう。また、判定用データ側にバグがあった場合、判定用データベースはプログラムにより自動で生成しているため、手動での修正が不可能である。そこで、文字データを編集可能な状態で保存できるようにした。

判定用のデータは可変長配列に入れているため、保存形式は可変長配列を保存できる XML 形式を使用することにした。起動時に生成ではなく、読み込みにしたことで、起動が約半分の時間になった。

また、XML への保存にすることで、生成にかかる時間を考慮せずすみ、判定用データの数を増やして精度を上げることができるようになった。

4. 今後の課題

今回の研究では、文字認識の大体の基礎ができた。だが、精度が低く、切り出す処理もグラデーションの背景や影付きの写真では読み込みに失敗するが多い。そこで、今後は背景のグラデーションや影、ノイズにも対応し、精度も判定用データをさらに増やすことで上げ、それでもできるだけ早く処理できるようにしようと思う。

そして、最終的な目標である翻訳機能も付けたいと考えている。

5. 参考文献

- [1] 「Visual Basic 中学校」
<http://homepage1.nifty.com/rucio/main/main.htm>
- [2] 「DOBON.NET」

<http://dobon.net/index.html>

[3] 「C#と VB.NET の入門サイト」

<http://jeanne.wankuma.com/>

6. 謝辞

今回の研究にあたり指導して下さった顧問の米田先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にもご指導、ご協力していただきました。ありがとうございました。

万有引力シミュレーターの作成

2年B組 稲益 秀成
指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

顧問の先生に、宇宙探査機は惑星の万有引力を利用し、進む方向や速度を変化させるスイングバイという技術を使うということを聞き、そこから万有引力について興味をもち、万有引力シミュレーターを作成することにした。

今回は、万有引力シミュレーターの第一段階として2つの物体を万有引力によって移動させるシミュレーターをJava言語で作成した。そして、スイングバイを再現することに成功したので報告する。

キーワード Java、万有引力、スイングバイ、シミュレーション

2. 研究の背景と目的

スイングバイとは、惑星の万有引力を利用することにより宇宙探査機の進む方向、速度を変更する技術のことである。宇宙探査機は、惑星に近づくと惑星の重力により加速する。そして惑星に最も近づいたときに速度が最大になり、宇宙探査機が惑星から離れていくときは減速する。そのとき、惑星は公転しているため、結果的に宇宙探査機は燃料をあまり使うことなく加速または減速し、方向も変化する。

このようなスイングバイをより深く理解したいと思い、万有引力シミュレーターを作成することにした。

3. 研究内容

今回作成したプログラムは、2つの物体が宇宙空間で万有引力のみで運動する様子をシミュレーションするものである。これにより、物体の質量、初期座標、初速度を変更したとき、物体の動き、2物体間の距

離や物体の速度の変化がどのように変化するかを調べることができる。

<加速度の計算方法>

物体(大)の質量、位置、速度、加速度を $m_1, p_1(p_{1x}, p_{1y}), v_1(v_{1x}, v_{1y}), a_1(a_{1x}, a_{1y})$ 、物体(小)の質量、位置、速度、加速度を、 $m_2, p_2(p_{2x}, p_{2y}), v_2(v_{2x}, v_{2y}), a_2(a_{2x}, a_{2y})$ とする。また、2物体間の距離を r とし、万有引力定数 G は、次の値とする。

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} [\text{Nm}^2/\text{kg}^2]$$

2物体間の万有引力 F は、

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

で与えられ、物体(小)の加速度 a_2 は、

$$m_2 a_2 = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

より、

$$a_2 = G \frac{m_1}{r^2}$$

で求めることができる。

<プログラムの流れ>

①初期条件の設定

2 物体の初期位置と初速度を設定する。

②加速度の計算 $a_1 = G \frac{m_2}{r^2}$

$$a_2 = G \frac{m_1}{r^2}$$

③加速度のx成分とy成分 の計算

$$a_{1x} = a_1 \cdot \frac{p_{2x} - p_{1x}}{r}$$

$$a_{1y} = a_1 \cdot \frac{p_{2y} - p_{1y}}{r}$$

④速度の計算、 $dt=1$ として、

$$v_{1x} = v_{1x} + a_{1x} dt$$

$$v_{1y} = v_{1y} + a_{1y} dt$$

⑤座標の計算

$$p_{1x} = p_{1x} + v_{1x} dt$$

$$p_{1y} = p_{1y} + v_{1y} dt$$

⑥物体(小)も同様に③～⑤の計算を行う

⑦グラフ処理をし、②へ戻る。

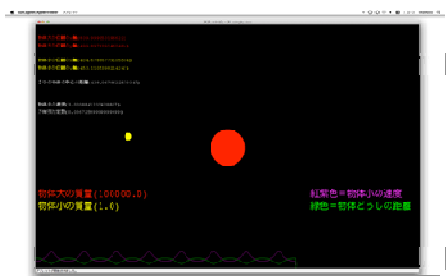


図1 実行中のスクリーンショット

4. 考察

今回作成した万有引力シミュレーターでは、(1)～(7)のことがわかった。

(1)物体(大)の質量が小さい場合と大きい場合の、2物体間の距離 r と物体(小)の速さ v_2 の変化を調べた。初期条件のうち、物体(大)の質量が 100000 の場合と 300000 の場合について、図2および図3を得た。これらの場合、物体(大)はほとんど動かない。

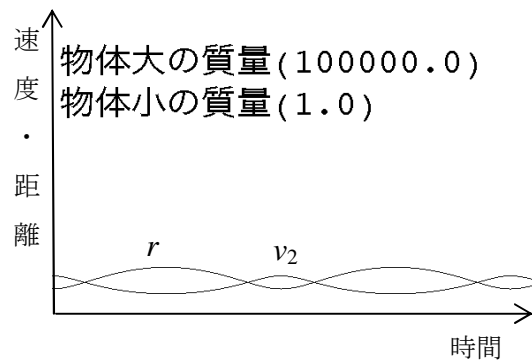


図2 物体(大)の質量が小の時の場合

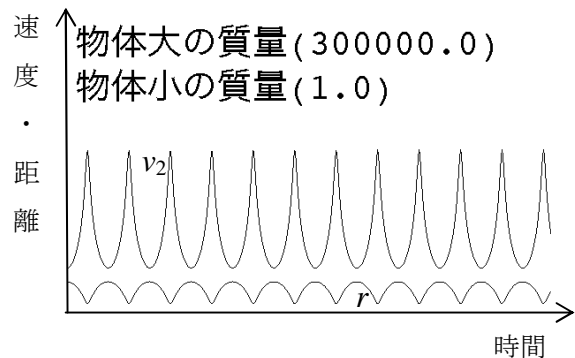


図3 物体(大)の質量が大の場合

図2と図3から、物体(大)の質量を増加させると、2物体間の最小距離 r が小さくなる。また、物体(小)の速さ v_2 の変化が大きくなるということがわかった。

(2) 初期条件のうち、物体(小)の初速度が小さい場合と大きい場合を調べた。初速度の向きは2物体を結ぶ線に対して直角である。その結果、2物体間の距離 r と、物体(小)の速さ v_2 の変化は、図4および図5となった。

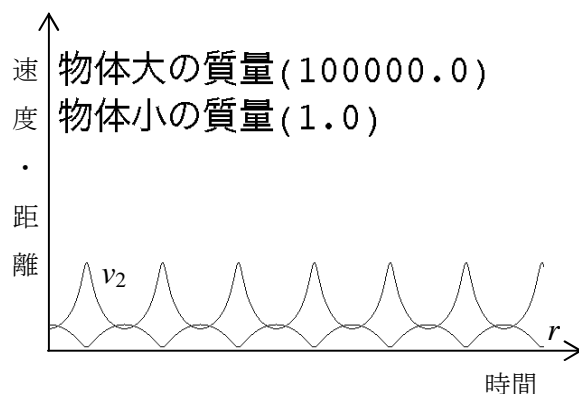


図4 物体(小)の初速度が小の場合

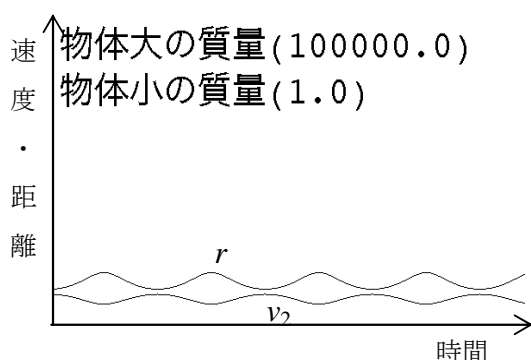


図5 物体(小)の初速度が大の場合

これらを比較すると、図4のように物体(小)の初速度 v_2 が小さいときは、2物体間の距離 r の変動が大きい。つまり、楕円軌道である。このとき、距離が小さいときは、物体(小)の速さは大きく、距離が大きくなると、速さが小さくなることがわかる。これは、図2から図10でもいえることである。

一方、図5のように、物体(小)の速さを少し大きくすると、図4に比べて、2物体間の距離の変化が小さくなる。つまり、円軌道に近くなることがわかる。また、物体(小)の速さの変化も小さくなる。さらに、物体(小)が物体(大)のまわりを回る周期は大きくなっていることがわかる。

(3) 図4、図5から、2物体間の距離の変動がなくなった場合、物体(小)の速さの変化がなくなるのではないかと予想できる。

実際、図5からさらに物体(小)の速さを少し増加させると、物体(小)の描く軌道がきれいな円に近くなった。それが図6である。2物体間の距離の変化が小さくなると、確かに、物体(小)の速さの変化が0に近づくことがわかる。

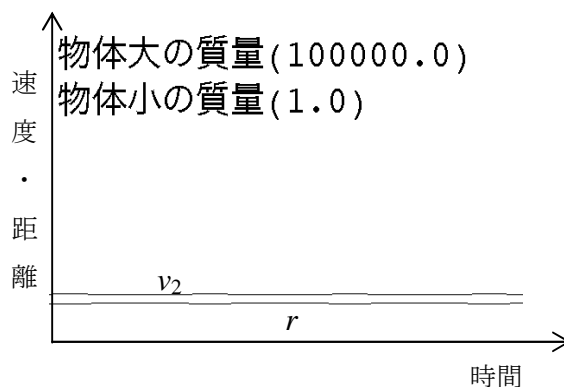


図6 物体(小)が描く軌道が綺麗な円に近い場合

(4) 物体(大)の初速度が0の場合と、0でない場合に、2物体間の距離 r と物体(小)の速さ v_2 の変化の様子を調べた。その結果、図7および図8を得た。

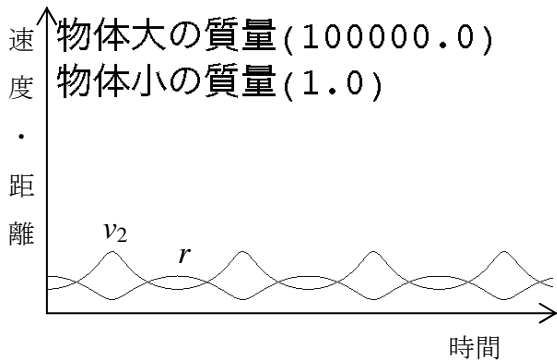


図7 物体(大)の初速度が0の場合

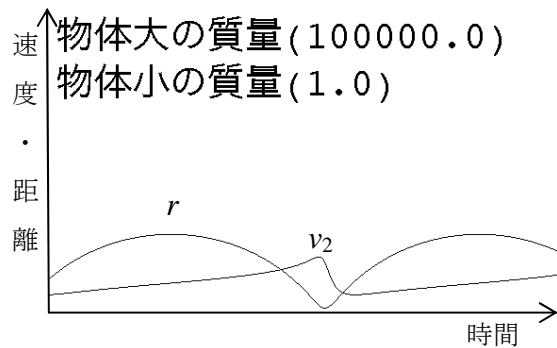


図8 物体(大)の初速度が0でない場合

図7と図8から、物体(大)の初速度を増加させたとき、 r に注目すると、2物体間の距離の変動が大きくなるのがわかる。つまり、楕円がより長い楕円になり、しかも、最も近づく距離は小さく、最も遠ざかる距離は逆に大きくなっている。また、物体(小)の速さに注目すると、最短距離の部分で速度が極端に変化しており、図7のような対称的な曲線でなくなっている。

これは、スイングバイに近づいているのではないかと考えられる。

(5) 物体(大)と物体(小)の初速度は同じにして、物体(小)の初期位置を2物体間の距離が大きい場合(図9)と、小さい場合(図

10)を比較した。初速度の向きは、2物体を結ぶ線に直角である。

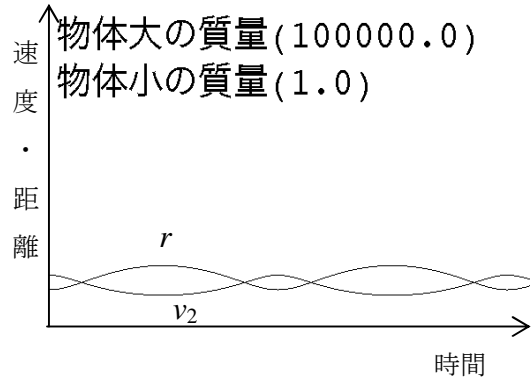


図9 最初の2物体間の距離が大きい

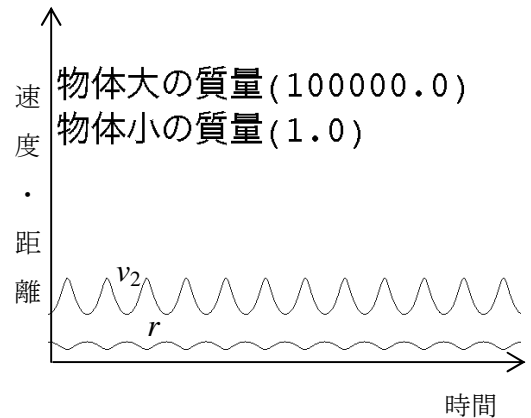


図10 最初の2物体間の距離が小さい

図9と図10より、物体(小)の初期位置を物体(大)に近づけると、物体(小)が物体(大)を一周する時間が短くなるのがわかった。また、物体(小)の速度が大きくなっている。つまり、初速度が同じ場合、半径が大きい軌道ほど、半径が小さい軌道よりも周期は長いといえる。

(6) 今回の万有引力シミュレーターでは、スイングバイをシミュレートすることに成功した。

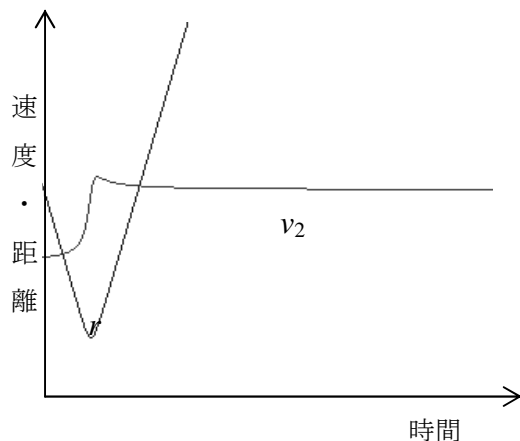


図 11 加速スイングバイのグラフ

図 11 のように、物体(小)が物体(大)の進行方向と逆の場所で、2 物体間の距離が最短になるようにしたとき、物体(小)は加速されることがわかった。そして、そのまま初期速度より大きい速さを維持していることがわかった。

(7) 物体(小)が物体(大)の進行方向側で 2 物体間の距離が最短になるようにしたとき、少し加速し、離れていくときに大きく減速し、減速した速さを維持することがわかった(図 12)。

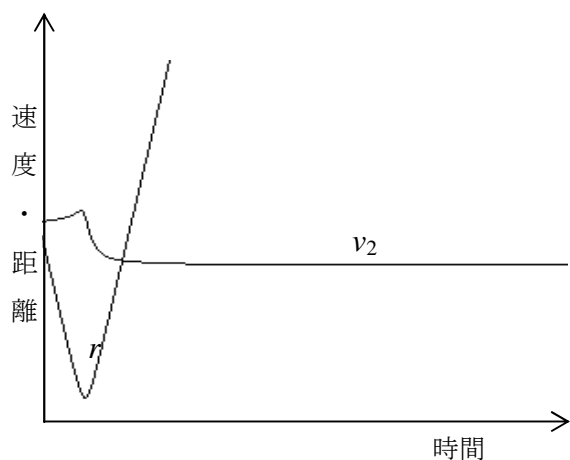


図 12 減速スイングバイ

5. 今後の課題

今回作成したプログラムでは、2 物体を万有引力で運動させることができた。

課題としては、2 つより多くの物体の計算ができるようにし、恒星と惑星と衛星の関係をシミュレートしたい。

次に、現時点では初期条件はプログラムを変更しないと変更することはできないので、プログラム上で初期条件を変更できるようにしたい。軌跡を描画することもできないので、描画し、保存できるようにしたい。

また、図 4 と図 5 は初速度を 2 種類しか試していない。これをいくつもの初速度で調べることにより、法則性を見つけたい。

加えて、グラフから r と v_2 は逆の動きをしていることに気づいた。 r と v_2 の関係を調べたい。

6. 参考文献

- [1] 「やさしい Java 第二版」
高橋麻奈、風工舎(2000 年)
- [2] 「やさしい Java 第三版」
高橋麻奈、風工舎(2002 年)
- [3] 万有引力 - Wikipedia
<http://ja.wikipedia.org/wiki/万有引力>
- [4] スイングバイ - Wikipedia
<http://ja.wikipedia.org/wiki/スイングバイ>

7. 謝辞

今回の研究にあたって、サイエンス研究会顧問の米田先生をはじめ、多くの先生方に多大なご指導をいただきました。また、サイエンス研究会の先輩方にも多くのアドバイスをいただきました。

シミュレーションで交通渋滞を考える

2年A組 村田 宏暁

指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

私は顧問の先生から車や信号の動きをシミュレーションすることで交通渋滞を減らす研究が行われていると教えていただき、興味を持った。そこで私は交通渋滞のシミュレーターを作り、渋滞について調べることにした。本稿ではその研究の内容を紹介する。なお、今回のプログラムはすべて **JAVA** 言語で作成した。

キーワード 交通渋滞、シミュレーション、**JAVA**、グラフ

2. 研究の背景と目的

私が現在行っている研究は、コンピューターを用いて車や信号の動きをシミュレーションすることで、交通渋滞の発生や解消について調べるものである。

交通渋滞の発生や解消の仕組みがわかれば、効果的な対策を立てることができ、渋滞を減らすことができるようになると考えられる。交通渋滞が減れば、移動にかかる時間が減り、時間を有効に使えるようになるだけでなく、車の燃費が良くなり、限りある資源を有効に使えるようになるなど様々なメリットがある。交通渋滞の発生や解消の仕組みについては、現在も研究中であるため現段階でわかったことを報告する。

3. 研究方法とその結果

(1) 研究事項

今回、私は次の2つの研究を行った。

[研究1] 渋滞交通量について

[研究2] 交通量や信号間隔を変化させたときの渋滞の動きについて

(2) シミュレーターの概要

- ・1本の道路とその途中で信号が1つある。
- ・車は道路の左から進入して、右へ抜けていく。

(3) 用語の定義

渋滞をどう定義するかはいろいろ考えられる。このシミュレーターでは、渋滞を含め、3つの用語を次のように定義することにする。

交通量：単位時間あたりに道路に入ってくる車の数を交通量と定義する。

渋滞：1つの車が信号を通過するまでに2回以上止まったときを渋滞と定義する。

渋滞交通量：渋滞にならない最大の交通量をその条件における渋滞交通量と定義する。

また、渋滞交通量が小さいことを「**渋滞になりやすい**」、渋滞交通量が大きいことを「**渋滞になりにくい**」と呼ぶことにする。

[研究1]

他の条件がどのようなものであっても、交通量が少なければ渋滞にはならず、交通量が多ければ渋滞になる。そこで、条件を変化させながら、渋滞交通量の変化を調べることで、その条件と交通渋滞の関係を調べることができるのではないかと考え、そのようなシミュレーションをするプログラムを作った。

まず十分に少ない交通量でシミュレーションを行い、渋滞にならなければ交通量を増やしてもう一度シミュレーションをする。これを繰り返し、渋滞が発生したときの交通量がその条件下での渋滞交通量であるとわかる。これをある条件を変化させながら繰り返し、グラフを作成した。

[結果1]

図1は信号の赤と青の長さの比を赤45s：青45sとし、車の最高速度と加速度が渋滞交通量に与える影響を調べた。ここで赤45sとは赤信号の時間が45秒続くことを表す。このグラフで(km/h)/sは加速度の単位で、1秒間に速度(km/h)がどれだけ変化するかを表す。線の色は最高速度を表しており、赤は10km/h、緑は30km/h、青は50km/h、黄色は80km/h、水色は100km/hである。

渋滞交通量(台/3分)

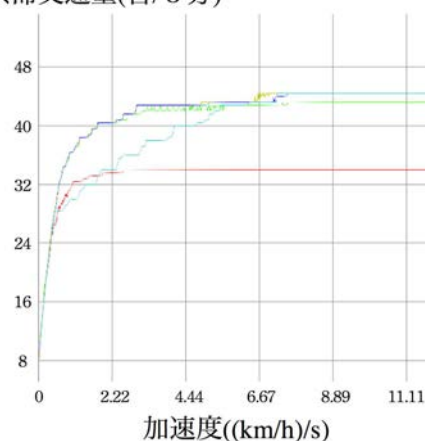


図1 信号の長さ 赤45s：青45s

図2は、最高速度を50km/hとし、信号の赤と青の長さの比と車の加速度が渋滞交通量に与える影響を調べた。線の色は信号の赤と青の長さの比を表しており、赤は赤9s：青81s、緑は赤27s：青63s、青は赤45s：青45s、黄色は赤63s：青27s、水色は赤81s：青9sである。

渋滞交通量(台/3分)

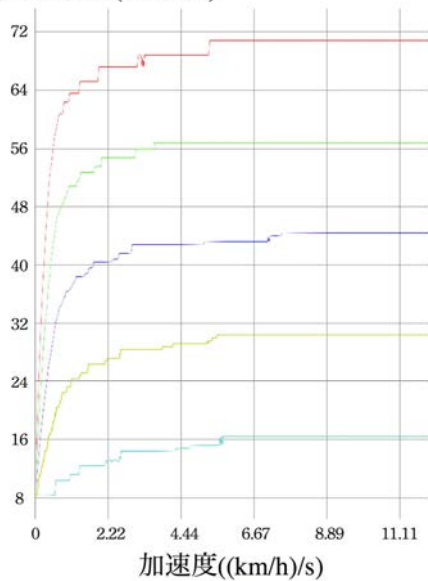


図2 最高速度 50km/h

図3は、信号の赤と青の長さの比を赤 45s : 青 45s とし、車の最高速度と加速度が渋滞交通量に与える影響を調べた。線の色は加速度を表しており、赤は 0.55(km/h)/s、緑は 1.11(km/h)/s、青は 3.33(km/h)/s、黄色は 5.56(km/h)/s、水色は 11.1(km/h)/s である。

渋滞交通量(台/3分)

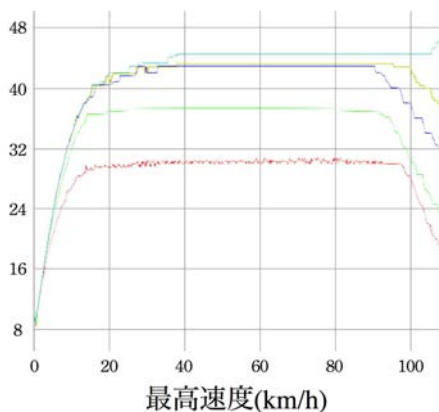


図3 信号の長さ 赤 45s : 青 45s

図4は、加速度を 3.33(km/h)/s とし、車の最高速度と信号の赤と青の長さの比が渋滞交通量に与える影響を調べた。線の色は信号の赤と青の長さの比を表しており、赤は赤 9s : 青 81s、緑は赤 27s : 青 63s、青は 赤 45s : 青 45s、黄色は赤 63s : 青 27s、水色は 赤 81s : 青 9s である。

渋滞交通量(台/3分)

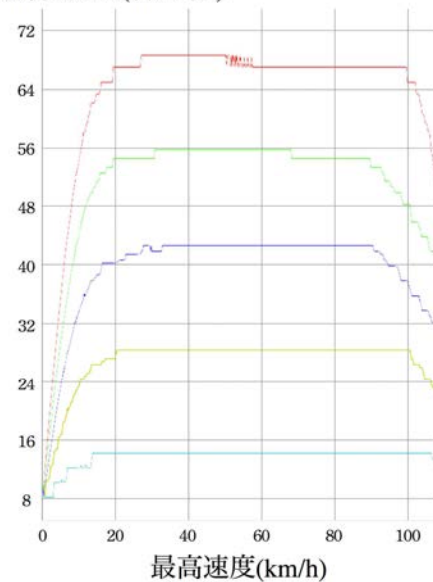


図4 加速度 3.33(km/h)/s

図5、図6は、最高速度を 50km/h とし、車の加速度と信号の赤と青の長さの比が渋滞交通量に与える影響を調べ、グラフを左右で分けたものである。線の色は加速度を表しており、赤は 0.55(km/h)/s、緑は 1.11(km/h)/s、青は 3.33(km/h)/s、黄色は 5.56(km/h)/s、水色は 11.1(km/h)/s である。

渋滞交通量(台/3分)

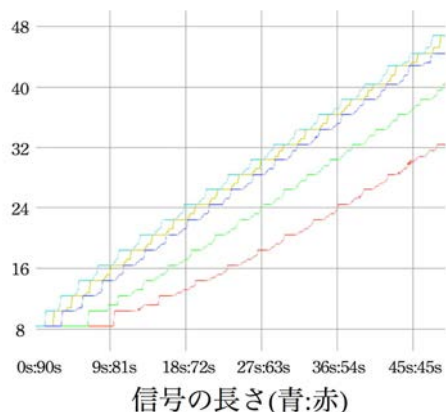


図5 最高速度 50km/h (その1)

渋滞交通量(台/3分)

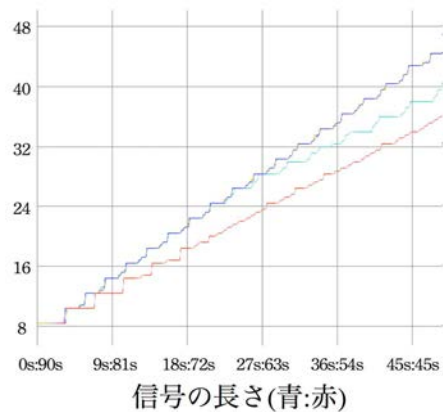


図7 加速度 3.33(km/h)/s (その1)

渋滞交通量(台/3分)

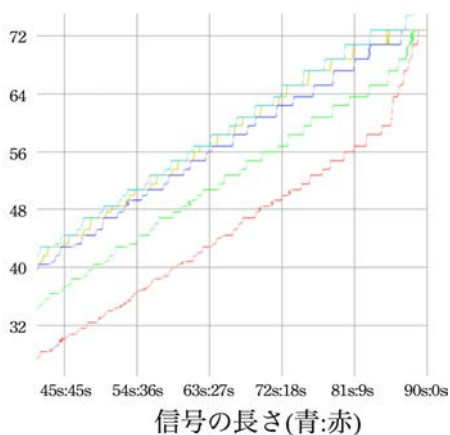


図6 最高速度 50km/h (その2)

渋滞交通量(台/3分)

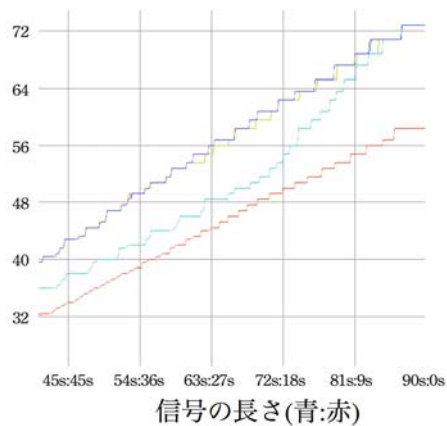


図8 加速度 3.33(km/h)/s (その2)

図7、図8は、加速度を $3.33(\text{km/h})/\text{s}$ とし、車の最高速度と信号の赤と青の長さの比が渋滞交通量に与える影響を調べ、グラフを左右に分けたものである。線の色は最高速度を表しており、赤は 10km/h 、緑は 30km/h 、青は 50km/h 、黄色は 80km/h 、水色は 100km/h である。

[研究2]

ここまでで私が作ったシミュレーターは、シミュレーション中に交通量に変化することはなかったため、交通渋滞が一度起こってしまうと、それが解消されることはなかった。しかし、実際には交通量に変化し、交通渋滞が解消される。そこで、私はシミュレーションを行っている途中に交通量を変化させることができ

るようにした。同時に、信号の変わる間隔も変化させることができるようにし、それらを変化させたときの交通渋滞の動きを観察した。

[結果2]

交通量や信号の間隔を変化させた結果以下のような動きをした。

図中の縦線はそれぞれの車の位置を表している。また、色はスピードを表しており、赤に近いほど遅く、青に近いほど速い。また、下の赤色の曲線は車の速度の移動平均を、赤色の直線は車の速度の全体の平均を表している。また、▽は信号の位置を表している。

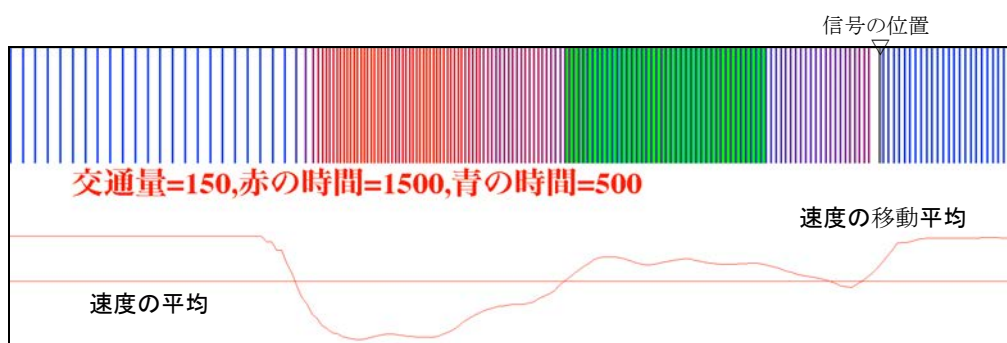


図9 交通量=60台/3分 信号の間隔=赤 67.5s:青 22.5s 信号の位置

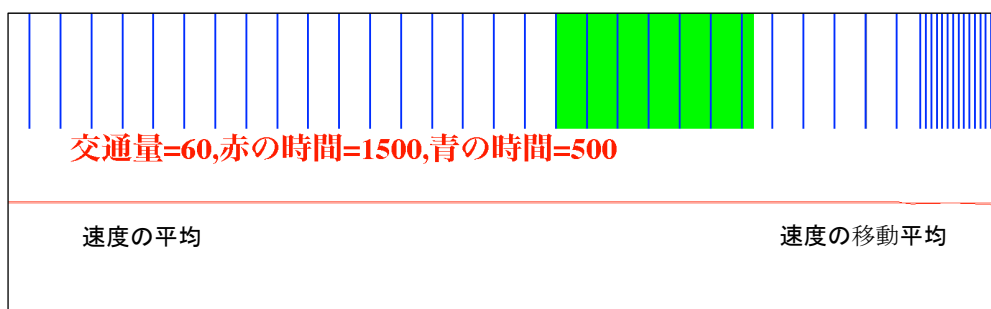


図10 図9から交通量を24台/3分にしたもの 信号の位置

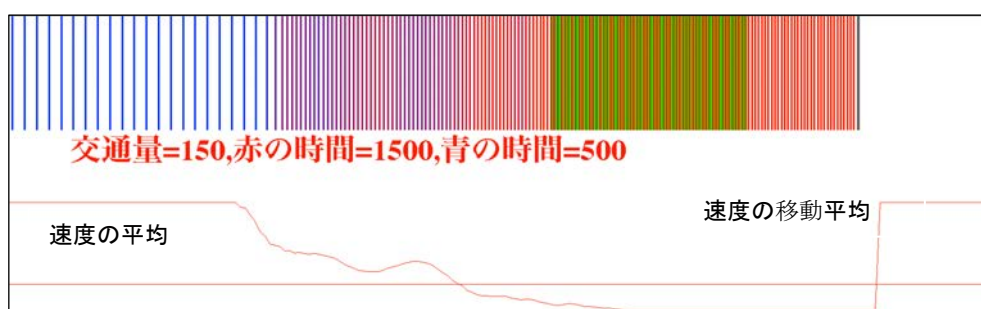


図11 図10から交通量を60台/3分に戻したもの

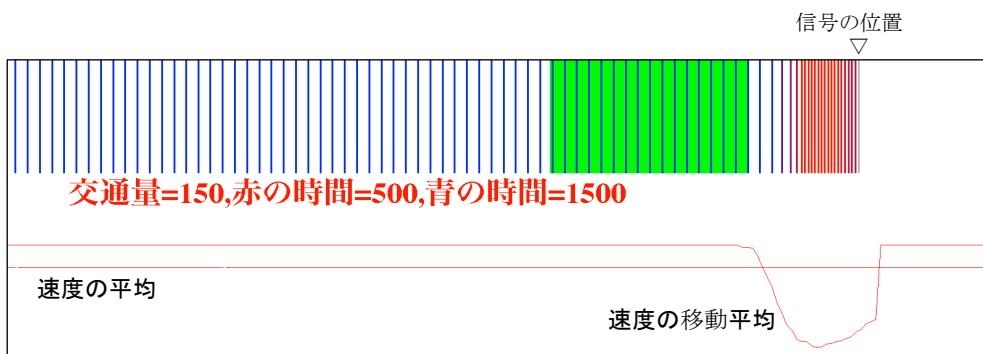


図 12 図 11 から信号の間隔を赤 22.5s:青 67.5s にしたもの

4. 考察

- 以上から、次のようなことがわかる。
- 図 1、図 2 より、加速度の小さい領域では加速度を大きくすれば渋滞交通量が大きくなるが、加速度が $1(\text{km/h})/\text{s}$ より大きくなると、加速度を大きくしても、渋滞交通量はあまり変化しない。
 - 図 3、図 4 より、最高速度の小さい領域では最高速度を大きくすれば渋滞交通量が大きくなるが、最高速度が 20km/h より大きくなると、最高速度を大きくしても、渋滞交通量はあまり変化しない。また、最高速度が 90km/h を超えると、最高速度を速くした際に渋滞交通量が小さくなる。
 - 図 5～図 8 より、信号の長さの比を大きくしたとき、渋滞交通量は比例的に大きくなる。
 - 図 9～図 12 より、交通量を減らしたり、信号の赤の時間を短くする(青の時間を長くする)と渋滞が解消される。

5. 今後の課題

現在のシミュレーターでは、直線の道しかシミュレーションすることができない。しかし、実際には曲線の道がある。そこで、私はまず曲線の道でもシミュレーションできるようなシミュレーターを作ろうと考えている。また、現在のシミュレーターでは、処理に非常に時間がかかり大規模なシミュレーションができないので、処理を軽くする必要がある。

6. 参考文献

- [1]Math (Java Platform SE 6)
<http://java.sun.com/javase/ja/6/docs/api/java/lang/Math.html>

7. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において顧問の米田先生をはじめ、多くの先生方に多大なご指導を賜りました。また、先輩方にも多くのアドバイスをいただきました。この場で深く感謝申し上げます。

PIC マイコンによる小型液晶ディスプレイの制御

2年B組 青木 雅典
指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

スマートフォンなどが普及していく中、液晶ディスプレイは日常生活において欠かせない存在となっている。私は、身近にある液晶ディスプレイを自分で制御してみたいと考えた。そこで今回、小型液晶ディスプレイを PIC マイコンで制御することにした。

キーワード 液晶ディスプレイ、PIC マイコン、SPI 通信

2. 研究の背景と目的

最近、私たちが日常生活で使用している機器のほとんどには、液晶ディスプレイが付いている。特に、パソコンやスマートフォンでは、操作や写真の表示など、ユーザーに情報を伝えるための重要なものとなっている。私は、日常的にこれらの機器を使用していくうちに、自分自身でも液晶ディスプレイを制御してみたいと考えた。そこで今回、PIC24F マイコンを用いて小型液晶ディスプレイを制御することにした。

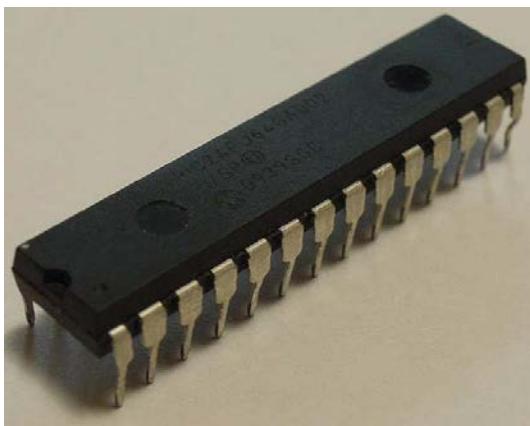


図1 PIC24FJ64GA002
(Microchip 社、動作周波数 32MHz)

温度・加速度などのセンサー入力値を読み取り、グラフとして描画する機能、及び簡易グラフィック描画機能を搭載することを目標にした。また、パソコン等との通信は行わず、ひとつの装置単体で動作するようにした。

ここでは、完成した装置とそこに至るまでの経過について報告する。

3. 研究内容

(1) 研究事項

目標は小型液晶ディスプレイに、センサー入力値をグラフとして表示することである。ここでは、3つの研究手順に分けて説明していく。

<研究1>

PIC マイコン単体で、液晶ディスプレイ制御を行えるようにする。

<研究2>

温度・加速度センサーの入力値を液晶ディスプレイにグラフとして、リアルタイムで表示する。

<研究3>

ユーザーがジョイスティックを使って、計測するセンサーを変更できるようにする。

(2) 研究方法とその結果

<研究1>

ここでは、PIC マイコンで液晶ディスプレイを制御することを目標とし、カラーパターンを表示してみる。

まず、使用する液晶ディスプレイについて調べる必要があった。今回は、NOKIA 3300 に使用されていた液晶を使用した。以下、これを NOKIA 3300-LCD と呼ぶことにする。

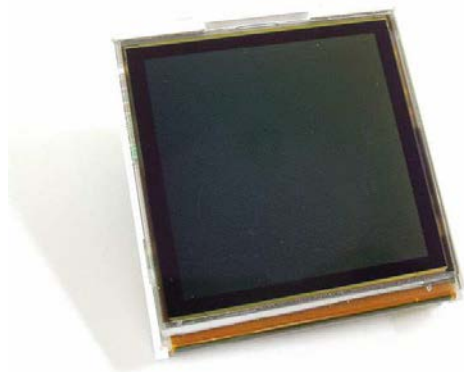


図2 NOKIA 3300-LCD

NOKIA 3300-LCD は、次のような仕様になっている。

- ・解像度：128×128
- ・コントローラ IC：S1D15G10
- ・通信方式：9bitSPI
- ・動作電源：3.3V

(ただしバックライトは 9V 電源)

一般的に、液晶ディスプレイの制御では、初期化を行った後に描画処理を行う。NOKIA 3300-LCD には S1D15G10 というコントローラ IC が使用されているため、初

期化処理および描画処理は S1D15G10 のデータシートにしたがって行っている。

ここで、通信方式である SPI 通信について考えた。PIC24F マイコンには、SPI 通信モジュールがある。これは、SPI 通信を手軽に速い速度で使用することのできるものである。しかし、PIC24F マイコンでは 8bitSPI と 16bitSPI の 2 つしか対応していない。

一方、NOKIA 3300-LCD は 9bitSPI のみ対応しているので、このモジュールを使って制御することは不可能である。そこで私は、GPIO を利用して SPI 通信を行うことにした。これは、モジュールを使用するのではなく、プログラムで ON と OFF を切り替えることで SPI 通信を実現させるというものである。

この方法を用いて、初期化処理および描画処理のデータを送信したところ、思い通りの画面になり、カラーパターンを表示させることができた。

<研究2>

ここでは、センサー入力値をグラフとしてリアルタイムで描画することを目標とし、温度・加速度センサーの入力値をグラフとして描画してみる。温度・加速度センサーは、図3、図4のものを使用する。



図3 サーミスタ温度計(103JT-025)

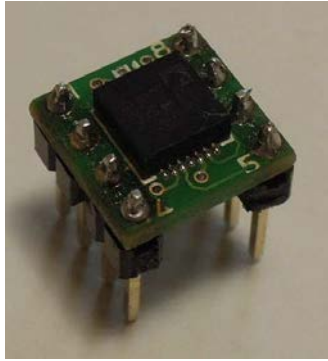


図4 3軸加速度センサーモジュール
(KXM52-1050)

これらのセンサー入力値を取得するには、出力電圧のAD変換を行い、マイコンで読み取る方法がよい。

また、グラフを描画するには、取得したデータを保管する機能と自動でスクロールする機能が必要である。NOKIA 3300-LCDは、横幅が128ピクセルあるので、格納用変数は128個用意する。次に、実際の動きを説明する。128個だと処理回数が多くなってしまうので、ここでは横幅を4個として説明する(図5)。

グラフは右から左に流れていくので、最新のデータは右端に表示する。まず、Index1に最新データを入れる。次に、変数を左に一つ分ずらし(左端の変数は右端に移動)Index2に最新データを入れる。さらに、変数を左に一つ分ずらす。この手順を繰り返していくことで、データを更新しながら自動スクロールを行うことができる。また、変数を無駄なく使うことができるため、メモリ使用量を少なくすることができる。

実際に、加速度センサーの3軸グラフを表示させ、縦・横・奥行き方向にそれぞれ順番に振ると、各色の折れ線グラフが大きく変化する様子が観察できた(図6)。

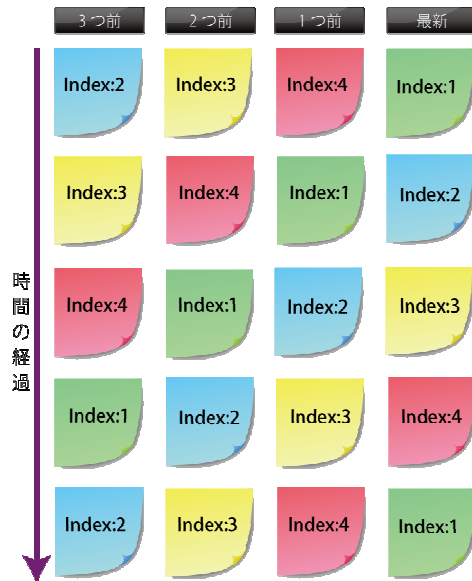


図5 格納する変数が4個の場合の画面とプログラムの動き

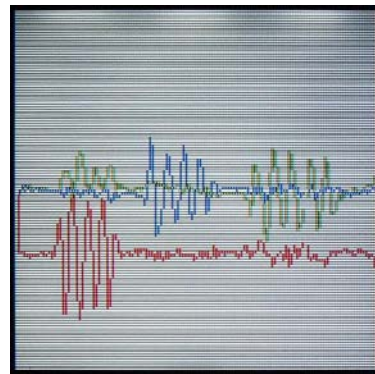


図6 加速度センサーを振ったときの縦・横・奥行き方向の加速度のグラフ

<研究3>

ここでは、ユーザーがジョイスティックを使って、計測するセンサーを選択できるようにすることを目標とし、絵や文字の描画なども行ってみる。

ジョイスティックの入力受付は、センサー入力値の取得と同じように、AD変換を

行って状態の監視を行う。操作画面は、左右の操作を受け付けたときにセンサー切り替えを行うようにした。

また、現在どのセンサーを選択しているかをわかりやすくするために、絵と文字で何のセンサーかを表現できるようにした(図7)。

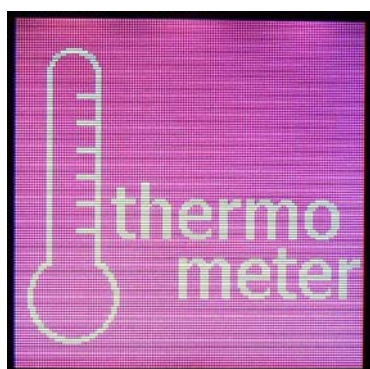


図7 選択しているセンサーを
絵と文字で表現した

4. まとめと今後の展望

今回の研究では、小型液晶ディスプレイを制御し、センサー入力値をグラフとして表示するという目標を無事達成することができた。

しかし、SPI 通信モジュールではなくGPIO で SPI 通信を行っていることから、転送速度が少し遅く、画面消去などのときには、グラデーションのように見えてしまう現象が起きてしまった。これは、9bitSPI 通信に問題があるためである。

今後、液晶制御を行う場合には、通信方式が8bitSPI もしくは16bitSPI の液晶ディスプレイを使うべきだと考えている。

今回得た技術を活かし、次の研究につなげていきたい。

5. 参考文献

- [1]「PIC24F ファミリ リファレンスマニュアル」、Microchip 社
- [2]「NOKIA3300-LCD」、aitendo
- [3]「3 軸加速度センサーモジュール KXM52-1050」、秋月電子通商

6. 謝辞

今回の研究にあたり技術指導をしてくださった本校サイエンス研究会物理班顧問の米田先生、及びアドバイスをくださったサイエンス研究会物理班の先輩方に、この場をお借りして深く御礼申し上げます。

電磁力の研究

3年A組 小掠 公平
3年A組 寺内 恒輝
指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

今年度私たちは電磁力の測定に重点を置いて研究した。また電磁力によって溶液に流れをつくる実験や、電磁力によって物体を回転させる実験なども考えた。今回はその結果わかったことを報告する。

キーワード 電流、磁場、電磁力

2. 研究の背景

近年、様々な場所でリニアモーターが利用されている。私たちはこれに興味を持ち、電磁力の性質について昨年から研究している。その結果、電流や磁場を変化させると、電流と磁場の中の電磁力が変化することを発見した。しかし、その値を数値として測定することができなかった。そこで今回は、電流と電磁力の大きさを精密に測定し、わかったことを報告する。

- ⑥電流を強くすると電磁力も強くなる。
- ⑦磁場を強くすると電磁力も強くなる。

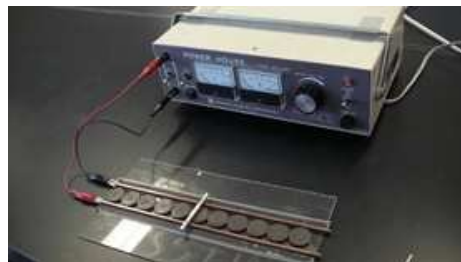


図1 電流が磁場からうける力

昨年度の実験でわかったこと

- ①フレミングの左手の法則で示される向きに電磁力が働く。
- ②電源の+と-を入れ替えると電磁力の働く向きが逆になる。
- ③磁石のN極とS極を入れ替えると電磁力の働く向きが逆になる。
- ④電流が流れなくなると、電磁力は働かなくなる。
- ⑤磁場がなくなると、電磁力は働かなくなる。

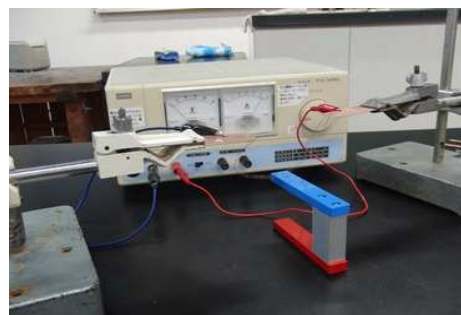


図2 電流が磁場からうける力

3. 研究内容

今回は電磁力の測定を目標に電磁力に関係する研究を行った。以下がその実験である。

- [研究1] 溶液中でも電磁力は発生するか。
- [研究2] 電磁力を使って物を回転させることができるか。
- [研究3] 電磁力の大きさを測定する。

[研究1]

溶液中でも電磁力は発生するか。

[実験装置1]

溶液中に電流を流し、溶液が磁石から力を受けるかどうか調べる装置である。

- ① 容器に塩と水を入れ混ぜる。
- ② そこに炭素棒2本を浸ける。
- ③ その容器の下に磁石を置く。
- ④ 炭素棒と電源装置を繋ぐ。



図3 実験装置1

[実験方法1]

電源装置から炭素棒を経て溶液中(食塩水)に電流を流し、その電流の通り道(溶液中)の下に磁石を置き、その際にどのような変化があるのか探った。

[仮説1]

- ① 電磁力が発生すべき向きに溶液の流れが生まれる(ここで、「発生すべき向き」とは、フレミングの左手の法則の示す向きを指すとする)。
- ② 電流または磁場の向きを変えると流れの発生する向きが逆になる。
- ③ 電流または磁場が強くなると、流れが速くなる。

[実験結果1]

- ① 電磁力が発生すべき方向に溶液の流れが発生した。
- ② 電流の向きあるいは磁場の向きを変えると溶液の流れが反対になった。
- ③ 電流あるいは磁場が強くなると、流れが速くなった。
- ④ 溶液から異臭がした。

[考察と展望1]

実験結果1からわかったこと

- ① 溶液中でも電磁力は発生する。
- ② 溶液中でも電流や磁場の向きを変えることで電磁力の向きが変わる。
- ③ 溶液中でも電流や磁場が強くなると、電磁力が強くなる。
- ④ 異臭がしたことについては、使用した食塩水が電気分解され、塩素が発生したのではないかと考えられる。

以上のことから、溶液中でも空気中と同様に電磁力が発生することが確認できた。

今後は溶液自体を別のものに変更したとき、どのような結果になるか調べてみたい。

[研究 2]

電磁力を使って物を回転させることができるか。

[実験装置 2]

- ①丈夫な円筒全体にアルミホイルを巻く。
- ②円筒の両端から釘の先端が少し外に出るように、円筒の上面と下面でくぎを固定する。



図 4 円筒

[実験方法 2]

摩擦をできるだけ減らすために、上下にスタンドで磁石を固定し、その間に実験装置を設置し、アルミホイルに電流が流れるようにする。

[仮説 2]

- ①円筒が電磁力の示す向きに回転する。
- ②電流または磁場を逆にすると円筒の回転する向きが①と逆になる。
- ③電流または磁場を強くすると円筒の回転する速さが速くなる。

[実験結果 2]

まったく円筒は回らなかった。また電流や磁場を逆にしたり、強くしたりしても回転することもなかった。

[展望と考察 2]

研究 2 において円筒が回らなかったのは、磁場が実験装置の大きさより小さかったため、その影響が届かなかったのではないかと考えられる。また、電磁力がアルミホイルの全体に働いて効果を打ち消しあったのかもしれないとも考えられる。しかしそれならば、この実験は回らないという結果が正しいとも考えられる。この研究はもう少し考え、新たな実験装置を製作した上で再挑戦したいと考えている。

[研究 3] 電磁力の大きさの測定

今まで私たちは電磁力の大きさを測定できなかったため、電流の強さと電磁力の正確な関係がわからなかった。

その関係を調べるために電子天秤で電磁力を重さとして測定する方法に挑戦した。

[実験装置 3]

- ①発泡スチロールの中心に円形の穴を開ける。
- ②発泡スチロールの両端に磁石を取り付ける。
- ③磁石の N 極と S 極を向かい合わせる。
- ④発泡スチロールの穴にアルミ棒を通す。

[実験方法 3]

- ①電子天秤の上に実験装置を置き、磁石が電流から受ける電磁力を重さとして測定する。
- ②重さの増加量を確認するために実験装置の重さは初め 0 にセットする。
- ③電圧は 5.0V に統一し、抵抗を変え電流を 1.0A~6.0A に変えて測定する。

④さらに、電流と磁場を逆にしたパターンも測定する。

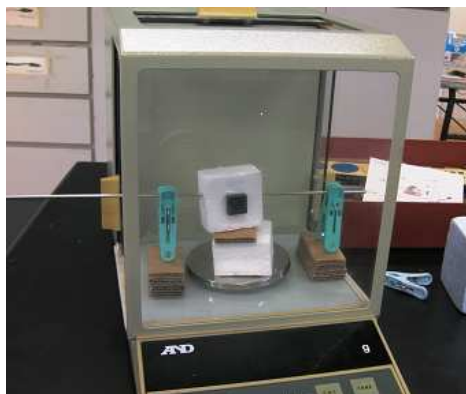


図5 実験装置2

[仮説3]

- ①電磁力が働くべき方向に働き、電子天秤の表示が変化する。
- ②電流の向きを変えることにより電子天秤の表示が重くなったり軽くなったりする。

[実験結果3]

次のようなグラフが得られた。

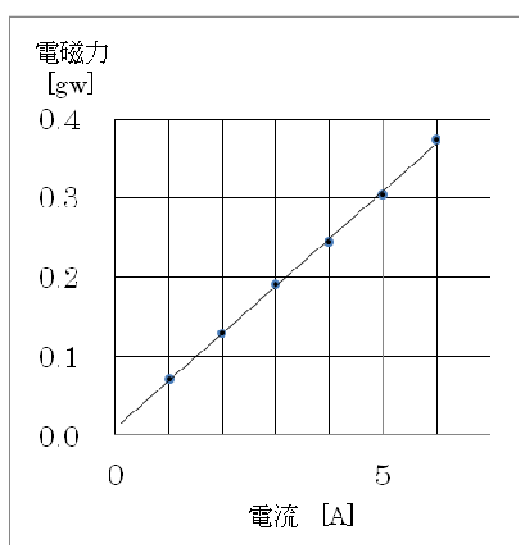


図6 電流と電磁力の関係

<わかったこと>

- 電流と電磁力は比例関係がある。
- 磁力の向きを逆にすると電磁力の向きが逆になる。
- 電流の向きを逆にすると電磁力の向きが逆になる。
- 電流や磁力の向きを逆にしても電流と電磁力は比例関係にある。

4. 考察と展望

- 研究3より電流と電磁力の比例関係を発見することができた。
- このグラフの傾きが何を表しているのかどうか今後調べてみたい。
- また磁石の強さを変えた場合も比例関係が成り立つのか今後調べてみたい。
- さらに、磁石の代わりに平行電流を用いた場合も比例関係が成り立つのかを現在実験しているところである。下がその実験装置である。

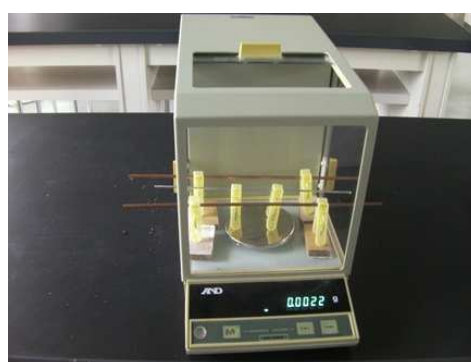


図7 実験装置3

5. 謝辞

今回の研究におきまして、サイエンス研究会物理班顧問の米田先生には多くのアドバイスを頂きました。ありがとうございました。

太陽電池による距離の測定(2)

3年C組 田中 一輝
3年C組 玉置 翔太郎
指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

私たちは、本校の太陽光発電の発電量を見たとき、発電量は何によって決まるのかという疑問を持った。そこでまず、太陽電池に当てる光の強さと電圧の関係について調べた。その結果、光の強さと電圧の間に規則性を発見した。発電電圧は光源からの距離の2乗に反比例すると仮定し、この規則性を説明しようとした。しかし、この仮説は近距離では成り立たなかった。

今回は、仮説が遠距離でしか成り立たない理由と、近距離ではどのようなようになるのかについて調べたので報告する。

キーワード 太陽電池、発電電圧、距離測定、角度

2. 研究の背景

夏と冬の発電量の違いの原因として、日照時間や明るさ、太陽高度の差などが考えられる。今回私たちは、角度と、太陽電池に発生する電圧（以下、「発電電圧」という）間の関係を調べることにした。

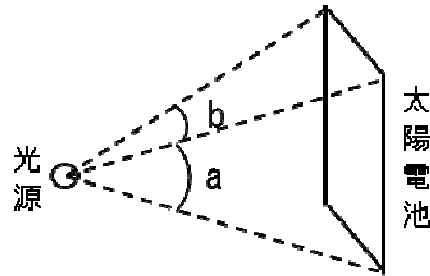


図1 発電電圧は光源から太陽電池を見たときの角度 $a \times b$ に比例する

3. 研究内容

(1) 仮説

発電電圧は、光源から太陽電池までの距離の2乗に反比例するのではなく、「発電電圧は光源から太陽電池を見たときの角度（図1の $a \times b$ ）に比例する」という仮説をたて、研究を行った。

(2) 仮説の検証

太陽電池の縦、横の長さを測り、実寸大で方眼紙に再現し、光源から見たときのそれぞれの角度を測った。その結果が図2である。太陽電池の縦の辺に対する角度 a と、横の辺に対する角度 b を掛けると、太陽電池にあたる光の量になると考えたので、その値と実測値が比例するかどうかを調べた。

距離	縦の辺の	横の辺の	a × b	発電電圧
[mm]	角度 a [°]	角度 b [°]		
0				
30	87.1	112.0	9755.2	0.68
40	70.9	96.1	6813.5	0.6
50	59.4	83.3	4948.0	0.527
60	50.8	73.1	3713.5	0.5
70	44.3	64.9	2875.1	0.442
80	39.2	56.2	2203.0	0.388
90	35.1	52.0	1848.3	0.347
100	31.8	48.0	1528.4	0.308
110	29.1	44.1	1283.3	0.273
120	26.7	40.7	1088.7	0.238
140	23.0	35.3	811.9	0.186
160	20.2	31.1	628.2	0.148
180	16.0	27.8	500.4	0.12
200	16.2	25.1	408.6	0.098
220	14.8	22.9	338.9	0.082
240	13.5	21.0	283.5	0.069
260	12.5	19.4	242.5	0.059
280	11.6	18.1	210.0	0.052
300	10.9	16.9	184.2	0.043
320	10.2	15.8	161.2	0.038
341	9.6	14.9	143.0	0.034
380	8.6	13.4	115.2	0.028
400	8.2	12.7	104.1	0.025

図 2

(3) 検証結果

検証結果をグラフにしたのが図 3 である。グラフの①は、前回の仮定である「距離が 1/2 倍になると、太陽電池の発電電圧は 4 倍になる」に基づくグラフであり、グラフの②が今回の仮定「発電電圧は角度(図 1 の a×b) に比例する」に基づくグラフであり、グラフの③が実際に発電電圧を測った

実測値のグラフである。

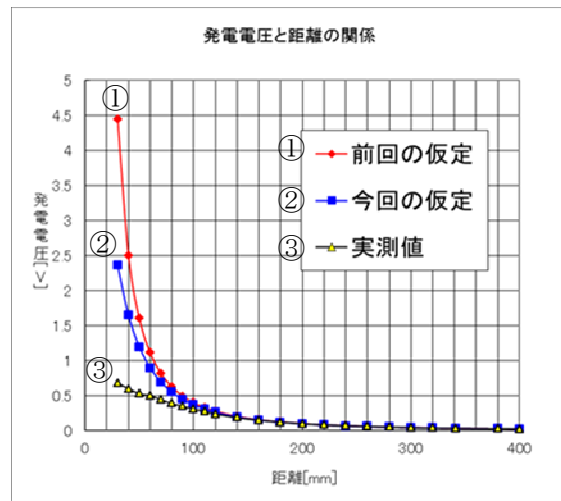


図 3

4. 結論と展望

前回の仮定よりは実測値に近づいているが、距離が短くなるにつれて実測値との差は大きい。

光が斜めに入射すると、反射の影響で値が変化するかもしれないので、調べたい。

5. 謝辞

この研究にあたりご指導くださったサイエンス研究会顧問の米田先生にこの場をお借りして深くお礼申し上げます。

マイクロ波の性質の研究

3年A組 寺川 峻平
指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

私は電磁波の性質に興味を持ち、それらを実験によって確かめる研究を行っている。学校には電磁波の実験装置がなかったため、電磁波の一種であるマイクロ波を調べる装置を自作し研究した。今回は研究中のマイクロ波の波長測定について報告する。

キーワード マイクロ波、波長、誘電率、ドップラーセンサー

2. 研究の背景と目的

現代社会において、電磁波は非常に大きな役割を果たしている。携帯電話や衛星通信など、どれも生活に欠かせないものばかりである。

しかし、私はそれらの電磁波が非常に興味深い性質を持っていることを知らなかった。そこで電磁波の一種であるマイクロ波の性質を実験によって確かめることを目的として研究を行った。

実験にはマイクロ波を使用したが、これは実験装置を製作する際に用いたセンサーがマイクロ波を使用していたためである。

を行う。レール上には1.0 mm 間隔の目盛りを貼ってあるので距離の測定が容易に行える。また、マイクロ波の反射を防ぐために、装置の部品にはできるだけ木材を使用し、受信機から信号を取り出すケーブルにはシールド線を使用した。

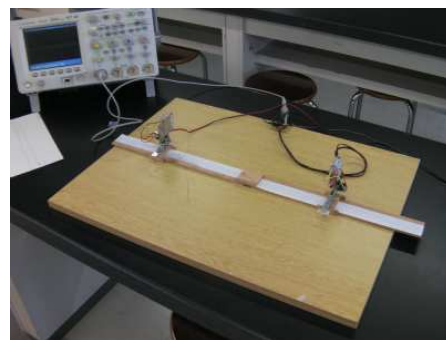


図1 実験装置

3. 研究内容

(1) 実験装置の開発

本校には電磁波実験装置がなかったので市販のセンサーを応用してマイクロ波の実験装置を自作した。

装置は大きく分けて土台、送信機、受信機、レールから構成されている。

600mm × 450mm の木製の土台の中心に2本のレールの回転軸があり、それぞれのレール上に送信機と受信機を置いて実験

送信機 A と受信機 B には市販のドップラーセンサーを使用した。このセンサーは送信波と受信波(反射波)を混合し、それを出力するというもので、ドップラー効果によって受信波の波長が変化すると、送信波との周波数の差が出力される仕組みである。

今回は2つのセンサーを1つは送信機 A、もう1つは受信機 B として使用することに

した。2つのセンサーでは微妙に発振周波数が異なるため、互いのセンサーを向かい合わせにすると常に合成波が出力される(参考文献[1]参照)。これは、送信機 A から受け取った波(以下、「受信波」という)と、受信機 B の内部でつくった波(以下、「内部波」という)が合成され、そのうなり成分を観測しているのである。以上から、送信機 A・受信機 B およびその間の空間の性質を合成波から知ることが可能となる。その際、ドップラー効果による出力信号への影響を少なくするため、送信側 A は IF 端子側のアンテナを、受信側 B は GND 端子側のアンテナをアルミホイルでシールドする。アルミホイルには絶縁のために紙を貼り付け、紙の面を両面テープでアンテナに固定するという方法をとった。

(2) 空気中のマイクロ波の波長測定

マイクロ波の波長は、

(波長)

$$= (\text{マイクロ波の速さ}) \div (\text{周波数})$$

から求められる。ドップラーセンサーのカタログから (周波数) = 10.5GHz, (マイクロ波の空気中の速さ) = $3.00 \times 10^8 \text{m/s}$ を代入すると (波長) = 0.0285m となる。よって、空気中の波長を約3cm であると仮定し、まずはこれを実際に測定することにした(図2)。

波長を測定する際には、装置の受信機 B のアルミホイルを取り除き、本来の用途である送受信機として使用する。

受信機 B から発信されたマイクロ波は、反射板で反射され、受信機 B で受信される。この受信波は、往復する間に位相が変化し、内部波と重ねあわされる。往復の距離がマ

イクロ波の波長の整数倍ならば受信波と内部波の位相差は 2π の整数倍だから強めあう。往復の距離がさらに半波長分ずれると弱めあう。よって、図3の強度分布が得られる。この電圧の変動と反射板までの距離からマイクロ波の波長が求められる。

空気中の場合、15mm ごとに強度変化をくりかえす。反射を利用しているので、これを2倍して30mm が空気中のマイクロ波の波長となる。



図2 空気中の波長測定

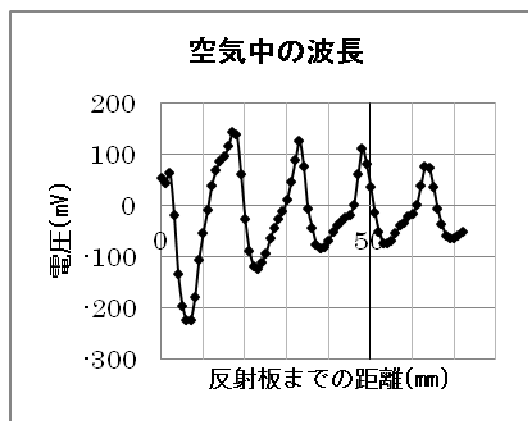


図3 空気中の波長測定結果

(3) 物質中のマイクロ波の波長測定

次に、①～⑤の波長測定を行った。

- ①紙の中での波長
- ②油の中での波長
- ③水道水の中での波長

④食塩水の中での波長

⑤砂糖水の中での波長

[実験1] 紙の中での波長

最初は紙の下に反射板を敷いて、センサーで紙を上から押さえていた(図4)が、押さえ方によって紙の厚さが変わってしまい、結果が不正確になる恐れがあった。

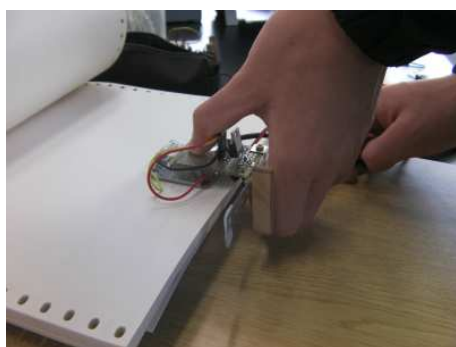


図4 紙中の波長測定

そこで、プラスチック製の下敷きにセンサーを固定し、その上に紙を重ねて一番上に反射板を置き、おもりで押さえるという方法に変更した(図5)。

その結果、図6より波長は、

$$11 \times 2 = 22\text{mm}$$

であることがわかった。これは空気中の波長よりも短い。

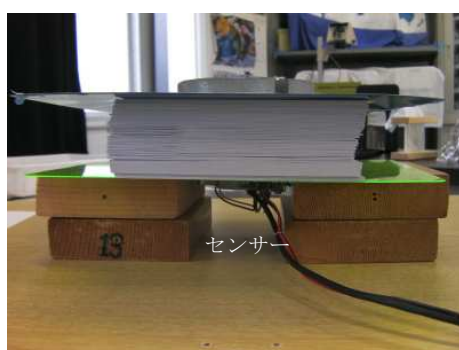


図5 紙中の波長測定(改良型)

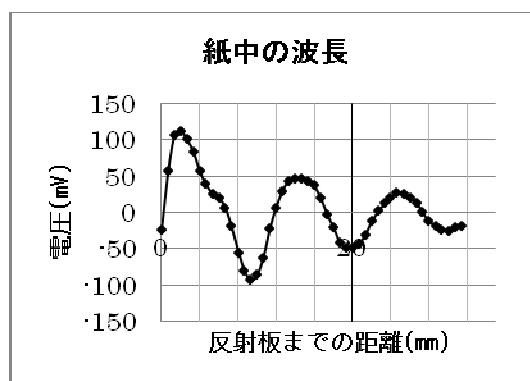


図6 紙中の波長測定結果

[実験2] 油の中での波長

食用油の中にセンサーと反射板を入れ、波長の測定を行った(図7)。しかし目盛りを正確に読み取ることは困難であり、防水加工も難しい。そこで油を入れた容器の外側にセンサーを貼り付けるという方法(図8)に改良した。

測定を行ったところ、空気中にくらべ波長が短くなった(20mm弱)ことは確認できたが、反射板が固定できなかったため正確な測定ができなかった。



図7 油中の波長測定

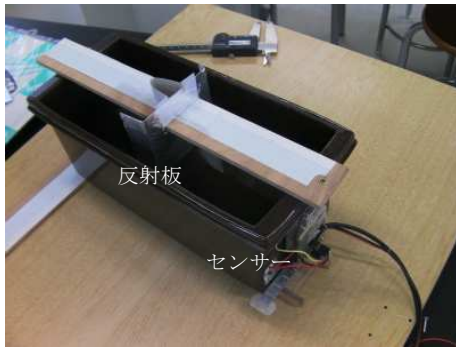


図8 油中の波長測定(改良型)

そこで図9のような装置を製作した。反射板を動かす方向を鉛直方向にし、反射板を完全に固定できるようにした。

装置を大幅に変更したため、装置のテストのためにビーカーに何も入れずに空気中の波長を測定してみた。すると図10のような波形が見られた。明らかに容器のなかった図3の波長とは異なっている。これはマイクロ波がビーカーの内側に反射し、干渉があったため現れたのではないかと考えられた。そこでビーカーのみを取り除いてからもう一度同じ操作を行うと、図3と同様な波形がみられたため、ビーカーが測定に悪影響を及ぼすことがわかった。

図9の装置を使って油を入れた測定はまだ行っていない。



図9 空気中の波長測定(改良型)

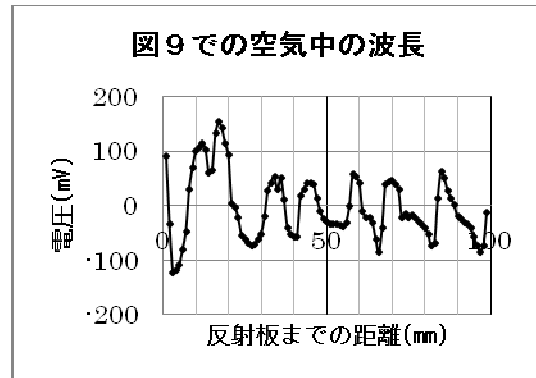


図10 図9での空気中の波長測定結果

次に図11のような装置を製作した。反射の影響が少なくなるように横長のプラスチック容器を使用し、反射板は長ねじに固定し、ナットを締めることによって移動する仕組みにした。これによって反射板の移動、固定が正確に行えるようになった。

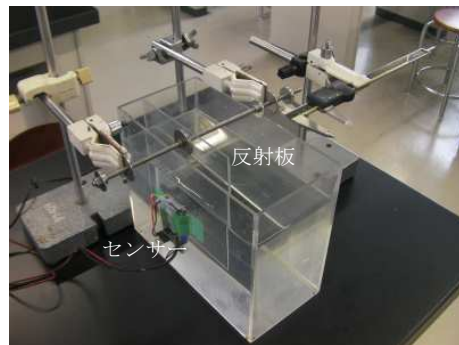


図11 液体中の波長測定装置

[実験3] 水道水の中での波長

図11の装置を用いて水中のマイクロ波の波長を調べた。その結果が図12である。距離の増加による電圧の減衰が著しく、センサーと反射板を3mm以上遠ざけると電圧の変化が非常に小さくなってしまった。これは水によってマイクロ波が吸収されたためだと考えられる。図12より、水中の波長は、 $1.6 \times 2 = 3.2\text{mm}$ だとわかった。

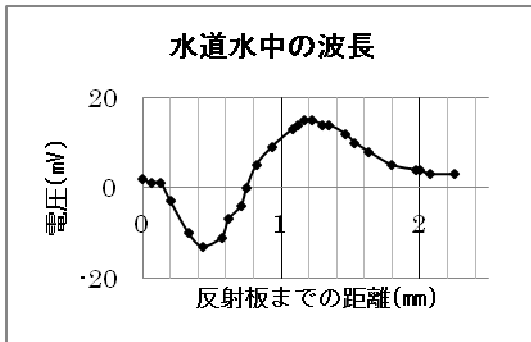


図12 水道水中の波長測定結果

[実験4] 食塩水の中での波長

水道水3.0Lに食塩を15gと30gを溶かして0.50%の食塩水と1.0%の食塩水を作り、図11の装置で波長を測定した。

その結果が図13(0.50%)と図14(1.0%)である。水道水中のグラフ(図12)と比べると振幅の減少のし方が早いことがわかる。0.50%と1.0%とでは大きな違いは見られず、また、波長の違いも見られなかった。

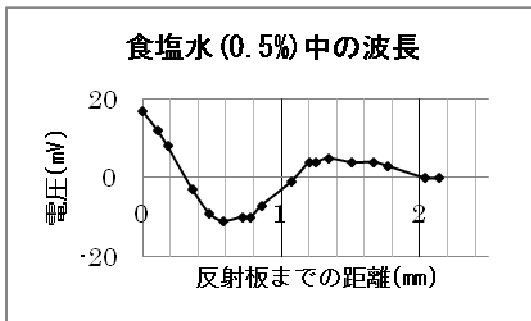


図13 0.50%の食塩水中の波長測定結果

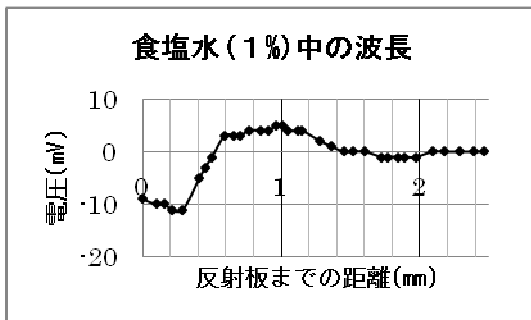


図14 1.0%の食塩水中の波長測定結果

[実験5] 砂糖水の中での波長

食塩水と同じように、水3.0Lに上白糖15gと30gを溶かして0.50%と1.0%の砂糖水を作り、波長を測定した。

その結果が図15(0.50%)と図16(1.0%)である。これを見ると、センサーと反射板の距離が近い場合、食塩水よりも砂糖水の方が減衰が小さいことがわかる。また、砂糖水の濃度の違いによる波長の違いは見られなかった。

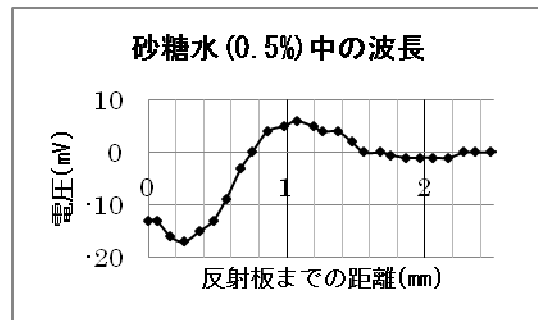


図15 0.50%の砂糖水中の波長測定結果

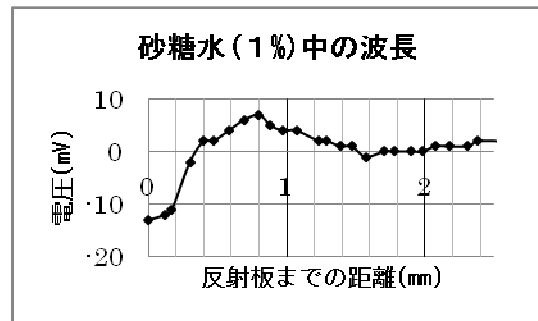


図16 1.0%の砂糖水中の波長測定結果

4. 考察

(1) 物質の誘電率と波長の関係

物質の種類によってマイクロ波の波長が異なることがわかった。

マイクロ波の振動数を f 、真空中のマイクロ波の速さ、波長、誘電率、透磁率をそれぞれ v_0 、 λ_0 、 ϵ_0 、 μ_0 とする。これらは

空気中における値と等しいとする。また、物質中のそれぞれの値を v 、 λ 、 ϵ 、 μ とすると、

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = f \lambda_0$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = f \lambda$$

と表される。

これらの式から、真空中（空気中の値を用いる）と物質中の波長および誘電率の関係は、振動数、透磁率が等しいと考えたとき、

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon \mu}} \lambda_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}} \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \lambda_0$$

となる。ただし、 ϵ_r は物質の比誘電率で

あり、比誘電率 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ である。

この式から得られる理論値と実験値を比較すると図17のようになった。ただし、比誘電率については、参考文献[2]の値を用いた。

物質	比誘電率 ϵ_r	理論値 [mm] $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \lambda_0$	実測値 λ [mm]
空気	1.00	30.00	30
紙	2.00	21.28	22
食用油	2.90	17.65	約 20
水	80.00	3.19	3.2

図17 理論値と測定値の比較

図17より、理論値と測定値は、ほぼ一致している。このことから、物質中のマイクロ波の波長は、物質の誘電率によって変化することがわかった。

(2) 物質とマイクロ波の減衰の関係

実験4と実験5から、砂糖水よりも食塩

水の方が減衰が大きいことがわかる。これは食塩水が電解質溶液であり、イオンが振動することにより、マイクロ波が進むにつれて多くのエネルギーを消費するからではないかと考えられる。

5. 今後の課題

実験装置の改良を重ねてはいるが、センサーと反射板との距離が 0mm のときの電圧(グラフの始点の電圧)にばらつきがあることなど、少し不明な点が残る。また、水中のように波長が極端に短くなる場合にはデータの比較が難しいので、装置を改良し精度を向上させることが必要である。

6. 参考文献

[1] センサーの応用

<http://www.rfworld.jp/bn/RFW08/samples/p062-063.pdf>

[2] 誘電率一覧

<http://www.pureasuka.co.jp/Blog/material%20dielectric%20constant.pdf>

7. 謝辞

今回の研究では、物理班顧問の米田先生をはじめ、各種研究発表会などで多くの方々からアドバイスをいただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

インタラクティブボールの開発

5年C組 羽鹿 諒
指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

私は、今回インタラクティブボールを開発した。これは、ボールを握る度合いで、ある程度コンピュータを直観的に操作できるコントローラーの機能と、音楽や数値データなどを可視化、可触化できる簡単なディスプレイの機能の両方を持ち合わせている。この装置は、USBケーブルでコンピュータに接続するだけで使用することができる。

キーワード ユーザーインターフェイス、タンジブルUI、ゴムボール、マイコン、赤外線センサ

2. 研究の背景と目的

最近、日常生活の中で人々はスマートフォンやタブレットPCなどのコンピュータを扱う機会が増えてきた。その結果、いくつかの技術に急速な進歩が見られるようになった。例えば、マウスやキーボードなどのユーザーインターフェイス(以下、UI)は状況に応じて入力方法を選択でき、様々な言語にも対応できるようになった。

また、SNSやブログなどの流行、あるいは音楽ストアや電子書籍の登場によりインターネットは人々にとってなくてはならないものになった。その結果、たくさんの人々が様々なメディアを使うようになり、様々なタイプのデータを個人が大量に扱えるようになった。私たちの身の回りでは、多様な情報やコミュニケーションの急速な「デジタル化」が進んでいるのである。

しかし、このような技術の発展には問題がある。それは、障害を有する人や高齢の人にとって、こうした様々な情報は煩雑な

ものだということである。特に、数値データ、グラフなどの情報はすべての人が理解できるものではないと考えられる。また、情報を入力する手段も複雑なステップを踏まなければならないものが多く、使いやすいとは言い難い。

そこで、ユーザーへの、特に障害を有する人も使えるような、新たな情報提供手段および入力手段が必要だと考えた。そんな中、私はMITで研究されている「タンジブルUI」というものを知った。それは、複数の人が同じ作業を共有し、情報を物理的なものに置き換えてコンピュータの操作ができるUIだった。

よって、今回の研究では以下の目標を設定し、実験および考察を行った。

- ①情報に触れられるUIの開発方法を検討する。
- ②プロトタイプとなるハードウェアおよびソフトウェアをオリジナルに開発する。

③UIの開発を踏まえ、今後の展望を考察する。

3. 研究方法

3-1 UIデザイン

まず、情報を何らかの形で表示し、さらにコントローラーにもなり得るデバイスを開発する必要がある。そこで私は、受け取った情報に応じて形状や状態が変化するハードウェアを製作することを考えた。こうすることで、障害を持った人にはデバイスの形状や状態の変化などで情報を伝えることができる。また、デバイスの形状をユーザーが直接触って変更を加えられるようにすれば、従来の入力装置よりもより直観的に操作をすることができるハードウェアを開発できると考えた。

また、ハードウェアはボール状であり、かつ形を変えることが容易なシリコンゴムで製作した。

3-2 ハードウェア

上述のUIデザインによってデバイスに関するいくつかの条件を設定したため、そこから内蔵ハードウェアの構造を考えていった。

まず、ボールは形状を変えられる必要があったため、今回は、ボールの中にサーボモータ(図1)と呼ばれるモータを取り付けた。これは、2足歩行ロボットの間節部分などに使われる小型で軽量ながらも強力なアクチュエータである。



図1 サーボモータ

このモータに、図2に示すような方法でシリコンゴムを糸で巻き取るような形で形状を変えられるようにした。

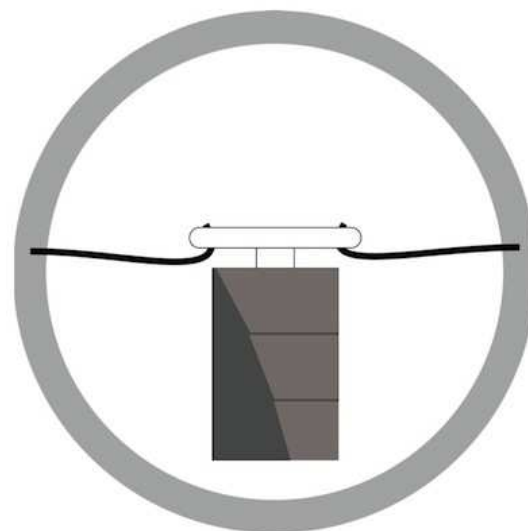


図2 サーボモータで外側のシリコンゴムを巻き取る構造

次に、ユーザーがボールをつかむ、つまむ、押す、といった操作をしているかどうかを認識させる必要があった。そこで、ボールに温度センサ(図3)を取り付けることを考えた。こうすることで、人が触っているときは体温を検知できるため、操作を行

っていないときとの区別を行える。また、温度センサをボールの側部と上部の2カ所に取り付けることで上述した3つの操作を区別することができると考えられる。



図3 温度センサ

さらに、ユーザーがどの程度の力でボールを圧迫しているかを知る必要があった。そこで、フォトインタラプタ(図4)と呼ばれるセンサを用いた。これは、センサの一方から照射される赤外線を読み取るセンサである。今回の研究では、ボール内部の壁面から向かい合う壁面までの距離を測定する目的に用いた。こうすることで、簡単にボールの圧迫具合が測定できると考えたからである。



図4 フォトインタラプタ

また、視覚的な効果を付加するため、LEDアレイを取り付けた。今回用いたのはごく一般的なLEDに導電糸(図5)と呼ばれる導電性のある糸で電極を繋いだものである。これは、ボールを掴んだりする際、内部の配線が変形してしまうことが懸念されたためである。



図5 導電糸

次に、ハードウェアのベースとなる部分の検討を行った。今回は、Arduino(図6)と呼ばれるオープンソースハードウェアを使用した。これは、現在世界中で最もよく使われているマイクロコントローラーモジュールである。

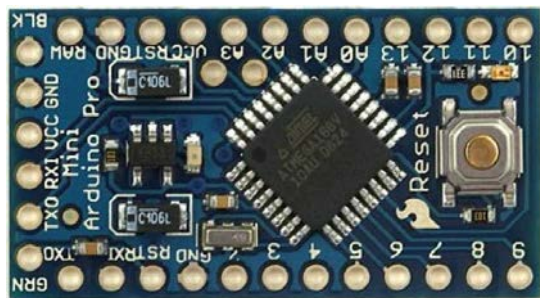


図6 Arduino (写真は今回使用したもの)

今回の研究においてArduinoを使用した理由としては、

- ・ 開発期間が短縮できる
- ・ Mac、Windows、LinuxのどのOSでも共通した開発環境が動作する
- ・ 開発が容易なので、改良がすぐにできる
- ・ 小型で安価である

ということがあげられる。プログラム開発には、専用の開発環境(図7)を使用した。C言語ベースの簡単なプログラムでファームウェア開発を行うことができた。



図7 Arduino開発環境

3-3 ソフトウェア

今回の研究では簡単なプロトタイプとなるものを開発することを目標にした。そこで、私はProcessing(図8)と呼ばれる開発環境を用いた。これは、MITのメディアラボで研究開発されていたJava言語ベースの開発環境である。



図8 Processing IDE

このソフトウェアを使うことで、比較的容易にJavaランタイム上で動作するプログラムを製作することができる。また、ビルドやコンパイルに時間がかからず、ライブラリなどを導入することで大小様々なソフトウェアを開発できる。

ここではインタラクションボールをディスプレイとして扱う例と、コントローラとして扱う例の2種類のプログラムを製作した。

まず、ディスプレイとして扱う例である。数値が羅列されたデータファイル(CSVファイル)をドラッグアンドドロップで読み込み、グラフを描画した後にハードウェアとUSB通信をしてハードウェアへ情報を送る、というものである。

もう一方は、音楽ファイルをドラッグアンドドロップで読み込み、再生/一時停止や音量をボールの握り具合でコントロールするというものである。

4. 研究結果

完成したハードウェアを図9に、動作中

のソフトウェアの様子を図 10 に、また、2 つを同時に動作させている様子を図 11 に示す。



図 9 インタラクティブボール

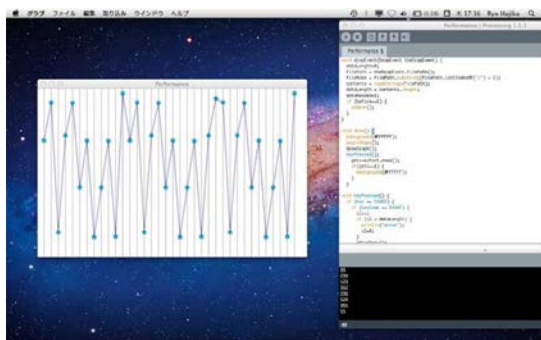


図 10 動作中のソフトウェア



図 11 動作中の様子

結果的に、完成したインタラクティブボールは直径が 5.5 cm となった。ボールから出ている USB ケーブルを PC に接続することで使用することができる。

ソフトウェアは、データがどれだけあるかに関わらず、すぐにグラフを描画できるものにすることができた。また、USB 接続されているハードウェアと連携させることでグラフの数値データをハードウェアの状態変化に表すことができる。また、ボールを握ることで描画されたデータを初期化し、新たなデータを読み込ませることができる。しかし、多少動作が不安定なため、改善する必要があると考えられる。

一方で、音楽ファイルを再生するプログラムは、ライブラリの操作が複雑だったため、今回は断念した。しかしながら、この研究において製作したハードウェアはコントローラーとして使えることが確認できた。

5. 考察

今回の研究では、単なる数値データや音楽などのメディアファイルを、従来とは異なる方法で表現する方法を模索し、実際にプロトタイプを開発するまで進めることができた。2 節(研究の背景と目的)でも述べた通り、これまで世界中で様々な「直感的な操作が可能な」デバイスが開発されてきた。これらはすべてタッチパネルなどを搭載し、マウスやキーボードをオンスクリーンにしたり、マルチタッチ操作を行えるようになっている。よって、確実に従来の PC よりも操作性は向上している。しかし、私は操作

性も重要だが、いかに人々が情報を素早く捉えられるかも重要であると考えた。つまり、画面上の情報に直接触れて操作できることも重要だが、その情報がより自然な形で、素早くユーザーが認識できなければ意味がないということである。今回の研究において、物体として存在しなかった情報を視覚的に見て、触れられるデバイスにできたことは大きな成果であったと考えている。

6. 今後の課題

今後、最優先にすべきなのは、アプリケーションを増やすことである。今回試作したのは数値データを可触化するアプリケーションと音楽を操作するアプリケーションであった。しかしながら、現時点において、音楽を操作するアプリケーションはまだ動作できていない。さらに応用例を増やして、どういうシーンでインタラクションボールが使えるのかを研究していきたい。

また、今回の研究ではボール上のハードウェアを開発したが、今後スケールアップしてハードウェアを製作することを考えている。具体的には、アクチュエータやセンサの数を増やし、さらに高度な動きや状態変化を起こせるようなハードウェアにすれば、ボールだけではない新たなデバイスを開発できると考えている。さらに、インターネットに接続することも考えている。例えば、手の形をしたデバイスをインターネットに接続しておけば、同じ職場で働く人同士でも、地球の裏側にいる人同士でも、リアルタイムに同一の現実空間で仕事をし

たり、作業をしたりすることが可能になるのではないかと考えている。

7. 参考文献

- [1] Processing公式サイト
<http://processing.org>
- [2] Arduino公式サイト
<http://www.arduino.cc/>
- [3] 「Built with Processing デザイン/アートのためのプログラミング入門」田中孝太郎、前川峻志 著、BNN出版 (2010)
- [4] MIT tangible media group公式サイト
<http://tangible.media.mit.edu/>

8. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、本校サイエンス研究会物理班顧問の米田先生には、様々なアドバイスをいただきました。また、同研究会物理班のメンバーには、研究のサポートをお願いしました。さらに、(株)国際電気通信基礎技術研究所の野間春生さん、多田昌裕さん、吉田俊介さん、特許庁の久々宇篤志さんには研究に関するご助言をいただきました。

この場を借りて、お礼申し上げます。

モーションキャプチャ技術を応用した広告システムの開発

5年B組 武田 優生

指導教諭 米田 隆恒

1. 要約

私は、Kinect と自作ソフトウェアを組み合わせることにより、モーションキャプチャ技術を応用した広告システムを開発することに成功した。これにより、広告を見ている視聴者の身長や見ている時間帯等から、視聴者に合わせた広告を表示することができた。

キーワード Kinect、OpenGL、OpenNI、モーションキャプチャ

2. 研究の背景と目的

従来のテレビのCMや電車の中吊り広告などには問題があった。それは、その広告のターゲットとなる人の性別や年齢に関わらず、一方的に同じ広告を流したり表示したりしているということである。これでは、大人向けの広告を子供に見せたとしても理解してもらえない可能性がある。また、理解してもらえないだけでなく、大人向けの広告を子供に見せることで、悪影響を与える可能性がある。たとえば、お酒やたばこの広告など、広告の商品そのものに年齢制限があるものなどがある。

そこで、ターゲットにあわせた広告を表示することができるような端末が必要であると考えた。よって、今回の研究では、液晶パネルとPC、Kinectを用いて全く新しいスタイルの情報表示端末を開発した。

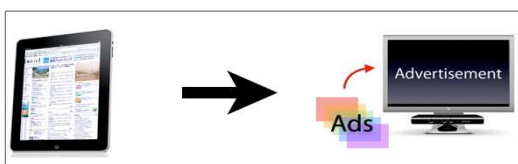


図2 Kinectを用いた広告

同種のサービスとして、品川駅に設置されたマーケティング機能付き自動販売機が挙げられる。



図2 品川駅に設置された自動販売機

この自動販売機には、飲料販売機能の他に、タッチパネルや、カメラが搭載されている。利用者が自動販売機の前に立つと、搭載されたカメラで顔画像を取得し、性別と年齢を判定することにより、利用者に最適な商品におすすめマークをつけて強調する。

しかし、このシステムには問題点がある。不特定多数の人が触れる公共の場に設置された自動販売機であるにもかかわらず、ユーザインタフェースにタッチパネルを採用しているということである。

タッチパネルは汚れや、菌類の温床となることがあり、駅や街に設置するには向いていない。

そこで、Kinectを用いることで、画面に触れることなく操作できるシステムを開発しようと考えた。

3. Kinectについて

Kinectとは、Microsoft社が開発・販売しているゲーム機「Xbox360」用のコントローラーのことである。Kinectには、RGBカメラ、深度センサー、指向性マイクロフォンが搭載されている。また、それらの情報はUSB接続によりPCに取り込むことができる。



図3 Kinect

Kinectは発売当日からユーザーによって解析が進められ、パソコン用のオープンソースのドライバが開発され、さまざまな応用が行われた。

こうした動きに対し、Microsoft社は当初否定的な態度を取ると思われていたが、2010年11月19日にラジオ番組中で、「KinectのUSB接続はあえて暗号化されていない」とし、独自のプログラムについても容認する姿勢を明らかにした。

そこで、公開されたのがOpenNIというライブラリである。



図4 OpenNI

OpenNIは、Kinectの深度センサーを開発したイスラエルのPrimeSense社が開発したライブラリで、必要な情報はすべてオープンソースで公開されている。

その後、Microsoft社も純正の開発ツールキット、Kinect SDK for Windowsを公開した。



図5 Kinect SDK for Windows

当初、私はKinect SDK for Windowsの使用を検討した。しかしながら同時に認識できる人数がOpenNI使用時より格段に少なくなるため、本システムでは、OpenNIを使用している。

4. 研究内容

(1) 研究事項

[研究1] OpenGLを用いて、広告を表示する。

[研究2] Kinectを用いて、広告対象を決定する。

(2) 研究内容

[研究1]

OpenGLとは、Silicon Graphics社(SGI)が中心となって開発した、2D/3D用グラフィックスのためのプログラムインターフェイスである。今回は、用意された画像を広告として表示する機能を実装するためにこのライブラリを使用した。

[研究2]

OpenNIを使用することで、簡単に人のトラッキングを行うことができる。



図6 Kinectによる人のトラッキング

Kinectの前を人が通過すると、トラッキングの情報をを用いて画角や奥行きから身長を測定し、年齢を推定する。さらに、時間帯によって利用者が大きく変わる場所、例えば、駅に設置する場合には、時間帯を考慮し、精度を向上させることができる。

5. 本システムの利点

- ・利用者がKinectの前を通過すると、瞬時にその人の身長から年齢を推定して、広告のターゲットとなる年齢層にあわせて広告を表示することができる。

- ・利用者は指定のポーズをとり、骨格トラッキングを行うことによって、このシステムを使った広告に関するより詳細な情報を、より直感的に得ることができる。
- ・たとえば、このシステムではKinectを使うため、タッチパネルのように直接画面に触れることがない。また、専用のグローブなどの特別なハードウェアを装着することもないため、衛生的である。
- ・それぞれの広告を表示していた時間を記録することで、利用者のマーケティング調査が行える。また、広告主は広告を表示していた時間に見合った広告料を支払うことができる。

6. 今後の応用

Kinectにはカメラが搭載されているため、災害時に利用者の写真を撮影することで安否確認システムとしても用いることができる。また、SONY社が提唱する規格の「FeliCa」と組み合わせることで、買い物サービスなどを追加することができる。

7. 課題

年齢は身長のみから判断されるので正確ではない。また、性別もわからないための確に広告を出すことができない。さらに、Kinectや液晶パネルの導入にともない、コストがかかることが課題である。

8. 参考文献

- [1] OpenNI - OpenNI.org
<http://www.openni.org/>
- [2] MSDN ライブラリ - Microsoft japan
<http://msdn.microsoft.com/ja-jp/library/ms123401.aspx>

[3]Microsoft KinectSDK

<http://www.microsoft.com/en-us/kinectforwindows/>

9. 謝辞

今回の研究にあたり、様々なアドバイスをいただいた顧問の米田先生、サイエンス研究会統括顧問の川口慎二先生にはご指導、助言を頂きました。さらに、本校サイエンス研究会物理班のメンバーには多大な協力をいただきました。お世話になった方々に、この場をお借りして深く御礼申し上げます。

素数の並びに規則はあるか

2年C組 田村 拓也

指導教諭 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班2年生は素数について学習している。素数について調べると、ゼータ関数やベルヌーイ数が関係してくることがわかった。その理解のために、ベルヌーイ数に関する参考文献[1]を読みながら、基本事項の習得を行っている。本稿ではベルヌーイ数を中心に紹介する。また、ベルヌーイ数を用いて、べき乗の和の公式について考察した。

キーワード 素数、ベルヌーイ数、ゼータ関数

2. 研究の背景と目的

素数とは2, 3, 5, 7, 11, …のように、1と自分自身しか約数をもたない数である。この並びには規則性がないように見える。しかし、実際はどうなのか今はまだわかっていない。約100年前、リーマンがリーマン予想を発表した。私は、それを理解したいと思ったが、かなり高度な数学の知識を必要とするため、まずはベルヌーイ数を学習した。

3. 研究内容

3-1. 素数とは

500までの素数を挙げると、
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,
53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,
107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,
163,167,173,179,181,191,193,197,199,
211,223,227,229,233,239,241,251,257,
263,269,271,277,281,283,293,307,311,
313,317,331,337,347,349,353,359,367,
373,379,383,389,397,401,409,419,421,

431,433,439,443,449,457,461,463,467,

479,487,491,499

となり、規則性はないように思える。

3-2. 素数定理

素数の間隔について次のような表を見つけた。

表1 N と N までの素数の個数 $\pi(N)$

N	$\pi(N)$
10^3	168
10^6	78,496
10^9	50,847,534
10^{12}	37,607,912,018
10^{15}	29,844,570,422,669
10^{18}	24,739,954,287,740,860

素数の分布について、この表を見ても分かるように、素数が現れる間隔はどんどん広がっている。しかし、これで N を割りことにより、次のようなことがわかる。

表2 N と $\pi(N)$

N	$N/\pi(N)$
10^3	5.9524
10^6	12.7392
10^9	19.6666
10^{12}	26.5901
10^{15}	33.5069
10^{18}	40.4204

桁が 1000 倍になるときに、 $N/\pi(N)$ は 6 から 7 程度増加する。

そして、 $N/\pi(N)$ の値を $\ln N (= \log_e N)$ と比較してみた。

表3 $\ln N$ と $N/\pi(N)$ の誤差

N	$\ln N$	$N/\pi(N)$	誤差(%)
10^3	6.9077	5.9524	16.0490
10^6	13.8155	12.7392	8.4487
10^9	20.7232	19.6666	5.3731
10^{12}	27.6310	26.5901	3.9146
10^{15}	34.5367	33.5069	3.0795
10^{18}	41.4465	40.4204	2.5386

このように、 N をどんどん大きくすると、 $\ln N$ と $N/\pi(N)$ の比がどんどん小さくなっていくことがわかる。

定理1 (素数定理)

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N}$$

定理2

$$(N \text{ が素数である確率}) \sim \frac{1}{\ln N}$$

$$(N \text{ 番目の素数}) \sim N \log N$$

3-3. ゼータ関数

ゼータ関数とは、素数の情報だけで作られた式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

である。また、リーマン予想に用いられる。

リーマン予想

ゼータ関数の非自明な零点の実数部はすべて $\frac{1}{2}$ である。

このゼータ関数を、エラトステネスのふるいと同じ方法で得ることができる。つまり、

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \quad \text{---①}$$

である。ここで、①式に $\frac{1}{2^s}$ をかける

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \dots \quad \text{---②}$$

①と②の辺々の差をとると、

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots\right) \\ & \quad - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \quad \text{---③} \end{aligned}$$

つまり、偶数のべき乗の項が相殺する。次に、③式に $\frac{1}{3^s}$ をかけると

$$\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \dots \quad \text{---④}$$

③と④の辺々の差をとると

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) \\ &= 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \dots \end{aligned}$$

同様に $\frac{1}{5^s}, \frac{1}{7^s}$ をかけ、辺々の差をとる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5^s} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) \\ &= \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \frac{1}{35^s} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66^s} + \frac{1}{85^s} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) \\ &= 1 + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \frac{1}{23^s} + \frac{1}{29^s} + \dots \end{aligned}$$

このように式を展開していくと

$$\dots \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} + \dots$$

となり、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

が成り立つ。ここで

$$\prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

をオイラー積という。

3-4. ベルヌーイ数

ベルヌーイ数とは何かを理解するために、自然数の和を用いた定義を学習した。

(1) 自然数の和

1 から n までの自然数の和は

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

で得られる。また、1 から n までの 2 乗、3 乗の和は

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

である。私は、 i^4 の場合として、

$$\sum_{i=1}^n i^4 = n \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \sum_{s=1}^n s(n-s) \quad \dots(*)$$

を自力で証明することができた。各辺が i ($0 \leq i \leq n$) の立方体を正方形に並べる方法を用いた。証明のアイデアは次のページで説明する。

(2) 自然数の和の公式

$\sum_{i=1}^n i^k$ の公式は次のようになった。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \end{aligned}$$

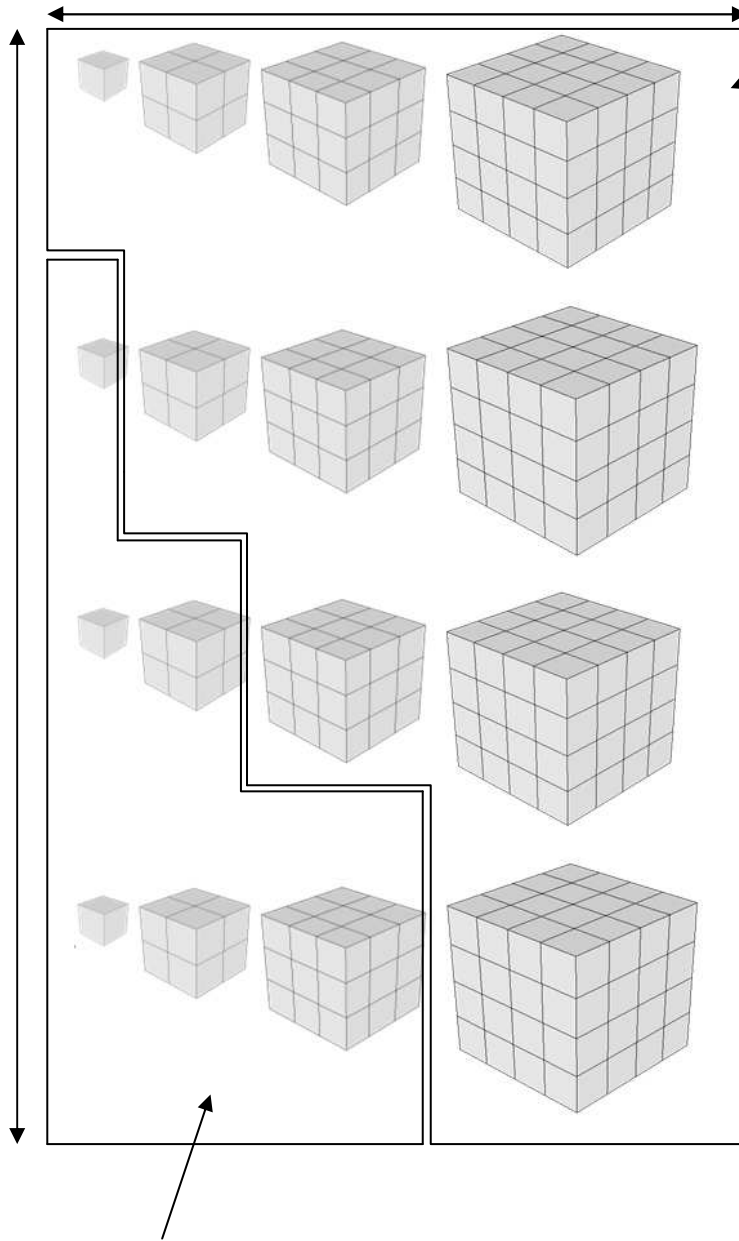
ここで、 $\binom{k}{j}$ は 2 項係数であり、

$$\begin{aligned} \binom{k}{j} &= {}_k C_j = \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\dots(k+1-j)}{j!} \end{aligned}$$

である。そして、上式で現れる B_j が次に述べるベルヌーイ数である。

$$\sum_{i=1}^n i^4 = n \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \sum_{s=1}^n s(n-s) \text{ の証明のアイデア}$$

$$\sum_{n=1}^4 i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 \text{ と考える。}$$



この範囲内に囲まれた立方体の体積の和は、

$$\sum_{i=1}^n i^4 = n \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

であり、この場合は

$$1^3 \text{ が } 1 \text{ 個} : 1^3 \times 1 = 1^4$$

$$2^3 \text{ が } 1 \text{ 個} : 2^3 \times 2 = 2^4$$

$$3^3 \text{ が } 1 \text{ 個} : 3^3 \times 3 = 3^4$$

$$4^3 \text{ が } 1 \text{ 個} : 4^3 \times 4 = 4^4$$

よって、 $\sum_{i=1}^4 i^4$ となる。

つまり、

$$\sum_{i=1}^n i^4 = n \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \sum_{s=1}^n s(n-s)$$

で求めることができる。

この部分が $\sum_{s=1}^n s(n-s)$ であり、この場合は

$$4 \times (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 4 \times \left\{ \frac{4(4+1)}{2} \right\}^2$$

となる。

- (3) ベルヌーイ数について
ベルヌーイ数とは何かについて説明する。

定義1

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+1}{i} B_i = n+1 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

私は、この定義にしたがってベルヌーイ数を B_{10} まで求めてみた。

- [1] $n=0$ のとき、 B_0 を求める。

$$\sum_{i=0}^0 \binom{0+1}{i} B_i = 0+1 \text{ より、 } B_0 = 1.$$

- [2] $n=1$ のとき、 B_1 を求める。

$$\sum_{i=0}^1 \binom{1+1}{i} B_i = 1+1 \text{ より、}$$

$$\binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 2.$$

よって、 $B_0 + 2B_1 = 2$ から、 $B_1 = \frac{1}{2}$.

- [3] $n=2$ のとき、 B_2 を求める。

$$\sum_{i=0}^2 \binom{2+1}{i} B_i = 2+1 \text{ より、}$$

$$\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 3.$$

よって、 $B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 3$ から、

$$B_2 = \frac{1}{6}.$$

- [4] $n=3$ のとき、 B_3 を求める。

$$\sum_{i=0}^3 \binom{3+1}{i} B_i = 3+1 \text{ より、}$$

$$\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 = 4.$$

よって、 $B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 4$ から、
 $B_3 = 0$.

表4 ベルヌーイ数

n	B_n
0	1
1	1/2
2	1/6
3	0
4	1/30
5	0
6	1/42
7	0
8	-1/30
9	0
10	5/66
11	0
12	-691/2730
13	0
14	7/6
15	0
16	-3617/510
17	0
18	43867/798
19	0
20	-174611/330

- (5) 自然数の和の公式

まず、 $k \geq 0, n \geq 1$ となる整数 k, n に対して、自然数の和を

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^n i^k$$

と定義する。

この式は、ベルヌーイ数を用いて、

$$\sum_{i=0}^n i^k = \sum_{j=0}^n \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

と計算できる。

私が出た式と比較するために、 $k=4$ を計算した。

$$S_0(n) = n,$$

$$S_1(n) = \sum_{j=0}^1 \binom{1+1}{j} B_j \frac{n^{1+1-j}}{1+1-j}.$$

$S_k(n)$ を n の多項式として表すためには、

2つのベルヌーイ数 $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$ を用い

る。

$$S_1(n) = \sum_{i=1}^n n^1 = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} B_j \frac{n^{1+1-j}}{1+1-j}$$

$$S_1(n) = \binom{1}{0} 1 \times \frac{n^{1+1-0}}{1+1-0} + \binom{1}{1} \frac{1}{2} \times \frac{n^{1+1-1}}{1+1-1}$$

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n(n+1).$$

また、

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^n n^2 = \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} B_j \frac{n^{2+1-j}}{2+1-j}$$

$$S_2(n) = \binom{2}{0} 1 \times \frac{n^{2+1-0}}{2+1-0} + \binom{2}{1} \frac{1}{2} \times \frac{n^{2+1-1}}{2+1-1} + \binom{2}{2} \frac{1}{6} \times \frac{n^{2+1-2}}{2+1-2}$$

$$S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

さらに、

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^n n^3 = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} B_j \frac{n^{3+1-j}}{3+1-j}$$

$$S_3(n) = \binom{3}{0} 1 \times \frac{n^{3+1-0}}{3+1-0} + \binom{3}{1} \frac{1}{2} \times \frac{n^{3+1-1}}{3+1-1} + \binom{3}{2} \frac{1}{6} \times \frac{n^{3+1-2}}{3+1-2}$$

$$+ \binom{3}{3} 0 \times \frac{n^{3+1-3}}{3+1-3}$$

$$S_3(n) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

最後に、

$$S_4(n) = \sum_{i=1}^n n^4 = \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} B_j \frac{n^{4+1-j}}{4+1-j}$$

$$S_4(n) = \binom{4}{0} 1 \times \frac{n^{4+1-0}}{4+1-0} + \binom{4}{1} \frac{1}{2} \times \frac{n^{4+1-1}}{4+1-1} + \binom{4}{2} \frac{1}{6} \times \frac{n^{4+1-2}}{4+1-2} + \binom{4}{3} 0 \times \frac{n^{4+1-3}}{4+1-3} + \binom{4}{4} -\frac{1}{30} \times \frac{n^{4+1-4}}{4+1-4}$$

$$S_4(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

となる。

これにより、 $\sum_{i=1}^n i^4$ を求める公式を得ること

とができた。また、私が得た(*)と比較するとこちらのほうが簡潔である。また、(*)式を展開すると、上式と一致することが確認できた。

さらにベルヌーイ数に関して次の事実が成り立つ([1])。

定理 3

$$\sum_{i=1}^n i^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}.$$

(証明)

$S_0(n) = n$ は自明である。 $k \geq 1$ とする。

2 項展開により得られる式

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} m^j$$

において、 $m = 1, 2, \dots, n$ としたものを
辺々加えると

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} S_j(n)$$

を得る。これより、

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left\{ (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right\}.$$

この式において、 $k = 1, 2, \dots$ と代入して
いくと順に、

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

と求まり、帰納的に、

$$S_k(n) \text{ は } \frac{1}{k+1} n^{k+1} \text{ で始まる } n \text{ の } (k+1)$$

次多項式であることがわかる。また、定義
より、

$$S_k(n+1) - S_k(n) = (n+1)^k \\ (n=1, 2, 3, \dots)$$

であるから、

$$S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k$$

が成り立つ。 $x=0$ とおいて $S_k(1) = 1$ を用い
ると、 $S_k(0) = 0$.

これで $S_k(x)$ の定数項および最高次係数
がわかる。あとの係数は微分係数 $S_k^{(j)}(0)$

($1 \leq j \leq k$) がわかればよい。

そこで、

$$S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k$$

を微分した式

$$S'_k(x+1) - S'_k(x) = k(x+1)^{k-1}$$

において、 $x=0, 1, 2, \dots, n-1$ を代入して
足し合わせると、

$$S'_k(n+1) - S'_k(0) = kS_{k-1}(n)$$

となる。

これが任意の自然数 n について成り立つ
ので、 $S'_k(0) = b_k$ とおくと、

$$b_0 = 1, \quad S'_k(x) = kS_{k-1}(x) + b_k$$

が多項式の間関係として成り立つ。

これを微分すると

$$S''_k(0) = kS'_{k-1}(0).$$

$x=0$ を代入して、 $S''_k(0) = kb_{k-1}$ となる。

これをさらに微分して、 k を $k-1$ に置き換
えた式を使うと、

$$S'''_k(x) = kS''_{k-1}(x) = k(k-1)S'_{k-2}(x).$$

ここで、 $x=0$ を代入すると、

$$S'''_k(0) = k(k-1)b_{k-2}.$$

以下、同様に次々と微分していくと、

$$S_k^{(j)}(0) = k(k-1)\cdots(k-j+2)b_{k-j+1}x^j \\ (2 \leq j \leq k+1)$$

を得る。したがって、 $S_k^{(0)}(0) = 0$ として、

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{S_k^{(j)}(0)}{j!} x^j \\ = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j} b_{k-j+1} x^j \\ = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} b_j x^{k+1-j}.$$

$S_k(1) = 1$ であるから、この式で $x=1$ を代
入すれば、

$$k+1 = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} b_j$$

これはベルヌーイ数の満たす漸化式である
から、等式

$$\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j} = \frac{1}{k+1-j} \binom{k}{j}$$

に注意して、

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i^k &= \sum_{i=0}^n \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \end{aligned}$$

が従う。(Q. E. D.)

命題 1

n を 3 以上の奇数とすると、 $B_n = 0$ 。

(証明)

$k \geq 0$ とする。 $S_k(x+1) - S_k = (x+1)^k$ において、 $x = -1$ を代入すると、 $S_k(0) = 0$ から、 $S_k(-1) = 0$ となる。

そこで、定理 3 の証明中で得られる $S_k(x)$ の公式

$$(k+1)S_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j x^{k+1-j}$$

において、 $x = -1$ を代入すると、

$$\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (-1)^j B_j = 0$$

これと、ベルヌーイ数を定義する漸化式

$$\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j = k+1$$

との差をとると奇数番目だけが残る

$$2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k+1}{2j+1} B_{2j+1} = k+1$$

となる。ここで、 $[x]$ はガウス記号で、 x を超えない最大の整数を表す。

左辺において、 $j=0$ の項が、 $B_1 = \frac{1}{2}$ より右辺を打ち消すので、

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k+1}{2j+1} B_{2j+1} = 0 \quad (k \geq 3)$$

を得る。この式で $k = 3, 5, 7, \dots$ としていくことにより、3 以上のすべての奇数 k に対して、 $B_k = 0$ が従う。(Q. E. D.)

したがって、 $n \neq 1$, $n \geq 0$ なるすべての整数 n に対して、

$$(-1)^n B_n = B_n$$

となることがわかる。

3. まとめ

B_j をベルヌーイ数とすると、

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} B_j = n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

ゆえに、自然数の累乗の和は

$$\sum_{i=1}^n i^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

で求められる。

4. 今後の課題

べき乗和の公式に関するファウルハーバーの定理について、理解をしたい。

5. 参考文献

- [1] 「ベルヌーイ数とゼータ関数」, 荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信著, 星雲

6. 謝辞

今回の研究についてご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございます。また、数学班の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございます。

既約なピタゴラス三角形の個数に関する近似式

5年A組 森 宇宏
5年B組 清水 悠平
5年C組 西井 良徳
指導教諭 川口 慎二

1. 要約

私たちサイエンス研究会数学班5年生は、既約なピタゴラス三角形のうち、斜辺以外の2辺の長さが連続している三角形の個数について考察した。また、斜辺が任意の数以下であるピタゴラス三角形の個数について、近似式を得ることができた。

キーワード ピタゴラス三角形、ピタゴラス方程式、漸化式、連分数、近似分数、フェルマー・ペル型不定方程式、ゼータ関数、オイラー定数

2. 研究内容

2-1. ピタゴラス三角形とは

ピタゴラス三角形とは直角三角形のうち、各辺が整数で表される三角形をいう。

このような三角形には、次の定理が成り立つことが知られている。

定理1 (ピタゴラスの定理)

直角を挟む2辺の長さが x, y である直角三角形の斜辺の長さを z としたとき、

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots(1)$$

が成り立つ。

この定理の証明はさまざまなものが知られているが、本稿では省略する。

このとき、等式(1)をピタゴラス方程式という。そして、ピタゴラス三角形の3辺の長さの組み合わせをピタゴラス数という。

また、ピタゴラス三角形の中で、どの2辺も既約であるものを既約なピタゴラス三角形という。既約なピタゴラス三角形は、互いに素である2つの奇数を用いて、次のような生成式から求めることができる。

定理2

y が偶数であるようなすべてのピタゴラス三角形 (x, y, z) は

$$x = kl, \quad y = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

によって表される。ただし、 k と l は互いに素な奇数であり、 $k > l$ を満たす。

さらに y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) はこれによって一通りに表される。

2-2. 2辺が連続するピタゴラス三角形

これまでに得られた性質を用い、次の2点について考察を行った。

- ①斜辺と他の一辺の長さが連続している三角形の個数
- ②斜辺以外の2辺の長さが連続している三角形の個数

はじめに、①斜辺を含む2辺が連続する場合について考える。

y を偶数と定めると斜辺を含む2辺が連続するのは y, z のみである。この2つの差は $y < z$ より、

$$\frac{k^2 + l^2}{2} - \frac{k^2 - l^2}{2} = \frac{2l^2}{2} = l^2 = 1$$

となる。ここで、 l は自然数なので $l=1$ となり、 k に順次奇数を代入することにより y, z が連続するピタゴラス三角形を得ることができる。

これにより、 $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, $(9, 40, 41)$, ...を得ることができた。

次に斜辺を含まない2辺が連続する場合について考える。

先程と同様に、

$$x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

が成り立てばよいが、この式から k, l を効率的に求めることができなかった。定理1よりピタゴラス三角形を求め、その中から y, z が連続しているときの k, l について注目すると、 (k, l) は $(3, 1)$, $(7, 3)$, $(17, 7)$, ... となった。実際に (k, l) に対する (x, y, z) を表1に示す。

表 1

k	l	x	y	z
3	1	3	4	5
7	3	21	20	29
17	7	119	120	169
41	17	697	696	985
99	41	4059	4060	5741
239	99	23661	23660	33461
577	239	137903	137904	195025
1393	577	803761	803760	1136689
3363	1393	4684659	4684660	6625109
8119	3363	27304197	27304196	38613965
19601	8119	159140519	159140520	225058681
47321	19601	927538921	927538920	1311738121
114243	47321	5406093003	5406093004	7645370045
275807	114243	31509019101	31509019100	44560482149

表1から (k, l) がわかれば、 (x, y, z) を得ることができる。

表1から以下のことが類推できる。 k_n を n 番目の k の項、 l_n を n 番目の l の項とすると、

(i) k の第 n 項は、 l の第 $n+1$ 項に一致する、つまり、 $k_n = l_{n+1}$.

(ii) l の第 n 項は第 $n-1$ 項の2倍したものと第 $n-2$ 項の和となる、つまり、

$$l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2} .$$

(iii) $x - y$ の値は1と-1が交互に現れる。

このうち、(ii)の漸化式

$$l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2}$$

つまり、隣接3項間漸化式 $l_{n+2} = 2l_{n+1} + l_n$ を解いてみた。まず(i)の事実より $l = a_n$ とすると、 $k = a_{n+1}$ と表すことができる。

よって、

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \quad \text{ゆえ、}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

となる。

ここで、白銀方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ が現れたが、なぜ白銀(2次)方程式が現れたかについてはわからないので、今後の課題としたい。

さて、 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の2つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ となる。解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1. \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、もとの漸化式に代入すると、

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n).$$

ゆえに、

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)$$

$$= \alpha^{n-1}(3 - \beta) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$$

$$\begin{aligned} x = kl &= \left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \right) = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta^n}{4} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n \beta^n \times \beta + \alpha^n \beta^n \times \alpha}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n \beta + (-1)^n \alpha}{4} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n (\alpha + \beta)}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n \times 2}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ より、 $x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}$ となる。

また、

$$\begin{aligned} y &= \frac{k^2 - l^2}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \right)^2}{2} = \frac{\alpha^{2n+1} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n}}{4} = \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2 - 1) + \beta^{2n}(\beta^2 - 1) + 2\alpha^n\beta^n(\alpha\beta - 1)}{8} \\ &= \frac{\alpha^{2n}(1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1) + \beta^{2n}(1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1) - 4(-1)}{8} = \frac{2\alpha^{2n}(1 - \sqrt{2}) + 2\beta^{2n}(1 + \sqrt{2}) - 4(-1)^n}{8} \end{aligned}$$

$$= \beta^{n-1}(3 - \alpha) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 $\textcircled{3} - \textcircled{2}$ より、

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^{n-1}(3 - \alpha) - \alpha^{n-1}(3 - \beta).$$

ここで、 $\textcircled{1}$ から $3 = \alpha + \beta - \alpha\beta$ とわかるので代入すると、

$$(\beta - \alpha)a_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n$$

となる。また、 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ より、

$$\{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\}a_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n.$$

したがって、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ である。

ゆえに、 $k_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}$, $l_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ と

表せる。よって、 $x = kl$, $y = \frac{k^2 - l^2}{2}$,

$z = \frac{k^2 + l^2}{2}$ 及び、 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -1$ から、

次のように、 x, y, z を表すことができる。

である。ここで、 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ より、

$$y = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - 2(-1)^n}{4} = \frac{\frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} - (-1)^n}{2}.$$

すると、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ より、 $y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$ とわかる。最後に、

$$\begin{aligned} z &= \frac{k^2 + l^2}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{\alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2}}{4} + \frac{\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{4}}{2} \\ &= \frac{\alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} + \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{8} = \frac{-2(-1)^n + 2(-1)^n}{8} = \frac{\alpha^{2n}(1+\alpha) + \beta^{2n}(1+\beta)}{4} \\ &= \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2} \end{aligned}$$

である。以上より、 $x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}$, $y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$, $z = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$ となる。

そこで、以下の2つのことを確かめた。

【1】 x と y の差が1である。

これは上式より明らかである。

【2】 ピタゴラス方程式が成り立つ。

【1】 と 【2】 が成り立つと、 (x, y, z) は、 x, y が連続するピタゴラス三角形であるといえる。

$$x^2 + y^2 - z^2$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2} \right\}^2 - \left(\frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - \alpha^{4n} - \beta^{4n} + 4}{16} + \frac{-2\alpha^{4n+1} - 2\alpha^{2n+1}\beta^{2n} - 2\alpha^{2n}\beta^{2n+1} - 2\beta^{4n+1}}{16} \\ &= \frac{\alpha^{4n}(\alpha^2 - 2\alpha - 1) + \beta^{4n}(\beta^2 - 2\beta - 1) + 4 - 2\alpha - 2\beta}{16} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、ピタゴラス方程式が成り立つことが確認できた。よって、

$$x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}$$

$$y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$$

$$z = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$$

の n に自然数を順次代入していくことにより、 x, y が連続するピタゴラス三角形を求めることができる。

しかし、この式を用いることで x, y が連続しているピタゴラス三角形をすべて求め

られているかどうかは判別することができなかつた。

そこで、最初の条件であった不定方程式

$$x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

についてさらに考察を行った。

不定方程式のすべての解を求めるためにフェルマー・ペル型不定方程式の解法を利用しようと考えた。

定理3 (フェルマー・ペル型不定方程式)

フェルマー・ペル型不定方程式

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \quad \dots(*)$$

ただし、 $d > 0$ であり、 d は平方数でない。

(*)式において、 \sqrt{d} の連分数展開を

$$\sqrt{d} = [k_0; \overline{k_1, k_2, \dots, k_m}]$$

とし、その近似分数を $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ とする。

n が奇数で $n \equiv -1 \pmod{m}$ のような

p_n, q_n は $x^2 - dy^2 = \pm 1$ の解であり、これで尽くされる。

このフェルマー・ペル型不定方程式を用いて、ピタゴラス三角形の斜辺以外の2辺が連続するピタゴラス三角形が上の式ですべて求める方法を次に示す。

$x - y = \pm 1$ において、 $x = kl$,

$y = \frac{k^2 - l^2}{2}$ を代入すると、

$$kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1.$$

この両辺を2倍すると、

$2kl - (k^2 - l^2) = \pm 2$. これを整理すると、

$$2kl - k^2 + l^2 = \pm 2, \quad (l+k)^2 - 2k^2 = \pm 2$$

となる。ゆえに、両辺を $\frac{1}{2}$ 倍すると、

$$\frac{(l+k)^2}{2} - k^2 = \pm 1,$$

$$k^2 - \frac{(l+k)^2}{2} = \pm 1.$$

ここで、 $k = p, k+l = 2q$ とおくと、

$$p^2 - \frac{1}{2}(2q)^2 = \pm 1, \quad \text{つまり、} \quad p^2 - 2q^2 = \pm 1.$$

これは、 $d = 2$ の場合のフェルマー・ペル型不定方程式である。

したがって、 q^2 の係数である $\sqrt{2}$ の近似分数を求めることで、不定方程式

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1$$

の解を得ることができる。

まず $\sqrt{2}$ を連分数展開すると、 $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$,

$$\text{つまり、} \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

である。ゆえに $\sqrt{2}$ の近似分数は、

$$\text{深さを1とすると} \quad \sqrt{2} \doteq 1,$$

$$\text{深さを2とすると} \quad \sqrt{2} \doteq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

深さを3とすると

$$\sqrt{2} \doteq 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

というように求められる。これらの例を見てもわかるように、深さを深くするほど $\sqrt{2}$ に近い値となる。同様にして、さらに $\sqrt{2}$ の近似分数を求めた結果が下表である。

p	1	3	7	17	41	99	239	...
q	1	2	5	12	29	70	169	...

$k = p, k+l = 2q$ であったので、 $k = p, l = 2q - p$ より、 k, l の解は次のようになる。

k	1	3	7	17	41	99	239	...
l	1	1	3	7	17	41	99	...

ここで、 $k > l > 0$ より、
 $(k, l) = (3, 1), (7, 3), (17, 7), (41, 17),$
 $(99, 41), (239, 99), \dots$

を得ることができた。

フェルマー・ペル型不定方程式よりこれがすべての解である。しかし、この k, l の数列は $\sqrt{2}$ の近似分数の最初のいくつかを計算した結果なので、規則性があることを確かめられていない。そこで $\sqrt{2}$ の近似分数を分母と分子に分け、それぞれについての漸化式を算出しようと試みた。

そこで、まず $\sqrt{2}$ の近似分数の分母・分子の漸化式を推測することによって $\sqrt{2}$ の近似分数の一般項を算出する方法と、連分数展開から考えた漸化式によって算出する方法の2つで考えてみた。

I. $\sqrt{2}$ の近似分数の分母・分子の漸化式を推測

分子の数列を $\{a_n\}$ 、分母の数列を $\{b_n\}$ とすると、

$$\begin{aligned} \{a_n\}: & 1, 3, 7, 17, \dots \\ \{b_n\}: & 1, 2, 5, 12, \dots \end{aligned}$$

なので、

それぞれの漸化式は

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \quad b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$$

と推測される。分子についての特性方程式を解いてみると、 $t^2 - 2t - 1 = 0$ ゆえ、

$t = 1 \pm \sqrt{2}$. したがって、

$$\begin{aligned} \{a_{n+2} - (1 + \sqrt{2})a_{n+1}\} \\ = (1 - \sqrt{2})\{a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n\}. \end{aligned}$$

ここで、 $a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n = c_n$ とおくと、

$c_{n+1} = (1 - \sqrt{2})c_n$. また、

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 - (1 + \sqrt{2})a_1 \\ &= 3 - (1 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} \quad \text{より、} \end{aligned}$$

$$c_n = (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1}.$$

同様に、

$$\begin{aligned} \{a_{n+2} - (1 - \sqrt{2})a_{n+1}\} \\ = (1 + \sqrt{2})\{a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n\}. \end{aligned}$$

ここで、 $a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n = d_n$ とおくと、

$d_{n+1} = (1 + \sqrt{2})d_n$. また、

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2 - (1 - \sqrt{2})a_1 \\ &= 3 - (1 - \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} \quad \text{より、} \end{aligned}$$

$$d_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1}.$$

ゆえに、整理すると、

$$a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n = (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。④-⑤を計算すると、

$$\begin{aligned} a_n \{ (1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2}) \} \\ = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} \\ 2\sqrt{2}a_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} \\ a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1} \\ a_n = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{同様に、} b_n = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^n.$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1}}{\frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^n} \\ &= \frac{2 \{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \}}{\sqrt{2} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \}} \end{aligned}$$

となる。

このようにして、 $\sqrt{2}$ の近似分数の一般項を算出することができた。

ここで留意しておくべきは、この一般項が、推測された漸化式によって求めた一般項であるため、この一般項自体もまた推測の域を出ていないという点である。

この一般項について極限をとると、

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left\{ (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \right\}}{\sqrt{2} \left\{ (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \right\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left\{ 1 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)^n \right\}}{\sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)^n \right\}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

となり、確かに $\sqrt{2}$ の近似分数である。

II. 連分数展開から考えた漸化式

$\sqrt{2}$ の近似分数は、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \end{aligned}$$

と変形できるので、 $\sqrt{2}$ の近似分数から成る数列を $\{a_n\}$ とすると、

$$\text{その漸化式は、 } a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} = \frac{a_n+2}{a_n+1}$$

となる。ただし、 $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}$ である。特

性方程式 $t = \frac{t+2}{t+1}$ を解いて、 $t = \pm\sqrt{2}$ 。

よって、

$$a_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{(1+\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2})}{a_n + 1} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(1-\sqrt{2})(a_n - \sqrt{2})}{a_n + 1} \quad \dots \textcircled{7}$$

を得る。⑥÷⑦を計算すると、

$$\frac{a_{n+1} + \sqrt{2}}{a_{n+1} - \sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(a_n - \sqrt{2})}$$

$$= -(3+2\sqrt{2}) \frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}}.$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}}$ とおくと、

$$b_{n+1} = -(3+2\sqrt{2})b_n.$$

$$\text{また、 } b_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -(3+2\sqrt{2}).$$

したがって、

$$\begin{aligned} b_n &= -(3+2\sqrt{2}) \times \left\{ -(3+2\sqrt{2}) \right\}^{n-1} \\ &= (-1)^n \cdot (3+2\sqrt{2})^n. \end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}} = (-1)^n (3+2\sqrt{2})^n$ な

ので、

$$a_n + \sqrt{2} = (-1)^n (3+2\sqrt{2})^n \times (a_n - \sqrt{2})$$

ゆえ、

$$\begin{aligned} a_n &\left\{ 1 - (-1)^n (3+2\sqrt{2})^n \right\} \\ &= -\sqrt{2} \times (-1)^n (3+2\sqrt{2})^n - \sqrt{2} \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$a_n = \frac{(-1)^n (3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n (3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2}$$

となる。

このようにして、もう1つの $\sqrt{2}$ の近似分数を求めることができた。また、Iの場合と同じように極限をとってみると、

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(-1)^n (3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n (3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2} \right\} \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}}{(-1)^n - \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

となり、 $\sqrt{2}$ の近似分数であることが確かめられた。

ここまでの結果を整理すると $\sqrt{2}$ の分母分子の数列を類推して得られた一般項は、

分子の数列を $\{\alpha_n\}$, 分母の数列を $\{\beta_n\}$,

$\sqrt{2}$ の数列を $\{\gamma_n\}$ とした場合、

$$\alpha_n = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)(1+\sqrt{2})^{n-1}$$

$$-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)(1-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\beta_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{2\left\{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}}$$

$$\begin{aligned} \gamma_n \div \delta_n &= \frac{2\left\{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}} \div \frac{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{\left\{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right\} \left\{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - 1\right\}}{\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\} \left\{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + 1\right\}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n} \\ &= \frac{(-1)^n(7+5\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n + (-1)^n(-1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{(-1)^n(7+5\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n - (-1)^n(-1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n} \\ &= \frac{(-1)^n\left\{(7+5\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}}{(-1)^n\left\{(7+5\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}} = 1 \end{aligned}$$

よって、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の各項が等しいことを確かめられた。

しかし、これでは $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ が一致しているかどうかはわからない。なぜなら、 $\{\delta_n\}$ は既約分数になるまで計算しているが、

である。

また、連分数の漸化式から求めた一般項を $\{\delta_n\}$ とすると、

$$\delta_n = \frac{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2}$$

である。

ここで、得られた2つの $\sqrt{2}$ の一般項による数列が一致していることを証明する。

実際には、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の各項が等しいことを確かめる。

$\{\gamma_n\}$ は元々分母と分子の数列を合わせたものなので既約とは限らない。例えば、

$\alpha_n = 6$, $\beta_n = 4$, $\delta_n = \frac{3}{2}$ とする。このとき

$\gamma_n = \frac{3}{2}$ なので、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の値は等しいが、 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ によって求めた分母と分子を組み合わせたものである $\frac{6}{4}$ とでは一致していない。そこで、 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ が既約であることを確認し、 $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が既約分数であることを示す。

ここで、

$$\alpha_n - \beta_n - \beta_{n-1} = 0$$

を確かめられた。与式は、

$$\alpha_n - \beta_n = \beta_{n-1} \quad \dots \textcircled{8}$$

に変形できる。

ここから、背理法により証明する。

仮に、 α_n と β_n が約数 k を持つとする。

⑧より、 β_{n-1} も約数 k をもつ。

漸化式 $\beta_{n+2} = 2\beta_{n+1} + \beta_n$ から、 β_{n-2} も約数 k をもっているとわかる。さらにこの作業を続けて行くと、 $\beta_{n-3}, \beta_{n-4}, \dots, \beta_1$ も約数 k をもつ。しかし、 β_n の数列

$$\{\beta_n\}: 1, 2, 5, 12, \dots$$

であるから、明らかに矛盾している。ゆえに、最初の仮定が間違っているので α_n と β_n は既約である。

したがって、 $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が既約分数であることを示すことができたので、2つの数列 $\{\gamma_n\}, \{\delta_n\}$ は一致している。

ゆえに、 $\sqrt{2}$ の近似分数の分母と分子の数列が $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ であることがわかり、 p, q の解が求められる。したがって、今までの類推がすべて正しかったとわかる。

2-3. 斜辺が任意の数以下であるピタゴラス三角形の個数

既約なピタゴラス三角形について、制限された斜辺の長さを n 、その条件を満たすピタゴラス三角形の個数を N とする。斜辺 z は互いに素な奇数の組み合わせ

(k, l) を用いて、 $z = \frac{k^2 + l^2}{2}$ と表せる。こ

こで、 z は n 以下なので、 $z = \frac{k^2 + l^2}{2} \leq n$ となる。この式を変形すると、

$$k^2 + l^2 \leq 2n \quad \dots \textcircled{9}$$

を得る。横軸を k 軸、縦軸を l 軸とすると、図1のように、⑨は中心が原点、半径が $\sqrt{2n}$ の円の内部を表している。

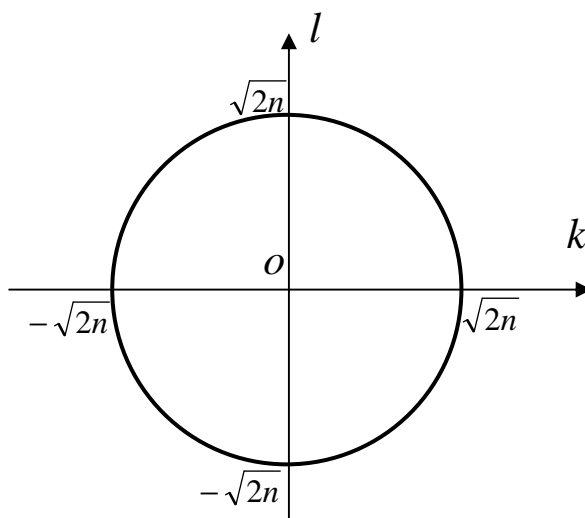


図1

このとき、求めたいピタゴラス三角形の個数 N は⑨の円の内部、および境界上の (k, l) の格子点の数である。さらに、 kl 座標上の一辺が1の正方形は格子点1つに対応しているので、 n を十分大きくすれば、 N は kl 座標上の条件を満たす部分の面積と等しくなると考えてよい。この事実は補題1として、後に証明する。

そこで、⑨の面積 S を求めると、

$$S = (\sqrt{2n})^2 \pi = 2n\pi$$

ここで k, l について、 $k > l > 0$ であるので、この条件を満たすのは図2の影のついた部分であり、面積は S の8分の1なので、

$$\frac{S}{8} = \frac{2n\pi}{8} = \frac{n\pi}{4}$$

となる。

さらに、 k, l はどちらも奇数なので、この条件を満たすのは図2の影のついた部分

の4分の1となり、求める面積は

$$\frac{n\pi}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{n\pi}{16}$$

である。

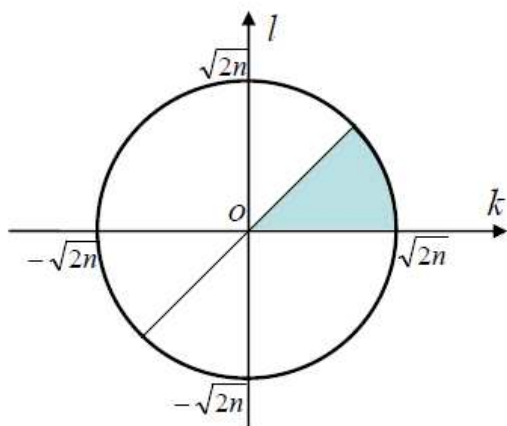


図2

最後に、 k, l は互いに素である奇数であったので、この条件を満たす確率である $\frac{8}{\pi^2}$ (後に証明する)をかけて、

$$\frac{n\pi}{16} \times \frac{8}{\pi^2} = \frac{n}{2\pi}$$

となる。

したがって、条件を満たすピタゴラス三角形の個数 N は

$$N \approx \frac{n}{2\pi}$$

となることが証明された。

補題1

n を十分大きくとる。不等式

$$k^2 + l^2 \leq 2n \quad \cdots (\dagger)$$

が表す領域 D 内に含まれる格子点の数は、領域 D の面積と等しくなる。

(証明)

四分円を考えることにする。

まず、図3のように、頂点が4点

$(p, q), (p, q+1), (p+1, q), (p+1, q+1)$

で囲まれた格子(正方形)を $F_{p,q}$ とおく。

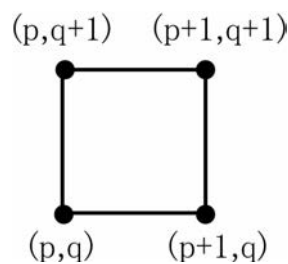


図3

格子点の数を T_n として、 $(p, q) \in D$ となる $F_{p,q}$ をすべて合わせてできる図形の面積を U_n , $F_{p,q} \subset D$ となる $F_{p,q}$ をすべて合わせてできる図形の面積を R_n とする。このとき、 $T_n = U_n$ であることは明白である。さらに、 $R_n < S_n < T_n = U_n$ であることも明らかである。

ここで、 $n \rightarrow \infty$ のとき $R_n \rightarrow T_n$ であることを示し、はさみうちの原理から $S_n \rightarrow T_n$ であることを示す。

まず、 T_n について考える。

$k = p$ ($k \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq [\sqrt{2n}]$) のとき、格子点は

$$(p, 0), (p, 1), \dots, (p, [\sqrt{2n - p^2}])$$

なので、この個数は $[\sqrt{2n - p^2} + 1]$ 個である。

ここで、 p は0から、 $[\sqrt{2n}]$ まで動くので、

$$T_n = \sum_{p=0}^{[\sqrt{2n}]} [\sqrt{2n - p^2} + 1]$$

である。

同様に考えて

$$R_n = \sum_{k=0}^{[\sqrt{2n}]} [\sqrt{2n - k^2}]$$

である。

ここから、 $n \rightarrow \infty$ のとき $R_n \rightarrow T_n$ であることを示す。 $n \rightarrow \infty$ のとき T_n, R_n はどちらも $R_n \rightarrow \infty, T_n \rightarrow \infty$ なのでそれを解消するために T_n, R_n を $n^{\frac{3}{2}}$ で割って考える。

すると、 T_n, R_n はどちらも同じ値に収束する。したがって、はさみうちの原理から

$$R_n = S_n = T_n = U_n \quad (n \rightarrow \infty).$$

ゆえに、格子点の数 T_n はその領域内の面積 U_n によって近似してもよい。

補題 2

奇数の組み合わせ (k, l) が互いに素である確率は $\frac{8}{\pi^2}$ である。

(証明)

まず、2 数 (a, b) が互いに素となる確率を求めよう。 a と b が互いに素であるならば、同じ素数を共通の約数にはもたないということを用いる。

まず、ある素数 p_1 で任意に選んだ整数が割り切れる確率は $\frac{1}{p_1}$ となる。ゆえに、 a と b のうち少なくとも一つが p_1 で割り切れないという事象は、 a と b がどちらも p_1 によって割り切れるという事象の余事象なので、 a と b のうち少なくとも一つが p_1 で割り切れない、つまり素数 p_1 を共通の約数にもたない確率を考える。 a が p_1 で割り切れる確率を p_2 、 b が p_1 で割り切れる確率を p_3 とすると、

$$1 - (p_2 \times p_3) = 1 - \frac{1}{p_1^2}$$

となる。さらに、すべての素数に関して、この確率の積をとったものが a と b が互いに素である確率である。つまり、

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \dots \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p:\text{prime}} (1 - p^{-2}) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1 - p^{-2}}\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}. \end{aligned}$$

ここで $\zeta(\cdot)$ はゼータ関数を表す。このゼータ関数に関しては、補題として後述する。

こうして、2 数 (a, b) が互いに素となる確率は $\frac{6}{\pi^2}$ であることが証明された。

では、奇数の組 (k, l) の場合について考えてみよう。 (k, l) はどちらも奇数なので、明らかにどちらも 2 で割ることはできない。

したがって、求める確率は、2 数 (a, b) が互いに素となる確率を求める過程において、素数が 2 の場合を除けばよいので、実際にその確率を求めると、

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \dots \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \dots \right\} \div \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \\ &= \frac{6}{\pi^2} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{\pi^2}. \end{aligned}$$

このようにして、奇数の組み合わせ (k, l) が互いに素である確率は $\frac{8}{\pi^2}$ であることが示された。(Q.E.D)

補題 3

$$\prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1 - p^{-2}}\right) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

つまり、 $\prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1 - p^{-2}}\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$ が成り立つ。

前述の補題 1 で用いた補題 3 について詳しく説明をしていこう。

まず、ゼータ関数というのは

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

で表される関数のことである。つまり $\zeta(2)$ というのは、

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

のことである。

$$\text{それではまず、} \prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) = \zeta(2) \text{ に}$$

ついて説明する。 $\zeta(2)$ は、次のように無限積の形で表示することができることが知られている。

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots \right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots \right) \\ &\quad \dots \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \dots \right) \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

実際、無限多項式の各項について分母を素因数分解すると、どの項も素数の偶数乗の積によって表されることからこの等式が成り立っていることがわかる。さらに無限積表示の()内は等比数列の和になっているので、

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2^{-2n}}{1-2^{-2}} \right) \left(\frac{1-3^{-2n}}{1-3^{-2}} \right) \left(\frac{1-5^{-2n}}{1-5^{-2}} \right) \\ &\quad \dots \times \left(\frac{1-p^{-2n}}{1-p^{-2}} \right) \dots \\ &= \left(\frac{1}{1-2^{-2}} \right) \left(\frac{1}{1-3^{-2}} \right) \left(\frac{1}{1-5^{-2}} \right) \dots \\ &\quad \dots \times \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) \dots \\ &= \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) \end{aligned}$$

よって、 $\prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) = \zeta(2)$ を示すことができた。

$$\text{次に、} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ を示す。}$$

そのためにまず、 $\sin x$ を無限多項式と無限積の2通りで表す。

[1] 無限多項式

$$f(x) = \sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

とおく。

$$f'(x) = \cos x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = -\sin x = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots$$

$$f'''(x) = -\cos x = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2 + \dots$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = 24a_4 + 120a_5x + 360a_6x^2 + \dots$$

⋮

であるので、

$$f(0) = \sin 0 = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0, \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0, \quad \dots$$

となる。

よって、係数比較をすると、

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{1!} = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3!},$$

$$a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5!}, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = -\frac{1}{7!}, \dots$$

したがって、

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots \end{aligned}$$

となる。

[2] 無限積

$\sin x$ において、整数 k を用いて、 $x = k\pi$ であるときは $\sin x = 0$ であるので、方程式 $\sin x = 0$ は無数個の解 $x = k\pi$ を持っているということになる。よって、 $\sin x$ は次のように無限積表示することができる。

$$\begin{aligned} \sin x &= \dots \left(1 + \frac{x}{2\pi} \right) \left(1 + \frac{x}{\pi} \right) x \left(1 - \frac{x}{\pi} \right) \left(1 - \frac{x}{2\pi} \right) \dots \\ &= x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots \end{aligned}$$

[1], [2]より、 $\sin x$ を下記のように2通りに表すことができた。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots$$

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

ここで、上の2式は x に関する恒等式なので、 x^3 の係数に注目すると、[1]における x^3 の係数は $-\frac{1}{6}$ 。また、[2]における係数は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \times \zeta(2) \end{aligned}$$

となっている。2式は x に関する恒等式であったので、係数は等しく、

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \zeta(2), \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

こうして、

$$\prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

を示すことができた。

次に、既約なピタゴラス三角形に限らず、斜辺を2倍、3倍しても n 以下であるものも含めた場合を考察する。

実際に私たちがコンピューターで調べた結果を以下の表に示す。

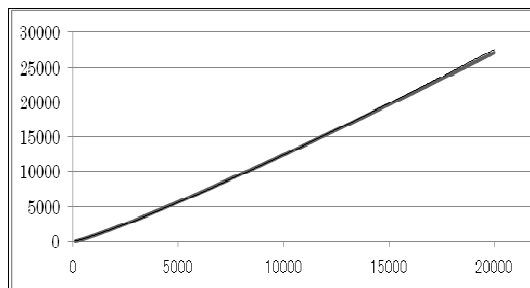


図4 x 軸が n 、 y 軸が個数 N

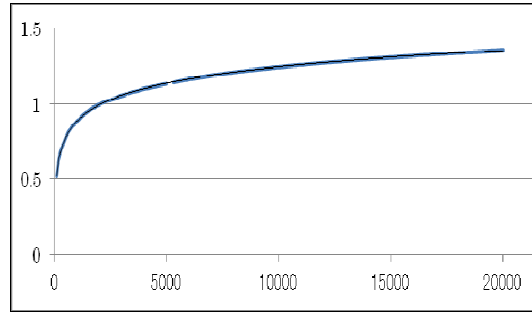


図5 x 軸が n 、 y 軸が比 $\frac{N}{n}$

表2

~以下の場合	~個	~以下の場合	~個
100	52	3100	3291
200	127	3200	3414
300	210	3300	3536
400	295	3400	3665
500	387	3500	3792
600	486	3600	3906
700	583	3700	4026
800	684	3800	4158
900	781	3900	4292
1000	886	4000	4416
1100	989	4100	4541
1200	1101	4200	4658
1300	1210	4300	4789
1400	1318	4400	4917
1500	1429	4500	5039
1600	1543	4600	5173
1700	1658	4700	5297
1800	1762	4800	5426
1900	1885	4900	5557
2000	1994	5000	5681
2100	2113	5100	5819
2200	2227	5200	5950
2300	2348	5300	6070
2400	2460	5400	6208
2500	2567	5500	6333
2600	2690	5600	6475
2700	2802	5700	6604
2800	2926	5800	6742
2900	3054	5900	6861
3000	3172	6000	7008

～以下の場合	～個	～以下の場合	～個
6100	7135	12100	15466
6200	7262	12200	15618
6300	7396	12300	15747
6400	7528	12400	15899
6500	7674	12500	16041
6600	7797	12600	16180
6700	7930	12700	16330
6800	8074	12800	16466
6900	8207	12900	16615
7000	8345	13000	16764
7100	8481	13100	16903
7200	8602	13200	17057
7300	8748	13300	17203
7400	8881	13400	17343
7500	9009	13500	17489
7600	9160	13600	17640
7700	9296	13700	17781
7800	9437	13800	17933
7900	9556	13900	18077
8000	9706	14000	18227
8100	9837	14100	18363
8200	9986	14200	18515
8300	10117	14300	18664
8400	10245	14400	18811
8500	10398	14500	18961
8600	10528	14600	19093
8700	10672	14700	19238
8800	10801	14800	19390
8900	10943	14900	19535
9000	11077	15000	19675
9100	11220	15100	19817
9200	11359	15200	19977
9300	11504	15300	20121
9400	11626	15400	20279
9500	11775	15500	20424
9600	11908	15600	20569
9700	12069	15700	20720
9800	12190	15800	20862
9900	12345	15900	21010
10000	12471	16000	21160
10100	12613	16100	21310
10200	12751	16200	21470
10300	12899	16300	21613
10400	13047	16400	21759
10500	13185	16500	21916
10600	13325	16600	22056
10700	13474	16700	22194
10800	13602	16800	22353
10900	13757	16900	22505
11000	13891	17000	22662
11100	14022	17100	22794
11200	14172	17200	22949
11300	14320	17300	23105
11400	14457	17400	23247
11500	14606	17500	23403
11600	14748	17600	23553
11700	14895	17700	23698
11800	15032	17800	23850
11900	15185	17900	24007
12000	15320	18000	24148

これまで得られた結果から、各辺が n 以下の既約なピタゴラス三角形の個数を N

とすると、 $N \approx \frac{n}{2\pi}$ が成り立つことがわか

った。では、各辺が n 以下のときに、既約でないものも含めたピタゴラス三角形の個数は、どのような式で表わせるのだろうか。そこで、各辺が n 以下のピタゴラス三角形の個数を N^* として考える。

既約なピタゴラス三角形の個数 N は n の関数

$$N = f(n) = \frac{n}{2\pi}$$

で近似的に表せている。

この関数は既約なピタゴラス三角形のみを考えたものなので、各辺が n を超えない範囲で整数倍して、既約でない三角形も加える必要がある。

そこで、まず 1 倍しても斜辺が n を超えない既約なピタゴラス三角形の個数はそのまま $f(n)$ である。次に 2 倍できるものは、

斜辺が $\frac{n}{2}$ 以下であればよいので、その個数

は $f\left(\frac{n}{2}\right)$ である。同様にして、3 倍、4 倍、

…、 n 倍と考えていく。このとき、それぞれの個数は $f\left(\frac{n}{3}\right)$, $f\left(\frac{n}{4}\right)$, …, $f\left(\frac{n}{n}\right)$ である。

すると、各辺が n 以下のピタゴラス三角形の個数は

$$f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{3}\right) + \dots + f(1)$$

で与えられる。ただし、たとえば 3 倍しても斜辺が n を超えない三角形が $f\left(\frac{n}{3}\right)$ 個あ

ったとする。このとき、これらの三角形は 1 倍、2 倍、3 倍まで拡大することができる

ので、のべ $f\left(\frac{n}{3}\right) \times 3$ 個の三角形を生成す

ることになる。しかし、これは間違いである。これを具体的に説明する。

いま、条件として $n=14$ とする。

まず、この条件を満たす既約なピタゴラス三角形は $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ の 2 つである。ゆえに、 $f(n)=2$ である。

次に、2 倍しても条件を満たすピタゴラス三角形は $(6, 8, 10)$ の 1 つである。

ゆえに、 $f\left(\frac{n}{2}\right)=1$ である。

さらに、3 倍しても条件を満たすピタゴラス三角形は存在しない。

ここで $(6, 8, 10)$ は $(3, 4, 5)$ を 2 倍したものであるので、 $f\left(\frac{n}{2}\right) \times 2$ であるように見えるが、 $(3, 4, 5)$ は $f(n)$ で数えられている。

こういった考えから、各辺が n 以下のピタゴラス三角形の個数は

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(1)$$

であると考えた。

そこで、実際に N^* を計算してみた。

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(1)$$

$$= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{2\pi k} = \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

このように、 N^* を計算する過程で調和数列の有限和が現れた。そこで、次の事実を利用して計算を進めた。

定理 4

n 番目までの調和級数の和と n の自然対数の差はオイラー定数 γ に収束する。つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right\} = \gamma = 0.5772156649 \dots$$

これを利用して、 n が十分大きいときに、 $\sum \frac{1}{k} \doteq \ln n + \gamma$ という近似式を用いて計算すると、

$$N^* = \frac{n}{2\pi} (\ln n + \gamma) \quad \dots (\ddagger)$$

ただし、 $\gamma = 0.5772156649 \dots$

という近似式を導いた。そこで実際にこの近似式を用いて、 N^* を求めてみた。そのデータとグラフを以下に示す。

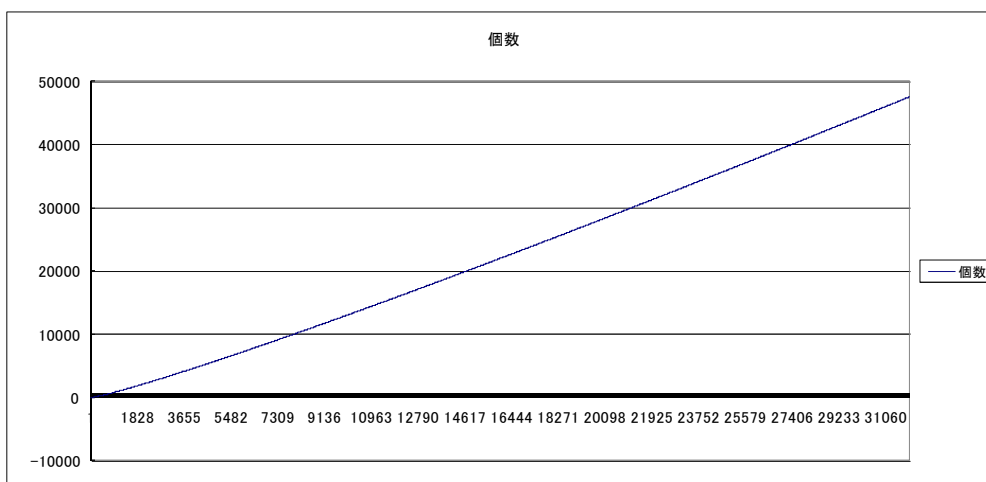


図 6 x 軸は n , y 軸は N

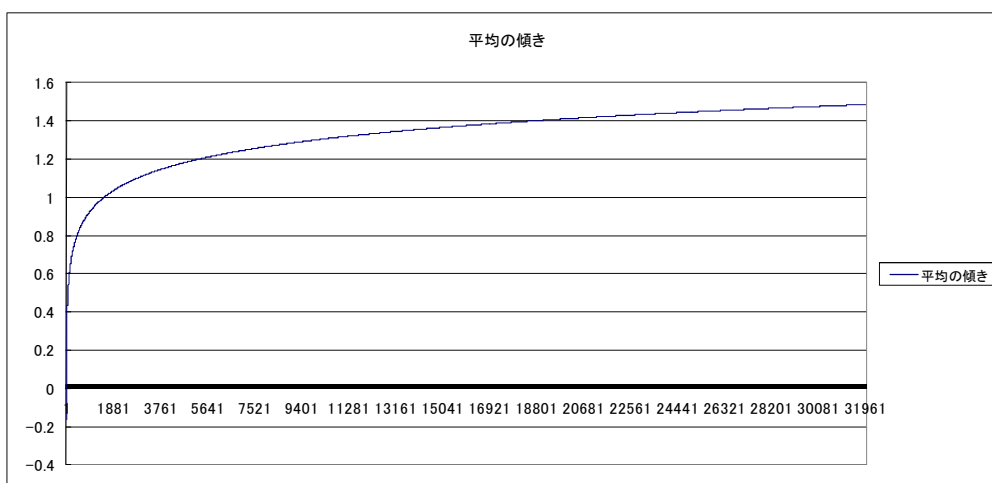


図7 x軸は n 、y軸は $\frac{N}{n}$

このように、今まで私たちが調べてきたグラフと類似していることがわかる。しかし個々のデータ(表3)を見てみると、誤差が大きいことがわかる。たとえば $n=10000$ のとき、 $N^*=15577$ と計算されるが、実際は12471個であり、 $n=20000$ のとき $N^*=33361$ となるが、実際は27175個である。これらの通り、実際の数値よりも大きいことがわかる。そこで、この誤差がなぜ出てきてしまうのかを考えた。レーマーによる既約なピタゴラス三角形の個数を求める近似式の精度は高いことが実際に調べてみてわかっていたので、

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(1)$$

という部分に注目してみた。そして、私たちは次の2つが誤差の理由なのではないかと推測した。

- ①斜辺は少なくとも5以上である。
- ②斜辺は常に整数である。

これまでの考えではこれらの2点は考慮していなかったため、さらにこれらの条件を加えることによって近似式の精度を向上させようと考えた。

まず①についてであるが、これはつまり斜辺が5未満であるピタゴラス三角形は存在しないということである。レーマーの近似式では、

$$f(1) = \frac{1}{2\pi} \doteq 0.16,$$

$$f(2) = \frac{2}{2\pi} \doteq 0.32$$

というようにほとんど0であるが、

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(1)$$

という考えでは、 $f(1)$ は n 回カウントし、

$f(2)$ は $\frac{n}{2}$ 回カウントしている。これだと n が大きくなるにつれて誤差が大きくなるのは明らかである。したがって、斜辺が5未満のものは無視しなければならない。つまり、

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(5)$$

としなければならないということである。

斜辺は整数 k を用いて、 $\frac{n}{k}$ としていたの

で、 $\frac{n}{k} < 5$ 、つまり $k > \frac{n}{5}$ である。そこで、

k が $\frac{n}{5}$ までの値をとると考えて計算してみると、

$$N' = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(5)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} f\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} \frac{n}{2\pi k} = \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} \frac{1}{k} \\
&= \frac{n}{2\pi} \left(\ln \frac{n}{5} + \gamma \right)
\end{aligned}$$

という新たな近似式を求めることができた。この近似式を用いて $n=10000$ のときと $n=20000$ のときを計算してみると、それぞれ

$$N^* = 13014 \quad (\text{実際は } 12471 \text{ 個})$$

$$N^* = 28236 \quad (\text{実際は } 27175 \text{ 個})$$

となり、前述の方法よりも精度が上がっていることがわかる。また、この近似式によって計算した場合の結果を表4に示す。

しかし、これでも誤差はあり、その誤差が徐々に大きくなっている。そこで、②の「斜辺は常に整数である」という条件についても考察してみた。

前述のように、斜辺は整数 k を用いて $\frac{n}{k}$ としていた。ここで、例えば $n=1000$, $k=80$ とする。このとき、斜辺 $\frac{n}{k}$ は $\frac{1000}{80} = 12.5$ である。斜辺が 12.5 以下であるピタゴラス三角形の個数というのは、斜辺が整数であることを考慮すると、斜辺が 12 以下のピタゴラス三角形の個数を考えるということなので、今まで $f(12.5)$ としていたものは、 $f(12)$ とすべきである。こうしなければ、0.5 の分だけ誤差が出てしまう。

つまり、斜辺 $\frac{n}{k}$ 以下の三角形の個数は、斜辺が $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ 以下の三角形の個数と等しいので $f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$ としなければならない。ここで、 $\lfloor x \rfloor$ とは x を超えない最大の整数を表す。

これまでの結果を合わせると、

$$N' = \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

と近似式を改良することができた。今回の場合は式中に $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ が出てきてしまったので、これ以上計算することはできなかった。

この式をより簡単にするのを今後の課題としたい。また、この近似式を用いて、データを作成してみた。その結果が表5である。

表5を見ると $N' = \frac{n}{2\pi} \left(\ln \frac{n}{5} + \gamma \right)$ を用いた場合の値とあまり大きな差はないことがわかる。しかし、 n が大きくなればなるほど、

$N' = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ を用いたときの方が実際の値に近づくことは明らかである。これからは、この近似式の精度がどれほどのものなのか、正しい近似式なのかを研究していきたい。

また、計算によって求めた個数と実際の個数との比を計算することによって誤差の程度を調べた。その結果は図8に示す。x軸は n ($n \leq 20000$)、y軸は(計算によって求めた個数)/(実際の個数)である。この結果より、 n を 20000 程度まで大きくすると、誤差は 3%以内であることがわかる。

3. 今後の課題

今回既約以外のピタゴラス三角形の個数についての近似式を求めたが、今回求めた近似式の精度を研究したい。また、より近い近似式があるかについても研究したい。

n	N^*
100	82.48014
200	187.0238
300	299.8953
400	418.1748
500	540.4757
600	665.9813
700	794.1518
800	924.6039
900	1057.051
1000	1191.269
1100	1327.082
1200	1464.344
1300	1602.934
1400	1742.749
1500	1883.701
1600	2025.716
1700	2168.726
1800	2312.673
1900	2457.505
2000	2603.174
2100	2749.64
2200	2896.863
2300	3044.811
2400	3193.451
2500	3342.754
2600	3492.693
2700	3643.245
2800	3794.387
2900	3946.097
3000	4098.356
3100	4251.146
3200	4404.449
3300	4558.25
3400	4712.533

3500	4867.284
3600	5022.49
3700	5178.138
3800	5334.217
3900	5490.714
4000	5647.619
4100	5804.923
4200	5962.614
4300	6120.685
4400	6279.125
4500	6437.928
4600	6597.084
4700	6756.586
4800	6916.427
4900	7076.599
5000	7237.096
5100	7397.912
5200	7559.039
5300	7720.473
5400	7882.207
5500	8044.236
5600	8206.554
5700	8369.156
5800	8532.038
5900	8695.194
6000	8858.62
6100	9022.311
6200	9186.263
6300	9350.471
6400	9514.933
6500	9679.643
6600	9844.598
6700	10009.79
6800	10175.23
6900	10340.89
7000	10506.79
7100	10672.92

7200	10839.27
7300	11005.84
7400	11172.63
7500	11339.63
7600	11506.85
7700	11674.27
7800	11841.91
7900	12009.74
8000	12177.78
8100	12346.02
8200	12514.45
8300	12683.08
8400	12851.9
8500	13020.91
8600	13190.1
8700	13359.48
8800	13529.05
8900	13698.79
9000	13868.72
9100	14038.82
9200	14209.09
9300	14379.54
9400	14550.16
9500	14720.95
9600	14891.9
9700	15063.03
9800	15234.31
9900	15405.76
10000	15577.37
10100	15749.14
10200	15921.06
10300	16093.15
10400	16265.38
10500	16437.77
10600	16610.31

表3 N^* のデータ

n	N*
100	56.86514
200	135.7938
300	223.0503
400	315.7148
500	412.4007
600	512.2913
700	614.8469
800	719.6839
900	826.5155
1000	935.1192
1100	1045.317
1200	1156.964
1300	1269.939
1400	1384.139
1500	1499.476
1600	1615.876
1700	1733.271
1800	1851.603
1900	1970.82
2000	2090.874
2100	2211.725
2200	2333.333
2300	2455.666
2400	2578.691
2500	2702.379
2600	2826.703
2700	2951.64
2800	3077.167
2900	3203.262
3000	3329.906
3100	3457.081
3200	3584.769
3300	3712.955
3400	3841.623

3500	3970.759
3600	4100.35
3700	4230.383
3800	4360.847
3900	4491.729
4000	4623.019
4100	4754.708
4200	4886.784
4300	5019.24
4400	5152.065
4500	5285.253
4600	5418.794
4700	5552.681
4800	5686.907
4900	5821.464
5000	5956.346
5100	6091.547
5200	6227.059
5300	6362.878
5400	6498.997
5500	6635.411
5600	6772.114
5700	6909.101
5800	7046.368
5900	7183.909
6000	7321.72
6100	7459.796
6200	7598.133
6300	7736.726
6400	7875.573
6500	8014.668
6600	8154.008
6700	8293.589
6800	8433.407
6900	8573.46
7000	8713.743
7100	8854.254

7200	8994.989
7300	9135.945
7400	9277.118
7500	9418.507
7600	9560.109
7700	9701.919
7800	9843.937
7900	9986.158
8000	10128.58
8100	10271.2
8200	10414.02
8300	10557.03
8400	10700.24
8500	10843.63
8600	10987.21
8700	11130.98
8800	11274.93
8900	11419.06
9000	11563.37
9100	11707.85
9200	11852.51
9300	11997.34
9400	12142.35
9500	12287.52
9600	12432.86
9700	12578.37
9800	12724.04
9900	12869.88
10000	13015.87
10100	13162.02
10200	13308.33
10300	13454.8
10400	13601.42
10500	13748.2
10600	13895.12

表4 N^* の改良版

表 5

n	N'
100	56.34085
200	134.0085
300	219.9521
400	311.1479
500	405.6859
600	505.1578
700	605.1071
800	709.1944
900	815.0325
1000	920.8705
1100	1029.732
1200	1141.459
1300	1251.913
1400	1364.117
1500	1478.39
1600	1593.937
1700	1707.733
1800	1826.78
1900	1943.441
2000	2061.375
2100	2181.696
2200	2300.903
2300	2421.702
2400	2544.888
2500	2666.164
2600	2788.713
2700	2912.854
2800	3036.199
2900	3160.499
3000	3285.913
3100	3410.213
3200	3538.969
3300	3665.02
3400	3790.275
3500	3919.031
3600	4048.902
3700	4175.907
3800	4304.664
3900	4434.216
4000	4563.291
4100	4693.638
4200	4825.896
4300	4954.653
4400	5085.955
4500	5219.009
4600	5350.153
4700	5482.41
4800	5616.737
4900	5749.631
5000	5882.367

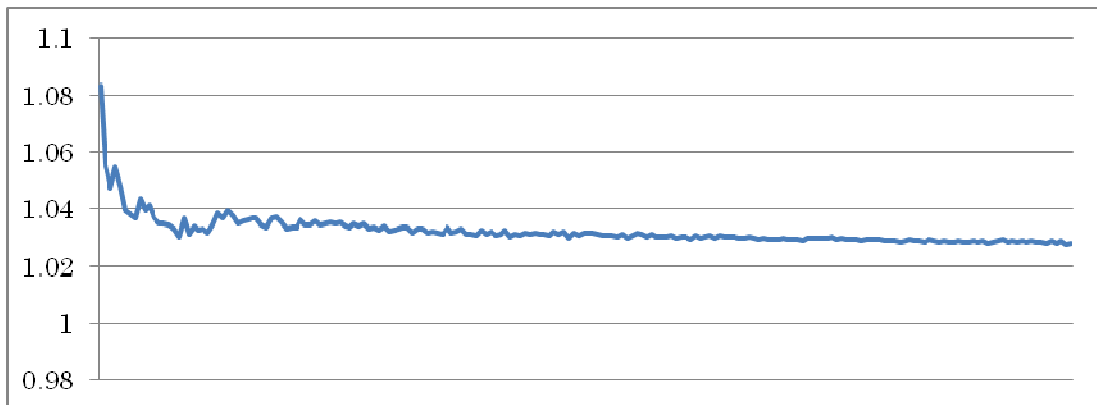


図 8

4. 参考文献

- [1] 「ピタゴラスの三角形」, B. シェルピンスキー著, 銀林 浩訳, 東京図書
- [2] 「数論入門」, 芹沢正三, 講談社ブルーバックス

5. 謝辞

顧問の川口先生には、整数論に関する基

本的な部分を説明していただき、各発表会および本稿について様々なアドバイスをいただきました。また、サイエンス研究会物理班武田君には、データを求める際の基本的なパソコンの使用方法、プログラミングについて説明していただきました。ありがとうございました。

マツタケの人工培養を目指して

2年A組	岡田	瀬礼奈	2年A組	熊谷	京香
2年A組	圓丘	菜月	2年A組	山添	杏珠
2年A組	米田	英里奈	2年C組	榊田	奈央
1年B組	松井	絵莉子	1年B組	大井	緋奈乃
			指導教員	櫻井	昭

1. 要約

私たちの班はシイタケの人工培養に挑戦し、子実体の形成に成功したので報告する。

キーワード 子実体、菌糸、組織、培地

2. 研究の背景と目的

マツタケの人工培養の成功例はいまだ報告されていない。私たちは、なぜマツタケは人工培養が困難なのか興味を持ち、マツタケの人工培養の成功を目指して研究を始めた。まずはじめに、人工培養に成功しているシイタケの培養に挑戦し、マツタケを培養するための基礎固めをすることにした。

3. 研究内容

キノコ培養の本を参考に、寒天培地におけるシイタケの組織培養を行った。寒天培地の組成は、酵母エキス、麦芽エキス、ブドウ糖で、それらを混合させた培養液を寒天で固めた。その培地にシイタケの子実体のじくから採取した組織と、かさから採取した組織を植えた。それらを4サンプルずつ作った。

そして25度で培養し、6日後にかさ、じくのそれぞれ1サンプルずつ菌糸を確かめることができた。菌糸は、植えた組織の周りに白い綿のように生えていた。

次に、子実体をつくることを試みた。子実体は子孫を残さないといけない危機に陥った時に形成されるため、過酷な状況におく必要がある。

そこで、寒天培地よりも栄養が乏しい、おがくずと水のみから成るおがくず培地に菌糸を植え替え、温度を低くして実験してみた。

子実体は菌糸が殖えたあとに危機に陥らないとできないが、菌糸すら殖えないほど栄養が乏しすぎ、失敗に終わった。このことから、子実体を作るのには少しは栄養が必要なのではないかと考え、今回は前回の培地に米ぬかを加えて実験してみた。

実験に使用した培地の組成をまとめると以下ようになる。

・寒天培地(YMG 培地)

酵母エキス	3g
麦芽エキス	7.5g
ブドウ糖	3g
寒天	11.25g
蒸留水	750ml

- ・おがくず培地(米ぬか無し)

おがくず	3500ml
蒸留水	2343ml
- ・おがくず培地(米ぬかあり)

おがくず	900ml
米ぬか	300ml
蒸留水	715ml

温度に注目し実験書を調べたところ低温で培養と書いてあったため温度を下げて設定し、17度で培養することにした。約2か月後培地の中に菌糸が殖えているのが確認された。それがこの写真である。



図1 約2か月後の培地中の菌糸

寒天培地でかさをもとに培養した菌糸、じくをもとに培養した菌糸をそれぞれ2サンプルずつにわけてポットに植えた。①のマークが入ったポットは子実体のじくをもとに培養したものである。



図2

④のマークが入ったポットは子実体のかさをもとに培養したものである。



図3

①と④のマークが入ったポットは子実体のじくとかさをもとに培養した菌糸を混ぜて培養したものである。これをつくったのは、①と④では菌糸の殖え方に違いが生じるかもしれないと考えたからである。



図4

結果よりすべてのポットに菌糸が殖えているのを確認でき、すべてのポットに殖え方の違いはみられなかった。このときから、菌糸にはシイタケの香りが付いていた。

次に、ポット上部の菌糸を培地ごとかき出し、水を注いで20分待ってから水を出し

た。そしてふたを開けたまま 13 度で培養した。このとき、培養器の中の湿度を上げるため、水を入れておいた。この作業を菌かき・注水という。



図 5

ポット全体に菌糸が周り、ポットが白くなると、菌糸が茶色く変色し始め、ところどころに茶色い突起が見られた。

このとき、それらはポット上部だけでなく側面にも見られた。やがて突起が大きくなり、ポット上部の突起は子実体の形に、側面のものは半径 2cm 程の円に成長した。

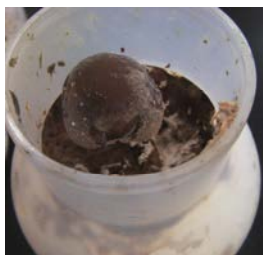


図 6



図 7

上部に子実体ができたポットだけを残してポット内部をトレイに出してみると、ポット側面にできていた円も子実体でありポットの圧力でつぶれてしまっていたことが分かった。このとき、菌糸はしっかりとおがくずに絡み付いていたが、おがくずの内部はおがくずの表面ほど菌糸が集まっていなかった。



図 8



図 9

ポット上部にできた子実体をそのまま培養し続け、菌かきから三か月後にはかさも開いた。



図 10

4. 考察

- ・25度で培養した寒天培地では菌糸は平面的にしか広がらなかったが、17度で培養したおがくず培地では菌糸は下のほうにも広がりを見せた。よって、低い温度で培養したほうが、立体的に菌糸が広がるのではないかと考えた。しかし、使用した培地も違うので追実験が必要である。
- ・じくとかさでは菌糸の殖え方に違いがないことがわかった。
- ・菌糸が茶色く変色し、他の菌に浸食されたかと思われたが、その後子実体ができたため、それはシイタケ菌糸が変化したものだと思われる。
- ・菌糸が茶色くなった後にできた小さな突起は子実体の元であることが分かった。
- ・子実体がポットの側面にもできたのは、菌糸とポットの間隙があったからだと考えられる。
- ・おがくずの内部がおがくずの表面ほど菌糸が集まっていなかったことから、シイタケ菌が、先に周りを囲って他の菌の侵入を防いでから内側に菌糸を伸ばすという殖えかたをするのではないかと考えられる。

5. 今後の課題

シイタケの子実体の形成の方法を確立し、マツタケの人工培養へつなげたい。

しかし、シイタケに使用した方法そのままではマツタケの子実体をつくることはできないと考えられるので、マツタケに適した栄養素、培地、気温など検討していきたい。

6. 参考文献

- [1] 「きのこ実験マニュアル」、善如寺厚、渡辺直明、講談社(1987)
- [2] 「きのこの実験法」、衣川堅二郎、築地書館(1988)

7. 謝辞

サイエンス研究会生物班の活動において、櫻井先生と奈良女子大学の植野先生、片桐美香さんに、多大なご指導を賜りました。

この場で、深く感謝申し上げます。

猿沢池の水質から七不思議を考える

2年C組 狩田 帆乃夏
2年C組 赤木 美穂
2年B組 梅本 京芳
2年B組 森本 奈都子
2年A組 佐藤 輝歩
指導教諭 矢野 幸洋

1. 要約

猿沢池の水質およびプランクトンについて調査した。その結果から、猿沢池の七不思議についての考察および検証実験をした。

キーワード プランクトン、七不思議、COD、BOD

2. 研究の背景と目的

古くから、奈良八景として親しまれてきた池、猿沢池。本校近くのその池には『澄まず 濁らず 出ず 入らず 蛙はわかず 藻が生えず 魚が七分に水三分』という七不思議がある。

この七不思議が本当に正しいのか、という先輩方の研究を引き継ぎ、それを解明するため、プランクトンの発生と環境データとの関係を調べた。

3. 研究内容

3-1. 実験方法

- (1) プランクトンネットを使用し、あらかじめ決めた5か所(次ページ参照)で綺麗に水洗いした採水ビンに一本分の水を採集した。気温、天候を①の場所で調べた。
- (2) 採集した直後にその水を利用して pH と COD, リン酸、硝酸、水温を調べた。
- (3) 持ち帰ったサンプルを、それぞれ

30ml ずつ遠心分離管に入れ、約1分間遠心分離した。

- (4) 底に沈殿したプランクトンを吸い上げ、スライドガラスに1滴ドロップし、プレパラートを1枚ずつ作製した。
- (5) プレパラートを端から順にまんべんなく観察した。このとき、植物プランクトンについては、個体数の少ないもののみカウントし、数の多いものはどの種類が主に多かったのかを記録した。動物プランクトンについては、形の残っている物のみカウントし、すべての種類について数を数えた。

pH、気温、水温の測定はデジタル pH 計を、COD、硝酸、リン酸については、パックテストを用いて測定した。天気は肉眼で確認した。

原則的に定期的な調査・観察を目標としているが、行事などにより抜ける場合があった。

池全体の様子をより詳しく調査するため、周囲の状況や、環境に特徴のある5か所を設定した。

各箇所を回る時間差は、それぞれ約15分以内なので、気象条件の影響などは特に考慮しないことにする。

<調査地点>

- ① 
 - ・池沿いの歩道
 - ・地面は石畳
 - ・水深は約55cm
- ② 
 - ・池沿いの歩道
 - ・地面は石畳
 - ・近くに鳩が多い
- ③ 
 - ・池沿いの植え込み
 - ・地面は砂
 - ・他の場所より人の往来が少ない
- ④ 
 - ・池沿いの道路
 - ・地面はアスファルト
 - ・池中に排水溝がある
- ⑤ 
 - ・池沿いの道路
 - ・地面はアスファルト
 - ・柳の木の真横



猿沢池全体図

なお、写真は全て2010年7月22日に撮影したものである。

(2) 実験結果

実験結果は、表1、2とグラフ1のとおりである。表2における空欄は、手違いにより観測できなかったことを表す。観察された主なプランクトンの写真を本論文の最後に掲載した。

- ・表1より、プランクトンは、特定の種類の個体数が急激に増える傾向があった。また、年間を通して藍藻類が多く確認できているが、緑藻類は少なかった。また、珪藻類は、暑い時期に種類数、個体数ともに多く確認できた。
- ・表1とグラフ1より、気温と水温が下がると、CODも低下し、個体数や種類数も減少した。また、夏場の暑い時期は特に動物プランクトンの数が増えた。
- ・表2より、①～⑤では、pHとCODの値に大きな差はなかった。リン酸、硝酸は年間を通して大きな変化はなかった。
- ・夏場気温が高い時期になると濁りが濃くなり、冬場気温が下がると池の水は澄むことが目視により確認できた。

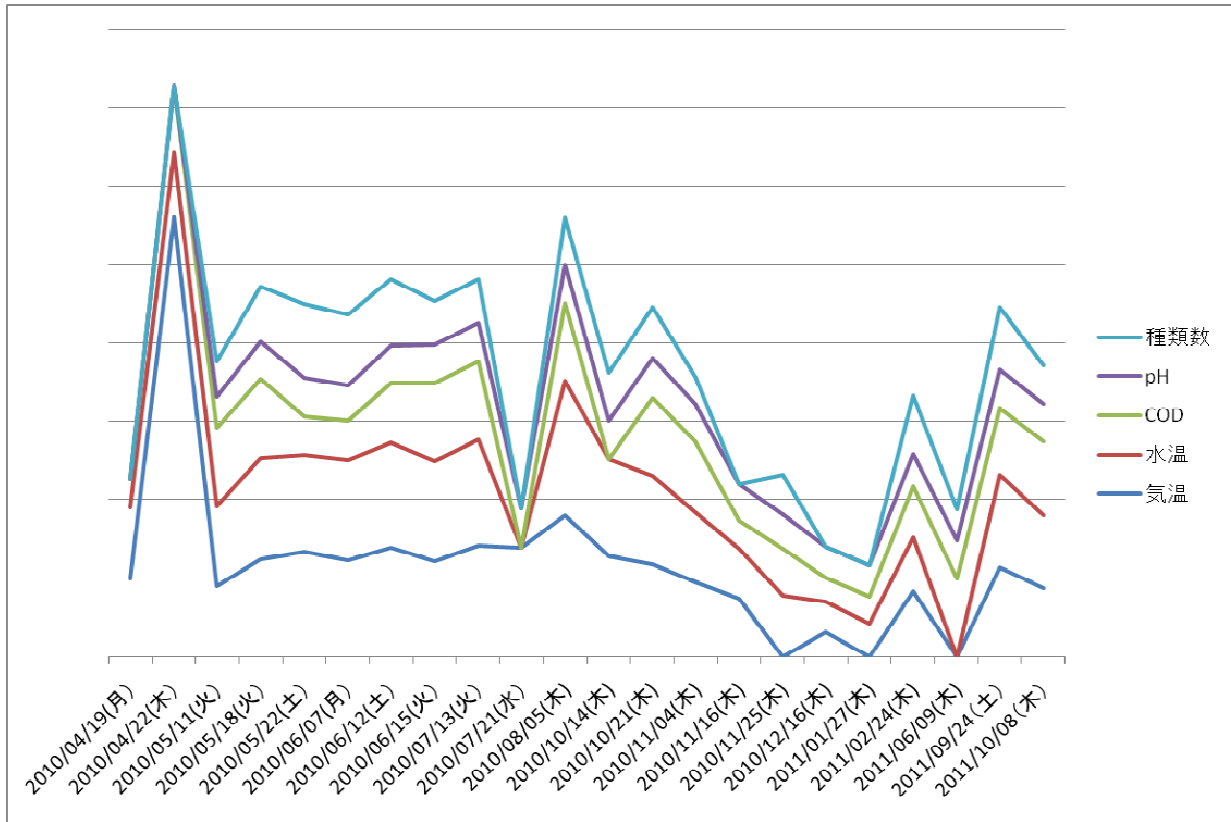
(3) 考察

- ・夏になると気温が高くなるため、よりプランクトンが増加したと思われる。
- ・表2より、pHは冬に近づくほど値が低くなり、中性に近くなる。これは、プランクトンの減少に関係があるのではないかと思われる。CODの値についても同様のことがいえる。
- ・リン酸と硝酸については、数値の変化があまり見られないため、プランクトンの

	天気	気温	水温	pH	COD	硝酸	リン酸	種類数	
2010/08/05(木)①	晴れ時々曇り	36	34	9.6	20	0.2未満	0.02	12	
②			9.4					11	
③			9.4					11	
④			9.3					9	
⑤			9.3					11	
2010/10/14(木)①	晴れ	26	25	9.8			0.02	12	
②			25	9.8				0.02	11
③			24	9.8				0.02	11
④			24	9.8				0.02	9
⑤			25	9.7				0.02	11
2010/10/21(木)①	晴れ	24	23	10	20	0.2未満	0.02未満	13	
②			22	9.9	17	0.2未満	0.02	11	
③			22	9.9	20	0.2未満	0.02	8	
④			22	9.6	20	0.2未満	0.02	9	
⑤			24	9.8	20	0.2未満	0.02未満	13	
2010/10/28(木)①	曇り時々雨	18	18	9.8	18	0.2	0.02未満	4	
②			16	9.7	15	0.2未満	0.02未満	5	
③			16	9.7	18	0.2未満	0.02未満		
④			18	9.7	20	0.2	0.02未満		
⑤			17	9.7	19	0.2	0.02未満		
2010/11/04(木)①	晴れ	19	18	9.4	18	0.2未満	0.02	7	
②			17	9.4				9	
③			17	9.3	17	0.2未満	0.02未満	5	
④			18	9.4	17	0.2未満	0.02未満	9	
⑤			18	9.4	17	0.2未満	0.02	5	
2010/11/16(木)①	晴れ	15	13	9.1	7	0.2未満	0.02未満		
②			13	9.2	10	0.2未満	0.02未満		
③			12	9	11	0.2未満	0.02未満		
④			14	9.2	19	0.2未満	0.02未満		
⑤			15	9	12	0.2未満	0.02未満		
2010/11/25(木)①	晴れ		16	8.6	12	0.2未満	0.02未満	10	
②			16	8.8	12	0.2	0.02	11	
③			15	8.7	12	0.2未満	0.02未満	5	
④			16	8.6	15	0.2未満	0.02未満	4	
⑤			16	8.5	12	0.2未満	0.02	5	
2010/12/16(木)①	曇り	6.5	7.6	7.9	6	0.2未満	0.02未満		
②			7.5	8.8	5	0.2未満	0.02未満		
③			7.5	7.9	5	0.2未満	0.02未満		
④			7.4	7.5	5	0.2未満	0.02未満		
⑤			8.1	8	8	0.2未満	0.02未満		
2011/01/27(木)①	曇り		8.4	7.8	7	0.2	0.02未満		
②			8.2	8.3	5	0.2	0.02		
③					3	0.2	0.02		
④					17	0.2未満	0.02未満		
⑤			6.7	8.1	5	0.2	0.02		
2011/02/24(木)①	曇り	17	14	8.1	13	0.2	0.02未満		
②			14	7.9	13	0.2	0.02		
③			14	7.9	13	0.2	0.02		
④			15	7.9	18	0.2	0.02		
⑤			15	8.1	18	0.2	0.02		
2011/06/09(木)①	曇り			9.7	20	0.2	0.02		
②				9.8	20	0.2	0.01		
③				9.1	20	0.2	0.01		
④				9.7	20	0.2	0.01		
⑤				9.6	20	0.2	0.02		
2011/09/24(土)①	快晴	23	24	9.5	17	0.2	0.03		
②			23	9.1	18	0.2	0.05		
③			23	9.4	20	0.2	0.02		
④			24	9.3	20	0.2	0.05		
⑤			24	9.3	20	0.2	0.03		
2011/10/08(木)①	快晴	18	19	9.2	19	0.2	0.02		
②			17	9.1	11	0.2	0.02		
③			17	9.2	11	0.2	0.02		
④			17	9	11	0.2	0.02		
⑤			16	9	12	0.2	0.02		

▲表 2 環境データ

▼グラフ 1 環境データの推移



4. 今後の課題

環境データとプランクトンの採集についての改善点と、これからの実験方針を次に述べる。

- データの欠落が多いので、管理やまとめを徹底する。
- 一週間に一度の採集を目標にする。また、次回採集時から、濁度、BOD の計測も行う。
- 『澄まず 濁らず』以外の七不思議も解明していきたい。
- 他の池にも水を採集に行き、猿沢池と比較することで、七不思議の解明につなげたい。
- 猿沢池で私たちが観察したプランクトンをまとめ、図鑑を作っていきたい。
- 先輩方の研究の引継ぎとして、基本データだけでなく、培養実験などを行っていききたい。

5. 参考文献

- [1] 『新編 湖沼調査法』、西條八東、三田村 緒佐武、講談社サイエンティフィク (1995)
- [2] 『やさしい 日本の淡水プランクトン 図解ハンドブック』、一瀬諭、若林徹哉、合同出版株式会社(2005)
- [3] 『奈良公園内の池沼、河川の水質』、一伊達 統、久良 美幸、上岡 岳 奈良教育大学(1994)
- [4] 『改訂版 フォトサイエンス生物図録』、鈴木孝仁、数研出版(2007)

6. 謝辞

今回の研究にあたり、指導してくださいました矢野先生、櫻井先生に深く感謝申し上げます。



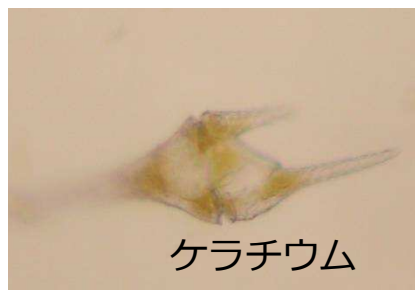
アナベナ・マクロスポーラ



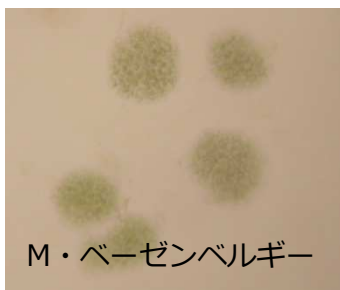
アナベナ・スピロイデスクラッサ



コエラストルム



ケラチウム



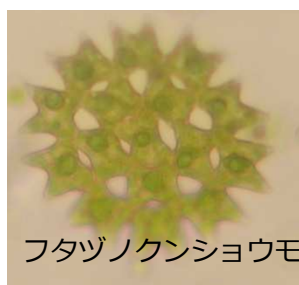
M・ベーゼンベルギー



M・イクチオブラーベ



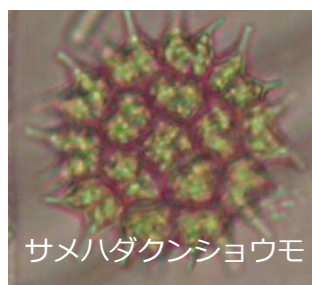
M・ノバセッキ



フタヅノクンショウモ



フタヅノクンショウモ
(変種)



サメハダクンショウモ



ケンミジンコ



ゾウミジンコ



ワムシの仲間



ヒゲナガケンミジンコ



ブレファリズマ



ヒスチオバランチウム

猿沢池の環境調査に関する追実験

5年C組 野依 莞奈
5年A組 浪江 智子
5年C組 坂田 実咲
指導教諭 矢野 幸洋

1. 要約

約3年間に渡り、行ってきた猿沢池の環境データの採集をもとに、植物プランクトンの培養実験、猿沢池周辺の池の環境調査を行った。その結果、植物プランクトンがどのような条件下で増えやすいのかという傾向をつかむことができた。

キーワード プランクトン、培養、クロロフィル、水質

2. 研究背景と目的

私たちは、約3年間に渡り、猿沢池の環境データ採集を行ってきた。それらが続ける中で浮かんだ疑問を解消するために、プランクトンの培養実験とクローバーのクロロフィル抽出を行った。また、猿沢池と比較するために、周辺の池の環境調査を行った。なお、環境データ収集は生物班の後輩に引き継がれている。

2日間とも時間帯を合わせた。調査地点は以下のとおりである。

- ①計測を始めるタイミングで時間を記録し、天気を確認した。
- ②プランクトンネットを用いて、フィルムケース一本分の水を採集した。
- ③池の水から直接、pH計とパックテストを用いて、水温、pH、COD、硝酸態窒素、リン酸態リンを計測した。

3. 研究内容

4つの調査・実験を行った。

(2) 実験結果

各調査地点の結果は以下のとおりである。

[I] 周辺の池の環境調査

参考文献の[3]をもとに、猿沢池周辺の池で、特にpHの値が塩基性であるところ、また中性に近い値であるところをピックアップし、猿沢池の環境データの調査と同じ方法でデータ採集を行った。

	場所	天気	水温	pH	COD
12.01.09	博物館	晴れ	9.9	8.07	7
	三社池	晴れ	7.1	8.39	9
	鏡池	曇り	11.1	8.9	10
	長池	雨	10.2	8.27	12
	大仏池	晴れ	9.7	8.97	11
12.01.10	鷺池	晴れ	7.3	9.23	10
	猿沢池	晴れ	9.2	9.2	11
	荒池	晴れ	9.5	8.36	13

(1) 実験方法

今回の調査は、2日間に分けて行った。

すべての場所において、硝酸態窒素、リン酸態リンはそれぞれ0.2未満、0.05未満

- ・双方の水は緑に濁り、上に藻のようなものが張っていた。
- ・Volvic は SMB に比べ無機塩類が大幅に少ないが、プランクトンが多く確認できた。
- ・SMB では緑藻類が多く確認できた。

[IV] 成分比較実験

Volvic に含まれる主な無機塩類について、どの物質がプランクトンの培養に必要なかを調べるために次の実験を行った。

(1) 実験方法

- ①0.5mol/ml の KCl, NaCl, CaCl, MgCl 溶液を 100ml ずつ作ったものと蒸留水を、それぞれ試験管 3 本に 5ml ずつとった。なお、これらの物質はすべて塩基物でしか存在しておらず、すべての物質において塩素イオンが含まれているため、差は無いものとする。
- ②それぞれの試験管に 0.5ml ずつ猿沢池の水を遠心分離し、沈殿したプランクトンを入れ、23°C の常温庫で一週間保管したのち顕微鏡で観察する。

(2) 実験結果

	蒸留水	CaCl	MgCl	KCl	NaCl
pH	7.12	7.06	7.23	7.11	7.16
濃度(mol/ml)	0	0.0735	0.102	0.0373	0.0292

▲用いた溶液 ▼見られたプランクトン

	蒸留水	CaCl	MgCl	KCl	NaCl
藍藻	○	△		△	
珪藻	○	△		△	
原生	△				
ワムシ	△				

○:確認できた △:少し確認できた 空白:確認できず

- ・表から、MgCl、NaCl 共にプランクトンは確認できなかった。
- ・最初に加えたプランクトン数より確認できた量は少なくなっていた。
- ・蒸留水でプランクトンが最も多く見られた。

4. 考察

[I] 周辺の池の環境調査について

今回の計測結果より、近辺の池は、塩基性の水質であることが分かった。また、どの地点においても、リン酸、硝酸に大きな差はなく、猿沢池が特に他と違っているというような傾向はみられなかった。広い面積をもつ池ほど COD が少し高めである傾向があった。

[II] 液性における比較実験について

珪藻類は酸性の環境で増えやすい傾向があり、また、藍藻類はアルカリ性の環境で増えやすい傾向があるということがわかった。

[III] Volvic と SMB の比較実験について

Volvic は SMB に比べ無機塩類の濃度が大幅に低い、プランクトンが多く確認できた。このことから、プランクトンの培養には無機塩類の濃度は低いほうが好ましいと考えられる。また、緑藻類は他のプランクトンが生きていくには適さない高濃度の無機塩類でも殖えることができると考えられる。

[IV] 成分比較実験

今回実験で用いた溶液は、無機塩類の濃度が濃すぎたため、培養には不適であると

考えられる。また、培養に使ったプランクトン量が少なかったことも考えられる。

5. 今後の課題

今回の調査では、七不思議を解明できるような新しい手がかりを発見することができなかった。今後も、年4回程度を目安に調査をつづけ、データを増やすことで、手がかりを見つけていきたい。

また培養においては、「Ⅲ. Volvic と SMB における比較実験」で、Volvic と SMB だけでなく、対照実験として蒸留水での増え方も調べるべきであったと考える。

「Ⅳ. 成分比較実験」においては、MgCl, NaCl, CaCl, KCl のうちどの成分が必要であるかを濃度を低くして調べたい。また、4つの成分のうち3つの成分を組み合わせる実験をしたい。その際、今までの猿沢池の観察データより、池は塩基性であると分かっているので、培養液を塩基性にして調べたい。

猿沢池の水質から七不思議を考えることの補足実験としてこれらの実験を行い、最終的には実験の結果や考察を七不思議の解明と結び付けていきたい。

6. 参考文献

- [1]『新編 湖沼調査法』、西條八東、三田村 緒佐武、講談社サイエンティフィク (1995)
- [2]『やさしい 日本の淡水プランクトン 図解ハンドブック』、一瀬諭、若林徹哉、合同出版株式会社 (2005)
- [3]『奈良公園内の池沼、河川の水質、一伊達 統、久良 美幸、上岡 岳 奈良教育大学(1994)

- [4]『改訂版 フォトサイエンス生物図録』 鈴木孝仁、数研出版(2007)

7. 謝辞

今回の研究にあたり、指導してくださいました矢野先生、櫻井先生に深く感謝申し上げます。



▲国立博物館前

▼三社池



▼長池



▲鏡池

▼鷺池



▲大仏池



▲猿沢池

エネルギーの変換効率について

3年A組 中森 春奈

3年C組 行松 美樹

指導教諭 藤野 智美

1. 要約

サイエンス研究会地学班は、エネルギーに関する研究活動を行っている。抽象的なイメージの強いエネルギーというものを、科学的に分析することを目的としている。今回はエネルギーが変換される性質を利用して、エネルギーの変換効率について考察した。様々なエネルギーが電気エネルギーに変換される際の変換効率を良くするためには、どのような工夫が必要かを考え実験を行った。本稿ではその一例を紹介したい。

キーワード 発電機、エネルギー変換、変換効率、グリース、油、仕事量

2. 研究の背景と目的

今、エネルギー問題が世界中で話題になっている。日本においても、東日本大震災をきっかけとして、エネルギー問題が大きく取り上げられるようになった。そこで、私たちはエネルギーとは何か、またエネルギーをつくるとはどういうことなのかということに興味をもちはじめた。

しかし、私たちがもつエネルギーのイメージは抽象的なものが多く、具体的なイメージが非常に少ない。そこで、今回の研究ではエネルギーを科学的に考察することを目的とし、その基礎研究としてエネルギーの変換効率の測定を行った。

3. 研究内容

(1) 基礎知識

変換効率を考える前に、発電効率の求め方をまとめておく。

①エネルギーの変換について

エネルギーには以下のように様々な種類

がある。

位置エネルギー、運動エネルギー、
光エネルギー、熱エネルギー、
電気エネルギー、…etc

これらのエネルギーは、その総和を保った状態で互いに変換することが可能である。これらエネルギーを電気エネルギーに変換することで発電を行っている。例えば水力発電では水の位置エネルギーを最終的に電気エネルギーに変換している。

②エネルギーの変換効率について

水力発電を例にして考える。エネルギーが変換される際、もとの位置エネルギーが100%電気エネルギーに変換されるわけではない。発電の過程において、タービンを回す際に熱エネルギーが発生するなど、その過程の中で別のエネルギーへの変換を伴う場合が多い。そのため、エネルギーの変換効率という考え方が重要となる。あるエ

エネルギーを変換して電気エネルギーを得る場合を考えると、変換効率 e は、

$$\begin{aligned} \text{変換効率 } e &= \frac{\text{変換後の電気エネルギーの量}}{\text{変換前のエネルギー量の総和}} \times 100 \end{aligned}$$

で与えられる。

③今回の実験について

今回は、手回し発電機のハンドル部分をプーリーに変え、そこにひもを巻き付け、おもりをつるすことができるように手回し発電機を改造した。この改造した手回し発電機におもりをつるして落下させることで、電気エネルギーを発生させた。これは、おもりが最初に持っていた位置エネルギーを電気エネルギーに変換したと考えられる。

おもりの持つ位置エネルギーは、おもりの質量を $m[\text{kg}]$ 、重力加速度を $g[\text{m/s}^2]$ 、高さを $h[\text{m}]$ とすると、以下の(1)式で与えられる。

$$E = mgh \quad \dots (1)$$

また、発生した電気エネルギーは、電流を $I[\text{A}]$ 、電圧を $V[\text{V}]$ 、時間を $t[\text{s}]$ とすると、以下の(2)式で与えられる。これを先ほどのエネルギーの変換効率の式にあてはめると、今回の実験における変換効率は以下のように表される。

$$e = \frac{IVt}{mgh} \times 100 \quad \dots (2)$$

今回の実験では、 IVt における電流 I 、電圧 V 、おもりの落下時間 t 、おもりの質量 m 、おもりの落下距離 h を測定した。重力加速度 g は $9.8[\text{m/s}^2]$ を用いた。

これらの基礎知識をもとに、今回行った実験内容について説明する。

(2) 実験内容

①使用した実験器具について

改造した手回し発電機におもりをつるし、そのおもりが落下することを利用して発電を行った。この場合、おもりが最初に持っている位置エネルギーが電気エネルギーに変換されることになる。今回の実験では、この発電方法における変換効率を調べるとともに、改良を加えることにより、どうすれば効率が良くなるのかを検討した。

なお、抵抗には可変抵抗を用い、おもりができるだけ一定の速度で落ちるように調節を試みた。以下に回路図を示す。

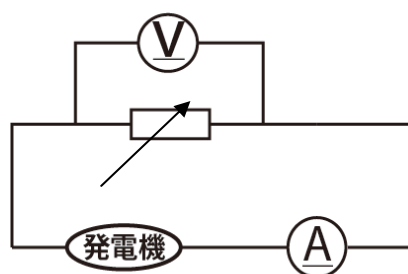


図1 回路図



図2 改良した手回し発電機

②測定方法について

今回の実験では、以下の方法を使って、おもりの落下時間、落下距離、電流、電圧を測定した。

・落下時間

おもりをつるしたひもを手で放し、目で見て速度が等速になった高さからの落下時間を測定した。時間の計測を開始し、おもりがある程度落下した後、再度手でひもをつかみ時間の計測を終えた。

・落下距離

物差しを机に固定し、落下距離を測定した。上記のように、おもりが等速になったと判断できた位置から落下距離を測定した。なお、落下距離を読みやすくするための工夫として、図3のようにおもりをつるしたひもに小さな結び目を作り、この結び目の移動距離を読むことで、落下距離を求めた。

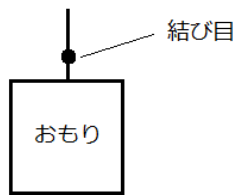


図3

[実験1]

200gのおもりを使って発電し、そのときのおもりの落下時間、落下距離、電流、電圧を測定する。

[実験1の結果]

おもり 200g の場合

	時間 [t]	距離 [m]	電流 [A]	電圧 [V]
①	4.53	0.592	0.041	1.20
②	5.04	0.630	0.040	1.20
③	5.38	0.685	0.040	1.20
④	6.12	0.760	0.041	1.20
⑤	6.18	0.750	0.042	1.25

<算出されたエネルギーの変換効率>

前ページの(2)式にそれぞれの値を代入してエネルギーの変換効率を求めた。

- ①19.2% ②19.6% ③19.2%
④20.2% ⑤21.8%

・①～⑤の平均変換効率…20.0%

[実験1の分析]

・どの場合もほぼ同様の変換効率を得られた。

[実験2]

おもりを 300g にかえ、実験1と同じ実験をした。

[実験2の結果]

おもり 300g の場合

	時間 [t]	距離 [m]	電流 [A]	電圧 [V]
①	3.28	0.713	0.088	2.55
②	2.98	0.660	0.090	2.60
③	3.49	0.756	0.089	2.65

<算出されたエネルギーの変換効率>

- ① 35.1% ② 35.9% ③ 37.0%

・①～③の平均効率…36.0%

[実験2の分析]

・実験1と実験2を比較すると、200gより、300gのおもりの場合の方が変換効率は良かった。2つの例で比べただけなので重くなることで効率が良くなったという確証は得られないため400g、500gで同じ実験をするなど、追実験を行う必要があると考えられる。

[実験3]

発電機の歯車の回り方をスムーズにすることで発電効率が上がるのではないかと考え、発電機の歯車の周りにグリースをぬった状態で、実験2と同じ実験を試みた。

[実験3の結果]

おもり 300g の場合

	時間 (t)	距離 (m)	電流 (A)	電圧 (V)
①	2.80	0.618	0.080	2.60
②	3.10	0.665	0.082	2.55
③	3.70	0.640	0.082	2.53

結果1と同様の単位で測定した

- それぞれの効率
① 32.1% ② 33.2% ③ 33.9%
- ①～③の平均効率…33.1%

[実験3の分析]

- 実験2と比較すると効率が少し低下した。これはグリースの粘性によって回転しにくくなったのではないかと考えられる。またグリースを油に変えたり、塗る場所を変えたりして追実験を行い、観察を行いたい。

4. 考察

実験1から実験3の結果をふまえ、次のような考察を行った。どの実験の場合も、目盛りが振動してしまい、電流計と電圧計の値が安定せず、振動の中央の値を読むことになった。

原因として、おもりが等速で落ちていない、または、プーリーの取り付けがしっかり固定されておらず、ふらつくという理由

が考えられる。

実験2でおもりの質量を大きくした際に変換効率が上がっているが、モーターの回転速度と関係があるかどうか考察を行う必要がある。

歯車にグリースを塗った場合、変換効率が下がってしまったが、変換効率の測定の精度に改良の余地が多い(プーリーの取り付けの改良など)ため、これらの要因を改善した上で油に変えるなどの実験を行うべきである。

5. 今後の課題

おもりの速度の測定や、発電機の改良を優先して行い、実験の精度を上げることが必要であり、その上で発電効率の測定を行いたい。また本来、発電効率はモーターの性能に左右される場合が多いが、同じモーターでも発電効率とモーターの回転数の間に関係があるかどうかを調べたい。

6. 謝辞

サイエンス研究会地学班の活動において、藤野先生、米田先生に多大なご指導を賜りました。加えて、サイエンス研究会物理班の生徒のみなさんにも様々な指摘をいただきました。深く感謝申し上げます。

平成23年度 SSHサイエンス研究会
生徒研究論文集

平成24年(2012年) 3月31日 発行

国立大学法人 奈良女子大学附属中等教育学校

〒630-8305 奈良市東紀寺町1丁目60-1

TEL. 0742-26-2571

FAX 0742-20-3660

<http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/>