

The background features a repeating pattern of vertical, elongated, teardrop-like shapes. Each shape has a purple outer layer and a blue inner layer, with a thin red outline. The shapes are arranged in five vertical columns, with varying lengths and orientations. The overall effect is a textured, decorative border.

平成 24 年度

スーパーサイエンスハイスクール

サイエンス研究会 研究論文集

SUPER SCIENCE HIGHSCHOOL SCIENCE LABORATORY

NARA WOMEN'S UNIVERSITY SECONDARY SCHOOL

平成 24 年度 SSH サイエンス研究会  
研究論文集

奈良女子大学附属中等教育学校

平成 25 年 3 月 1 日

# 平成 24 年度 SSH 生徒研究論文集

## 目次

刊行にあたって	p.1
奈良女子大学附属中等教育学校の SSH カリキュラム	p.2
<b>研究論文</b>	
<b>物理班</b>	
電球の探究	p.7
H8 マイコンによるライントレースカーの製作	p.15
STM32 マイコンを用いたマトリックス LED の制御	p.17
文字認識ソフトの作成	p.21
Web カメラの映像からの目検出ソフトの開発	p.31
シミュレーションで交通渋滞を考える	p.39
拡張型情報表示デバイスの開発	p.47
太陽光発電の発電量は何によって決まるか	p.55
自分だけの目覚まし時計	p.57
マイクロ波実験装置の改良	p.63
<b>数学班</b>	
組みひもについて考える	p.67
素数の並びに規則はあるのかⅡ	p.83
真の約数の和に関する考察	p.91
ピタゴラス三角形とピタゴラス数	p.96
<b>化学班</b>	
カルボン酸を配位子とした酸化銅(Ⅱ)による金属錯体の合成	p.150
<b>生物班</b>	
マツタケの人工培養を目指して	p.154
猿沢池の水質からプランクトンを考える	p.159
<b>地学班</b>	
エネルギーの変換について	p.165
「サイエンスライブ」参加報告	p.169

平成 24 年度 SSH スーパーサイエンスハイスクール  
サイエンス研究会研究論文集  
刊行にあたって

奈良女子大学附属中等教育学校では、平成 22 年度より、第Ⅱ期スーパーサイエンスハイスクール(SSH)研究開発を実施しております。平成 17 年度から 5 年間実施しました第Ⅰ期 SSH において、理数に興味関心のある生徒の課外活動として「サイエンス研究会」を創設し、数学・理科・科学技術に関する生徒の研究活動を、奈良女子大学をはじめとする国内外の研究諸機関と連携して支援してきました。学校を卒業後も能力を伸ばしていく科学的素養を持った人間を育成することをめざす第Ⅱ期 SSHにおいてもサイエンス研究会の活動を SSH 研究開発の大きな柱としております。

本研究論文集は、数学班、物理班、化学班、生物班、地学班からなる「サイエンス研究会」の生徒たちが、自ら研究テーマを設定し、どのように課題を解決していったか、その研究活動の軌跡であり、生徒たちの課外活動の報告書とでもいふべきものであります。これらの活動について、生徒たちは、学内発表会を始め、各種の学会・科学コンテストに積極的に参加し、広く活動成果を発表するとともに、大きな成果をあげました。

「サイエンス研究会」における活動では生徒たちは、学年を超えた様々な能力を持つ先輩後輩とのやりとりや、一線の研究者との交流を通して、未知の課題に取り組む姿勢や困難を克服した時の喜びを知ることができました。内容については、まだ未熟な部分も多々ありますが、このような経験は、将来どのような分野に進むにしても、その生徒にとって大きな力になるものと確信しています。そういった意味で、この報告集を単なる知識や技能の寄せ集め、と捉えるのではなく、生徒たちの人間的成長の証と観ていただければ幸いです。また、同時に、今後新たな科学技術の発展に寄与できる人材の育成も視野に入れて、皆様から忌憚のないご意見、ご助言、ご指導をいただければ、と思います。

最後になりましたが、SSH 運営指導委員の先生方、大学・研究機関の先生方、そして様々なご支援を賜りました皆様に、心より感謝申し上げますとともに、今後なお一層のご指導、ご支援をいただきますようお願いいたします。

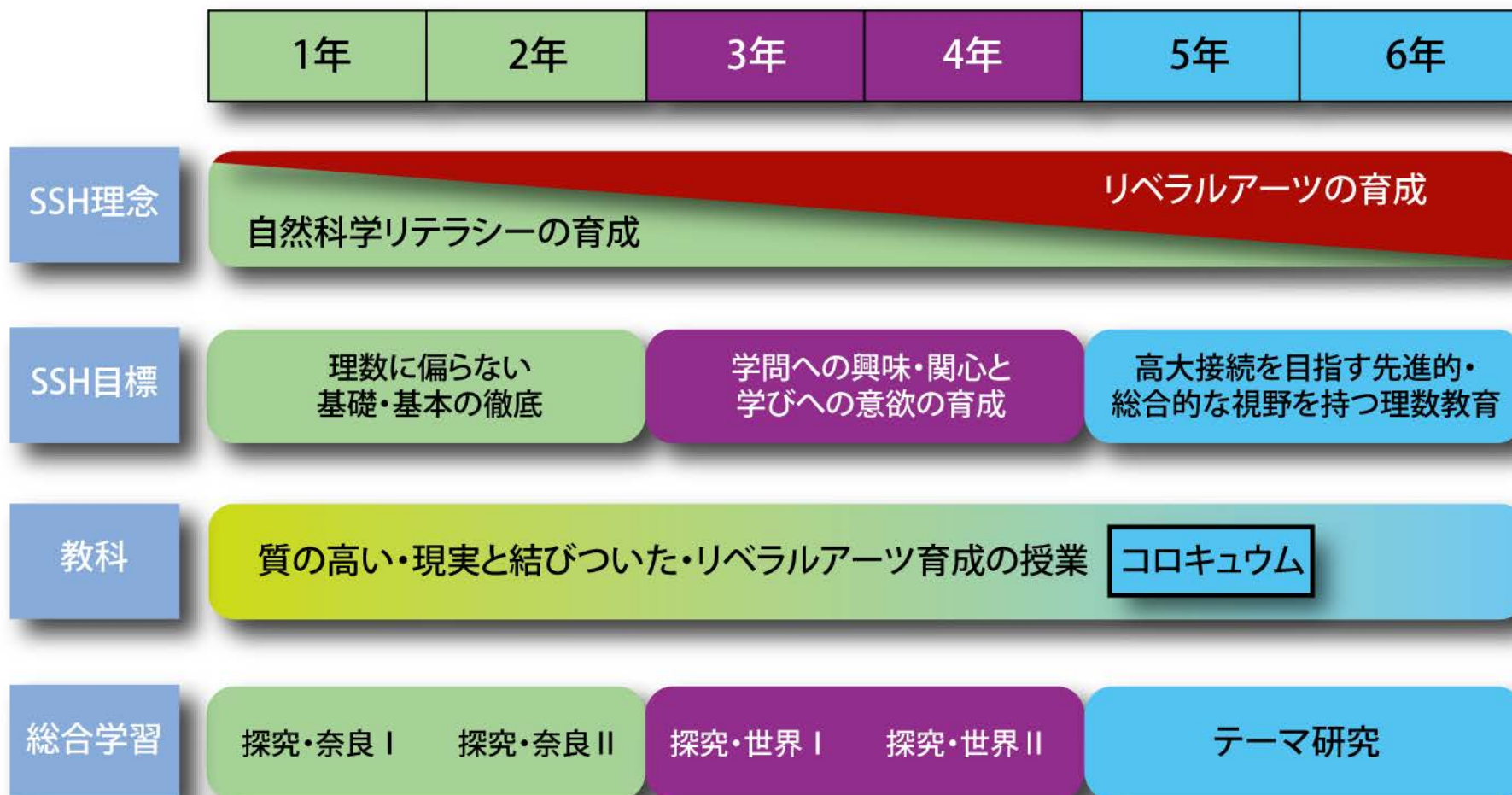
平成 25 年 3 月

奈良女子大学附属中等教育学校  
校長 小林 毅

2012年度(平成24年度)教育課程

時間	1年		2年		3年		4年		5年		6年										
	共通	共通	共通	共通	共通	共通	文系	理系	文系	理系	文系	理系									
1	国語基礎(4)	国語基礎(3)	国語総合(4)	国語総合(5)	現代文(2)		現代文(2)														
2					情報と表現(1)	古文(2)		古典(2)													
3		漢文(1)				日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) * (3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) * (3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 政治・経済(3) * (3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 政治・経済(3) * (3)												
4		社会・地理(3)	社会・歴史(3)		現代社会(2)					現代社会(2)	古典講読(1)										
5	基礎数学 I (4) ・代数 ・幾何	基礎数学 II (5) ・代数 ・幾何	現代社会(2)	数学探究 I A(3)	現代史(2)	世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) * (3)	物理(3) 生物(3) * (3)	世界史B(3) 政治・経済(3) △(0)or(3)	化学(4) △(0)or(4)												
6					現代史(2)					化学基礎(2) * (2)	化学基礎(2) 化学(2) * (4)	日本史特講(2) 世界史特講(2) 地理特講(2) △(0)or(2)	物理(4) 生物(4) △(0)or(4)								
7			基礎理科 I (4)		基礎理科 II (4)	自然探究 I (3)	現代史(2)	地学基礎(2) 音楽 II (2) 美術 II (2) △(0)or(2)	解析 I (4) * (4)	解析 I (4) * (4)	文化と社会(3) 数学発展演習(2) 音楽 III (2) 美術 III (2) △(0)or(2)or(3)	代数・幾何 IV / 特論(3) △(0)or(3)									
8							自然探究 II 物理基礎(2) 生物基礎(2) (4)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) * (2)					代数・幾何(3) △(0)or(3)	代数・幾何(3) * (3)	発展現代文(2) △(0)or(2)	解析 IV / 特論(5) △(0)or(5)					
9	情報と科学(1)	音楽(2)	音楽(2)	数学探究 I B(2)	代数・幾何(3) △(0)or(3)	代数・幾何(3) * (3)	文化と社会(3) 数学発展演習(2) 音楽 III (2) 美術 III (2) △(0)or(2)or(3)		代数・幾何 IV / 特論(3) △(0)or(3)												
10	基礎理科 I (4)							基礎理科 II (4)		自然探究 I (3)	自然探究 II 物理基礎(2) 生物基礎(2) (4)	代数・幾何(3) △(0)or(3)	代数・幾何(3) * (3)	文化と社会(3) 数学発展演習(2) 音楽 III (2) 美術 III (2) △(0)or(2)or(3)	代数・幾何 IV / 特論(3) △(0)or(3)						
11				美術(2)	美術(2)	技術総合・ 家庭総合(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) * (2)		代数・幾何(3) △(0)or(3)							代数・幾何(3) * (3)	文化と社会(3) 数学発展演習(2) 音楽 III (2) 美術 III (2) △(0)or(2)or(3)	代数・幾何 IV / 特論(3) △(0)or(3)			
12	工創基礎 1 生活基礎 1 (2)							工創基礎 2 生活基礎 2 (2)		体育(3)	家庭総合(2)	代数・幾何(3) △(0)or(3)	代数・幾何(3) * (3)	文化と社会(3) 数学発展演習(2) 音楽 III (2) 美術 III (2) △(0)or(2)or(3)	代数・幾何 IV / 特論(3) △(0)or(3)						
13	体育(3)	体育(2)	保健(1)	体育(2)	Reading(2) △(0)or(2)	体育(3)	Topic Studies II(3)	Reading(2) △(0)or(2)	数学演習 I II (2) △(0)or(2)												
14										IE(3)	IE(3)	IE(Reading)(3)	IE(Reading)(3)	Topic Studies I(3)	Topic Studies II(3)	Reading(2) △(0)or(2)	数学演習 I II (2) △(0)or(2)				
15																		BE(1)	BE(1)	NET (Speaking) (1)	NET (Speaking) (1)
16										NET(1)	NET(1)	情報の科学(1)	情報の科学(1)	Writing(1)	Reading(2) △(0)or(2)	数学演習 I II (2) △(0)or(2)					
17	道徳(1)	道徳(1)	探究・世界 I (2)	探究・世界 I (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
18									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
19	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
20									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
21	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
22									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
23	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
24									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
25	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
26									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
27	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
28									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
29	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
30									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
31	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
32									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
33	HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)													
34									HR(1)	HR(1)	道徳(1)	探究・世界 II (2)	Writing(1)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)					
短期集中	探究・奈良 I (1)	探究・奈良 II (1)	キャリア教育(1)	AG(1)	AG(1)	AG(1)	補講・AG(1)	補講・AG(1)													
				テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)												

# 奈良女子大学附属中等教育学校 中高一貫SSH概念図



# 奈良女子大学附属中等教育学校 SSH リテラシーとリベラルアーツ



奈良女子大学 他大学



附属中等教育学校

高大接続  
カリキュラム

## 21 世紀のリベラルアーツ

自然科学リテラシー

授業・特別講義

コロキウム(対話)・学術の智

生活科学  
リテラシー

人文社会科学  
リテラシー

育成したい力のキーワード

- 言語能力・言語認識
- 批判的思考力
- 他者への寛容・理解
- 学び方

生命論  
環境論  
宇宙論  
数理科学  
科学技術社会論  
.....

人間とは何か  
現代社会論  
文化と社会  
歴史探究  
比較文化論  
.....

サイエンス研究会

- 「スーパー」な生徒の育成
- 科学の面白さの普及

数学的リテラシーの育成

科学的リテラシーの育成

生活科学リテラシーの育成

教材開発・出版

高大接続(学習面)

ESDに基づく海外連携  
コア SSH

# 研 究 論 文



# 電球の探究

1年C組 清家 悠大

1年C組 中谷 駿介

指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

LED（発光ダイオード）や蛍光灯などの電球が近年目覚ましく発展している。私たちは一般的に製造されている電球よりもさらに優れた電球を開発したいと考えた。そこで今回、新しい電球の開発の初歩的実験を行うことにした。

キーワード 発光、フィラメント、放電、発光時の温度

## 2. 研究の背景と目的

近年、LEDや蛍光灯などの電球類が目覚ましい発展を遂げている。しかし、私たちはそのような電球に、以下の議論すべき点があるのではないかと考えた。

- (1) ガラスがなくても、通常通りに光ることができる電球を作るにはどのような工夫を加えれば良いか
- (2) 発光時に出る発熱をできる限り抑えることはできないか
- (3) 極限の場所でフィラメントを光らせるにはどのような工夫を行えば良いか
- (4) 少ない電力で、従来の電球より明るく光らせることができないか
- (5) 安価に製造できないか
- (6) 長持ちさせるにはどのような工夫を加えればよいか。

そして、私たちは、6つの改善点を克服して、現在のLED電球や蛍光灯等に勝る電球を作って、一般家庭にも普及すればよいと考えている。そこで今回は、新しい電

球の開発の第一段階として電球の性質を詳しく調べる実験を行った。

## 3. 研究内容

<研究概要>

実験Ⅰ：フィラメントがむき出しの豆電球と、通常の豆電球の電流と電圧の関係を比べる

実験Ⅱ：自作の豆電球を作り、電流と電圧と温度の関係を調べる

実験Ⅲ：水中に白熱電球のフィラメントを浸け電流を流して光らせる

実験Ⅳ：約1万ボルトで外部からフィラメントに直接放電させ豆電球が光るか確かめる

実験Ⅴ：豆電球のフィラメントに直接高電圧をかけると同時に、フィラメントに電流を流し、フィラメントがむき出しの豆電球と通常の豆電球の電流と電圧の関係を調べる

実験Ⅵ：LED電球の発光時のスペクトルの特性について調べる

実験Ⅶ：紫外線を発するLEDが本当に紫外

線を放出しているかを調べる

### 実験 I

<研究動機>

(1) について考察したい。また、ガラスのない電球がどのように光るのか観察してみたい。

<仮説>

一瞬、通常通りに光ってすぐに消え、フィラメントが切れる

<材料>

- ・耐電圧 6.3V の豆電球 2 つ (フィラメントがむき出しの豆電球①(図 1) と、通常の豆電球②)
- ・みのむしクリップの導線 7 本
- ・電源装置 ・電流計 ・電圧計

<実験方法>

図 2 の回路図の通りに配置して、電源装置からの電圧を 0.1V ずつ上昇させて、電流の変化を調べる。



図 1

<結果>

- ・通常の豆電球②は 10V を超えても光り続けた。
- ・フィラメントがむき出しの豆電球①は 2.3V でフィラメントが燃えた。

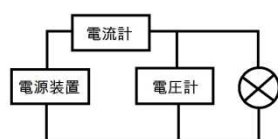


図 2

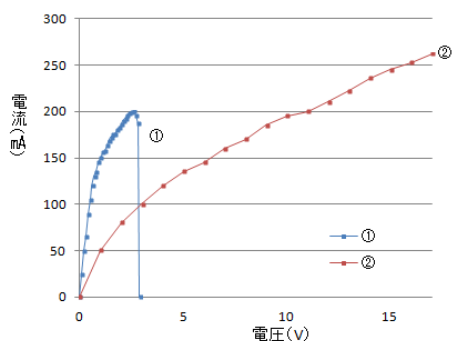


図 3 実験 I の結果

<考察>

- ・フィラメントの金属が空気中では非常に明るく燃えるということがわかった。
- ・フィラメントがむき出しの豆電球①は通常のものよりも低い電圧で明るくなるが、低い電圧でフィラメントが切れるので、結果的には通常のものの方が明るく光ることができるということがわかった。
- ・通常の豆電球②が耐電圧を超えても光った。

### 実験 II

<研究動機>

自分たちでも電球を作れるということを確認したい。また、電流と温度の関係を理解しておく、(2) の改良に有効だと考えた。

<仮説>

電流と電圧、電圧と温度のグラフは共に比例のグラフとなる。

<材料>

- ・みのむしクリップの導線 7 本 ・電流計
- ・電圧計 ・熱電対温度計 ・電源装置
- ・図 4 のような自作の豆電球



図 4

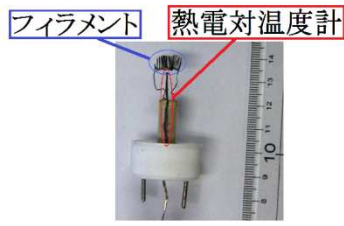


図 5

ガラスのない自作の電球

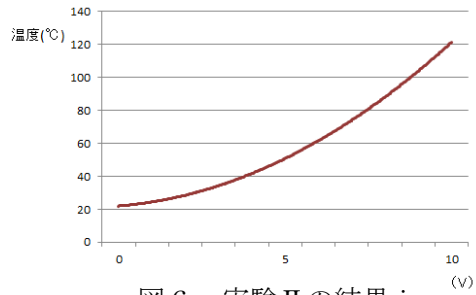


図 6 実験Ⅱの結果 i

<実験方法>

実験Ⅰの回路図の豆電球の部分を実作の豆電球に取り換え、1V ずつ電圧を上げていき、温度と発光の強さを確認する。温度計は図5の通り、フィラメントの中心付近(フィラメントに触れない場所)に置き、フィラメント付近の温度を測定する。

<結果>

- 電圧を上げるに従い、温度が徐々に上昇していく。
- フィラメントは 7V あたりで発光した。
- 電圧と電流は比例のグラフで近似できる。

<考察>

- 図7より電圧と電流は比例するが、図6より、電圧と温度は比例しない。これより仮説の電圧と電流が比例することは正しいが、電圧と温度は比例しないことがわかる。
- 温度と電圧の関係は、Excel で近似曲線を描くと 2 次式で近似できる。
- 電流と温度の増え方はグラフを見ると、異なっている。このことについて調べる必要がある。

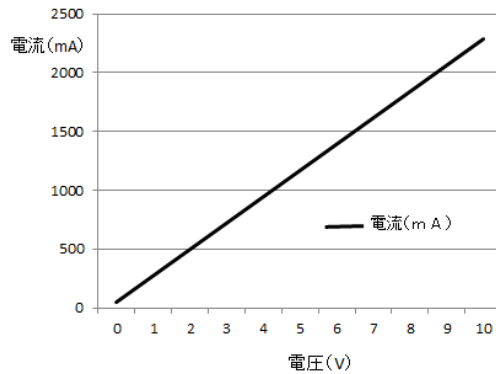


図 7 実験Ⅱの結果 ii

実験Ⅲ

<研究動機>

- 極限の場所でも光らせることができるかということを研究するため、今回は、水中で行うと今後の研究にも利用できるのではないかと考えたから。

<仮説>

水中ではフィラメントは光らない。

<材料>

- 水を張ったビーカー
- フィラメントがむき出しの 60W 白熱電球
- 電源装置 ・みのむしクリップの導線

<実験方法>

図8のように白熱電球のフィラメント部分をビーカーの水に浸し 10V ずつ電圧を上

げていき、フィラメントの様子を観察する。



図 8

<結果>

- ・ 20V あたりからベルのような音が鳴り出し、電圧を上げるに伴って音が大きくなっていった。
- ・ 80V あたりで一瞬燃えるように光り、フィラメントが切れた。

<考察>

- ・ 80V あたりで光ったが、一瞬だったので仮説はほぼ正しい。
- ・ なぜベルのような音が鳴ったのかはわからない。
- ・ 水は温度が上がりにくいいため、フィラメントは光らない。

#### 実験Ⅳ

<研究動機>

- ・ 動画サイトでコンセントを使って豆電球を光らしていったので、約 1 万 V でも光ると考えたから。

<仮説>

一瞬 非常に明るく光って、フィラメントが切れる。

<材料>

- ・ フィラメントがむき出しの豆電球

- ・ スタンド
- ・ DCDC コンバーター(高電圧をかける装置)

<実験方法>

図 9 のように豆電球のフィラメントの近くに DCDC コンバーターの電極を近づけてフィラメントに向かって放電させる。



図 9

<結果>

- ・ フィラメント自体は光らなかったが放電した電気自体は光った。
- ・ むき出しの豆電球では、フィラメントに向かって放電が起こったが、フィラメントは光らなかった。

<考察>

仮説とは違い、フィラメントは光らなかった。しかし、放電自体は光っていたので新しい豆電球に利用したい。

#### 実験Ⅴ

<実験動機>

実験Ⅳではフィラメントに高電圧のみかけていたが、電源装置からも電流を流すと実験Ⅳと比べて違いがあると考えたから。

<仮説>

高電圧をかけるものと、かけないものの電流と電圧の関係に違いはない。

<材料>

- ・ フィラメントがむき出しの豆電球 2 つ

- ・ DCDC コンバーター ・ 電源装置
- ・ みのむしクリップの導線

#### <実験方法>

一方の豆電球は実験 I と同様に電流を流し、もう一方の豆電球はフィラメントに高電圧をかけつつ、電流を流す。また、電圧を 0.1V ずつ上昇させていく。

#### <結果>

- ・ どちらも 2V 程度でフィラメントが切れてしまった。
- ・ 高電圧をかけた方が電流は強くなった。

#### <考察>

- ・ 高電圧をかけた方が、電流が強く流れたため、仮説は間違っていた。
- ・ 高電圧をかけると電流が強く流れ、明るく光るとい性質を今後、利用できないか考えたい。

### 実験VI

#### <実験動機>

豆電球のみならず、その他の発光体についても調べた。

#### <仮説>

光る色が違っていても LED を光らせるための電圧はすべて同じである。

#### <材料>

- ・ 電源装置
- ・ テスター(電圧・電流の測定も可能)
- ・ ボリューム抵抗器
- ・ 分光器
- ・ ワニ口クリップ

- ・ 黄色に光る LED (VF1.8~2.4V)
- ・ 白色に光る LED (VF3.8~4.2V)
- ・ 青色に光る LED (VF3.8~4.2V)
- ・ 赤色に光る LED (VF2.4~2.8V)
- ・ 緑色に光る LED (VF3.8~4.2V)
- ・ ガラスの表面が橙色の LED (VF 不明)
- ・ 紫外線と発生する LED (VF 不明)
- ・ 赤外線を発生する LED (VF 不明)

#### <実験方法>

図 10 のような回路図を用いる。LED が光り始めたときの電圧を測定する。また、豆電球が光り始めたら分光器で見て、スペクトルを観察する。また、VF と光り始めたときの電圧を比較する。

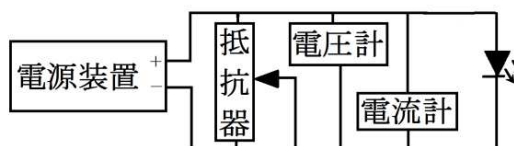


図 10

#### <結果>

- ・ 分光器で見ると、赤外線を発する以外の LED は分光器でも肉眼で発光しているのが確認できた。
- ・ VF と光り始めた電圧には関係がない。
- ・ 紫外線を発生させる LED は、紫色に光っているが、紫外線を発しているかどうかはわからない。

#### <考察>

- ・ LED が光り始める電圧は光る色によって変わる。
- ・ 白色に光る LED のスペクトルは全体が均等に光っていた。

名前	VF(V)	光った時の電圧(V)	分光器で見たときの色
黄色に光るLED	1.8~2.4	1.628	
白色に光るLED	3.8~4.2	2.580	
青色に光るLED	3.8~4.2	2.358	
赤色に光るLED	2.4~2.8	1.571	
緑色に光るLED	3.8~4.2	2.463	
表面が橙色のLED	不明	1.567	
紫外線を発生するLED	不明	2.706	
赤外線を発生するLED	不明	0.869	

- ・紫外線や赤外線が本当に発生しているのかはわからない。だから、調べる必要があると考えられる。
- ・赤外線を発生するLEDは見えないため、スペクトルについては結果がわからない。
- ・白色のLEDのスペクトルは6色で虹のように均等に並んでいる。
- ・実験Ⅲより、自作の電球が7Vで光り始めたのに対しLEDは2V前後で光っているものが多いため、LEDの方がエコである。
- ・光の波長が短い方が光ることのできる電圧が高い。

#### 実験Ⅶ

##### <研究動機>

実験Ⅵより、紫外線を発生するLEDは本当に紫外線を出しているのか調べた。

##### <仮説>

一応、紫外線を発しているが、極めて微量である。

##### <材料>

- ・紫外線を発するLED
- ・ボリューム抵抗器
- ・テスター（電流・電圧の測定も可能）
- ・電源装置
- ・みの虫クリップ3本
- ・紫外線チェックカード（紫外線に反応すると紫色に変色する。）

##### <方法>

実験Ⅵの回路図のLEDの部分に紫外線を発するLEDを置き換え、LEDを光らせる。そして、暗室にして光っているLEDの近くに紫外線チェックカードを近づけ、カードの色の変化を見る。

##### <結果>

図12のように、LEDを近づけたカードの部分が白色から非常に濃い茶色に変化する。



図 12

<考察>

- ・紫外線を発する LED からは本当に紫外線がとても発生していた。

#### 4. まとめと今後の課題・展望

<まとめ>

実験Ⅰからわかること

- ・フィラメントの金属が空気中で非常に明るく燃えるということがわかった。
- ・フィラメントがむき出しの豆電球は通常の豆電球よりも低い電圧で明るくなるが、低い電圧でフィラメントが切れるので、結果的には通常の豆電球の方が明るく光ることができるということがわかった。
- ・通常のもは耐電圧を超えても光った。

実験Ⅱからわかること

- ・グラフより電圧と電流は比例することがわかるが、電圧と温度は比例しないことがわかった。
- ・Excel で近似曲線を描くと、温度と電圧の関係は2次の多項式で近似できることがグラフからわかった。
- ・電流と温度の増え方はグラフを見ると、異なっている。このことについて調べる必要があると考えられる。

実験Ⅲからわかること

- ・80V あたりで一瞬だったが光った。
- ・なぜベルのような音が鳴ったのかわから

ない。

- ・水は温度が上がりにくいので、フィラメントは光らない。

実験Ⅳからわかること

- ・放電だけではフィラメントは光らなかった。しかし、放電自体は光っていたので新しい電球に利用したい。

実験Ⅴからわかること

- ・高電圧をかけた方の電流が強く流れた。
- ・高電圧をかけると電流が強く流れ、明るく光るとい性質を今後、利用できないか考えたい。

実験Ⅵからわかること

- ・LED が光る電圧は色によって変わる。
- ・光の波長が短い方が光り始めるときの電圧が高い。
- ・紫外線や赤外線が本当に発生しているかどうかわからないので、調べる必要があると考えた。
- ・白色の LED のスペクトルは6色で虹のように均等に並んでいる。
- ・赤外線を発生する LED は光が見えないため、スペクトル、 $\lambda$ 、 $\nu$ の結果がわからない。
- ・実験Ⅲより、自作の電球が7V で光り始めたのに対し、LED は2V 前後で光っているものが多いため、LED の方がエコである。

実験Ⅶからわかること

- ・紫外線を発する LED からは紫外線がとても発生していた。

<今後の課題>

最終的には当初の目的であった、従来のものより優れた電球を作りたいがそのためにはいろいろな課題が残っているので、こ

れからは以下の課題達成を考えている。

- ・実験Ⅰでのガラス部分の役割が何なのかを知りたい。
- ・実験Ⅰで電流と電圧の関係が  $\sqrt{\quad}$  で近似できたのでグラフを  $\sqrt{\quad}$  で近似できる理由を知りたい。
- ・実験で通常の豆電球が耐電圧 6.3V を超えても光り続けた理由を知りたい。
- ・実験Ⅱのグラフ i で二次の多項式が出てきたので、二次の多項式について数学で理解していきたい。
- ・実験Ⅱのグラフ ii で電流と電圧が比例した理由を知りたい。
- ・電流と温度の増え方が一定ではない理由を知りたい。
- ・実験Ⅲで 10V あたりからベルのような音が鳴り始めた理由を知りたい。
- ・実験Ⅲにて 80V あたりでいきなり燃えるように光った理由を知りたい。
- ・実験Ⅳで放電が光った理由を知りたい。
- ・実験Ⅴで高電圧がフィラメントに流れて明るく光るといった性質がなぜ起こるのかを知りたい。
- ・実験Ⅵにて LED の波長が短い方が光り始める電圧が高い理由を知りたい。
- ・実験Ⅵから赤外線を発する LED が本当に赤外線を発しているのか調べたい。
- ・実験Ⅶより紫外線を発する LED の電圧と光の強さの関係を知りたい。

<今後の展望>

上記の今後の課題を達成していき、従来の電球より優れた電球を形にする。また、実験Ⅳですでてきた放電についても研究していきたい。

## 6. 謝辞

今回のサイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ、多くの先生方、先輩方から多大なご指導やご協力をいただきました。この場で深く感謝申し上げます。



# H8マイコンによるライントレースカーの製作

1年B組 上林 幹宜

指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

私は、ライントレースカーを作ることを通して H8マイコンについて学ぶことができるのではないかと考え、ライントレースカーを製作しようと考えた。そこで、Vstone 株式会社のビュートローバーという製品を元にライントレースカーを作った。

キーワード ライントレースカー、H8マイコン、C 言語

## 2. 研究の背景と目的

ライントレースカーとは、センサーとモーターを搭載し、地面に書いた線をたどるという簡単なロボットである。今回利用するビュートローバー(図1)は、簡単に改造することができるという特徴をもっている。これを使ってライントレースカーを製作し、制御することにした。



図1 ビュートローバー



図2 VS-WRC003LV

C 言語で制御するために、次の①～⑤の段階を踏んで研究を進めた。

- ① C 言語でプログラムを書く前に、ビュートローバーに付属しているビュートビルダー2という専用プログラミングソフトウェアを使用し、ライントレースカーが動く仕組みを考え、注意すべき点を確認しておく。
- ② ハードウェアに不具合があれば調整する。
- ③ C 言語でプログラムを書くために C 言語を学ぶ。
- ④ C 言語でプログラムを書く。
- ⑤ プログラムに不具合があれば調整する。

## 3. 研究内容

今回の研究で使用する CPU ボードは VS-WRC003LV(図2)というルネサスエレクトロニクス社により開発された CPU ボードである。

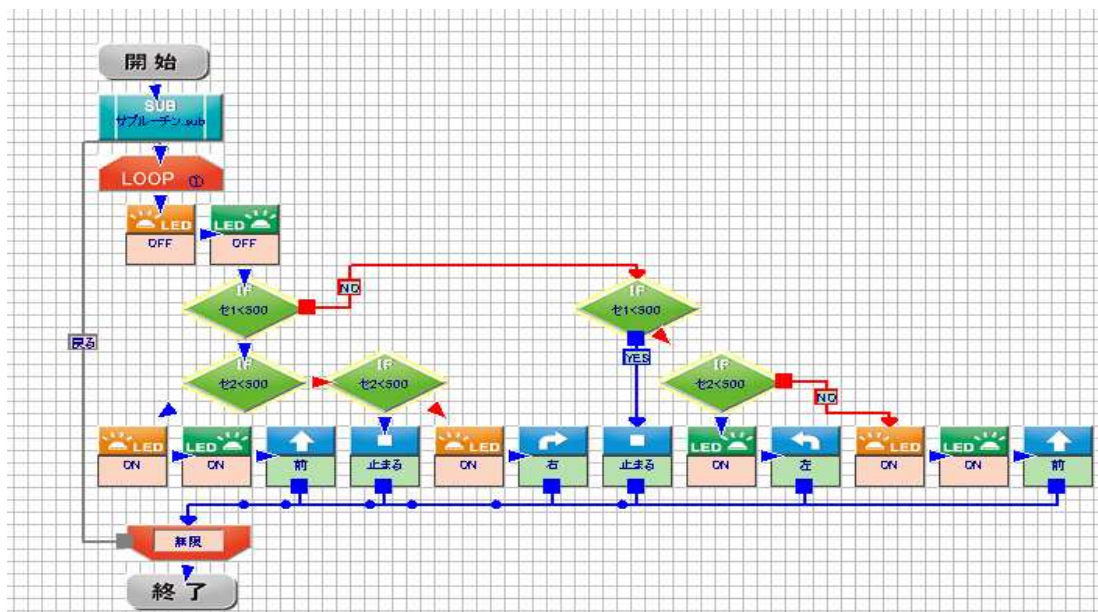


図3 プログラム製作中

#### 4. 研究結果

まず、ビュートビルダー2でライントレースカーのプログラムを書いた。(図3)

すると、直角コースを検知することができないなどの不具合が生じたため、自分で改造することにした。

直角コースを検知するために、センサーを自作し、4個に増設した(図4)。その結果は、まだ試運転はしていないが、直角コースを検知できるようになったはずである。

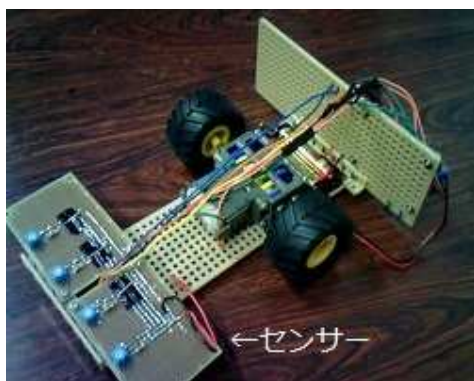


図4 改造後

C言語については、簡単なプログラムを書く練習をした結果、CPUボードにしているLEDを点滅させることができた。

#### 5. 今後の課題

次は、C言語でライントレースを行えるプログラムを書き、このライントレースカーを走らせたいと思っている。

#### 6. 参考文献

- [1] 「はじめての H8マイコン」(電子工作マイコンシリーズ), 島田義人著, CQ出版社(2011)

#### 7. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ、多くの先輩方から多大なご指導や、ご協力をいただきました。この場で深く感謝申し上げます。

# STM32 マイコンを用いたマトリクス LED の制御

3年C組 船井 遼太郎

指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

最近ドットマトリクス LED などによって文字を手軽に表示できるようになった。そこで、私も自分自身で何か文字を表示し、それを何か別のものに応用することができるのではないかと考えた。そこで今回は、値段と比べて周辺機能が多くコストパフォーマンスが良い STM32 マイコンボード(以下 STM32 ディスカバリ)を用いたドットマトリクス LED のダイナミック点灯制御を行うことにした。

キーワード STM32 ディスカバリ,ドットマトリクス LED,ダイナミック点灯

## 2. 研究の背景と目的

最近、私の家では廊下などで電気がついていない状態でも足元がわかるように、暗くなったら廊下を照らしてくれるという照明を利用するようになった。そこで、私は何か文字をドットマトリクス LED に表示するなどして応用できれば面白くなるのではないかと考えた。こうしたことを目標とし、今回はまず「光」という漢字を表示させることにした。

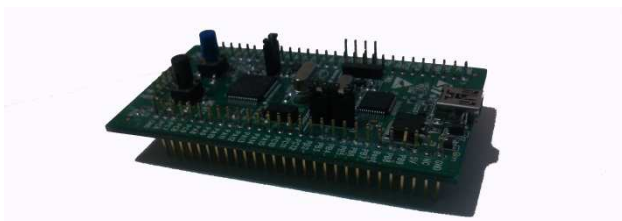


図1 STM32 Value line Discovery  
(STM32 ディスカバリ)

字が表示される物の製作を目指した。使用するマイコンを STM32 ディスカバリにした理由としては、このマイコンボードが他のマイコンと比べ安価でコストパフォーマンスも良く、デバッグ不要な上、無償で手に入る開発環境(atollic TrueSTUDIO)を用いることができるからである。



図2 STM32 マイコン用開発環境

## 3. 研究内容

今回私は、STM32 ディスカバリ(図1)を用いてドットマトリクス LED の制御を行い、あたりが暗くなれば「光」という漢

### (1)ダイナミック点灯方式

ドットマトリクス LED に、漢字を表示させるにあたって以下の二つの手順を用いたダイナミック点灯方式が必要となる。

このドットマトリクス LED には 64 個

の LED があり、図 4 の(上)のように縦横それぞれ制御ピンが①～⑧までの 8 列ずつ合計 16 列ある。この 16 本のピンを制御することでどの LED を光らせるかを指定することができる。このようなことから漢字を表示させるために以下の二つの手順で行うこととなった。それぞれのピンの制御は C 言語を用いることとなった。

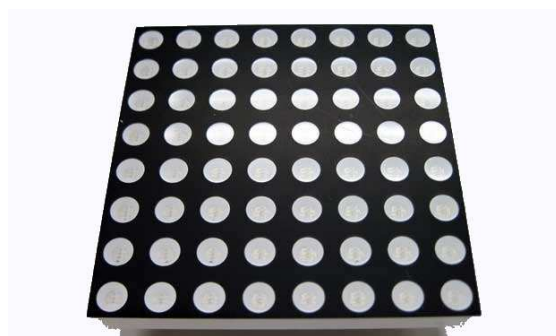


図 3 ドットマトリックス LED

[手順 1]

ダイナミック点灯方式では、一番左端の列 COL①から一列ずつ順にこの漢字を表示し、必要なマス目のみを点灯させては消すことを繰り返している。

たとえば、COL①の列の ROW⑧の行の LED を光らせるときに(1,8)と表し、具体的には、COL①に電圧をかけ、同時に ROW ⑧に電圧をかける。

まず COL①だと(1,1)、(1,4)、(1,8)の点を光らせる。次に COL②の列を点灯させる場合、それに先だって、COL①の電圧を 0 にし、さらに、ROW1、ROW④、ROW⑧の電圧を 0 にする必要がある。そうしなければ、ROW①などの電圧が残っているので、(2,1)などが光ってしまうからである。次に、(2,2)、(2,4)、(2,7)、(2,8)を点灯させる。このようにして列ごとの表示に成功した。

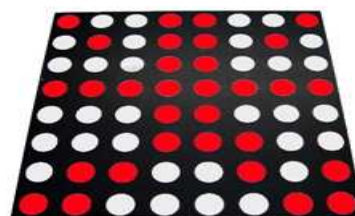
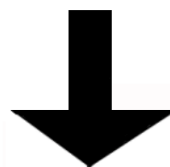
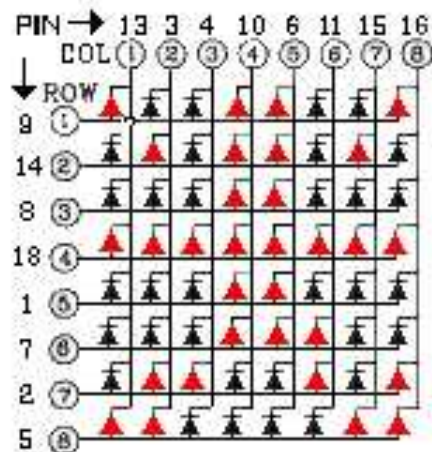


図 4 光らせる点

[手順 2]

次に、while 文を用いてループさせ、COL1→COL2→...COL8→COL1 のようにする。そのとき、縦の各列は C 言語を用いて 1 ミリ秒ずつ点灯させては消すことを繰り返させていく。人間の目は 1 ミリ秒の速さについていくことができないため、これらの列の LED の、「光」を表示するために必要な光らせる点は、残像によってすべてがついているように見える。

## (2) A-D 変換

今回は部屋の明るさを読み取るために、CdS セルを用いた。CdS セルとは、入ってくる光の強さが変わると抵抗値が変化する電子部品である。これに電流を流すと、部屋の明るさに応じて電圧が変化する。この電圧のデータを A-D 変換を用いてデジタル信号に変え、マイコンに入力して LED の制御に用いることができるのではないかと考えた。しかし今回は時間が余りなく、暗くなると点灯する、という所までは行かなかった。次回以降の課題にしていきたいと思う。

## 4. 結果

今回の実験では、ダイナミック点灯させることができ、「光」という漢字をドットマトリックス LED に表示させるところまで成功した。しかし、今回の目標である、暗くなると文字を表示させることについては A-D 変換の回路が間違えているのか、プログラミングが間違えているのかは未だ明確でなく結果を出すことはできなかった。

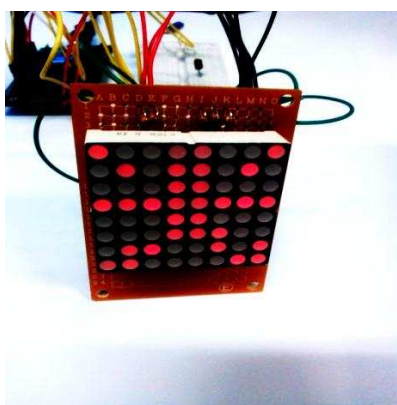


図5 点灯している様子

## 5. 考察

今回の苦勞した点としては、1 列ごとに制御したときにどうしても LED がつかない列が出てしまうことだ。配線も乱雑なものとなっていたため、一本ずつ確かめるために配線を LED とマイコン両方のピンから辿っていかなくてはならない状態となってしまった。結果としては、断線していた部分などの原因が発覚するまでにかかなりの時間を要してしまった。

センサの値の計測に関しては、マイコンの GPIOB の 4 ピンに指定して抵抗値を読み取るはずだったが、間に挟んだ抵抗が大きすぎたためか、まったく作動しないという結果となった。見直しとしては、まず回路の面から見直していくべきかと思う。

その他に、このままでは「光」という漢字の表示だけでも電源から供給する電力が小さいために文字の表示が薄くなってしまふ。この件に関しては電圧を上げるためにも昇圧回路を間に挟むことで大きく改善することができると思った。

## 6. 今後の課題

今後の課題としては、やはり CdS セルを用いて明るさを読み取るように制御することである。CdS セルから手得したアナログデータを A-D 変換を用いてデジタルデータに変換させ、そこから光らせるか光らせないかの判断をしていく。また、現段階では、「光」の一文字しか表示させることができないが、今後は多くの文字を表示させるようにしたいと思う。

これらのことをするには、文字をスクロールさせたり、使用するドットマトリックス LED の台数を多くするなどの改良が必

要ではないかと考えた。

今後は文字表示を主体にセンサなども取り入れていきたいと思う。

## 7. 参考文献

[1] 「STM32 マイコン徹底入門」

川内康雄、 CQ 出版(2010)

[2] 「世界の定番 ARM マイコン STM32 デイスカバリ」

島田義人、永原柊、菅井賢、CQ 出版(2011)

## 8. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ多くの先生、先輩方に多大なご指導をいただきました。この場で深く感謝申し上げます。

# 文字認識ソフトの作成

3年C組 上田 樹

指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

私は、看板などで読めない漢字を見つけたとき、読みがわからなければ意味を調べるのも困難であると感じた。そこで、日本語に限らず、それらの文字をすべて写真に撮るだけで認識できれば、外国などへ行って読めない文字に出会っても便利であると感じた。

市販の文字認識ソフトもあるが、文字の状態によっては読めないことがある。そこで、Visual Basic を用いて文字認識ソフトを自分で作成することにした。

キーワード 文字認識、2値化、細線化、輪郭追跡、学習機能

## 2. 研究の背景と目的

看板などで読めない漢字や知らない言語の文字などを見つけたとき、そのたびに意味を調べるのは大変である。そこで、それらをすべて写真に撮るだけで文字を認識できればよいと考えた。携帯電話などに付属している文字認識ソフトは、文字の並びや大きさによっては読めない、文字のバランスが悪いと読めない、斜めだと読めない、言語によっては読めないなど、多くの問題がある。そこで、これらの問題を解消した文字認識ソフトを作成することにした。

## 3. 研究内容

フォントデータから取得した文字の形を数値化し、データベースにその文字の読みと共に保存する。写真から取得した文字の形を数値化し、データベースの数値と比較することで、機械的にどの文字かを判定することができると考えた。文字の形を数値化する方法として、「輪郭追跡」の方法を

とった。それには写真から文字部分だけを取り出す必要がある。それには写真を白黒2色にする「2値化」と、線の中心1画素分だけを残し線を細くする「細線化」が使えるのではないかと考えた。

輪郭追跡の説明は後にし、2値化について説明する。「2値化」とは、写真などの濃淡のある画像を白と黒の2階調に変換する処理を2値化という。文字の色は普通、背景色とは違う色で書かれるので、文字部分を取り出すのに使えるのではないかと考えた。

文字認識をするためには、文字だけを黒、その他が白になるような処理を行う必要がある。まず、白と黒の境界を決めるための「輝度のしきい値」を、画像全体の輝度値の平均にしてみたがうまくいかなかった。そこで、まず全画素の輝度値を計算し、各輝度値の画素数をカウントし、図1のようにグラフにした。

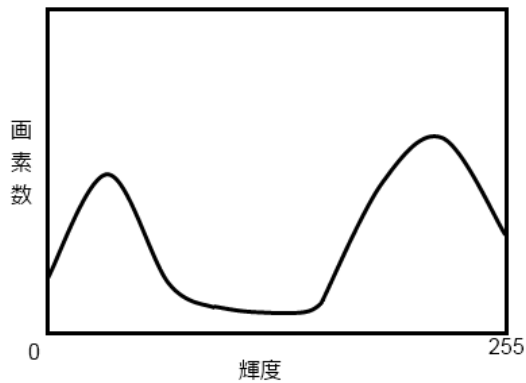


図1 輝度のグラフ

このグラフで、両隣より数値が高い所をピーク、低いところをボトムとする。グラフのピークとボトムを記録し、最も画素数が多いピーク、2番目に画素数が多いピークを、それぞれ背景の部分と文字の部分であると考えると、その2つのピークの中央をしきい値とした。

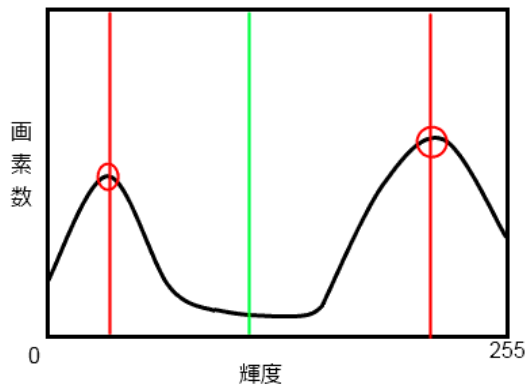


図2 ピークの中央をしきい値とする



図3 結果

しかし、これでは図3のように、まだノイズが残ってしまった。そこで、図4のように2つのピークの中央値を含む凹部分のボトム、中央値がピークの場合は最も近いボトムをしきい値としたところ、図5のようにノイズとなっていた部分が正しく2値化され、きれいに2値化ができるようになった。

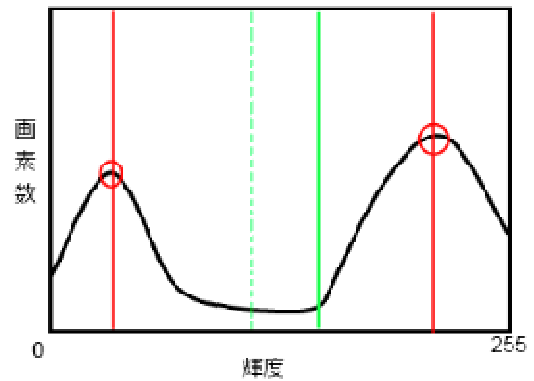


図4 しきい値を求める



図5 改善後の二値化結果

だが、その後さまざまな写真で試したところ、背景にグラデーションなどが使われている場合は読み取れないことがわかった。

グラデーションを背景とする画像の輝度値をグラフにしたところ、図6のようになっていた。



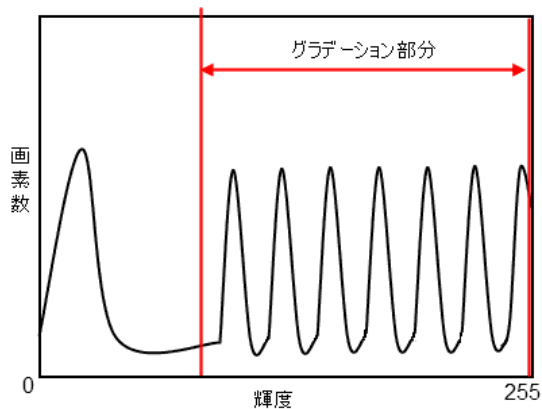


図6 グラデーション時の輝度値のグラフ

本来、グラデーション部分が平らになるはずだが、画素数が小さいため、間が省略され波になっていると考えられる。この問題は画素数を上げることで解決できるが、処理に時間がかかってしまうため、グラデーション部分がまとめられるようにした。まず、輝度値の平均より数値が高いピークをすべて記録し、隣り合ったものとの距離を求める。グラデーションの波と波の間隔は、文字部分との間隔より狭いはずなので、間隔が最も広い2箇所のピークから先程のようにしきい値を求めれば、背景がグラデーション、文字がグラデーションなどの場合でも正確に2値化が行えた。

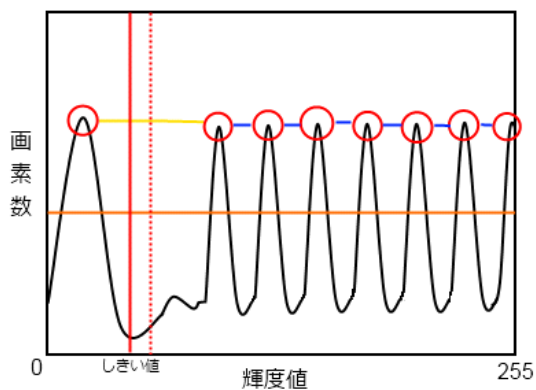


図7 グラデーション入り画像の2値化

今回の文字認識では、文字の周りを「輪郭追跡」により1周し、進んだ向きを記録し形を数値化した。まずは、図8のように左上から横向きに画像をスキャンしていき、画像の中で最も上にある黒のピクセルを見つける。

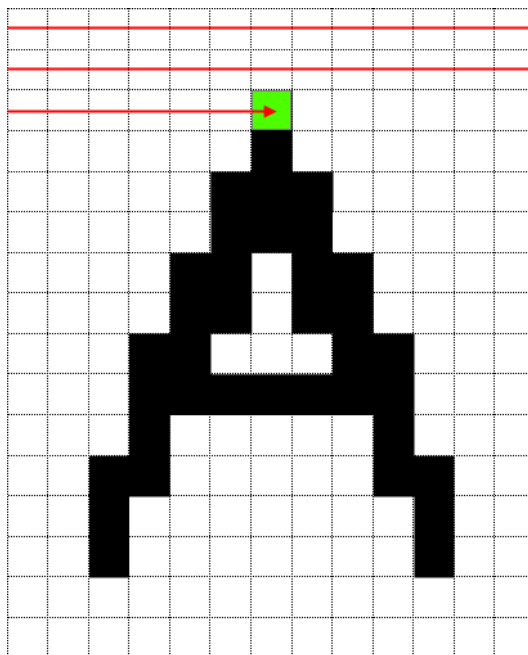


図8 文字の上の画素の検出

進む方向を図9のように番号を振り、図10のように文字の外周を数字で方向を記録しながら反時計回りに辿っていく。

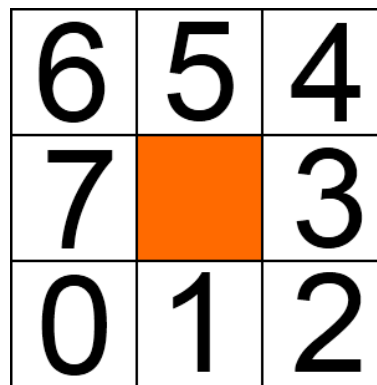


図9 進行方向に割り当てた数字

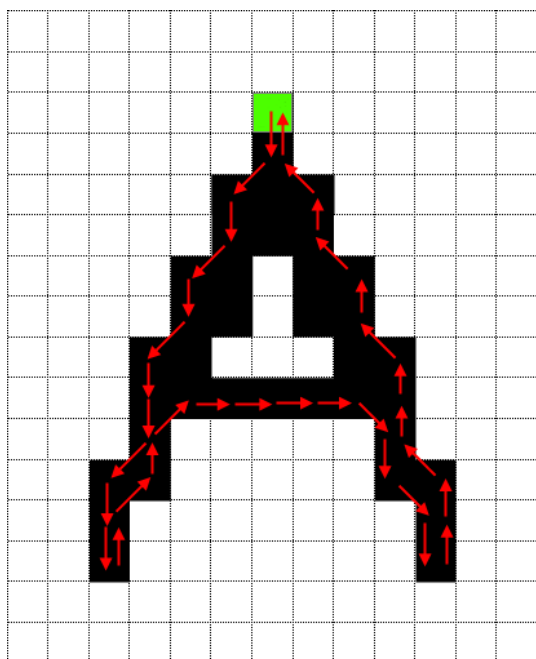


図 10 輪郭追跡

このとき、例えば下（1）に進んだ次の方向に、左上（6）や左（7）が選ばれることは無い。なぜなら、下（1）が選ばれたということは、すでにそのときの左（7）と左下（0）はチェックされ除外されており、下に進んだ後にも選ばれることはない。

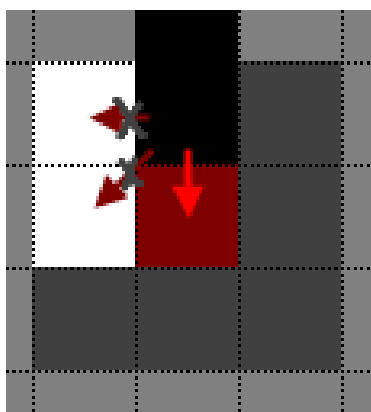


図 11 下に進んだときに白とわかった場所

これをすべての方向で試したところ、ひと

つ前の向きの時計回りに3つ回した向きには進まないことがわかった。よって、輪郭の向きは、ひとつ前の向きの時計回りに2つ回した向きから反時計回りにチェックしていけば効率的であることがわかった。

こうして文字の周りを一周すると、図 10 のAの場合、形のデータは

1010101101154543333212155655656565

と数値化できる。しかし、このままでは全く同じ形で登録されていないと同じ文字だと判定することができないので簡略化を行う。まず、数値をある程度揃えるため、1つ前の数字との差が2未満の場合、1つ前の数字に合わせていく。先ほどの例では2文字目の「0」は一つ前の「1」との差が2未満なので、一つ前の「1」に合わせて1となり、全体を同じように処理すると

111111111115555333311155555555555

となる。さらに、同じ数字が連続している部分は、一つ前の数字と同じ数字を消していく。例えば、2つ目の「1」はひとつ前の「1」と同じ数なので削除、というようにしていく。これで、図 10 のAの形は

「15315」、要するに線の進む向きが下、上、右、下、上とあらわせるようになる。この簡略化により、例えばすごく縦に長いAでも、簡略化したときに数値が

「15315」にさえなればAと読むことができるようになる。

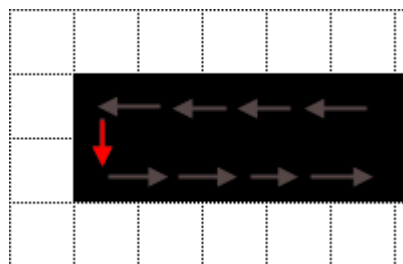


図 12 線に太さがあった時

輪郭追跡の際、図 12 のように線に太さがあり、濃い赤の矢印の部分のように文字の形に含まれていると、簡略化しても違う形とされてしまい、うまく読み取れなくなってしまう。そこで、線の中心 1 画素分だけを残す「細線化」を行う。今回は、細線化方法の一つである、参考文献[4]に記載されている「田村の方法」を元にして、細線化アルゴリズムを開発した。田村の方法では、注目画素が黒である場合に、注目画素を中心とする 3×3 画素の並びが図 13 のパターンの場合、中心画素を除去する。これを全画素で行い、除去した画素があるなら図 14 のパターンで同じことを行う。除去した画素が無ければそこで細線化処理を終了する。その結果が図 16 である。

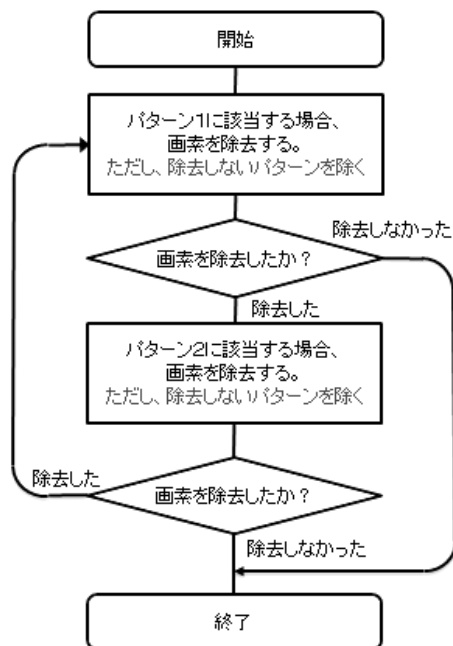


図 15 処理フローチャート

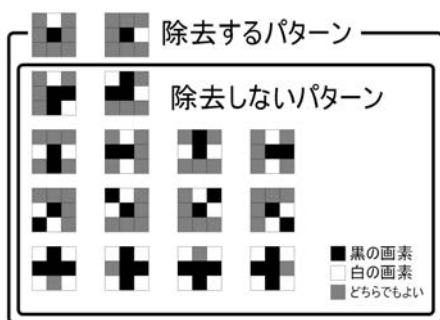


図 13 除去パターン 1

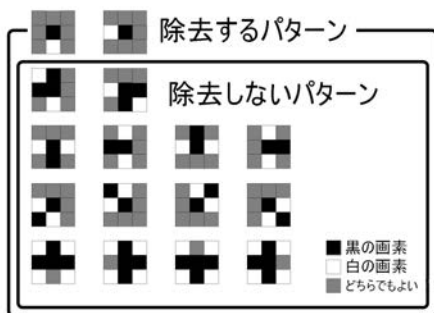


図 14 除去パターン 2



図 16 田村の方法による細線化

図 16 の結果をよく見ると、赤丸で囲われた所に線が割れてしまっているところがある。これらは元の線の淵が荒れており、図 17 のように、すこし出ている部分が「線の端」とであると判断されてしまったため、除去されなくなっている。

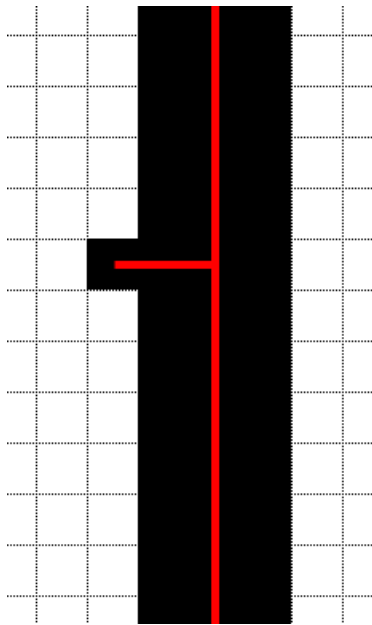


図 17 細線化の失敗例

そこで、注目画素を中心とする 3×3 画素の並びが 1 ピクセル分の分岐線（図 18）である時は無条件で除去されるようにした。その結果、図 19 のように、線の本数は解消された。

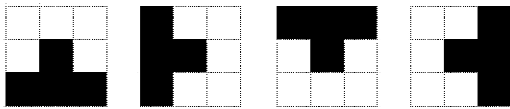


図 18 無条件で除去されるパターン

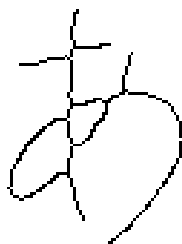


図 19 改善後の細線化結果

<分かれている文字の連結>

文字には「い」や「こ」などいくつかの形が集合しているものがある。そのような

「分かれている文字」も認識できるようにするため、連結させる方法を考えた。文字の別々の状態での配置は記録されているので、それぞれの距離を求め、近いものを含めて一つの文字とし、データベースの文字と比較した。

例えば図 20 の「い」の場合、2つの形の両方が丁度入る四角形の中心を求め、それぞれの形の中心はどの方向に離れているかでどのように並んでいるかを求める。離れている方向は記録時に上下左右の 4 方向にし、例えば「離れている方向を調べたい部分」が文字全体の中心の左上にある場合は横方向と縦方向のどちらにより離れているかで「左」と「上」のどちらにあるのかを判断している。図 17 では、水色の部分が「左」、緑色の部分が「右」にあると判断できる。これを一つの文字とし、より上にあるものを左から順番に並べて登録し、同じようにして登録された判定用データと比較することで、分かれている文字を読み取ることができる。

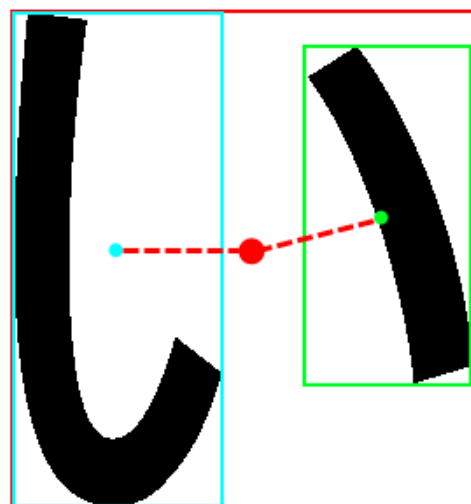


図 20 文字の連結

ただ、漢字などには、多くの形が集合している文字がある。1つの形のみで構成されている文字も多く存在するので、どこまでを一文字とするかの判定が必要であると感じた。

まず、画像内のすべての形の幅、高さのそれぞれの平均を求め、ある2つの形を繋げた時、その幅、高さに近づけば連結する、というようにした。この処理を繰り返せば、細かく分かれている部分は連結できるようになったが、画像内に「連結せず、小さい形」が含まれていると、ひらがなの「け」など、大きめの形同士の連結ができなくなってしまう。そこで、他の数字で何度か試したところ、幅、高さそれぞれの基準値を、「それぞれの平均と最大」の平均、にしたときうまく連結が行えた。

#### <文字の形の一致度の計算>

文字の形を簡略化しても、字の癖が大きすぎたりすると、全く同じ形のデータにはならないことがある。そこで、形のデータが「完全に一致しているかどうか」ではなく「どれだけ一致しているか」という判定方法をとることにした。

登録されている文字の形データは癖や歪みが無いとすると、同じ文字であれば、読み取った文字の形データの数値の数は登録されている文字の形データの数値の数より多いもしくは同じであるはずである。そこで、読み取った形データの数値の数が、ある判定用データの数値の数より多い場合、データの中のいくつかの数値を除けば判定用データと一致すれば、「そのときの判定用データの数値の数/読み取ったときの数値の数」を一致度とし、その一致度が最も

高い判定用データを、読み取った文字の読みとするようにした。

#### <斜めになった文字の認識>

文字が斜めになっているとき、判定時に別の形とされてしまうことがある。そこで、判定するときに、スタートの値を合わせ、そのずらした分をその後の数も全てずらして判定する。

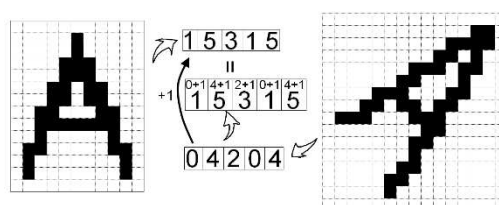


図 21 斜めの文字の認識

例えば図 21 の場合、左の「A」の形のデータ「15315」が登録されていて、右の斜めになった「A」を読もうとしているとすると、右のAの形のデータは「04204」であり登録された形と違って、「A」と判定されない。そこで、読み取ろうとしている文字の初めの向きを判定用データの初めの文字に合わせる。このとき、反時計回りに1つ分ずらしているため、残りの数も全て1つずつずらし、「15315」となる。すると、登録された「A」の形のデータと等しくなり、Aと読み取ることができる。

#### <文字の形データのループ化>

ひらがなの「め」など文字の上に複数の線が出ている場合、どの線が一番上に出ているかによりスタートとされる部分が変わってしまう。それ以外にも、文字のバランスや向きによっても、スタート値となる場所が変わってしまうこともある。そこで、

文字の形データをループ化し、判定時に読み取った形のデータのループを判定用データのループと回転させながら比較するようにした。

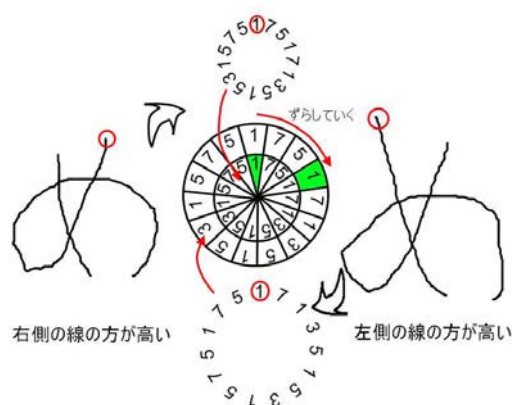


図 22 文字データのループ化

例えば図 22 のような「め」の例では、右側の線の方が高い方が登録されていたとすると、左側の線の方が高い方の形のデータは、数値の順番は同じなのに違う形であると判定されてしまう。そこで最初と最後を円形につなぎ、1つずつずらして比較していき、判定を行うようにした。こうすればより少ない判定用データで様々な形に対応できるようになり、さらに斜めの文字の認識方法と組み合わせれば、たとえ文字が逆さになっていても文字を読み取ることができる。

#### <文字の軽量の登録>

文字は日本語だけでもかなりの数があり、初めからすべての文字を登録するのは困難である。また、人によっては線の始まりと終わりに字の癖がある場合があり、簡略化しきれず読みとれないことがある。そこで、読み取れない文字があったときに、人が登録できるようにした。また、保存するとき

文字データは文字の読みと輪郭追跡で数値化した文字の形をコンマで区切ることで1つの文字列型変数に入れ、テキスト形式で保存した。テキスト形式で保存することで、ひらがな 50 音の文字の形を全て登録したデータが 10KB 程度とかなり小さく収めることができた。

#### <学習機能>

文字を手動で登録できるようになったが、読ませるたびに人が登録していない機械で文字認識をしているとはいえないので、自動で読めていなかった文字を登録する「学習機能」が必要であると考えた。しかし、読めていない文字を何の情報もなく覚えるのは不可能であり、いくらかのデータから考えさせる必要がある。そこで、前後の文字を参考にして読めていない文字の推測を行わせる方法を考えた。

#### <文字の推測>

人は、崩れていて読めない字を文章中で見つけたとき、前後の文字が読めていれば、知っている言葉から推測して読むことができる。これを機械で実現させれば、読み取れなかった文字や間違った判定がされた文字の数を減らすことができると考えた。

推測のために、まず単語のデータベースを作り言葉を大量に登録する。そして、推測で訂正したい文字列を登録したすべての単語と比較し、一致度を調べた。一致度は、 $(\text{文字の一致度}) \times (\text{文字数の一致度})$ とした。文字の一致度は、単語の初めの文字と最後の文字が一致で 4、それ以外の文字が場所も揃って 2、場所が違って 1 とし、「(その合計) ÷ (すべてあつてい

たときの合計)」とした。文字数の一致度は、「 $1 \div (\text{文字数の差} + 1)$ 」とした。これで、両者ともに完全一致で1となる一致度が求められるようになった。その一致度が最も高かったものが正しい読みであるとし、それに置き換えるようにした。

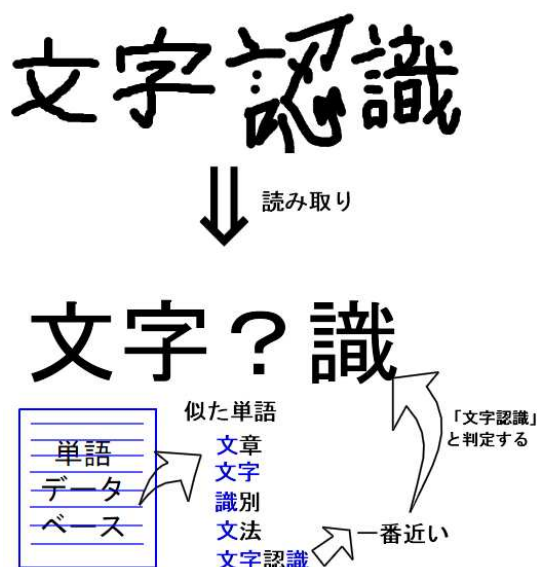


図 23 文字の推測補正

例えば、図 23 の「文章」と「文字?識」という2つの言葉の一致度は、文字の一致度が、一文字目のみが一致で4、全てあった時は2文字なので8なので  $1/2$  となり、文字数の一致度が、文字数の差が2文字なので  $1/3$  となる。よって一致度は  $1/6$  となる。このように比較していくと、「文字認識」という言葉が最も一致度が高くなり、「文字?識」が「文字認識」に校正される。

<学習機能(つづき)>

この「文字の推測」を行い校正されたと

き、一定条件を満たしていれば自動で文字の登録を行うようにした。条件として、まず文字数が同じであることが必要だと考えた。ノイズを誤認識して文字数が変わってしまっていることも考えられるが、その場合でもどれがノイズであるかの見分けが難しく、「ノイズの形」が文字の形として登録されるなどの誤登録を避けるためである。また、一致度が7割を超えていることを登録する条件とした。何度か自分で試したところ、文字数があっていて、なおかつ文字が7割以上合っていれば、誤登録されることはほとんど無かった。これにより、7割が読みとれていれば、使っているだけで精度が上がっていくようになった。

<日本語の文を単語で区切る>

文字の推測校正を行うためには、文が単語ごとに区切られている必要がある。英語のように単語ごとに隙間がある言語では、その隙間を認識すれば区切ることが可能だが、日本語のように単語ごとに隙間のない言語ではそれができない。そこで、日本語の文章を登録された単語を元に区切る方法を考えた。

まず単語が間違っていないとして、文全体から一文字ずつ減らして登録された単語と比較していき、一致した中で最も文字数が多いものを、そこにある単語であると考えるようにした。これで大抵は間違わずに短時間で区切ることができた。

また、判定する文字数を1文字まで縮めてもどの言葉とも一致しなかった場合、もう一度全体から文字数を減らして比較していき、比較したときに一致度が0.9を超えていたら、その言葉をそこにある単語と考

える、というように徐々に基準の一致度を下げていくことで、間違った文字を含む単語が文中に含まれている場合でも、単語で区切り推測校正を行うことができるようになった。

また、サイエンス研究会の先輩方にもご指導、ご協力いただきました。ありがとうございました。

#### 4. まとめと今後の課題

今回、輪郭追跡により文字の形と位置を把握し、ある程度の精度で認識できるようになった。しかし、輪郭追跡では、外側の形を辿っているため、内側の線は無視されている。今後、文字の形の把握方法を改良し、文字の中の線を認識させることで、さらに精度を上げていきたいと思う。また、今回の研究で、文字の形を登録すればどんな言語の文字でも読み取ることができるようになった。そこで、今後翻訳機能を搭載し、当初の目的である「看板の文字を写真にとって翻訳する」ことができるようにしたいと思っている。

#### 5. 参考文献

- [1] Visual Basic 中学校  
<http://homepage1.nifty.com/rucio/main/main.htm>
- [2] DOBON.NET  
<http://dobon.net/index.html>
- [3] C#とVB.NETの入門サイト  
<http://jeanne.wankuma.com/>
- [4] 画像処理ソリューション  
<http://imagingsolution.blog107.fc2.com/blog-entry-151.html>

#### 6. 謝辞

今回の研究にあたり指導してくださった顧問の米田先生、ありがとうございました。



# Web カメラの映像からの目検出ソフトの作成

3年C組 稲益 秀成  
指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

今回、私は、コンピュータに搭載されている Web カメラを用いて利用者の顔を撮影し、その映像から利用者の目線を検出する方法を研究した。

キーワード 目、目線、Web カメラ、ポインティングデバイス、アイトラッキング

## 2. 研究の背景と目的

人間は他人の目を見ると、その目線と目線の先にあるものから、その人が何を見ているのかをおおまかに知ることができる。そこで私は、人間の目は視覚情報を得るといふ感覚器官としての機能だけでなく、自分の視覚情報を他人に知らせる情報伝達器官としての機能も持っているのではないかと考えた。ここで今日幅広く普及しているコンピュータやスマートフォンなどが人間の目線を情報として取得できれば、これらの電子機器の使い方が広がるのではないだろうか。例えば目線でマウスを動かしてハンズフリーで操作するなど、目線をポインタ代わりに使うことも考えられる。

現在、コンピュータのマウス操作に加えて、スマートフォンやタブレット PC など、ディスプレイを指でタッチして操作するデバイスが増えてきているが、この操作方法には問題点がある。それは、指でタッチ操作している間は指でディスプレイが隠されてしまうという点である。文字入力時のカーソルの位置を指定するとき、従来のマウス操作ではディスプレイを見ながら操作でき、カーソルをおきたい場所とカーソルが

重なってしまっても、カーソルが小さいため、その場所がカーソルで隠れてしまうことはなかった。しかし、タッチ操作でこれと同じことをしようとする、カーソルをおきたい場所がどうしても指で隠れてしまうので、カーソルをおきたい場所を見ながらそこに正確にカーソルを移動させるのは難しい。

「画面を見ること」自体が操作方法になればこの問題点を解決することができる。

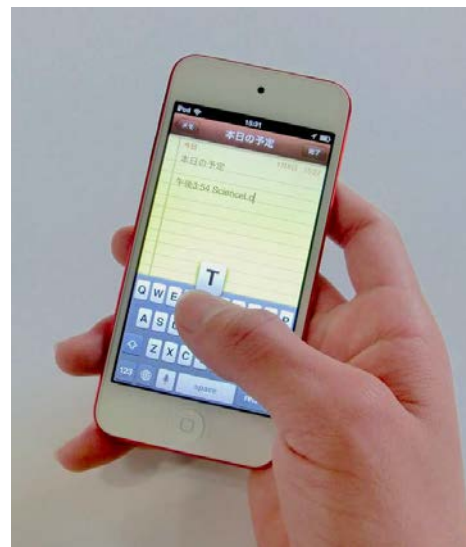


図1 タッチ操作のデバイスの例

そこで、私はコンピュータが利用者の目線を得る方法について考えていくことにした。そのため本論文では、Web カメラの映像から、黒目の位置を検出する方法について報告する。

### 3. 研究内容

今回、コンピュータの利用者の目線を得るために Web カメラを用いた。



図2 一般的な Web カメラの例



図3 スマートフォンなどに搭載されている Web カメラ(内蔵カメラ)

Web カメラとは、図2のような Skype や FaceTime など、インターネットでテレビ電話を楽しむときに相手にリアルタイム

で送信するときに自分の顔を撮影するカメラのことで、図3のように最近のコンピュータやスマートフォンや、タブレット端末などには同じ用途のカメラが標準で内蔵されている。

これを利用することで新たな装置を追加しなくても、目線の検出ができ、手軽に使用することができるという利点がある。

Web カメラの映像から利用者の目線の動きを検出する流れとしては、

- (1) Web カメラの映像から利用者の顔部分のみを切り出す。
- (2) 切り出した顔の範囲から目の位置を検出する。
- (3) 目の位置から、目の中心を計算し、その動きから目線を計算する。

である。

#### [1] 顔検出をしない方法

目を検出するとき、最初に顔を認識し、そこから目を検出した方が検出精度は上がるが、顔を正確に認識するには多くの処理を必要とし、そこからさらに目を検出しようとする、プログラム処理が多く、すごく重くなってしまわないかと考えた。あくまで、マウスやタッチパネルに代わるものをつくりたいので、このポインティングデバイスを使うことでコンピュータのパフォーマンスが悪くなってしまてはいけない。そこで、Web カメラの映像から、まず顔を検出するのではなく、目を最初に検出できれば、顔検出の処理がなくなるので、プログラム処理が少なく、軽くできると考え、目だけにみられる外観の特徴を探してみた。そして、目の外観の特徴として、「黒い」、「丸い」、「2つ横に並んでいる」

という特徴を挙げた。しかし、これだけでは顔の中だけでも、眉毛、鼻の穴など同じような外観のものがあり、とくに鼻の穴は黒目とよく似ており誤認識をしてしまう。よって黒目と鼻の穴を分けられることがまず重要だと考えた。この二つを判別するために、目の特徴である白目も認識に使う方法を考えた。黒目の横には白目があるのに対し、鼻の穴の周りには白色はない。つまり、白色と黒色が隣り合っている部分を探せば、そこは鼻の穴ではなく、目である可能性が高いだろうと考えた。そこから、最初に白色と黒色を検出し、それが隣り合っている場所を検出するというプログラムを作成した。

#### [1]の結果

思っていた通り、黒色と白色が隣り合っている場所を探すプログラム処理は重くはなかった。しかしながら、図4のように顔だけでなく、背景にもたくさん反応してしまった。ここから、背景と目を判別するのは、逆にたくさんの処理が必要になり、結果的に処理が重くなってしまう。よって、黒色と白色のみを検出することで目を検出することは難しいと考え、先に顔の範囲を検出してから、この処理を行う方が良いと考えた。



図4 [1]の実行結果

#### [2]顔の範囲の検出

[1]の方法で作成したプログラムでは目の認識の誤差が多く、実用には難しいだろうという結果になってしまった。そこで、プログラムの処理は増えるが、顔を認識してから目を検出する方法をとることにした。

まず有名な顔検出方法として、Viola-Jones法というものがある。



図5 Viola-Jones法での探索窓の例  
(<http://makemetics.com/research/viola-jones/>

より引用)

これは、顔検出を行いたい映像に図5のような探索窓を順番に動かしていき、その探索窓の領域をあらかじめ作成しておいた識別器から、顔か顔でないかを判定するという方法である。しかしこの方法では、左上から順番に1ピクセルごとに見ていかなければいけないので、処理が重いだらうと推察した。1枚の画像から顔を正確に検出するには問題はないが、Webカメラの映像からリアルタイムで顔を検出し、さらにそこから目を検出するには、このViola-Jones法は少し処理が重そうだと思い、他の軽い処理方法で顔を認識できなければならないと考えた。

そして、軽い処理で顔を検出する方法として、映像の中心付近にある肌の色を検出する方法を用いた。

Webカメラは利用者の顔を撮影するためのものなので、映像の中央付近に顔が来るようなカメラ位置に設置されている。よって、映像の中心付近の肌の色を検出すればそこは顔、または首であるのが普通なので、この方法を用いることにした。

肌の色を検出するには、コンピュータで普段色を値で表現するときにつかうRGBではなく、色相の値を用いることにした。これは、色相の値はRGBに比べて、陰などの影響や照明による色の変化が小さいと考えたからである。

また、顔の位置が移動しても追尾できるように、最初のフレームでは映像の中央が肌の色検出の基本となる点（以降、「基準点」と記す）だが、それ以降のフレームでは前のフレームでの顔の位置の中心を基準点とするようにした。

基準点から顔の範囲を検出していく方法としては、処理が少なくなるように、肌の色の範囲を全部調べていくのではなく、基準点から上下左右といったように方向でみていき、それでできた十字に外接する四角形を顔の範囲とすることにした（図6）。



図6 基準点から上下左右方向に調べている様子

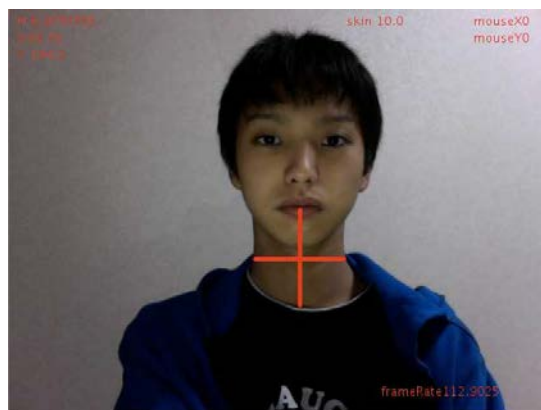


図7 首を顔だと誤認識している様子

しかし、基準点から上下左右の4方向だけでは、基準点がもし首にきてしまった時には図7のように口で肌の色検出がとまってしまい、目のある顔まで範囲選択できないので、上下左右だけでなく、上方向の端からさらに左右に調べ、その左右それぞれ端までの半分の地点からさらに上方向に調べ、

その左右それぞれの分の上方向の端の2点の中間地点からさらに上方向へ調べるようにした。

## [2]の結果

上下左右だけでなく、さらに上方向に何回か肌の色検出の処理を増やしたことで、もし基本となる点が首にきてしまっても、口や目を超えて、額のところまで範囲をのぼすことができるようになり、かなり認識精度がよくなった。また、プログラム処理がとても軽いのも良かった。

しかし、顔に陰ができてしまっていたり、全体的に暗いときは Web カメラからの映像にノイズが出てしまったりしてしまう。このノイズのせいで、色相が大きく乱れてしまい肌の色の検出が安定しなくなってしまうことがあった。

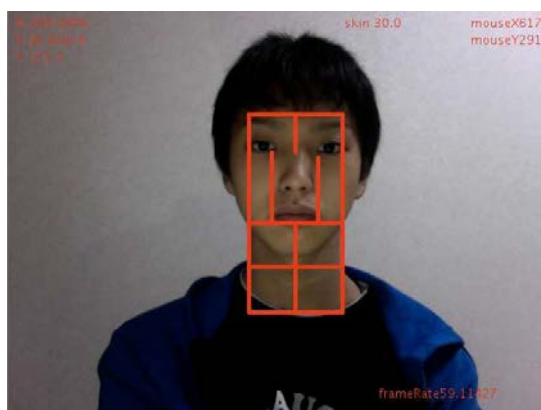


図8 [2]の実行結果

## [3]目の位置の検出

[2]から、顔の範囲を検出することができたので、この顔の範囲で[1]で考えていた目の検出方法を使うことにした。その結果が図9である。

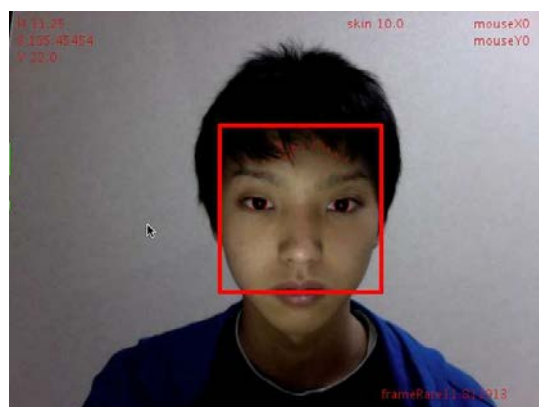


図9 黒色と白色が隣り合っている部分を赤で示している様子

白色と黒色が隣り合っている部分を赤色で表している。そして、[2]で検出した顔の範囲を横1列ずつで見えいき、黒色と白色がとなりあっている点とその列に1個以上8個以下あるところに目があるとする。コンピュータを操作するときには普通2つの目は横方向に並んでいるので、その列には黒色と白色がとなりあう点が4個あるはずである。8個以下とした理由は、黒目にディスプレイの映像が反射してしまい、目の中心部分が白くなってしまうことがあり、その場合、黒色と白色がとなりあう点は8個あることになってしまうからである。

顔の中心から上で、目があると予想される列が集まっている所の、一番上側と下側の中間の位置にある列を、目がある列とする。そして、その列にある黒色と白色が隣り合っている所と、黒い部分を探していき、映像に映っている目の中心を特定できると考えた。

## [3]の結果

[2]の方法で顔の範囲を特定し、その領域内で[1]の処理をすることで、安定して

目の位置を検出することができた。また、先に横方向の列だけを見て、目の中心がある一列を見つけてから2つの目を検出しているので、とても軽く、[2]の顔検出の処理と合わせても、目的であるポインティングデバイスとして実用可能だと思えるくらいの速度が出た。

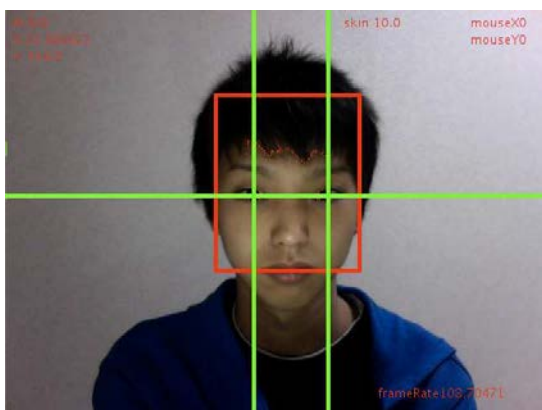


図 10 [3]の実行結果

#### [4]輪郭を使う目の中心の検出

映像中の目の位置の検出までは完成したが、今回の研究の目的である「目線をコンピュータが認識する」ためには、正確に目線を検出する必要がある。映像中での黒目の位置から目線を検出するためには、目の中心の位置を検出しなければならない。

目は球体つまり立体であり、Webカメラの映像は平面的である。したがって、本当の目の中心を計算することはとても難しい。よって、出来る限り精度が良くかつ処理が軽い方法を考えた。

黒目全体のピクセルすべての平均を用いた方が、より正確かもしれないが、それは処理が多くなってしまいうだろう。そこで今回用いたのは、黒目の輪郭のピクセル位置の平均を用いるという方法である。

輪郭を取得する方法としては、

- (1) 輪郭を取得するために、黒目と白目の境目を検出する。
- (2) [3]で取得したおおまかな目の位置から、輪郭追跡の開始点を決める。
- (3) その点から、周りの8ピクセルを調べていき、隣の輪郭を発見する。
- (4) 開始点の隣の点の周りの8ピクセルを(3)と同様に調べ、さらに隣のピクセルを探す処理をする。
- (5) (4)と同様の処理を続ける。

という流れである。

そして開始点に戻ってきたとき、(5)の処理を終了し、得られた輪郭のピクセルの平均の位置を計算し、それを目の中心とするという方法である。

#### [4]の結果

強い光源がカメラのある方向にあると、黒目にその光源が反射してしまい、輪郭抽出が失敗してしまうことがあった。

もし、強い光源がディスプレイだけならば、その光源は黒目の中央で反射するので、黒目の輪郭には影響しないが、部屋の灯り等は黒目の輪郭付近で反射してしまうことが多く、そのせいで正しく輪郭を抽出することができなくなってしまった。

よって、この輪郭を用いて中央を検出する方法を用いるのをあきらめた。



図 11 [4]の結果

#### [5]重心を使う目の中心の検出

輪郭を用いての中心の計算は難しいということがわかった。そして、黒目の範囲が正確に検出できていなくても、ある程度の精度で目の中心を計算する方法としては、黒目の重心を計算する方法をとった。

こうすることで、[4]に比べて誤差を減らすことができる。

#### [5]の結果

黒目の重心を計算することで、たとえ目の中心や輪郭付近が照明で反射してしまっても、目の中心を少ない誤差で計算することができるようになった。

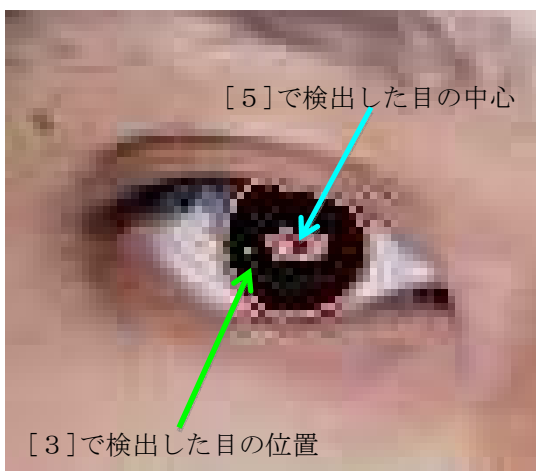


図 12 重心を計算している様子

## 5. 考察

今回、コンピュータで利用者の視線を取得するために、Webカメラで利用者を撮影し、その映像から視線を検出する方法を研究した。

映像から顔の範囲の検出、そこから目の位置の検出までの処理はとても軽く、このアプリケーションをバックグラウンドで起動させておいても問題ないものができた。そして、重心を計算することで、目の中心の位置を検出することができた。

問題点は、Webカメラの映像にはノイズがあるために、肌の色による顔の範囲の検出が安定しなくなってしまうことがあるという点である。顔の範囲選択が安定していないので、全体の処理も安定しなくなってしまうている。これは精度がよく、かつ処理の軽い方法を考える必要がある。

## 6. 今後の展望

今回検出した目の中心を目線とし、それをコンピュータのマウス操作などに活用できるようにしていくことが次の課題である。

しかし、今回このアプリケーションはProcessingを用いて制作したが、この言語ではアプリケーションからマウスの位置を変更するなど、複雑な動作をさせることは難しい。MacならばObjective-Cといった、そのOSに特化した言語で開発しなければいけないので別の言語を勉強する必要がある。

これが完成すると、まずは目線でマウス操作ができるようになり、現在あるコンピュータに何もデバイスを追加せずに、今まで以上にコンピュータの操作が簡単になるだろう。

また、体の不自由な人でも視線の動きだけでコンピュータを操作できるようになるので、例えば、画面に「あいうえお…」といったような文字の表を表示しておき、それを一定時間見ることでその文字を選択したことにすれば、文章入力はもちろんだが、その文字を音声で出力することで、体が不自由な人でも会話することができるようになる。このような社会貢献につながると考えられる。

さらに、別の考え方として、利用者がコンピュータを使っているときに、ディスプレイのどこを見ているかがわかると、その利用者の興味がどこにあるかがわかることになり、例えばインターネットブラウザでは、そこからその利用者の興味がある内容を知ることができたり、逆にどのような内容が読んでもらえるかを今まで以上に調べることができたりするようになり、うまく使えば、Web サイトの質がよくなるようになると考えられる。

## 7. 参考文献

- [1] メディアンフィルター  
<http://www.gifu-nct.ac.jp/elec/yamada/iwata/median/index.html>
- [2] Delphi 応用編  
[http://www2s.biglobe.ne.jp/~aks-lab/delphi\\_part3\\_1.html](http://www2s.biglobe.ne.jp/~aks-lab/delphi_part3_1.html)
- [3] コンピュータのセカイ- 今そこにあるミライ  
[http://news.mynavi.jp/series/computer\\_vision/010/index.html](http://news.mynavi.jp/series/computer_vision/010/index.html)
- [4] Processing Reference  
<http://processing.org/reference/>
- [5] RGB から HSV への変換と復元

<http://hooktail.org/computer/index.php?RGB%A4%AB%A4%E9HSV%A4%D8%A4%CE%CA%D1%B4%B9%A4%C8%C9%FC%B8%B5>

- [6] C 言語による輪郭追跡処理について  
<http://homepage2.nifty.com/tsugu/so-tuken/binedge/>
- [7] 力のつりあい  
<http://www.kdcnet.ac.jp/college/butori/kougi/buturiko/mechanics/mechan5/mechan5.htm#center>

## 8. 謝辞

今回の研究にあたり、サイエンス研究会物理班顧問の米田隆恒先生、藤野智美先生には、研究に関する助言や指導をしていただきました。また、同研究会のメンバーには研究のサポートをしていただきました。この場をかりてお礼申し上げます。



# シミュレーションで交通渋滞を考える

3年A組 村田 宏暁

指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

車に乗っているとよく渋滞に巻き込まれる。渋滞が発生すると、移動時間が長くなり、事故も増える。そこで私は交通のシミュレーターを作成し、円滑に交通を行うにはどのような運転、信号制御を行えば良いか研究を行った。本論文ではその研究の内容を紹介する。なお、今回のプログラムはすべて JAVA 言語で作成した。

キーワード 交通渋滞、シミュレーション、JAVA、グラフ

## 2. 研究の背景と目的

現在、車は非常にポピュラーな移動手段だが、交通渋滞などに巻き込まれると極端に時間がかかる。また、渋滞が増えると移動にかかる時間が長くなるだけでなく、事故が増えたり、燃費が悪くなり環境が汚染されるなど様々なデメリットがある。そこで私は、交通渋滞の発生や解消の仕組みを調べることで効果的な対策を立てられるのではないかと考え、コンピューターを用いたシミュレーションによってそれらを調べた。

一サイクル：信号が青になった瞬間から、次に信号が青になる瞬間までのこと。

オフセット：一サイクルの時間が等しい隣り合う交差点の間での、赤信号の始まる時刻のずれ。信号の一サイクルの時間を  $C$ (秒) とすると、 $x$ (秒) のオフセットと  $x+C$ (秒) のオフセットは同義である。

停止距離：緊急に停止する必要のある事象が起こってから、車が停止するまでに進んでしまう距離。

反応時間：ドライバーが状況を認識し、加速度として出力されるまでにかかる時間

## 3. 研究方法とその結果

### (1) 用語の定義

本論文で使用する用語を次のように定義する。

渋滞： 一台の車が一つの信号の影響で二回以上止まることのある状態。

交通量： 単位時間あたりに道路に入ってくる車の数。

### (2) シミュレーターの概要

今回開発したシミュレーターは以下のような道路を想定している。

・道は直線であり、一方通行である。

・歩行者や自転車などは存在せず、特殊自動車と二輪車を除く自動車のみが走行している。

また、[研究1]、[研究2]において車は以下のような動きをする。

- ・右折や左折をしない
- ・加速や減速をする場合は必ず指定した一定の加速度  $a(\text{km/h/s})$  で加速、減速する。
- ・車間距離と停止距離の差が一定値以下になると減速する。
- ・信号の停止線までの距離が一定の範囲内でその信号が赤のときも減速する。
- ・上の二つのどちらにも当てはまらず、加速しても最高速度を超えない場合は加速する。
- ・上の三つのいずれにも当てはまらない場合は加速する。

### (3) 研究事項

今回、私は次の四つの研究を行った。

[研究1] 交通量を時間的に集中、分散させた際の、一定数の車が通過するまでの総所要時間の変化について

[研究2] オフセットを変化させた際の、一定の距離を通過するのに要する時間の変化について

[研究3] 文献[4]に記載されている車両挙動モデルと、それを少し改良した車両挙動モデルの検証

[研究4] 新たな車両挙動モデルの開発  
次に、それぞれの研究について詳しく説明する。

### [研究1]

シミュレーターの実行中に交通量を変化させることができるシミュレーターを作成し、信号が一つだけある一本の道路において、交通量を変化させた場合の車の挙動を観察した。その際、結果的に通過する車の数が同じであっても、その車間距離の違いによって総合的にかかる時間に差が出るのではないかと考えた。それを検証するために、シミュレーターの実行中に一度交通量が増えるようなプログラムを作成した。そして、交通量の変化量を変化させてシミュレーションを行い、初めの車が道路に進入してから最後の車が道路から出るまでの時間を記録し、グラフにした。また、渋滞が起きるかどうかで大きな変化が起こるのではないかと考え、渋滞が起こる最小の交通量に近い  $8.5(\text{台/分})$  を中心に変化させるようにした。

### [結果1]

図1は、まず  $8.5 - \frac{x}{2}$  (台/分) のペースで 100 台の車を道路に入れた後、  $8.5 + \frac{x}{2}$  (台/分) のペースで車を 100 台道路に入れ、それらの車がすべて道路を通過しきるまでの時間を  $y$  秒としたグラフである。

交通量の変化量と総所要時間との関係を表したグラフ

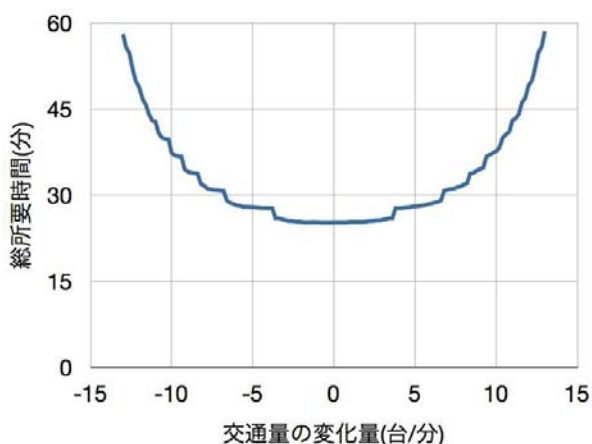


図 1

[考察 1]

仮説通り、結果的に通過する車の数が同じでも、すべての車が道路を抜けるまでの時間が変わった。また、交通量の変化が小さく、最大の交通量が少ない方がかかる時間は短くなった。そのことから、大規模な渋滞が起これるとその解消に時間がかかるため、結果的に通過するまでに要する時間が長くなったと考えられる。そのため、前方が混雑しており渋滞が起これそうな状態の時には、渋滞が起これる前に速度を落として車間距離を開けるなどして、後方の空いているところに交通量を分散することで全体が要する時間を短くすることができるのではないかと考えられる。しかし、前方が混雑しているかどうかを目視で把握することは難しいため、そういった情報をドライバーに伝達するシステムを作ることができれば、渋滞の解消に役立つのではないかと考えている。

[研究 2]

オフセットを適切に調整することで車が赤信号に出会う回数を大幅に減らすことができるのではないかと考え、シミュレーションを行おうと考えた。しかし、[研究 1]で作成したシミュレーターは道が一本と信号が一つしかなかったため、オフセットなどの複数の信号の関係について調べることができなかった。

そこで、道を格子状に並べることでできるシミュレーターを作成し、オフセットを変えながらシミュレーションを行い、それぞれについて一定の距離を移動するのにかかる時間の平均を求め、最も円滑に交通を行うことのできるオフセットを求めた。また仮説として、最適なオフセットを  $O$  (秒)、交差点の間隔を  $D$ (km)、最高速度を  $S$ (km/h)としたとき、

$$O = 3600 \frac{D}{S}$$

という式をたてた。これは、隣接する交差点同士の距離を最高速度で割ることにより、最高速度でこの交差点の間を走ったときにどの程度時間がかかるかを求めたものである。

[結果 2]

図 2 は交差点の間隔が 250m、最高速度がそれぞれ 30km/h、40km/h、50km/h、60km/h の場合のオフセット(x 軸)と 7.5km の道のりを通過するのにかかる時間(y 軸)の関連を調べたグラフである。

それぞれの最高速度について、通過時間が最小になるときのオフセットと、仮説でたてた式より得られた値を表にすると表1のようになり、誤差はいずれも2%未満と、非常に小さくなった。また、最高速度を40km/hとし、交差点の

間隔が125m、187.5m、250m、312.5m、375mのときのグラフ図3を作成し、同様に表2にした。こちらの表でも誤差はいずれも2%未満となったため、仮説でたてた式は正しいと言える。

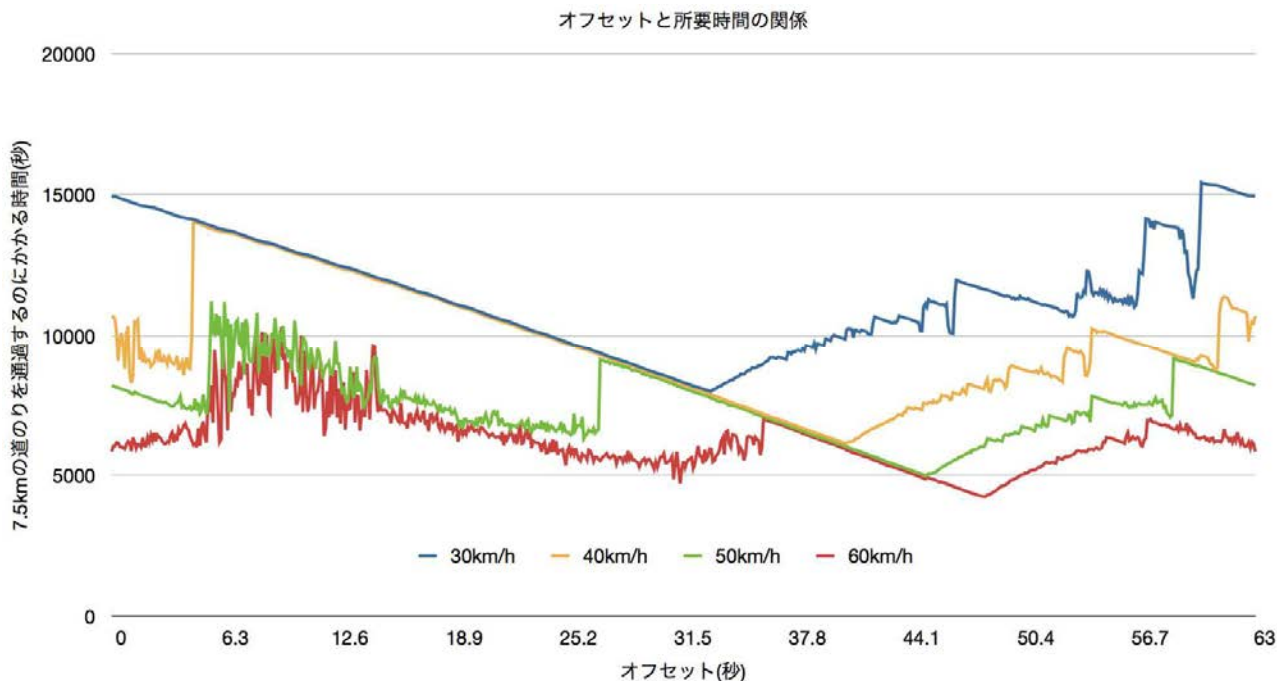


図2

制限速度	グラフより得られた最適オフセット	仮説で立てた式より得られた最適オフセット	右の二つの値の差	式の誤差
30km/h	29.88秒	30秒	-0.12秒	0.4%
40km/h	22.41秒	22.5秒	-0.09秒	0.4%
50km/h	17.73秒	18秒	-0.27秒	1.5%
60km/h	14.85秒	15秒	-0.15秒	1%

表1

オフセットと所要時間の関係

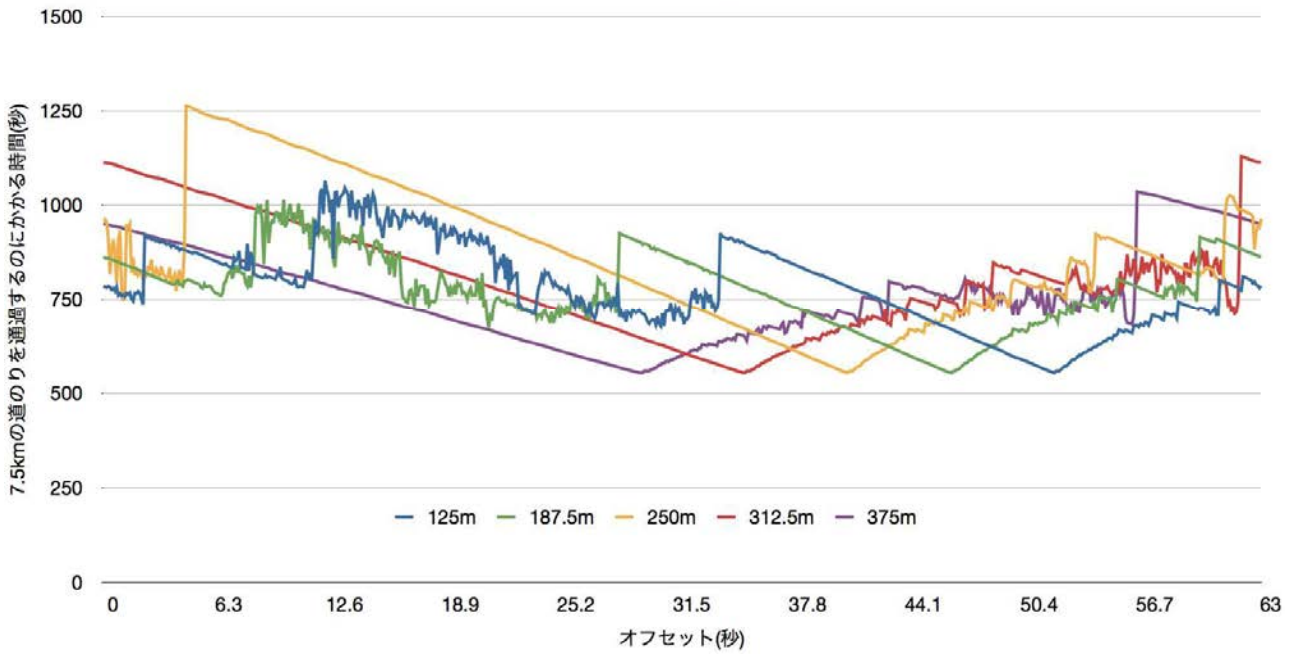


図 3

制限速度	グラフより得られた 最適なオフセット	仮説で立てた式より得られた 最適なオフセット	右の二つの値の差	式の誤差
125m	11.16秒	11.25秒	-0.09秒	0.8%
187.5m	16.74秒	16.875秒	-0.135秒	0.8%
250m	22.41秒	22.5秒	-0.09秒	0.4%
312.5m	27.99秒	28.125秒	-0.135秒	0.48%
375m	33.66秒	33.75秒	-0.09秒	0.27%

表 2

[考察 2]

仮説で立てた式がシミュレーションの実行結果とほぼ一致したが、この式は最高速度に至るまでにかかる時間を考慮していない。にも関わらず一致したのは、100m 以上の距離を走る際には、そのような時間は誤差の範囲内であるからだと考えられる。また、実際に仮説で立てた式にしたがってオフセットを適切に調整した格

子状の道でシミュレーションを行ったところ、二つ目以降の信号ではほとんど車は止まらなかった。実際には右折や左折をする車や運転手による速度差などがあるため、これほど滑らかなにはならないと考えられるが、それでもオフセットを適切に調整することである程度の効果が期待できる。ただし、今回のシミュレーションでは一方通行の道についてしかシミュレーション

をしていないが、実際には一方通行の道は少なくほとんどの道に対向車線がある。また、オフセットは対向車線のものと同動し、信号の一サイクルの時間を  $C$  (秒) とするとき、片側の車線のオフセットが  $x$  (秒) ( $0 \leq x$ ) だとすると、対向車線のオフセットは  $nC - x$  (秒) ( $n$  は自然数) となる。さらに、上り線と下り線の制限速度が異なることは少なく、交差点間の距離も等しいので、最適なオフセットも一致する。最適なオフセットを  $O$  とすると  $nC - O = O$  すなわち

$$C = \frac{2O}{n}$$

が成り立つ場合しか両車線のオフセットを最適なオフセットにすることはできない。また、オフセットを調整するためには、当然信号の一サイクルの時間が一致している必要があるので、それぞれの交差点で最適なオフセットに合わせて  $C$  の値を変えることはできない。すなわち、それぞれの交差点の位置と最高速度が確定した後でオフセットを調整しようとしても両車線のオフセットを共に最適なオフセットにすることができない場合が多いと考えられる。そのため、オフセットを適切に調整し、道路交通を円滑に行うためには、道路を建設する段階からそれを考慮した道路建設を行う必要がある。

### [研究3]

ここまでのシミュレーターで使用していた車両の挙動モデルは、挙動そのものは人間の運転する車の挙動と大きな差はないものの、そこに

至るまでの計算式は人間のそれとはかけ離れており、どうしても誤差が出てしまう。

そこで、異なる車両挙動モデルを用いようと考え、それらの車両挙動モデルの精度を検証するために、一定の間隔で並んだ 500 台の車列の先頭の車両をキー操作に応じて加減速させ、後続の車両を検証したい車両挙動モデルに従って走行させるシミュレーターを作成した。これを用いて、文献[4]に記載されていた以下の三つの車両挙動モデルの検証を行った。

$P(x)$  は前から  $x$  台目の車の車頭の位置、 $V(x)$  は前から  $x$  台目の車の速度、 $D$  は停止している際の望ましい車頭間距離、 $A(x)$  は前から  $x$  台目の車の反応時間後の加速度、 $a$  は感度を表す。また、すべてのモデルにおいて、加速度の上限と下限を定めている。

$$1 : A(n+1) = a\{V(n) - V(n+1)\}$$

$$2 : A(n+1) = a \frac{V(n+1)\{V(n) - V(n+1)\}}{P(n) - P(n+1)}$$

$$3 : A(n+1) = a \frac{V(n+1)\{V(n) - V(n+1)\}}{P(n) - P(n+1) - D}$$

### [結果3]

$$1 : A(n+1) = a\{V(n) - V(n+1)\}$$

このモデルでは、車の、反応時間後の加速度は、前方を走行している車との相対速度に比例している。しかしこのモデルでは、 $a$  を大きくすると、ある車両の速度変化が後方へ伝播していく際にその速度変化が増幅してしまい、増幅しない程度に  $a$  を小さくすると、後方の車両の

反応が遅れ、容易に衝突してしまう。また、実際には運転手は車頭間距離が近いほど前方の車との速度との違いに敏感になると考えられるが、このモデルでは車頭間距離によって加速度が変化しないため、それを反映できていない。

$$2 : A(n+1) = a \frac{V(n+1)\{V(n) - V(n+1)\}}{P(n) - P(n+1)}$$

このモデルは一つ目のモデルに加えて、自分自身の速度に比例し、車頭間距離に反比例するようになっている。このモデルは上のモデルと違い、車頭間距離が近いほど前方の車との速度の違いに敏感になる。しかし、衝突は比較的起こりにくくなっているものの、やはり  $a$  を大きくすると速度変化が増幅してしまい、増幅しない程度に  $a$  を小さくすると容易に衝突してしまう。

$$3 : A(n+1) = a \frac{V(n+1)\{V(n) - V(n+1)\}}{P(n) - P(n+1) - D}$$

このモデルは二つ目のモデルにおける車頭間距離を実際の車頭間距離と望ましい車頭間距離との差にしたものである。停止の直前までは順調に減速するが、前の車との車頭間距離が  $D$  より短く前の車の方が速度が遅い場合に、本来は減速するべきだが加速してしまう。

[考察3]

これらのモデルにはそれぞれ問題点があったが、それはこれらのモデルが速度変化を伴いながらも、停止などをせずに進んでいく場合を想定しているからだと考えている。実際に人間が

運転するときには、どのような状態であるかによって計算式を変えると考えられるため、このような単純なモデルでその挙動のすべてを説明することには無理があると考えている。また人間が運転している場合、自分の速度や相対速度、車間距離が同じであっても、気分や性格などの非常に細かい要因によって加速度が変化することが考えられるが、これらのモデルではそのような点についても再現できていないため、改善する必要がある。

[研究4]

参考文献[3]に記載されていたモデルは車両が順調に走行している場合を想定したモデルで、停止などをした場合には正しく動かない。そこで、条件分岐などを用いた、より複雑な式で車の動きを表現する車両挙動モデルを独自に開発した。このモデルは、前方の車両と同じ速度で理想的な車間距離を保って走行する状態を目標に車両の挙動を決定するものである。

[結果4]

このモデルでは前方を走行している車両が等速走行している場合の加速度の変化の様子は比較的人間に近いものになったが、加速度の大きさは非常に小さく、実際の車両のものとは違ったものになってしまった。また、前方の車両が加減速している場合の加速度は実際のものとはかけ離れてしまっている。

[考察4]

加速度の大きさが非常に小さくなってしまっている点についてはパラメーターや式の一部を適切に調整することで解決するのではないかと考えているが、それぞれが他の場合の動作にも関わっているため、安易に変更できず、現在は解決できていない。前方の車両が加減速している場合の挙動の精度が低いのは、このモデルは前方の車両が等速走行していることを想定して開発したことによるもので、前方の車両が等速走行していない場合の挙動を表現するための式を別に開発すれば解決できると考えられる。

#### 4. 今後の課題

今回は研究1、2でシミュレーターを作成しシミュレーションを行い、交通渋滞の性質や、オフセットなどについて調べた。しかし、車両挙動モデルが正確さに欠けており、本論文に書いたような大まかなことはわかるが、複雑な式を用いて関係を表すなどの厳密なことは言えない。そのためモデルを正確なものにする必要があると考え、様々な車両挙動モデルの検証および開発を行ったが、まだ満足できる精度を持った車両挙動モデルは完成していないため、それを完成させたいと考えている。また、現在は格子状に並んでいる道などの単純な道でしかシミュレーションを行うことができないが、実際には曲がっていたり垂直でない角度で交わっていたりなど複雑な道も多いため、そのような道でのシミュレーションもできるようにしたい。こ

れらができれば、渋滞を少しでも少なくするためには、どのような運転をすればよいのか、どのような道を作れば良いのかがわかり、渋滞を減らすことができるのではないかと考えている。

さらに、リアルタイムで、現在の道路状況をもとに数分、数十分先の道路状況を予測し、ナビ等を通じてドライバーに指示を出すようなシステムを構築することができれば、渋滞の数を大きく減少させ、起こってしまった渋滞も素早く解消できるのではないかと考えている。

#### 5. 参考文献

[1] 「やさしい JAVA 第二版」(高橋麻奈 著、風工舎 版、2002 年)

[2] 「碧色工房」

(<http://www.mm2d.net/applet-howto/>)

[3] 「Java Platform, Standard Edition 6 API 仕様」

(<http://docs.oracle.com/javase/jp/6/api/>)

[4] 「交通工学」(飯田恭敬 監修、北村隆一 編著、オーム社 版、2008 年)

#### 6. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において顧問の米田隆恒先生をはじめ、多くの先生方に多大なご指導を賜りました。また、先輩方にも多くのアドバイスをいただきました。この場で深く感謝申し上げます。



# 拡張型情報表示デバイスの開発

3年B組 青木 雅典

指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

私は、現在全く新しい情報表示デバイスの開発を行っている。当研究では、デバイスの表示領域をハードウェア面でユーザーが自由に伸縮できる拡張型情報表示デバイスの開発を目指す。そこで、その基本部分として、小型ディスプレイを搭載したデバイスを複数台組み合わせることでユーザーが自由に操作できるデバイスのプロトタイプを製作した。

キーワード OLED、小型ディスプレイ、PIC マイコン、SPI 通信

## 2. 研究の背景と目的

近年、タブレット端末やスマートフォン等が普及したことで、液晶ディスプレイを利用した小型の電子デバイスがより身近なものになってきた。



図1 液晶ディスプレイを搭載したスマートフォン

老若男女問わず、たくさんの人々が利用しているこれらのデバイスには、使用目的に応じた様々なサイズのディスプレイが取り付けられている。しかしながら、ユーザーが行える操作はすべて、たった一つの画面の中でしか行うことができないので、デ

バイス本体の画面サイズによってユーザーができることが限られてしまう。

この現状を打破するため、現在主流となっている「一つのデバイスあるいはシステムに一つの画面」という方法ではなく、「小型ディスプレイを搭載したデバイスを複数台組み合わせる」ことを考えた。これにより、ユーザーはデバイスの並びや構成を変化させることでさらに多様な情報入力の手段を得ることができ、同様に多様な情報出力も得られると考えられる。

## 3. 研究内容

### (1) 研究事項

<研究1>

マイクロコンピュータから小型ディスプレイを制御し、画面に図形を描画する

<研究2>

センサの情報を読み取り、グラフとして画面に描画する

<研究3>

デバイス間で通信を行い、一つの図形を複数のディスプレイにわたって表示する

<研究4>

デバイスの自由度を向上させるために、小型化を行う

<研究5>

無線通信デバイスを使用してパソコンとデバイスの間で通信を行う

(2) 研究内容

<研究1>

私は昨年度の研究で「NOKIA 3300 LCD」と呼ばれている CSTN カラー液晶ディスプレイの制御を行った。

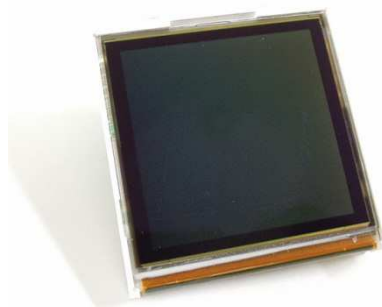


図2 NOKIA 3300 LCD

しかし、この液晶ディスプレイは制御信号に対する反応速度が遅く、斜めから見ると色が変わってしまうといった問題があり、あまり実用的なものではなかった。今回製作する機器は、小型ディスプレイを組み合わせる。ディスプレイを平面的にだけではなく立体的に組み合わせることも考えているため、画面に表示されているものがどの向きから見てもはっきりと見える方が良い。そこで、今回は液晶ディスプレイではなく、視野角の広い OLED (有機 EL) ディスプレイ (以下、OLED) を用いることにした。

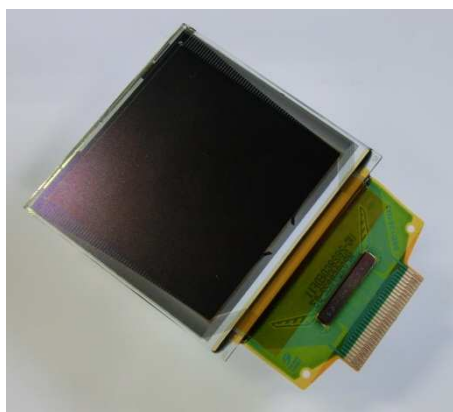


図3 今回使用する OLED

これまで、モジュールを制御するために、マイクロコンピューターチップを用いてきた。今回のプロトタイプの開発では、「NOKIA 3300 LCD」を制御していたものと同じ PIC24F マイクロコンピューター「PIC24FJ64GA002」を使用した。



図4 PIC24FJ64GA002

今回使用した OLED には 3 線 SPI、4 線 SPI、8bit パラレル通信の 3 種類の通信方式がある。初めに製作した回路では、3 線 SPI 通信方式を利用して OLED を制御した。3 線 SPI 通信は、コマンド識別フラグと 8bit のデータを合わせて 9bit のデータを SPI 通信で送信している。しかし、PIC24F マイコンの SPI モジュールは 9bit のデータを送信する SPI 通信方式に対応していない。そ

のため、ソフトウェアで疑似的に SPI 通信を行う必要があり、通信速度が低下してしまった。そこで、データかコマンドかを識別する信号線 1 線と PIC24F でも高速で制御できる 8bit の SPI 通信方式を利用できる 4 線 SPI 通信方式を使用するように改良を加えた。

また、OLED の電源に 13V を用意する必要があったため、「TB62731FUG」という DCDC コンバータを使用し、昇圧回路を自作した。この際、私たちの研究室にある CNC フライスで独自に基板のパターンを削り出し、部品をすべて表面実装部品にすることで、昇圧回路全体の小型化も行った。

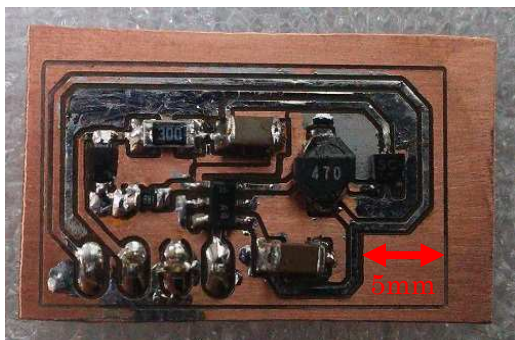


図 4 製作した昇圧回路

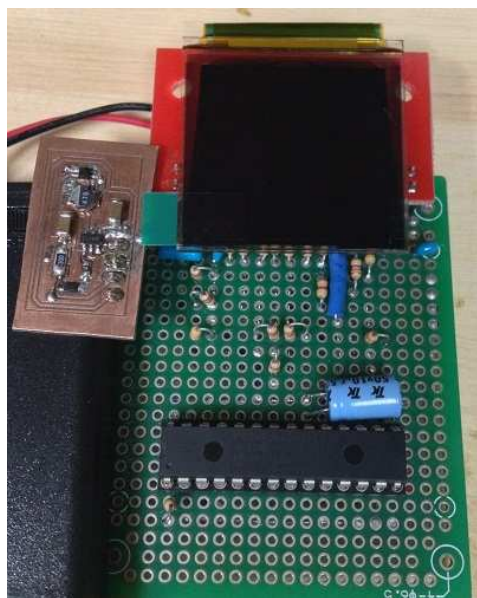


図 5 製作した OLED デバイス

#### <研究 2>

デバイスへの入力やディスプレイの向きの検出などに、センサを利用するため、ここではセンサからの値を読み取り、OLED にグラフとして表示する。

センサは、「KXM52-1050」という 3 軸加速度センサモジュールを利用する。

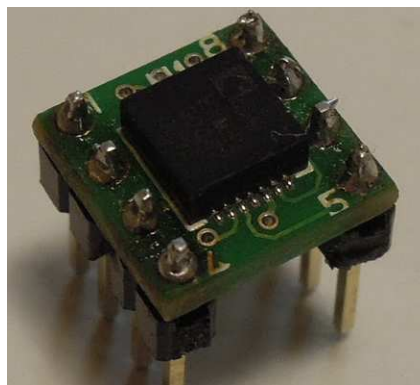


図 6 KXM52-1050

加速度センサは、重力加速度も出力するので、それをマイクロコンピュータで取得することで画面の向きを指定することも可能である。このセンサは、X,Y,Z の各軸の加速度をアナログデータで出力するため、データの読み取りには、マイクロコンピュータの AD コンバータを利用するのが良いと考えた。

また、グラフを描画するには、取得したデータを保存する機能と画面を自動的に再描画する機能が必要である。OLED は、横幅が 128px あるので、データ格納用変数は 128 個用意する必要がある。ここでは横幅を 4px として説明する。グラフは右から左に流れていくので、最新のデータは右端に表示する。まず、Index1 に最新データを入れる。次に変数を左に一つ分ずつずらし(左端の変数は右端に移動) Index2 に最新データを入れる。さらに、変数を左に一つ分ず

つずらす。この手順を繰り返していくことで、データを更新しながら画面の再描画を行うことができる。

#### <研究3>

複数の OLED デバイスを一つのシステムとして利用するには、それぞれのデバイス間で通信を行い、センサの状態や描画しているものの情報を共有する必要がある。そこで、今回は PIC マイコン同士を UART (汎用非同期送受信回路) で接続し、描画する画像のデータを送受信できるようにする。ここでは、2つのデバイスを接続してシステムを構成する。

例えば、OLED の間を通過して移動する長方形を表示したいとする。長方形の描画領域が一枚目の OLED をはみ出したとき、もう一方の OLED に表示するべき長方形の座標や色などの情報を UART で送信する。すると、受信側のマイクロコンピュータは受信したデータを元に、はみ出した部分の長方形を OLED に描画する。このような処理を複数の OLED デバイス間で行うことにより、ほぼリアルタイムで OLED を連携させることが可能となる。また、独自の識別コマンドを使用することで、送信している情報が画像データか、センサ入力値のデータか、などを区別できる。そのため、デバイス全体の情報を共有できるシステムも製作することが可能になる。

#### <研究4>

OLED デバイス同士を組み合わせるときの自由度を向上させるには、デバイスをできるだけ薄く小さくすることが必要である。そこで、ここでは<研究1>で製作した回

路の小型化を行い、デバイスを OLED 側から見たときディスプレイのみが見えるようにすることで、連結時の画面同志の隙間を少なくすることにした。

始めに、<研究1>で製作した OLED デバイスは、使用しているほとんどの部品がサイズの大きいものであったため、回路の小型化を行うには、使用しているすべての電子部品をサイズの小さい表面実装部品に変更した。特に、PIC マイコンコンピュータは、今まで使用していた DIP パッケージの「PIC24FJ64GA002」から、TQFP パッケージの「PIC24FJ64GA004」に変更したことで、回路をより薄く、小さくすることが可能となった。



図7 研究1で使用した電子部品と

今回使用する表面実装部品の比較

また、<研究1>ではユニバーサル基板という基板を使用していたが、これは小型化を行うには不向きであったため、OLED のサイズに合わせた専用制御基板を自ら製作した。

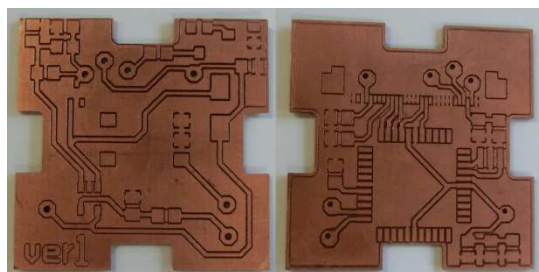


図8 小型化した OLED 制御基板  
(両面基盤の裏と表)

使用する PIC マイクロコンピュータを変更したことで、利用できる入出力ピンが増えた。そこで、制御基板の裏面には昇圧回路と共にタクトスイッチを配置し、OLED デバイスを上から押すことで、ユーザーからの入力を受け取れるようにした。

#### <研究 5 >

このデバイスで表示する情報として、メールや天候の情報などが考えられる。それらの最新情報はインターネットを通して取得する必要があるが、デバイスに無線 LAN 通信パーツを組み込んでインターネット上から直接情報を取得することは、パーツの大きさや値段などの問題があり、難しい。そこで、パソコンとデバイスとを無線で接続し、パソコンから必要なデータだけを取得する方法をとった。

パソコンと OLED デバイスの接続には「XBee」という無線通信モジュールを使用した。



図 9 XBee 無線通信モジュール

これは、研究 3 でも利用した UART 通信を手軽に無線化できるものである。このモジュールを利用するとモジュール同士でネ

ットワークを構築することも可能だが、今回は試験的に 1 つの OLED デバイスと一台のパソコンとで通信を行い、1 対 1 での通信とした。

初めに、パソコンとマイクロコンピュータ間で無線通信を行う実験として、簡単な対話型マイコン制御プログラムを制作した。

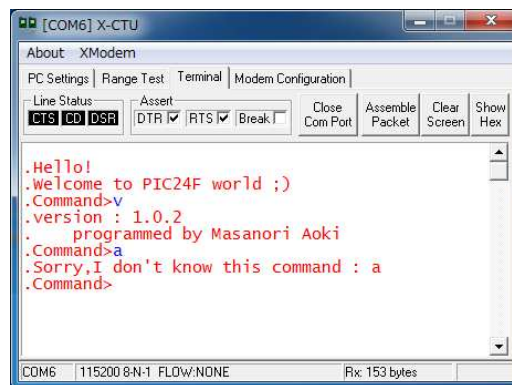


図 10 制作した対話型  
マイコン制御プログラム

これは、あらかじめマイクロコンピュータ側にコマンドやメッセージを記憶しておくことで、ユーザーはまるで対話をしているような感覚で利用することができる。これにより、XBee 無線通信モジュールを使用してパソコンとマイクロコンピュータの間で無線通信を行うことに成功した。

また、その応用として、OLED に Twitter のつぶやきを表示するシステムを制作しようと考えた。Twitter からデータを取得するパソコン側のソフトウェアは、Visual C#で自作し、取得したデータをあらかじめ決めておいた形式でマイクロコンピュータに送信する仕組みとした。

## 4. 結果

### <研究1>

マイクロコンピュータと OLED の間の通信方式に 4 線 SPI 通信を利用することで OLED を高速制御することに成功し、図形や写真を表示することが可能となった。

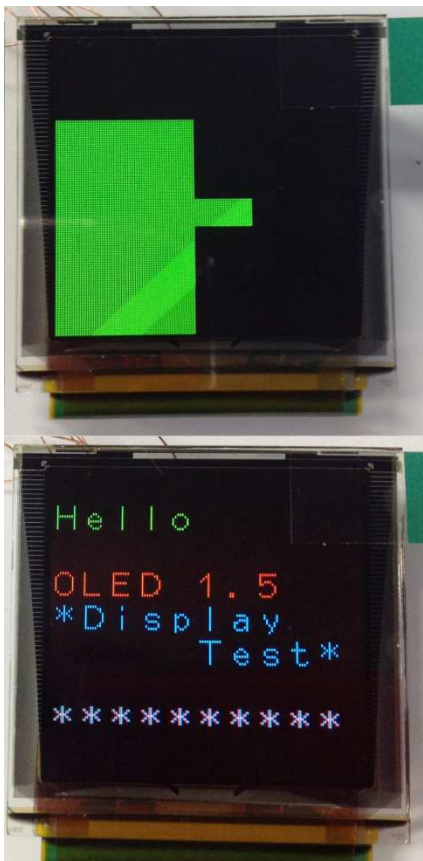


図 11 文字と図形を OLED に表示している様子

### <研究2>

3 軸加速度センサからのアナログデータをマイクロコンピュータで読み取り、それぞれの方向の加速度をグラフとしてリアルタイムで描画することができた。

### <研究3>

2つの OLED デバイス間で UART 通信を行い、データの送受信を行うことは可能となった。しかし、実際に複数の OLED を 1

つの画面として利用すること、および個々の OLED デバイスが持つ情報をデバイス同士で共有するシステムを構築することは、現段階ではできていない。

### <研究4>

使用する電子部品を小さいものに変更し、OLED の大きさに合わせて設計した自作制御基板を使用することにより、<研究1>で製作した電子回路をすべて OLED のディスプレイサイズよりも小さく収めることに成功した。

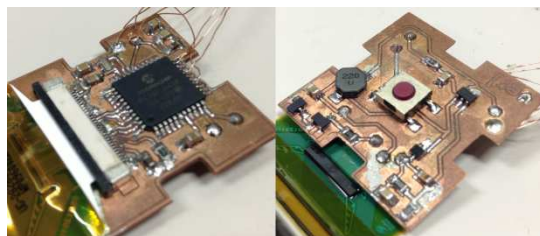


図 12 小型化に成功した OLED デバイス (表面と裏面)

### <研究5>

パソコンと OLED デバイス無線通信モジュールを用いて接続することが可能となった。しかし、目標であったデバイス本体をインターネットに接続することなく天候や Twitter などの情報を OLED に表示することは、現段階ではできていない。

## 5. 考察

今回の試作において、研究3の目標を達成することはできなかった。これには、マイクロコンピュータ同士のデータ通信を行ったとき、液晶ディスプレイに表示するデータが正しく送受信されていないということが考えられる。このプロトタイプでは、UART 通信を利用して他の OLED デバイスとの同期を行うようにした。この場合、複数の OLED を一つディスプレイとして使

用するには、それぞれの OLED デバイス間のタイムラグを抑えるために、通信に必要なとする時間をできる限り短くする必要がある。しかし、通信の高速化を図ったことで、マイクロコンピュータ自体の通信精度のズレが生じ、結果的にデータの送受信ができなくなったと考えている。

さらに、研究4においても現段階で目標を達成することはできなかった。これは、パソコン側のソフトウェアでツイートを取得する際に正しくデータを読み込めていないことが原因だと考えられる。Visual C#から Twitter のデータを取得する時、OAuth 認証という複雑な認証方式を利用する必要があり、プログラムはこの処理を正しく行うことができていないと思われる。この問題を解決することは、現段階で容易ではないため、今後は Twitter ではなく、もう少し簡単にデータを取得することが可能な天気やメールなどの情報サービスを利用することも考えている。

従来、私たちが日常生活の中で利用してきた多くの情報表示端末では、ユーザーが利用できる情報入力および出力の手段は、初めから端末に備え付けられているたった一つの画面だけであった。しかし、私が今回開発したシステムのプロトタイプでは、ユーザー自身がデバイスの組み合わせや並び方などの形態の変更を自由に行うことを目標にしている。それにより、ユーザーや、システムを使用する目的、状況に応じて確実に適合するよう、自由にユーザーがハードウェアの面から変更を加え、システムを使うことができると考えられる。

また、実用性に含んだデバイスを開発するためには、様々な使用環境や、ユーザー

の利用方法を考える必要がある。スクリーンサイズやシステム全体の大きさ、可搬性、汎用性などを踏まえ、これからの研究をより向上させ、より良いシステムを開発できると考えている。

## 6. 今後の課題

上記の考察で述べたとおり、私が今回取り組んだデバイス開発ではいくつかの問題点が浮上した。まずは、それらの問題点をクリアし、実用性のあるプロトタイプを製作することが第一ステップであることは言うまでもない。

また、OLED デバイス同士を組み合わせるとき、毎回信号線をつなぎ直す必要があると、非常に使いづらいデバイスとなってしまふ。これを解消するために、私はデバイスの4辺に電極と小型のネオジム磁石を配置し、それぞれの OLED デバイスを磁力でつなぎ合わせる方法を考えた。

今後の研究において重要となるのはユーザー体験の模索である。従来の「直感的な」デバイスにおいては、その設計の斬新さやユーザーインターフェイスの視覚的な新しさが求められてきた。しかしながら、これから検討していくべきことはユーザーがどのような体験をこのデバイスから得られるか、である。よって、今後の研究では、どれだけ有用性のあるデバイスを設計するだけでなく、ユーザーの立場から、このデバイスからどのような体験が得られるかを考えながら開発していくことが重要になる。

## 7. 参考文献

[1]PIC24F リファレンスマニュアル

<http://www.microchip.co.jp/download.htm>

↓

[2]SSD1351 データシート

[http://aitendo2.sakura.ne.jp/aitendo\\_data](http://aitendo2.sakura.ne.jp/aitendo_data)

[/product\\_img2/product\\_img/oled/UG-282](#)

[8GDEDF11/SSD1351.pdf](#)

[3]UG-2828GDEDF11 データシート

[http://aitendo2.sakura.ne.jp/aitendo\\_data](http://aitendo2.sakura.ne.jp/aitendo_data)

[/product\\_img2/product\\_img/oled/UG-282](#)

[8GDEDF11/UG-2828GDEDF11.pdf](#)

[4]KXM52-1050 モジュール説明書

<http://akizukidenshi.com/download/ds/aki>

[zuki/KXM52-1050\\_module.pdf](#)

[5] PIC24E リファレンスマニュアル

<http://www.microchip.com/wwwproducts/>

[Devices.aspx?dDocName=en557370](#)

## 8. 謝辞

今回の研究にあたり、サイエンス研究会  
物理班顧問の米田隆恒先生や藤野ともみ先生には、日頃からご指導、ご助言をしていただきました。さらに、本校サイエンス研究会の先輩方にも多大なご協力をいただきました。この場をお借りして、御礼申し上げます。



# 太陽電池の発電量は何によって決まるか

4年B組 田中 一輝

4年B組 玉置翔太郎

指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

私たちは、本校の太陽光発電の発電量を見たとき、発電量は何によって決まるのかという疑問を持った。そこで、豆電球と小型の太陽電池を用いて光源から太陽電池までの距離を変えながら太陽電池の発電電圧を測定した。その結果、光源から太陽電池までの距離と太陽電池の発電電圧の間に規則性があることがわかったので報告する。

キーワード 太陽電池、発電電圧、入射角、反射率

## 2. 研究の背景

私たちは、図1のように、光源と太陽電池との距離が2倍になると太陽電池に当たる光の量は1/4倍になると考えた。そこで、発電電圧は光源からの距離の2乗に反比例すると仮定し、距離と発電電圧の間の規則性を説明しようとした。しかし、この仮説は近距離では成り立たなかった。今回は仮説が遠距離でしか成り立たない理由について調べた。

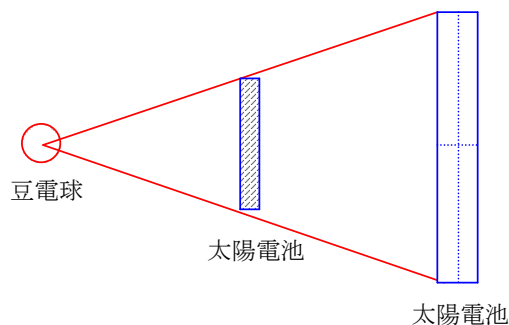


図1

## 3. 研究内容

### (1) 仮説

図2のように近距離では遠距離に比べて入射角が大きくなる。そこで私たちは、「近距離では入射角が大きいため反射率が大きくなること、発電電圧が小さくなる一つの原因である」という仮説をたて、実験を行った。

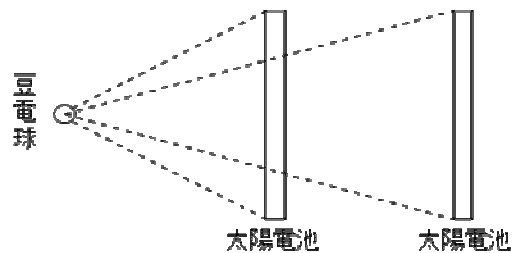


図2 距離と入射角の関係

### (2) 仮説の検証

図3が作成した実験装置の模式図である。凸レンズで豆電球の光を平行にし、中央を四角く切り抜いた段ボールに当て、太陽電

池に平行な光が当たるようにする。太陽電池を傾けていき、それぞれの角度における発電電圧を測定した。また、豆電球以外の光が太陽電池に当たらないように、実験装置全体を段ボールで覆って実験を行った。

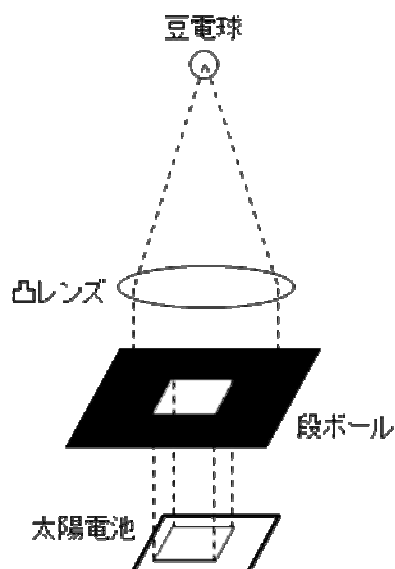


図 3

### (3) 検証結果

検証結果をグラフにしたのが図4である。太陽電池が水平となす角度が大きくなるにつれて、発電電圧は小さくなっていることがわかる。よって仮説は正しいといえる。なお、太陽電池を傾けると、光の当たる面積が増えるので、図4は測定結果を同一面積あたりの数値に換算している。

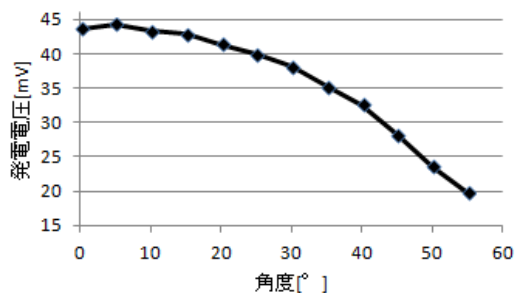


図 4 入射角と発電電圧の関係

### (4) 計算結果

図4の結果を基に、入射角による反射率の影響を考慮して計算し、グラフにしたものが、図5の「②今回の仮定」である。この影響を考慮していない「③前回の仮定」よりも①実測値に近づいていることがわかる。

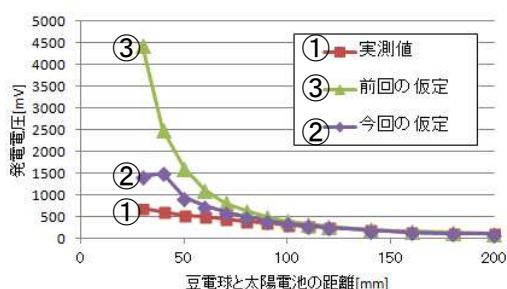


図 5

### 4. まとめと今後の展望

今回の実験で、近距離では入射角が大きいため反射率が大きくなり、発電電圧が小さくなることがわかった。しかし実際にそのデータを用いて計算してみると、距離が短くなるにつれて実測値との差は依然あった。

原因として考えられるのは、実験後に分かったことだが、使用していた太陽電池は中心付近で発電効率が良く、外側では悪かったということだ。今後、太陽電池を変えて再度実験したい。

### 5. 謝辞

この研究にあたりご指導くださったサイエンス研究会顧問の米田隆恒先生にこの場をお借りして深くお礼申し上げます。

# 自分にだけの目覚まし時計

## —指向性スピーカーの製作とその応用—

4年C組 寺川 峻平

指導教員 米田 隆恒

### 1. 要約

私は朝早く起きたいときに、自分の目覚ましの音でまだ寝ている家族を起こしてしまうことが嫌だった。そこで、超音波を利用した指向性スピーカーを製作し、マイコンと組み合わせて自分にだけアラームが聞こえる目覚まし時計を開発した。また、スピーカーからの超音波を利用した睡眠リズムの計測システムの開発を行っている。

キーワード 指向性スピーカー、超音波、マイコン、睡眠サイクル、寝返り

### 2. 研究の背景と目的

私は幼い頃、日曜日早朝の特撮ヒーロー番組をよく見ていた。そのため、目覚まし時計をセットして親よりも早く起きなければならなかった。しかし確実に起きようとするれば、アラームの大きな音でまだ寝ている親兄弟を起こしてしまう恐れがあり、かといって音量を下げれば自分が起きられない。幼い私は、週に2日しかない休みに親をしっかりと寝かせてあげたいという思いと、一度きりの放送を見逃したくないという思いに悩まされ、その結果「自分にだけ聞こえるスピーカーを作ろう」と考えるようになった。そして高校生になった私は、インターネットで指向性スピーカーの存在を知り、開発を始めた。

今回、私は「自分にだけアラーム音が聞こえ、かつ快適な眠りと目覚めを妨げない目覚まし時計の開発」を目的として研究を行った。ここでの快適な眠りとはイヤホン等の装置を直接体につけないということ

あり、快適な目覚めとはベッドを直接揺らしたり極度に不快な音によって目を覚ませたりしないということである。具体的な研究の流れを下に示す。

[研究1] 指向性スピーカーの製作

[研究2] 目覚まし時計の製作

[研究3] 睡眠リズム計測システムの開発

### 3. 研究内容

[研究1] 指向性スピーカーの製作

自分専用の目覚ましグッズは既にいくつも開発・商品化されている。それらは主に二つのタイプに分けられ、一つは耳栓型のデバイスからアラームを鳴らすタイプ、もう一つは音の代わりに振動で目を覚まさせるタイプである。中でも後者の種類は多様であり、指定した時刻になると振動する枕や、腕時計型で血圧・心拍数などから眠りの浅い時間帯にバイブレーションで目覚めさせてくれるという製品もある。

しかし、これらは今回の目的を満たすものではない。耳栓タイプのもは他人に音が聞こえることはないものの、装着時の違和感によって快適な眠りが妨げられる恐れがある。また振動タイプは振動が床などを伝わって近くで寝ている人を起こしてしまう恐れがある。そこで非接触で、かつ音を狭い範囲にだけ届けることのできる指向性スピーカーを製作することにした。



図1 指向性スピーカー



図2 超音波スピーカー  
直径約 10mm

今回指向性スピーカーの製作に使用した超音波スピーカーは  $40\text{kHz} \pm 1\text{kHz}$  に共振周波数を持つので、タイマーIC (NE555) を2つ使用して  $40\text{kHz}$  前後の方形波を作り、入力信号とした。このタイマーIC は一緒に使用する抵抗器とコンデンサの抵抗値・容量によって任意の周波数の信号を作り出せるというもので、抵抗器に半固定抵抗器 (抵抗値を自由に変えられる) を使用

することで部品を基板にハンダ付けした後でも出力信号の周波数を変化させることができる。よって作成した回路 (図3) では2つの超音波の差の周波数、つまり実際に耳に聞こえる音の周波数を、約  $2\text{kHz}$  までの範囲で自由に調節することが可能である。

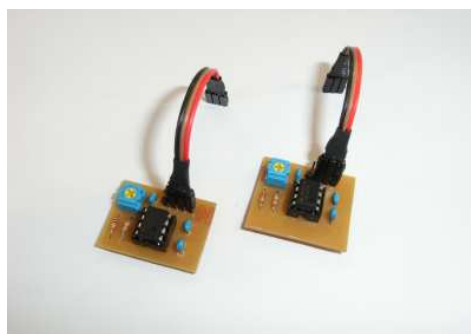


図3 タイマーIC を使用した発振回路  
発振周波数  $40\text{kHz}$

タイマーIC の電源電圧は後に使うマイコン等の部品と同じく  $+5\text{V}$  とするため、直接超音波スピーカーを駆動するには電圧が低い。そこで、FET (電界効果トランジスタ) を使用して電圧変換を行った。FET はトランジスタの一種で、今回使用した FET (図4) はゲート端子-ソース端子間に基準値より高い電圧をかけるとドレイン端子-ソース端子間に電流が流れるというものである。



図4 スイッチング用 FET  
(N-ch MOSFET  $\mu\text{PA2753}$ )

この性質を利用し、FET をスイッチのように使うことによってタイマーIC の信号

で大きな電圧を制御することができるのである。

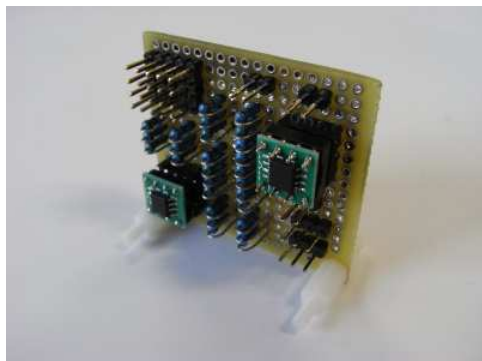


図5 スピーカー駆動用電圧変換回路

#### [研究2] 目覚まし時計の製作

PIC マイコンと LCD キャラクタディスプレイ、リアルタイムクロックモジュール（以下、RTC モジュールという）を使って目覚まし時計を製作した。マイコンとはマイクロコントローラの略称で、プログラムを専用の機器で書き込むとその通りに動作するというものである。PIC マイコン（図6）は microchip 社が開発したマイコンであり安価で入手性が高く開発環境が整っていることが特徴である。



図6 PIC マイコン  
PIC18F2320

今回は I<sup>2</sup>C 通信モジュールを内蔵している PIC18F2320 という PIC マイコンを使用した。LCD キャラクタディスプレイは小型の液晶表示機で、時刻やその他の情報表示

に使用する。RTC については後述する。

#### <研究2-1 水晶発振器使用型の製作>

まずは時間の周期を水晶発振器（図7）から得る時計を製作した。水晶発振器とは、電圧をかけると一定の周期で電圧の変化する信号を出力する部品である。この信号を PIC マイコンで処理し、1秒をプログラムによって作り出して時計を作ろうと考えた。

しかし実際に製作してみると、水晶発振器自体の誤差やプログラムの処理方法によって生じる誤差によって、多いときには一晩で2分もずれてしまうことがあり、別の方法で時計を作ろうと考えた。



図7 水晶発振器

#### <研究2-2 RTC 使用型の製作>

次に RTC モジュールを利用して時計を製作した。

RTC とは少ない消費電流で計時を続ける機能を持つ電子部品で、時計・カレンダーの用途で使われるものである。身近な例を挙げると、PC のカレンダーや時計が電源を切っても正常に動いているのはこの RTC を使用しているからである。今回使用した RTC モジュール（図8）は内部に高精度調整済み水晶振動子を内蔵しており、PIC から命令を送ることで日時の書き込み/読み取りを行うことや、タイマー機能・一定周期の信号出力機能などが利用できる。

つまり、＜研究2-1＞でPICマイコンが行っていた動作をRTCに任せることができるのである。これによってプログラムが簡単になり、また精度の高い計時を行うことが可能となる。



図8 RTCモジュール  
RTC-8564NBを使用

RTCとPICの間でデータのやり取りを行うには、I<sup>2</sup>C通信という通信方式を用いる必要がある。I<sup>2</sup>Cとは2本の信号線によって通信を行う方式であり、SCLと呼ばれる信号線からの信号でタイミングをとりながらSDAと呼ばれる信号線でデータを送/受信する。通信のために必要なポートが2つで済むため、ピン数の少ないマイコン等に適した通信方式だとされている。

また、RTCに対して現在時刻等の入力操作をするため、タクトスイッチ3つを入力装置として使用した。

#### [PICマイコンの動作の流れ]

- ①電源投入時に現時刻の設定画面を表示し、タクトスイッチによって入力された時刻をRTCモジュールに設定する。
- ②設定後、デジタル時計表示に切り替えるが、任意に現時刻を設定しなおすことが可能である。
- ③時刻表示中にアラーム時刻設定ボタンを押すと設定画面を表示し、入力された時刻データをPICマイコンに保存しておく。

④RTCモジュールから時刻データを読み出し、表示する。

⑤③④を繰り返し、③のアラーム時刻と④で得られた時刻が同じであれば指向性スピーカーを鳴らす。

このようにして目覚まし時計を製作することができた。これによって「自分にだけアラームが聞こえ、快適な眠りを妨げない目覚まし時計」を製作するという目的は達成されたといえる。しかし、快適な目覚めについては、ただアラームを鳴らすだけという既存の製品と全く同じ方法をとっており、不快ではないが面白味・新規性に欠ける。そこで、私はこの目覚まし時計に睡眠サイクルを計測する機能をつけられないかと考えた。

#### [研究3] 睡眠リズム計測システムの開発

快適な目覚めを実現するにはどうすればよいのか。ヒントは冒頭で述べた目覚まし時計の例にあった。人間は睡眠中に浅い眠りと深い眠りを繰り返すということが知られている。眠りの浅いときに起こされるとすっきり目覚めることができ、逆に眠りの深い時に起こされると不快感を覚えるといわれている。浅い眠りと深い眠りの周期は個人差があるもののほぼ一定で、そのサイクルがわかれば、次にいつ浅い(深い)眠りが訪れるかを予想することができる。眠りの浅い状態では血圧の変化が激しくなったり心拍が不規則になったりするため、冒頭で述べた腕時計型の目覚まし時計はそれらをもとにして浅い眠りを予測し、設定時刻に一番近い浅い眠りのときに振動してユーザーを起こすのである。このように、睡

眠リズムを計測すれば快適な目覚めを実現することができるはずである。

しかし、今回の研究では非接触を目標としているため、上記のように血圧や心拍数などをモニタすることは困難である。私は夜遅く家族が寝静まった頃に、どうしたものかと思案していた。すると背後で弟が寝返りをうった。そこで私は寝返りと睡眠リズムとの間になにか関係があるのではないかと考え、インターネットで調べてみた。その結果、寝返りが浅い眠りと深い眠りを切り替えるスイッチの役割を果たしているという記述が見られた。そこで私は寝返りを検知することによって睡眠リズムを計測することができるのではないかと考え、そのようなシステムの開発を行った。

寝返りを検知するために、私は超音波スピーカを距離センサとして利用しようと考えた。距離測定は非常にポピュラーな超音波の利用法であり、今回製作した指向性スピーカでも同様に可能であると考えたからである。寝返り検知の考え方を以下に示す(図9)。

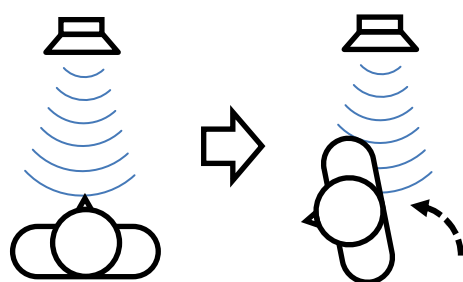


図9 寝返りによる距離変化

目覚まし時計は寝ているユーザーの周囲数メートルの範囲に固定されているとする。ユーザーが寝返りをうつと、目覚まし時計とユーザーとの距離が寝返りをうつ前後で

異なるはずである。この距離の変化を検知することで寝返りをうったかどうかを判定するというものである。

製作した寝返り検知システムの流れを下に示す。

- ①0.5 ミリ秒間超音波を送信する。同時にPIC 内部で0.3 ミリ秒毎のカウントアップをスタートする。
- ②跳ね返ってきた超音波を受信するとカウントアップをストップする。
- ③一つ前に計測したデータと比較し、同じでなければその時の時刻を記録用配列に記録する。
- ④①②③を1分ごとに繰り返す

①でカウントアップの周期が0.3 ミリ秒間隔なのは、音波が約10cm進むのにおよそ0.3 ミリ秒かかるためである。これによって小さな体の動きを検知しないようにし、PICのメモリの使用量を抑えている。また、睡眠リズムは分単位でわかればいいので、距離の測定を1分間隔で行っている。そのため、この寝返り検知システムは「寝返りを打った時刻」ではなく「ある時間帯に寝返りを打ったかどうか」を調べるものであるといえる。

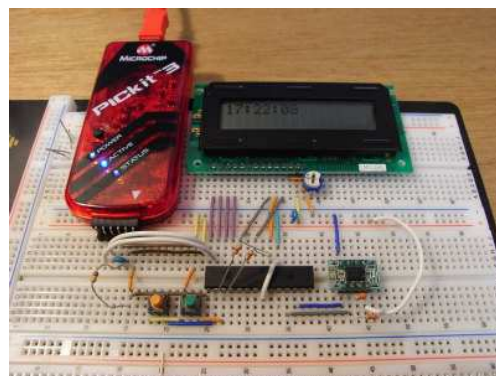


図10 実験風景  
時計動作中

超音波の受信には超音波センサ（図 11）を用いた。超音波センサからの信号をオペアンプで増幅し、ショットキーバリアダイオードで検波したのちにコンパレータで基準電圧と比較する。超音波を受信し、コンパレータへの入力電圧が基準電圧よりも高くなれば PIC マイコンの入力ピンに電圧がかかって超音波の受信を判断するというものである。

現在は製作した超音波受信回路の増幅率の調整を行っており、それが終わり次第、データの収集を始める予定である。



図 11 受信用超音波センサ

#### 4. 今後の課題

##### ・基板の製作

回路の変更を行うことが多かったため、目覚まし時計・寝返り検知システムの回路をブレッドボード上に作成した。しかし、このままでは目覚まし時計として使用することは困難なので、ある程度回路構成が決定した段階でユニバーサル基板上に部品を実装する必要がある。

##### ・超音波スピーカーの駆動方法の改良

現在の駆動回路では 0V とスピーカー用電源電圧とを繰り返し印加しているが、Hブリッジ回路を利用して電圧の入力の向き

を逆転させれば、同じ電源電圧でも 2 倍の電圧変化をもたらすことができる。効率よくスピーカーを駆動するため、Hブリッジ方式の駆動回路を製作する必要がある。

##### ・寝返りデータの処理

寝返り検知システムを製作したが、浅い眠りを予想してアラームを鳴らすために、得られた寝返りのデータから睡眠リズムを割り出す方法を研究する必要がある。将来的には SD カードなどに寝返りのデータを保存して PC 上でデータをモニタできるような機能や、簡単な日記とともにデータを保存して管理するソフトウェアを製作したいと考えている。

#### 5. 参考文献

- [1]「非線形音響学の基礎」, 鎌倉友男、愛智出版
- [2]「音のなんでも小辞典」, 日本音響学会、講談社
- [3]「電子回路入門講座」, 見城尚志、高橋久、電波新聞社
- [4]「電子工作のための PIC18F 本格活用ガイド」, 後閑哲也、技術評論社
- [5]「超指向性音響システムの開発」, 鎌倉友男、酒井新一

#### 6. 謝辞

今回の研究において、サイエンス研究会物理班顧問の米田先生や本校の先生方、また研究発表会等でアドバイスをくださった多くの方々、信州大学での講演後にお話を聞かせていただいた電気通信大学の鎌倉教授に、この場をお借りして深くお礼申し上げます。



# マイクロ波実験装置の改良

4年C組 寺川 峻平  
指導教員 米田 隆恒

## 1. 要約

私はマイクロ波実験装置の開発を行っている。昨年度製作した装置の信号出力部分を大幅に改良し、オシロスコープを使わずに実験を行うことができるように改良を行ったので、ここに報告する。

キーワード マイクロ波、オシロスコープ、電圧計、オペアンプ、増幅、検波

## 2. 研究の背景と目的

私は数年前から市販のドップラーセンサを用いてマイクロ波実験装置の開発を行ってきた。その結果、物質中のマイクロ波の波長の測定とマイクロ波の受信強度測定を行うことができるようになった。しかし、それらの測定・実験を行うためには微弱な出力信号を読み取るためにオシロスコープ(図2)を使う必要があった。もとの開発目的が「教科書を読んだだけでは呑み込めない事象を実験によって確かめる。そのためにできるだけ安価に装置を自作する」というものであるため、非常に高価な機材であるオシロスコープが必要であるということは望ましくない。そこで、オシロスコープの代わりに電圧計を使って結果を表示できるように信号出力部分の改良を行った。

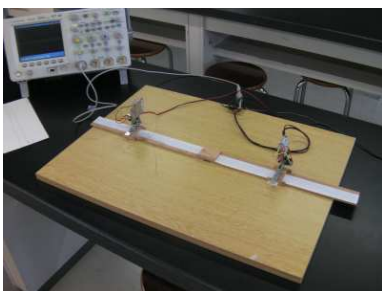


図1 マイクロ波実験装置



図2 オシロスコープ

## 3. 研究内容

自作したマイクロ波実験装置からの出力信号を電圧計で見られるようにするため、信号を増幅する必要がある。

扱う出力信号の例を図3に示す。

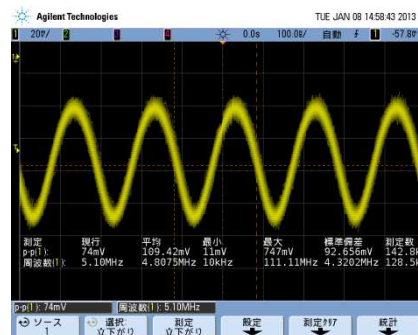


図3 装置からの出力信号

<装置からの出力信号の特徴>

- ・周波数：数 MHz から 10MHz
- ・電圧：およそ 10mV<sub>p-p</sub> から 100mV<sub>p-p</sub>
- ・装置の特性により、振動の中心電圧が変動する。

装置からの出力信号を増幅するために、以下の3種類の方法で実験を行い、検証を行った。

[実験①] 周波数変換→汎用オペアンプで増幅→整流

[実験②] 広帯域オペアンプで増幅→整流

[実験③] 整流→単電源オペアンプで増幅

[実験①] 周波数変換→汎用オペアンプで増幅→整流

実験の結果、この方法は断念した。

通常、信号を増幅するにはオペアンプという IC を使用する。オペアンプは外付けの抵抗器の抵抗値の比によって簡単に増幅率を変えられるため、とても便利で使いやすい部品である。しかし今回扱う信号は通常のオペアンプで扱える周波数よりも高い周波数であるため、そのままでは増幅することができない。そこで、混合器（ミキサ）を利用しようと考えた。混合器とは、異なる周波数をもつ2つの信号を入力すると、それらの和と差の周波数の信号を出力するというものである。これを利用すれば、実験装置からの出力信号の周波数を変換し、オペアンプで増幅できる周波数まで落とすことができるはずである。

しかし、出力信号の周波数をオペアンプで扱える 100Hz 程度まで下げるためには、出力信号±100Hz 程度の基準信号が必要である。日によって変化する出力信号の周

波数に合わせた高周波信号を作ることは難しかったため、混合器で周波数変換を行う方法は断念した。

[実験②] 広帯域オペアンプで増幅→整流  
実験の結果、この方法も断念した。

実験②では、高周波信号を扱えるオペアンプを用いて実験を行った。オペアンプはその目的によっていくつかの種類に分けることができ、オーディオ信号を歪みの少ない状態で増幅するもの、正の低周波信号を高精度で増幅するもの、電源電圧近くまで出力電圧をとれるものなどがある。それらの中で、広い周波数帯域を持ち、高周波信号でも増幅することができるタイプのオペアンプを使用すれば信号を電圧計で見られるのではないかと考えたためである。

しかし、オペアンプは増幅する信号の周波数が高くなるほど増幅率の上限が下がるという性質がある。広帯域オペアンプでもそれは同じで、入手が比較的容易な広帯域オペアンプ[NJM4580]では数 MHz の信号を 10db 以下の増幅率でしか増幅することができないことがわかった（図4）。

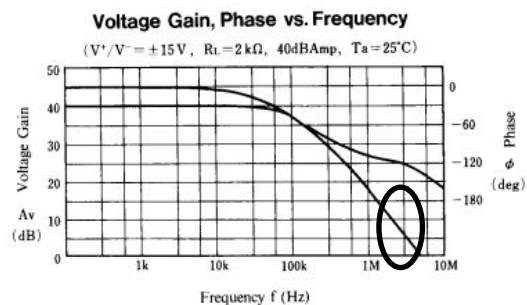


図4 オペアンプの周波数特性  
(横軸：周波数 縦軸：増幅率)

これでは電圧計で扱える数Vレベルにまで増幅することは困難であるため、広帯域

オペアンプを使用する方法も断念した。

[実験③] 整流→単電源オペアンプで増幅  
実験の結果、採用できることがわかった。

今回扱う出力信号は交流であり、電圧計で扱う信号は直流である。そのため、回路のどこかの段階で整流を行う必要がある。整流とは交流信号を直流信号に変える操作のことであるが、これを回路の入力に一番近い部分で行うことによって増幅を容易にしようと考えた。整流されたあとの信号は正の直流電圧（今回は脈流となる可能性もある）となるため、増幅は単電源のオペアンプを用いればよく、非常に簡単な回路で増幅できることがわかった。回路の構成を以下に示す。

#### ・入力 - 整流部

信号のゆらぎを取り除くため、直流カット用のコンデンサを直列に入れる。それによって 0V を中心に振動するようになった信号を、ダイオードとコンデンサにより整流する。汎用ダイオードでは数 MHz という高周波に対応できないため、高周波信号も扱うことのできるショットキーバリアダイオードを使用した。これらの回路によって、装置からの出力信号の振幅の変化を電圧の変化に変換することができた（図 5）。

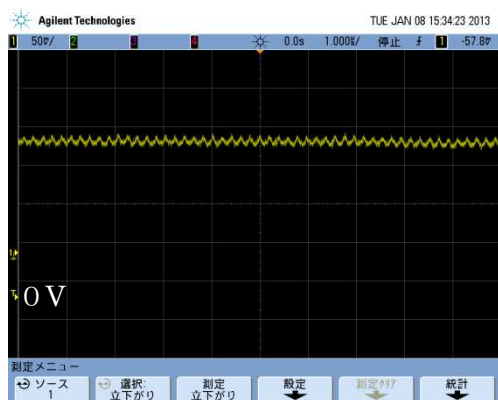


図 5 整流後の波形

#### ・増幅部

オペアンプを使用して非反転増幅回路を構成し、信号を電圧計で扱える電圧まで増幅する。

オペアンプには単電源動作し、最大出力信号振幅が広い NJU7032（図 6）というものを使用した。これを電源電圧 9V で動作させ、増幅率 23 と 11 の二段階の回路を通して約 250 倍の増幅を行った。



図 6 単電源オペアンプ  
NJU7032

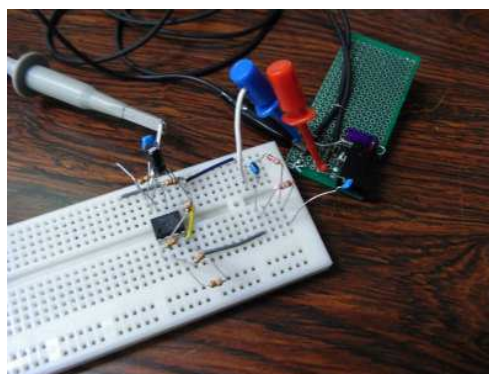


図 7 実験風景

これにより、信号の電圧を電圧計で測ることのできる電圧まで上げることができた。

#### 4. 今後の課題

実験③において、増幅回路の抵抗器を頻繁に付け替えるため、回路をブレッドボード上に組んで実験を行った（図 7）。これでは実験装置を使用する際に非常に不便であるため、ユニバーサル基板あるいはプリント基板を製作する必要がある。

## 5. 参考文献

- [1] 「電子回路入門講座」, 見城尚志、高橋久、電波新聞社

## 6. 謝辞

今回の研究において、顧問の米田先生をはじめとして多くの方々にアドバイスをいただきました。また、サイエンス研究会物理班のメンバーにも実験を手伝ってもらうことができました。この場をお借りして、深くお礼申し上げます。

# 素数の並びに規則はあるかⅡ

3年A組 田村 拓也  
指導教員 川口 慎二

## 1. 要約

サイエンス研究会数学班 3年生は素数について学習している。今回は算術級数定理の証明を理解することを目標とし、その理解のためにリーマン予想やラマヌジャン予想を学習した。また、ラマヌジャンの $\tau$ 関数、及び完全数に関する考察することができたので紹介する。

キーワード 素数、ゼータ関数、L関数、 $\tau$ 関数、完全数

## 2. 研究の背景と目的

素数とは1自分自身以外に正の約数を持たない1以外の自然数であり、2,3,5,7,11,...と続く。この並びは一見規則性がないように見える。しかし、実際はどうか現在でもまだわかっていない。

私は、素数の並びに規則はあるのか、ということに興味をもった。すると、素数の並びの背景には深い代数世界が広がっていることを知った。そこで、基礎的な内容に加えて、L関数や $\tau$ 関数といった内容について、本稿にまとめておくことにした。

### ■包除原理

$A_1, A_2, \dots, A_n$  を  $n$  個の有限集合としたとき、

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i,j;i < j} |A_i \cap A_j| \\ &= \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \pm |A_1 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

が成り立つことを**包除原理**という。ここで

$|A|$  は集合  $A$  の濃度を表す。

## 3. 研究内容

### 3-1. 基本事項

#### ■素数

**素数**とは1自分自身以外に正の約数を持たない1以外の自然数のことをいう。以降、 $n$ 以下の素数の個数を $\pi(n)$ とあらわす。もっとも簡単で、最古の素数を生成する方法として知られているのが、**エラトステネスのふるい**である。これには包除原理を用いる。

#### ■全射、単射とは

2つの集合  $X, Y$  間の写像  $f: X \rightarrow Y$  について、 $f(X) = Y$  が成り立つとき、 $f$  を**全射**いう。

つまり、 $\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ s.t. } f(x) = y$  が成り立つときである。

写像  $f: X \rightarrow Y$  において  $x, x' \in X$  について  $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$  が成り立つとき写像  $f$  は**単射**であるという。対偶をとって、 $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$  とも言い換えられる。全射かつ単射である写像を**全単射**とよぶ。

■濃度

集合  $A$  から集合  $B$  への全単射が存在するとき、「 $A$  と  $B$  は濃度が等しい」といい、 $|A| = |B|$  と表記する。自然数全体の集合  $N$  と同じ濃度をもつ集合を可算集合といい、可算集合の濃度を  $\aleph_0$  で表す。つまり、 $|N| = \aleph_0$  である。

**定理** (カントールの定理)

実数全体の集合  $R$  は非可算集合である。

**証明** (カントールの対角線論法)

左半開区間  $(0,1] = \{x \in R \mid 0 < x \leq 1\}$  に含まれる実数の集合が可算であるとする、 $x \in (0,1]$  のそれぞれの実数は次のように表すことができる。 $a_{mn} \in \{0,1,2,\dots,9\}$  として、

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots a_{1n}\cdots \\ A_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots a_{2n}\cdots \\ A_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots a_{3n}\cdots \\ &\vdots \\ A_m &= 0.a_{m1}a_{m2}a_{m3}a_{m4}\cdots a_{mn}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

このうち  $a_{kk}$  に対して、 $b_k \in \{0,1\}$  を

$$b_k = \begin{cases} 1 & (a_{kk} \neq 1) \\ 0 & (a_{kk} = 1) \end{cases}$$

と定めると、数  $B = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots b_k\cdots$  は区間  $(0,1]$  に含まれるが、 $B$  はどの  $A_k$  ともし小数第  $k$  桁目が異なり先ほどのいずれの  $A_k$  ともし一致しない。ゆえに、背理法により左半開区間  $(0,1]$  は非可算である。(Q.E.D.)

また、 $N$  から  $R$  への単射は存在するので、

$|N| < |R|$  である。

**定理** (ユークリッドの補題)

素数  $p$  が自然数の積  $mn$  を割り切るのであれば、 $p$  は少なくとも  $m$  もしくは  $n$  の一方を割り切ることができる。

■テイラー展開・マクローリン展開

1 変数関数  $f(x)$  に対して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

を関数  $f(x)$  の  $x=a$  のまわりでのテイラー展開という。特に、 $a=0$  のとき、つまり、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

を関数  $f(x)$  のマクローリン展開という。

■複素数

2 次方程式  $x^2 + 1 = 0$  の解を考え、その内の一つを  $\sqrt{-1}$  あるいは  $i$  で表し、虚数単位という。実数  $a, b$  を用いて、複素数は  $a + bi$  で表す。 $a, b$  がともに整数のときガウス整数、有理数のときガウス有理数という。 $z = a + bi$  に対して  $a$  を実部、 $b$  を虚部といい、それぞれを  $\Re, \Im$  と表す。

[考察]

2 乗して  $i$  になる数は複素数の中に存在するの

2 乗して  $i$  になる数は複素数を  $a + bi$  とすると、 $(a + bi)^2 = i$ 。

$$\begin{aligned} \text{よって、} & a^2 + 2abi - b^2 = i, \\ & a^2 - b^2 + (2ab - 1)i = 0. \end{aligned}$$

ここで、 $a, b$  が実数であることに注意す

ると、 $a^2 - b^2 = 0$ かつ $2ab - 1 = 0$ となる。  
後者より $b = \frac{1}{2a}$ .これを前者に代入する。

$$a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 0, (2a^2 + 1)(2a^2 - 1) = 0$$

$a \in R$ より $2a^2 + 1 > 0$ .

$$\text{ゆえに、} a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

したがって、2乗して $i$ になる数は

$$a + bi = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ である.}$$

### ■群

空集合でない集合 $G$ とその上の二項演算 $*$ : $G \times G \rightarrow G$ の組 $(G, *)$ が、

$$(G1) \text{ 結合律 : } a * (b * c) = (a * b) * c$$

(G2) 単位元の存在 :

$$\exists 1 \in G \text{ s.t. } a * 1 = 1 * a = a$$

(G3) 逆元の存在 :  $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$

$$\text{s.t. } a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

を満たすとき、 $(G, *)$ を群であるという。結合律のみを満たすものを半群、結合律および単位元の存在を満たすものをモノイドという。また、交換法則 $a * b = b * a$ を満たす群をアーベル群または可換群という。

### ■同型と準同型

写像 $\varphi$ が群 $G_1$ から $G_2$ への同型写像であるとは、 $\varphi$ が条件

$$\forall x, y \in G_1, \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$$

を満たす全単射であるときをいう。また、このとき $G_1, G_2$ は同型であるという。写像 $\varphi$ が群 $G_1$ から $G_2$ への準同型写像であるとは、 $\forall x, y \in G_1, \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ が成り立

つ場合をいい、同型の定義を弱くしたものである。同様にこのとき $G_1, G_2$ は準同型であるという。

### ■環

集合 $R$ とその上の二項演算である加法 $+$ : $R \times R \rightarrow R$ および乗法 $*$ : $R \times R \rightarrow R$ の組 $(R, +, *)$ で、以下の条件を満たすものを環という。

(R1) 加法群 $(R, +)$ はアーベル群である。

つまり、結合律、零元の存在、マイナス元の存在、交換律を満たす。

(R2) 乗法半群 $(R, *)$ はモノイドである。

つまり、結合律、単位元の存在を満たす。

(R3) 左分配律

$$(\forall a, b, c \in R)(a * (b + c) = (a * b) + (a * c))$$

および、右分配律

$$(\forall a, b, c \in R)((a + b) * c = (a * c) + (b * c))$$

が成り立つ。左分配律と右分配律がともに成り立つとき、単に分配律が成り立つという。

### ■体

集合 $F$ とその上の二項演算である加法 $+$ および乗法 $*$ の組 $(F, +, *)$ が体であるとは、集合 $F$ が加法に関してアーベル群、 $F \setminus \{0\}$ が乘法に関してアーベル群を満たすときをいう。

## 3—2. 算術の基本定理

### ■素因数分解の一意性の証明

背理法を用いる。仮定として、少なくとも2通りの素数の積で表すことのできる自然数が存在すると仮定し、そのうちの最小のものを $n$ とする。

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k = q_1 q_2 q_3 \cdots q_m$$

のように異なる別の素数の積に表わされるとすると、ユークリッドの補題より、 $p_1$ は $q_1$ または $q_2, \dots, q_m$ のいずれかを割り切ることができる。しかし、 $n$ の最小性から $q_1$ および $q_2, \dots, q_l$ においてはいずれも素因数分解の一意性が成り立つので、 $p_1 = q_j$ となるような $j$ がとれる。ここで、

$$n' = p_2 p_3 \cdots p_k = q_1 \cdots q_{(j-1)} q_{(j+1)} \cdots q_m$$

が異なる素数の積として表せるとすると、 $n$ の最小性に反するので、素因数分解の一意性は証明される。

### 3-3. 2個の任意に選んだ整数が互いに素である確率

**ゼータ関数**は自然数の調和数列

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$$

を拡張したものであり、

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots \end{aligned}$$

である。

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{5^1} + \cdots = \infty$$

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < \infty$$

より、ゼータ関数 $\zeta(s)$  (ただし、 $s \in \mathbb{N}$ )の絶対収束範囲は $s \geq 2$ であることがわかる。また、ゼータ関数に似た級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

は $\log 2$ へ収束することが知られている。

これは、 $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ を変形することにより、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2$$

ゼータ関数は、次のようにオイラー積に変形できる。

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

(これを**ディリクレ級数**という。)

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \left( 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \frac{1}{2^{4s}} + \cdots \right) \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \frac{1}{3^{4s}} + \cdots \right) \cdots \end{aligned}$$

ここで、

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \cdots$$

( $p$ は素数)は初項1、公比 $\frac{1}{p^s}$ の無限等比

級数なので、この値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$$

となる。それぞれの $p$ 因子が $\left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$ に

なるので、 $\zeta(s)$ は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p:\text{prime}} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$$

と表すことができる。また、この右辺を**オ**



イラー積と呼ぶ。

■互いに素

2つの整数 $a, b$ が1と $-1$ 以外に共通の約数を持たないとき、 $a, b$ は互いに素であるという。

定理

2個の任意に選んだ整数が互いに素である確率は $\zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$ である。

証明

任意の2つの整数 $a, b$ において $a$ が $p$ で割り切ることができる確率は $\frac{1}{p}$ であり、同様に $b$ も考えると、 $a, b$ が $p$ で割り切れる確率は $\frac{1}{p^2}$ であるとわかる。

また互いに素であるとは、言い換えれば、任意の素数 $p$ に対して、少なくとも一方は割り切れないということである。ここで $n$ 番目の素数を $p_n$ とすると、 $a, b$ が互いに素

である確率は $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right)$ となる。またこれ

は、 $\prod_{p:\text{prime}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ と書き換えられるので、

$$\left( \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} \right)^{-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{-1} = \zeta(2)^{-1}$$

と等しいことがわかった。

実際の $\zeta(2)$ の値を求めることはできなかったなので文献[2]を参照した。 $(\zeta(2))$ の値

についてはバーゼル問題という)。

いま、関数 $\sin x$ をマクローリン展開する

と、 $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$  ①となる。

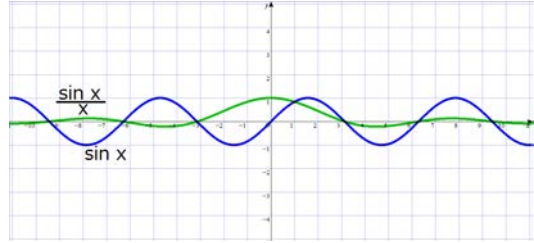


図 1

図1で原点を通過しているグラフを表す関数が $f(x)$ に $\sin x$ 、 $(0,1)$ を通る関数が $\frac{\sin x}{x}$ である。

ここで、①の両辺を $x(x \neq 0)$ で割ると、

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$
 ②

$\frac{\sin x}{x}$ は $x = \pm n\pi (n \in \mathbb{N})$ のとき0になるので、

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$
 ③

すると、②、③の $x^2$ の係数を考えると

②において、 $x^2$ の係数は $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$ 。

③の場合は、

$$-\left( \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{x^2}{2^2\pi^2} + \frac{x^2}{3^2\pi^2} + \dots \right) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

つまり、

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

よって級数の収束値は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

とわかる。

$$\text{これより、} \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}.$$

したがって2個の任意に選んだ整数が互いに素である確率は $\frac{6}{\pi^2}$ であることが示される。(Q.E.D.)

この証明より一般に $k$ 個の整数については次の系が成立する。

系

$k$ 個任意に選んだ整数が互いに素である確率は $\zeta(k)^{-1}$ である。

### 3—3. 算術級数定理

初項と公差が互いに素である算術級数には無限に素数があらわれる。

今回は直接計算することが困難であるため、Visual C#を用いて、さまざまな初項と公差を用いて、実際に素数が現れるのかを計算した。

#### ■極限

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ とは、任意の正の数 $\varepsilon$ に対し、ある適当な正の数 $\delta$ が存在して、 $0 < |x - a| < \delta$ を満たすすべての実数 $x$ に

対し、 $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。

つまり、 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R, s.t.$

$$\forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

#### ■絶対収束と条件収束

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束する場合を**絶対収束**するといい、その他の場合において収束する場合を**条件収束**という。

#### ■積分判定法

関数 $f(x)$ が、 $x \geq 1$ で連続であり、単調減少でかつ $f(x) \geq 0$ であるとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

と $\int_1^{\infty} f(x) dx$ は同時に収束・発散する。

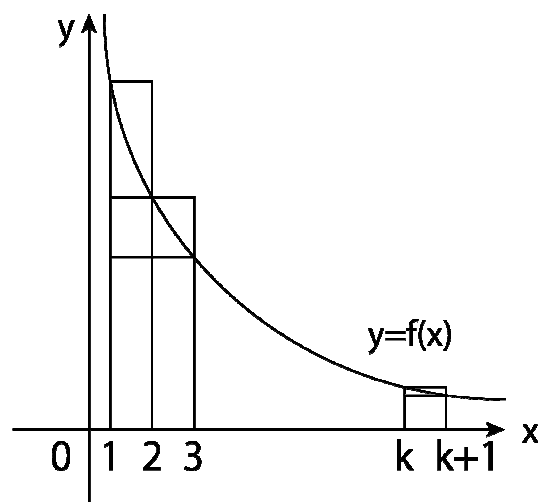


図2

$f(x)$ は減少関数なので $k \leq x \leq k+1$ のとき、 $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ 。

ゆえに、 $x$ について $k$ から $k+1$ まで積分すると、

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1).$$

$k = 1, 2, \dots, l$  において和を取ると  $\sum f(l)$

の  $l$  部分和を  $S_l$  として、

$$S_l \geq \int_1^{l+1} f(x) dx \geq S_{l+1} - f(1).$$

これより、 $\{S_l\}$  が発散すれば

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \infty$$

となり、逆に  $\int_1^{\infty} f(x) dx = \infty$  となれば  $\{S_l\}$  は発散する。したがって、 $S_l$  が収束するための必要十分条件は  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  が収束することであるといえる。(Q.E.D.)

### ■ 比較判定法

**定理** (ダランベールの収束判定法)

級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  において

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \text{ であれば絶対収束し、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \text{ であるとき } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する。}$$

ここで、 $\zeta(2)$  である  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  に対して、ダランベールの判定法を試してみた。しかし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = 1 \text{ であり判定できない。}$$

**定理** (コーシーの収束判定法)

級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  に対して、 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$  で

あるとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束する。

### ■ 無限積について

0 でない数の無限列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  の積

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$$

がある有限の値  $\alpha$  に収束するとは、部分積

$$\alpha_n = \prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

において  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$  ただし  $\alpha \neq 0$  となると定める。

### 命題

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  が収束 (あるいは発散) するとき

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$  も同時に収束 (あるいは発散) する。

### 証明

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \mu$  とする。無限積の  $n$  部分積を

$p_n$  として  $s_1 = p_1, s_n = p_n - p_{n-1} = a_n p_{n-1}$  とおくと、

$$p_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n.$$

ここで、 $x > 0$  のとき  $1 + x \leq e^x$  であるので

$$|p_n| = \prod_{k=1}^n |1 + a_k| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|)$$

$$\leq \prod_{k=1}^n e^{|a_k|} = e^{\sum_{k=1}^n |a_k|} \leq e^{\mu}$$

となり、ゆえに、

$$|s_n| = |p_{n-1}a_n| \leq e^\mu |a_n|.$$

したがって、比較判定法より  $\sum s_n$  が収束し、数列  $\{p_n\}$  は収束する。

また、 $0 < x < \frac{1}{2}$  であれば  $1 - x \geq e^{-2x}$  で

あるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  より、十分大きな  $n_0$  に

対して、 $n \geq n_0$  ならば  $|a_n| < \frac{1}{2}$  であり、

$$|1 + a_n| \geq 1 - |a_n| \geq e^{-2|a_n|}$$

としてもよい。 $\varphi = \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$  とおくと、

$$\left| \prod_{k=n_0}^n (1 + a_k) \right| \geq \prod_{k=n_0}^n e^{-2|a_k|} = e^{-2\sum |a_k|} > e^{-2\varphi} > 0$$

が各  $n \geq n_0$  に対して成立する。したがって、

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \neq 0$  であるとわかる。(Q.E.D.)

**命題**

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$  が収束あるいは発散するとき

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  も同時に収束、発散する

**証明**

$n$  に関する帰納法を用いる。

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|)$$

であることを表す。

$k=1$  の場合は自明なので、 $k=n$  で成り立つとする。 $k=n+1$  のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| &= \sum_{k=1}^n |a_k| + |a_{n+1}| \\ &\leq \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) + \left( \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) \right) |a_{n+1}| \\ &= \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) \end{aligned}$$

より、 $k=n+1$  でも成り立つ。ゆえに、すべての  $n \in N$  において

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \prod_{k=1}^{\infty} (1 + |a_k|)$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 |a_k| &\leq \dots \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| \leq \\ &\dots \leq \prod_{k=1}^{\infty} (1 + |a_k|) \end{aligned}$$

であり、 $n$  部分和が単調増加で上に有界で

あるため、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  が収束することがわかる。

(Q.E.D.)

### 3-5. L 関数

先程のゼータ関数は各項の分子が 1 であったが、これを数列  $a = \{a(n)\}$  に変えた級数

$$L(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

#### ■乗法的関数と完全乗法的関数

互いに素である自然数  $m$  と  $n$  に対して、 $f(mn) = f(m)f(n)$  が成り立つとき、 $f$  を乗法的関数といい、特に、任意の自然数  $m$  と  $n$  に対して  $f(mn) = f(m)f(n)$  が成り立つとき、完全乗法的関数という。

まず、 $a(n)$  が完全乗法的であるため、

$$a(n) = a(n \times 1) = a(n) \times 1,$$

$$a(n)(a(1) - 1) = 0.$$

ゆえに、任意の自然数  $n$  において

$$a(n) = 0 \text{ または } a(1) = 1$$

である。

次に、 $a(n)$  が周期性をもつため、周期を  $N$  とし、任意の自然数  $n$  に対し

$$a(n + N) = a(n)$$

である。このうち、 $n = N$  であるとき、

$$a(2N) = a(N).$$

ここで、完全乗法性より、

$$a(2)a(N) = a(N)$$

$$a(N)(a(2) - 1) = 0.$$

これより、 $a(N) = 0$   $a(2) = 1$ .

これが、3 以上の自然数にも同様に成り立つので、結論として、「 $a(N) = 0$ 」または「任意の自然数  $n$  に対して、 $a(n) = 1$ 」となる。

後者の場合、 $L(s, a) = \zeta(s)$  である。ゆえに  $\zeta(s)$  以外の L 関数においては、 $a(N) = 0$  となる。ここで、周期  $N$  の約数  $d$  について考える。さりとて、 $d = 1, N$  については既に考えたため、 $d \neq 1, N$  とし、 $dd' = N$  とおくと、乗法性より

$$a(d)a(d') = a(dd') = a(N) = 0$$

ゆえに

$$a(d) = 0 \text{ または } a(d') = 0$$

が成り立つ。これらが両者とも成り立つ場合、すなわち数列  $a(n)$  は、周期  $N$  の任意の 1 でない約数の  $d$  に対し、 $a(d) = 0$  を満たすと仮定すると、 $a(n)$  が完全乗法的であるため、 $d$  の任意の倍数、つまり  $N$  と互いに素でないような任意の自然数  $m$  において、 $a(m) = 0$  となる。

これは、数列  $a(n)$  が  $N$  以下でかつ、 $N$  と互いに素な自然数に対して完全乗法性を満たすように定義をすれば、他の自然数に対しては自明に定まることになる。

## ■ディリクレ L 関数

完全乗法性を満たすような乗法群から乗法群への写像を**準同型**という。**ディリクレ指標**  $\chi$  とは、整数から複素数への関数  $\chi$  で、

・ある自然数  $N$  に対して、 $a \equiv b \pmod{N}$

ならば  $\chi(a) = \chi(b)$

・  $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$

・  $\chi(1) = 1$

・  $a$  と  $N$  が互いに素でなければ  $\chi(a) = 0$  という性質を持たすものである。

厳密な定義は、有限環  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  の乗法群  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$  から複素数体  $\mathbb{C}$  の乗法群  $\mathbb{C}^\times$  への準同型 (すなわち乗法的な関数)

$$\chi: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

のことである。

$n \geq 2$  の自然数において、 $n$  で割った剰余が等しい整数をすべて集めたものを「 $n$  を法とする」**合同類**や**剰余類**と呼ぶ。したがって、ふたつの整数が同じ剰余類に属するのは、それらの差が  $n$  で整除されるときであり、かつそのときに限る。 $n$  を法とする剰余類の全体は、以下に述べる加法と乗法に関して  $n$  を法とする**合同類環**や**剰余類環**と呼ばれる環を成す。剰余類環を  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  と表す。

ディリクレ指数の値  $\chi(n)$  は、この定義によれば  $N$  と互いに素な  $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  に対してのみ定義されるが、それ以外の  $n$  に対して  $\chi(n) = 0$  と定めることにより、定義域を  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  全体に拡張し、さらに、 $\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  への自然な写像  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  を合成し、定義域を任意の整数に拡張することができる。その拡張した写像

$$\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

を用いて  $a(n) = \chi(n)$  と定めたときの L 関数  $L(s, \chi)$  のことを、**ディリクレの L 関数** という。

準同型の定義から、 $\chi(n)$  は、周期  $N$  と互いに素な整数同士に対しては完全乗法的、すなわち、 $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$  を満たす。

また、少なくとも一方が周期  $N$  と互いに素でない場合は、 $\chi(n)$  は値が 0 になることから、やはり完全乗法的である。

これよりディリクレの L 関数はオイラー積表示

$$L(s, \chi) = \prod_{p:\text{prime}} \left( 1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)$$

をもつ。各オイラー因子の中身も計算することができて、

$$L(s, \chi) = \prod_{p:\text{prime}} \left( 1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1}$$

となる。

### ■完全数

**完全数** とは、その数自身を除く約数の和が、その数自身と等しい自然数のことである。完全数の定義より、完全数の正の約数の和は元の数の 2 倍に等しい。すなわち  $n$  が完全数であるとは、約数関数  $\sigma(n)$  に対して、 $\sigma(n) = 2n$  を満たすことである。

### ■約数関数

**約数関数**  $\sigma_x(n)$  は自然数  $n$  の約数  $d$  の  $x$  乗の総和の値を持つ関数であり、

$$\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x$$

と表される。

### ■多角数

**多角形** の形に点を並べたときの点の総数をいう。例えば、三角数は  $1, 3, 6, 10, 15, \dots$  であり、四角数は  $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ 、五角数は  $1, 5, 12, 22, \dots$  と定義される。ここで一般化を考えてみた。

$P(n, m)$  を  $n$  番目の  $m$  角数とすると、

$$P(n+1, m) - P(n, m) = (m-2)n + 1$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} P(n, m) &= \sum_{k=0}^{n-1} \{(m-2)k + 1\} \\ &= \frac{[1 + \{(m-2)(n-1) + 1\}]n}{2} \\ &= \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2} \end{aligned}$$

となる。

### ■完全数に関する考察

ここで、六角数に 6 と 28

$$P(2, 6) = 6, \quad P(4, 6) = 28$$

が含まれていることに気づいた。そこで、

$$\begin{aligned} 496 &= \frac{(6-2)n^2 - (6-4)n}{2}, \\ 8128 &= \frac{(6-2)n^2 - (6-4)n}{2} \end{aligned}$$

を解くと、

$$P(16, 6) = 496, \quad P(64, 6) = 8128.$$

ここで、 $P(n, 6)$  が完全数になるときの  $n$  に規則があるのではないかと考えた。そこで、さらに次の完全数の場合を求めた。

$$\begin{aligned} P(4096, 6) &= 33550336, \\ P(65536, 6) &= 8589869056 \end{aligned}$$

ここまでで得られた、

$$1, 2, 4, 16, 64, 4096, 65536$$

という数列を見ると、

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^4, 2^6, 2^{12}, 2^{16}$$

であることがわかった。

数列  $0,1,2,4,6,12,16$  から始まるものを考察した結果、「 $2^{n+1}-1$  が素数になるような  $n$ 」の数列、または「 $n$  個の約数をもつものの数列昇順の数列」とであることに気づいた。

前者： $0,1,2,4,6,12,16,18,30,60,\dots$

後者： $0,1,2,4,6,12,16,24,36,48,\dots$

であることから、計算してみると前者であることがわかり、このことから、 $n$  番目の完全数を  $K(n)$  とすると

$$K(n) = 2 \times 2^{q_n^2} - 2^{q_n}$$

$$q_n = \{ l \mid 2^{l+1} - 1 \in P \}$$

となることが予想できた。

実際に  $K(9)$  を計算してみると、

2658455991569831744654692615953842176

となり、完全数であることがわかった。

実際に計算してみると次のようになった。

$$K(1) = 6$$

$$K(2) = 28$$

$$K(3) = 496$$

$$K(4) = 8128$$

$$K(5) = 33550336$$

$$K(6) = 8589869056$$

$$K(7) = 137438691328$$

$$K(8) = 230584300813995212$$

$$K(9) = 2658455991569831744654692615953842176$$

### ■オイラーの $\phi$ 関数

正の整数  $n$  に対し、1 から  $n$  までの自然数のうち、 $n$  と互いに素なものの個数を  $\phi(n)$  として与えることにより定まる数論的関数をオイラーの  $\phi$  関数またはオイラーのトー

シェント関数という。

$p$  を素数とすると、1 から  $p-1$  のうちに  $p$  の素因子である  $p$  を因子として含むものは存在しないから、 $\phi(p) = p-1$  が成り立つ。さらに、 $k$  を自然数としたとき、1 から  $p^k$  の中で  $p$  を因子として含むもの、すなわち  $p$  の倍数は  $p^{k-1}$  個なので

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

が成り立つ。また、 $n$  の素因数分解を

$$n = \prod_{k=1}^d p_k^{e_k} \quad \text{とすると、}$$

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

となる。

### ■ヤコビの三重積

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 + zq^n) (1 + z^{-1}q^{n-1}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

において、 $q = q^3$ 、 $z = -q^{-1}$  と特殊化すると、

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{3n}) (1 + (-q^{-1})q^{3n}) (1 + (-q^{-1})^{-1}q^{3n-3}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-q)^{-m} q^{\frac{m(3m+1)}{2}}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{3n}) (1 + q^{3n-1}) (1 + q^{3n-2}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}}$$

ここで、 $m$  と  $-m$  を入れ替えると、

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{3n})(1 + q^{3n-1})(1 + q^{3n-2})$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

左辺に注目すると、左辺はオイラーの  $\varphi$  関数であるから

$$\varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

となる。

### ■ ラマヌジャンの L 関数と $\tau$ 関数

このオイラーの五角数定理を 24 乗したものである

$$f(q) = q \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{24}$$

を展開した式

$$f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

について考える。

$$f(q) = q(1 - q)^{24} (1 - q^2)^{24} (1 - q^3)^{24} \dots$$

$$f(q) = q(1 - 24q + \dots)(1 - q^2)^{24} (1 - q^3)^{24} \dots$$

のように式を展開していき、 $\tau(n)$  を実際に求めてみた。

$$\tau(1) = 1$$

$$\tau(2) = -24$$

$$\tau(3) = 252$$

$$\tau(4) = -1472$$

$$\tau(5) = 4830$$

$$\tau(6) = -6048$$

$$\tau(7) = -16744$$

$$\tau(8) = 84480$$

$$\tau(9) = -113643$$

$$\tau(10) = -115920$$

$$\tau(11) = 534612$$

$$\tau(12) = -370944$$

この結果をもとに以下のような計算を試みた。

$$\tau(2)\tau(3) = -24 \times 252 = -6048 = \tau(6)$$

$$\tau(3)\tau(5) = 252 \times 4830 = 1217160 = \tau(15)$$

これらの式より、 $\tau$  関数は乗法的であると推測できる。ラマヌジャンの予想 1 にあたるものである。

### 【ラマヌジャンの予想 1】

$\tau(n)$  は乗法的である。

しかし、オイラー積にするには完全乗法的であることが必要十分条件である。ところが、

$$\tau(2)^2 = 24^2 = 576 \neq -1472 = \tau(4)$$

となり、完全乗法的でないことがわかった。今回、 $\tau$  関数が何かしらの法則をもっていることは既に感じていたため、この結果を考察してみることにした。

### [考察]

任意の自然数  $n$  に対する  $\tau(n)$  について、

$$f(q) = q \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{24} \dots (*)$$

を展開するとき次数が重要である。次数はそれぞれ

$$1 * (0, 1, 2, 3, 4, \dots, 23, 24)$$

$$* (0, 2, 4, 6, 8, \dots, 46, 48)$$

$$* (0, 3, 6, 9, 12, \dots, 69, 72)$$

$$* (0, 4, 8, 12, 16, \dots, 92, 96)$$

⋮

となる。つまり、すべての係数を考えると、集合  $A_n = \{nx \mid x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 24\}$  からな



る集合族  $X = \{A_n \mid x \in N, 0 \leq x \leq \infty\}$  から、

$2^{|X|}$  を取り出して考える必要がある。ここ

で、べき集合  $2^X$  に含まれる空集合には(\*) 式の  $q$  が含まれているので除外しない。ま

た、今回は  $|2^X| = \aleph_0$  なので単純に個数とし

ては出てこないことがわかる。

集合族  $X$  に含まれる集合  $A_n$  (ただし、 $n \leq 24$ ) の個数は  $n$  の約数の個数に等しい。任意の自然数  $n$  に対して、 $\tau(n)$  を求めることではできない、もしくは困難であるため、まず、先程の結果の差を求めてみると次のようになった。

任意の素数  $p$  について考える。  $p = 2$  のとき、

$$\begin{aligned} \tau(2)^2 - \tau(4) &= 576 - (-1472) \\ &= 2048 = 2^{11}. \end{aligned}$$

また、同様に  $p = 3$  の場合を計算すると、

$$\begin{aligned} \tau(3)^2 - \tau(9) &= 63504 - (-113643) \\ &= 177147 = 3^{11} \end{aligned}$$

となったので、次のような仮説を立てることができた：任意の素数  $p$  について

$\tau(p)^2 - \tau(p^2) = p^{11}$  が成り立つ。

次に、3 乗の場合を考えてみた。  $p = 2$  のとき、

$$\tau(8) - \tau(2)^3 = 98304 = -2 \times 2^{11} \tau(2)$$

ここで、 $-2$  が何を意味しているのかを知るために、3 乗を分解し次のようにしてみた。

$$\tau(8) - \tau(2)\tau(4) = 84480 - 35328$$

$$= 49152 = -2^{11} \tau(2)$$

また、既に得られた

$$\tau(p)^2 - \tau(p^2) = p^{11}$$

を用いることによっても以下のように同様の結果が得られた。

$$\begin{aligned} \tau(8) - \tau(2)\tau(4) &= \tau(8) - \tau(2)\{\tau(2)^2 - 2^{11}\} \\ &= -2^{11} \tau(2) \end{aligned}$$

つまり、 $\tau(8) = \tau(2)^3 + 2 \times 2^{11} \tau(2)$ 。

未だに  $-2$  という数字が出てくるため、次に

$$\begin{aligned} \tau(2^{2^2}) - \tau(2^2)^2 &= \tau(16) - \tau(4)^2 \\ &= 987136 - 21667846 \\ &= -1179648 = -2^{11} \times 57 \end{aligned}$$

ここで、576 に注目する。

$$576 - \tau(4) = 2^{11}$$

より、何かしらの全体的な法則があることがわかった。ゆえに、この 4 乗を分解して考えた。  $4 = 2 + 2$  として考える。

$$\begin{aligned} \tau(2^4) - \tau(2^2)^2 &= -2^{11} \{2^{11} + \tau(2^2)\} \\ &= -2^{11^2} - 2^{11} \tau(2^2). \end{aligned}$$

$4 = 1 + 3$  として考える。

$$\tau(2^4) - \tau(2)\tau(2^3) = -2^{11} \tau(2^2)$$

この式から、

$$\tau(p^4) - \tau(p)\tau(p^3) = -2^{11} \tau(p^2)$$

と仮説を立てた。

先程の式も

$$\tau(p^2) - \tau(p^2) = -p^{11} \tau(p^0)$$

と考えると自然であり、同様に 3 乗を考え

ると、

$$\tau(2^3) - \tau(2)\tau(2^2) = -2^{11}\tau(2)$$

と、同じ結果になった。これらから、仮説を

$$\tau(p^n) - \tau(p)\tau(p^{n-1}) = -p^{11}\tau(p^{n-2}),$$

すなわち、

$$\tau(p^n) = \tau(p)\tau(p^{n-1}) - p^{11}\tau(p^{n-2})$$

と修正した。

これを変数変換することにより、ラマヌジャンの予想に一致する。

### 【ラマヌジャンの予想 2】

$\tau(n)$  は完全乗法的ではないが、素数  $p$  と  $j \in \mathbb{N}$  に対して、次式が成立する。

$$\tau(p^{j+1}) = \tau(p)\tau(p^j) - p^{11}\tau(p^{j-1})$$

もし右辺の第 2 項がなく、第 1 項  $\tau(p)\tau(p^j)$  だけであれば、 $\tau$  が完全乗法的であるということになる。すると、

$$L(s, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

もし、予想 1 が正しければ  $\tau(n)$  は乗法的なので、以下のようなオイラー積をもつが、それぞれの  $p$  因子が等比級数ではないので

$$L(s, \chi) = \prod_{p:\text{prime}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

のような形にはならない。つまり、

$$L(s, \tau) = \prod_{p:\text{prime}} \left(1 + \frac{\tau(p)}{p^s} + \frac{\tau(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

ここで、予想 2 を仮定すると、

$$\tau(p^k) = \tau(p)\tau(p^{k-1}) - p^{11}\tau(p^{k-2}) \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

$L(s, \tau)$  のディリクレ級数表示から  $k = 0, 1$  の項を取り除き、 $k \geq 2$  においては漸化式を用い、計算すると

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} \\ &= 1 + \frac{\tau(p)}{p^s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tau(p)\tau(p^{k-1}) - p^{11}\tau(p^{k-2})}{p^{ks}} \\ &= 1 + \frac{\tau(p)}{p^s} + \frac{\tau(p)}{p^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} - \frac{p^{11}}{p^{2s}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} \\ &= 1 + \frac{\tau(p)}{p^s} + \frac{\tau(p)}{p^s} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{p^{11}}{p^{2s}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} \\ &= 1 + \frac{\tau(p)}{p^s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} - \frac{p^{11}}{p^{2s}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} \end{aligned}$$

より、

$$\left(1 - \frac{\tau(p)}{p^s} + \frac{p^{11}}{p^{2s}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau(p^k)}{p^{ks}} = 1.$$

これを、 $\zeta(s)$  や  $L(s, \chi)$  のオイラー積と比較する。 $u = p^{-s}$  とすると、 $\zeta(s)$  は  $\frac{1}{1-u}$  と

なり、 $L(s, \chi)$  は  $\frac{1}{1 - \chi(p)u}$  となる。

$$L(s, \tau), \frac{1}{1 - \tau(p)u + p^{11}u^2}$$

のいずれの式も分母は多項式である。L 関数のオイラー因子を  $u$  の多項式として見たときの次数を **オイラー積の次数** という。  $\zeta(s)$  および  $L(s, \chi)$  は 1 次のオイラー積をもち、 $L(s, \tau)$  は 2 次のオイラー積をもつ。

### ■ラマヌジャン予想

先程の 2 次のオイラー積は 2 次方程式

$$1 - \tau(p)u + p^{11}u^2 = 0$$

に解の公式をあてはめることができる。

両辺を  $u^2$  で割ると、

$$u^{-2} - \tau(p)u^{-1} + p^{11} = 0.$$

これを、 $u^{-1}$  の 2 次方程式とみなすと、解の公式より、

$$u^{-1} = \frac{\tau(p) \pm \sqrt{\tau(p)^2 - 4p^{11}}}{2}.$$

ラマヌジャンは虚数解をもつと予想した。

つまり、 $\tau(p)^2 - 4p^{11} < 0$  より、

$|\tau(p)| < 2p^{\frac{11}{2}}$  が成り立つと予想した。

【ラマヌジャンの予想 3】

$$|\tau(p)| < 2p^{\frac{11}{2}}$$

この予想 3 は「ラマヌジャン予想」といわれる一般形と同値である。予想 3 を仮定すると、根号部が純虚数になるので、

$$u^{-1} = \frac{\tau(p) \pm \left( \sqrt{4p^{11} - \tau(p)^2} \right) i}{2}.$$

絶対値の 2 乗を計算すると

$$|u|^{-2} = \frac{\tau(p)^2 + \left( \sqrt{4p^{11} - \tau(p)^2} \right)^2}{4} = p^{11},$$

$|u|^{-1} = p^{\frac{11}{2}}$ ,  $u^{-1} = p^{-s}$  なので、 $|u|^{-1} = p^{\Re(s)}$

より、 $\Re(s) = \frac{11}{2}$ .

ゆえに、実部が一定となる。よって、予想 3 の下でラマヌジャン予想の一般形は成

立する。

逆に、ラマヌジャン予想の一般形が成り立つと、式を遡り解の公式の部分は純虚数でなければならない。したがって、ラマヌジャン予想の一般形を仮定すると予想 3 が成り立つ。

すなわち、 $L(s, \tau)$  に対して

「予想 3  $\Leftrightarrow$  ラマヌジャン予想の一般形」となる。

#### 4. 今後の課題

今回、完全数と  $\tau$  関数について、自ら考察することができた。しかし、算術級数定理の証明を完全には理解することができなかった。また、今回は新しい概念を膨大に学習したので、まだ理解が不十分なものも多い。そのため、さらに考察を深めるとともに、理論の大きな流れと微細な論理をしっかりと見極めながら学習と研究を進めたい。

#### 5. 参考文献

- [1] 「素数からゼータへそしてカオスへ」、小山信也，日本評論社
- [2] 「 $\pi$  と微積分の 23 話」、寺澤順，日本評論社
- [3] 「定本 解析概論」、高木貞治，岩波書店
- [4] 「ベルヌーイ数とゼータ関数」、荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信，牧野書店
- [5] 「ゼータの世界」、梅田亨，黒川信重，若山正人，中島さち子，日本評論社
- [6] 「素数大百科」、Chris K. Caldwell 著，SOJIN 訳，共立出版
- [7] 「ヤコビの三重積公式」、大宗勇輝，守谷貴秀，青山学院大学理工学部

## 6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございました。

# 組みひもについて考える

3年B組 佐野 仁祥

指導教諭 川口 慎二

## 1. 要約

サイエンス研究会数学班 3年生は組みひもについて学習している。今回は、数式で組みひもを扱い、組みひもの理論の基本構造を理解することを目標とした。その際に学習したリンクダイアグラムを中心に参考文献[1]から学んだことを紹介したい。

キーワード 組みひも、リンクダイアグラム、ライデマイスタームーブ

## 2. 研究の背景と目的

組みひもという一見、単純に見えるもの  
がもつ複雑さや、幾何学で考え出された理  
論が現実に応用できるという点に興味をも  
ったからである。

対応する2通りの組みひもを $\sigma_i, \sigma_i^{-1}$ と表  
す(図2)。

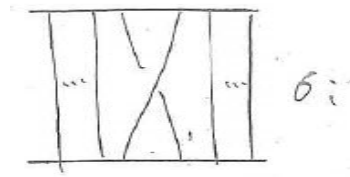


図1

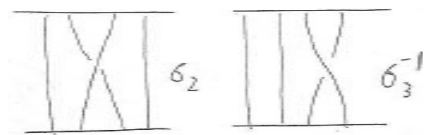


図2

## 3. 研究内容

### 3-1. 組みひもとは

上面Aと下面Bがあったとき、面A上の  
点 $a_n$ の真下にある点を $b_n$ とする。また  
 $a_1 \sim a_n$ から出発した点が $b_1 \sim b_n$ のい  
ずれかに到達するものを $n$ 本と組みひもと  
する。一旦下がったひもが、上に再び上  
がったり、一本のひもが結ばれたりする  
ことはない。

表示の際は、一方から光を当てて投影  
した図に、ひもの重なりがわかるよう  
に描く。

### 3-2. 組みひもの構成要素

ある1つの組みひもを交わる箇所に注  
目し、もとの組みひもがいくつかの組  
みひもの集まりからなるということを  
式で表せないか考える。

まず次の図1のような組みひもを $\sigma_i$   
とする。さらに、右回転で入れ替わる  
ことで

例えば、3本のひもからなる組みひも  
は必ず、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$ からなる  
ことがわかる、つまりそれぞれい  
ずれかを積の記号を用い式で表す  
ということである。

一般的に、 $n$ 本のひもからなる組  
みひもの場合、 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_n^{-n}$   
の組み合わせにより表されることが  
わかる。

### 3-3. 組みひも関係式

上面の $a_1 \sim a_n$ 、下面の $b_1 \sim b_n$ は  
固定し

たまま移りあえる組みひもは、同じとみなすことにする。

例えば、図3では  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$  であり、4本の組みひもの場合、 $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$  となる (図4)。

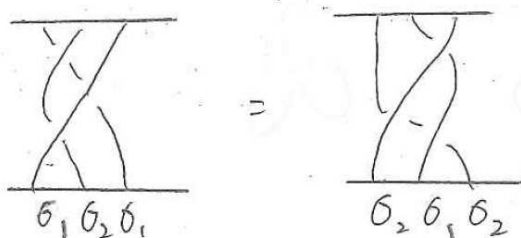


図3

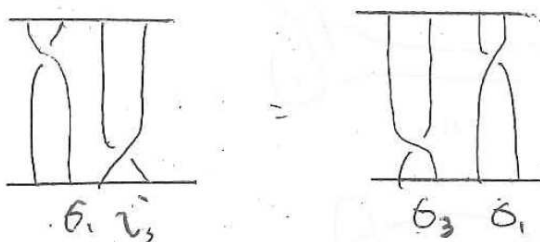


図4

よって、一般に組みひもについて2通りのタイプの関係式が得られることがわかる。

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (i=1,2,\dots,n-1)$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \Rightarrow |i-j| > 1$$

これを、**組みひも関係式**と呼ぶ。

### 3-4. 組みひもの積構造

組みひもを積の記号を用いて合成し、定める。まず**自明な組みひも**(交差していない組みひも) $e$ を考えたとき、同じひもの本数の組みひも  $x$  に対し、 $ex = xe = x$  となる。このような性質を満たす  $e$  は**単位元**と呼ばれる。また、この組みひも同士の積は、は

結合法則  $(xy)z = x(yz)$  を満たしている。

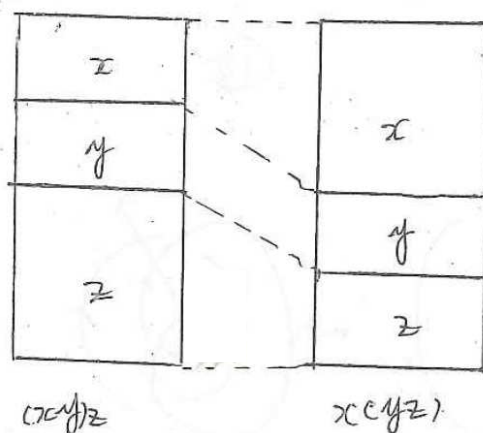


図5

ひもが  $n$  本である組みひもは

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \text{ と } \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}$$

で表すことができる。ここで、ある組みひも  $x$  を考えてみる。 $xy = e$  というように自明な組みひもを作るためには、組みひも  $x$  を後ろから読んで、それぞれの交差の上下を逆にしたものを組みひも  $y$  とおけばよい。このとき、この組みひも  $y$  は  $xy = yx = e$  を満たす。このような組みひも  $y$  は  $x$  の**逆元**と呼ばれる。

$$\text{例を示すと } x = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1},$$

$y = \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$  をそれぞれの組みひもとするとき、この2つを合成させると自明な組みひもになったことがわかる。

### 3-5. 群とは

空でない集合  $G$  とその上の二項演算  $*: G \times G \rightarrow G$  の組  $(G, *)$  が**群**であるとは、

(G1) 結合法則:  $x*(y*z) = (x*y)*z$

(G2) 単位元の存在:  $ex = xe = x$

(G3) 逆元の存在:

$$\forall a \in G, \exists b \in G \text{ s.t. } ab = ba = e$$

の3つの条件を満たすものをいう。ひもの本数が  $n$  本の組みひも全体は上の条件を満たすため群であり、**ブレイド群**や**組みひも群**と呼ばれ  $B_n$  であらわすことができる。

### 3-6. 組みひもとアミダくじ

次の図のようにある組みひも  $a$  にそのひもの本数だけ、上下がそれぞれ対応するよう点をつける。ひもの本数を  $n$  本とすると、これにより  $n$  個の文字  $\{1, 2, \dots, n\}$  の入れ替えが起こることがわかる。この作業はアミダくじの図式をたどっていくのと同じだといえ、根本的な違いは、組みひもではひもの上下関係を問題にしておき、アミダくじでは線の上下関係を考えていないという点である。文字  $\{1, 2, \dots, n\}$  の入れ替えは、 $n!$  のパターンがあり、入れ替えの合成に関して、群の構造をもつことがわかる。また、集合  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$  に対し、 $I_n$  から  $I_n$  への全単射全体の集合は写像(入れ替え)の合成を積として群になることがわかる。これを  $n$  次**対称群**とよび  $S_n$  であらわされる。

組みひもが、 $n$  個の文字をどのように入れ替えるかをみると、組みひも群から  $n$  次対称群への写像  $B_n \rightarrow S_n$  が構成される。

### 3-7. リンクダイアグラムとライデマイスター移動

ひもの両端をとじて三次元空間にできた閉曲線を考えることにする。このとき、閉曲線は自分自身と交わったりすることはないとここでは仮定する。ここでも組みひもと同じように、光をあて投影し、かつひもの上下関係をわかるようにする。

ひもを動かすことで、ほどけてしまう結び目は**自明な結び目**と呼ばれる。また、い

くつかの結び目が互いに交わることなく絡み合っているものを**リンク**と呼び、次の図6が代表例である。また、このように表したものを**リンクダイアグラム**という。

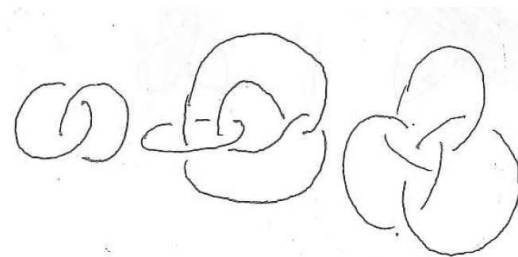


図6

同じリンクでも、見かけ上異なったリンクダイアグラムで表すことができる場合がある。2つのリンクが同じであることは、そのリンクダイアグラムが、次の**ライデマイスター移動**と呼ばれる3つの操作によって得られる。

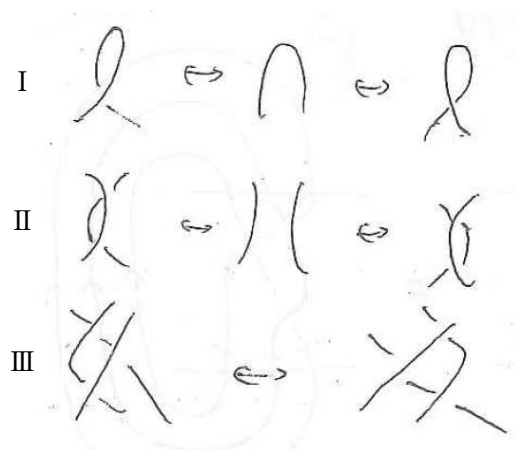


図7

### 3-8. 向きをついたリンク、絡み数

まず、向きをついたリンクについて説明する。**向きをついたリンク**とは、リンクを構成するそれぞれの結び目に矢印を付けたものをいう。

次に絡み数について説明する。**絡み数**と

は、図8の左を正の交差点、右を負の交差点としたとき、正の交差点の個数から負の交差点の個数を引いたものの半分のことと定義する。またこのとき、リンク  $k_1, k_2$  により定まる絡み数を  $lk(k_1, k_2)$  と表す。

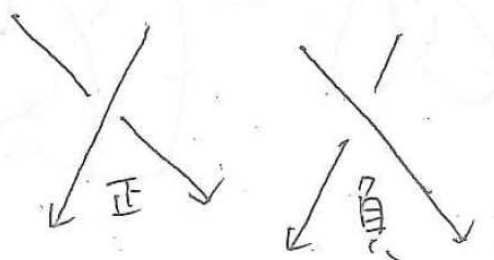


図8

図9のように、下の向きのついたリンクの絡み数を計算することができる。この場合においても、これらの絡み数が同じであることは、ライデマイスター移動によってとらえることができる。ただしこのとき、次のように、可能な矢印の付け方についてすべて考える必要がある。

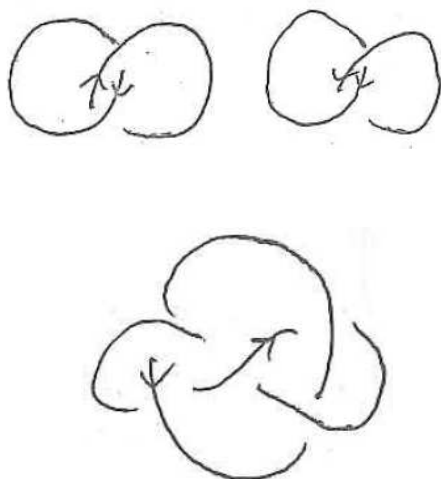


図9

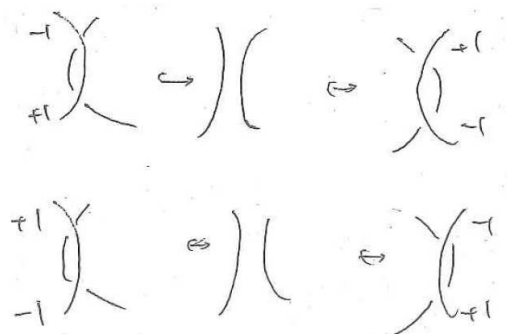


図10

ところで、絡み数は先程のような向きのついたリンクダイアグラムに対して計算されるが、これがライデマイスター移動によって不変であることが次のように示される。

- ①ライデマイスター移動Ⅰのとき、 $k_1, k_2$  の交差は現れないので問題にはならない。
- ②ライデマイスター移動Ⅱのとき、交差の符号が反対になって打消しあう。
- ③ライデマイスター移動Ⅲのとき、点  $a$  が同じ結び目どうしの交差点ならば、点  $b$  もそうであり、ともに同じ符号の交差点であることが確かめられる。

このように、ライデマイスタームーブで絡み数は不変であるということが示される。これは、絡み数が、リンクダイアグラムによる見かけに関わらず、リンク固有の量であることを示している。よって、絡み数はリンクの最も基本的な不変量である。

### 3-9. 結び目の合成

2つの結び目をつなぎあわせることにより、新しい結び目を作ることを**合成**とよび、その逆の操作を**分解**と呼ぶ。



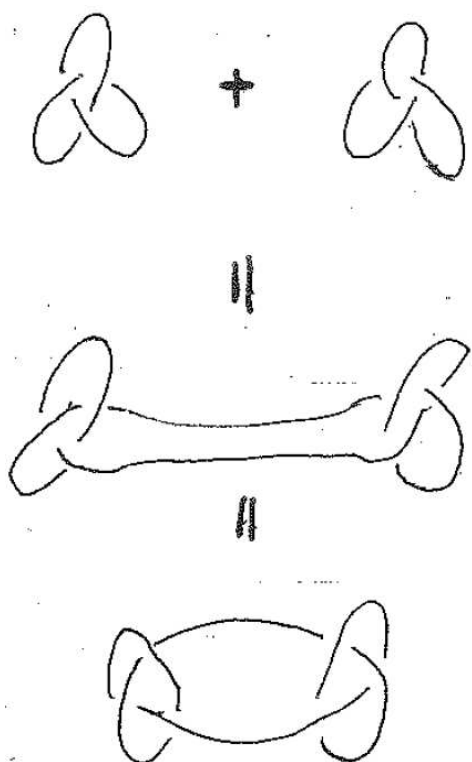


図 11

結び目を分解したとき、一方の結び目が必ず自明な結び目になるとき、これを**素な結び目**と呼ぶ。また、結び目ダイアグラムのうち、交差点の個数が最も少なくなるものを考え、その交差点の数を**最小交点数**と呼ぶ。

### 3-10. 組みひもからリンクをつくる

まず、次のような組みひも  $A$  を用意する。

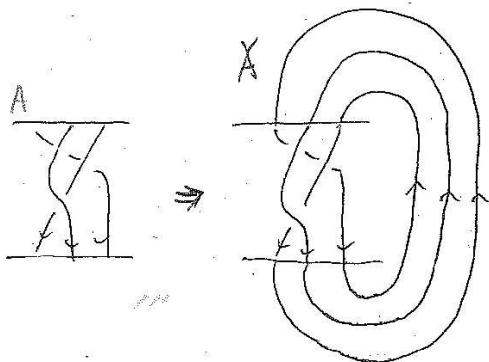


図 12

図 12 のように、組みひも  $A$  から出発して両端をとじると、リンクをつくることができる。このときできるリンクを  $\hat{A}$  と表すことにする。リンク  $\hat{A}$  には、組みひも  $A$  に下向きの矢印をつけることにより、向きを与えることができる。つまり、組みひもから向きのついたリンクが構成できるということである。

このとき、逆はどうか考えよう。向きのついたリンク  $L$  があるとき、両端をとじると、リンク  $L$  となる組みひも  $A$  があるかどうかは後に考える。

### 3-11. 結び目から組みひもへ

図 13 の結び目はそれぞれ点  $o$  を中心に見ると、左回転の曲線からなっている。よって、点  $o$  を通る図のような直線で切り開くと、組みひもは得られることがわかる。さらに、逆をいうと、もとの結び目は組みひもの両端を閉じたものとして表すことができる。

図 14 の結び目は、点  $o$  を中心にしてみると、右回転や左回転の曲線など、回転が一定ではない。ひもを動かして一定にすることを考えると表すことができた。式にあらわすと、 $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$  となる。

これにより、リンクを組みひもで表すには、ひもをうまくうごかして、ある基点についての回転方向を一定にすればよいことがわかった

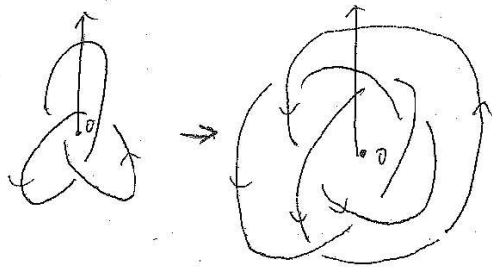


図 13

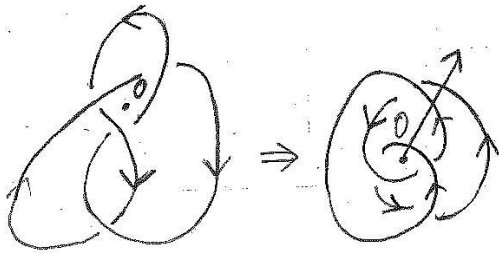


図 14

### 3-12. アレクサンダーの定理の証明

向きのついたリンク  $L$  を、次の規則に従って修正していく。

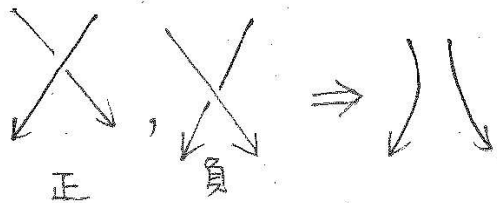


図 15

結果として、平面上のお互いに交わらない有限個の閉じた曲線が得られる。

このように、向きのついたリンクダイアグラムから構成される曲線を**ザイフェルトサークル**と呼び、このとき、リンクの交差に対応した線分をかき入れる。

ここで、リンクを組みひもで表すことについて考える。

まず向きのついたリンクが、ある組みひもの両端をとじたものとして表されているとすると、そのザイフェルトサークルは図

16のように、同心円になるはずである。

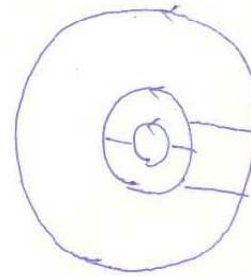


図 16

また、これらの円にはすべて同じ向きが与えられていることになる。逆に、ザイフェルトサークルがこのように同心円になっていれば、もとのリンクダイアグラムは、組みひもを閉じたものとして表すことができる。このとき、リンクダイアグラムをライドマイスター移動 I, II によって変形し、対応するザイフェルトサークルが同心円になるように操作すればいいことがわかる。

いまから、いくつかの典型的な場合を考えてみる。

まず、図 17 のような、ザイフェルトサークルから考える。

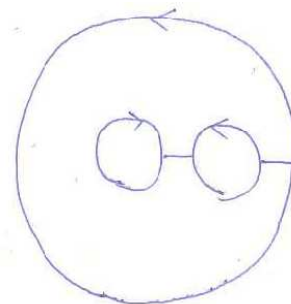


図 17

このとき、一番外側のザイフェルトサークルの向きが定まっていると、ほかのザイフェルトサークルの向きも同じ向きを与えることにする。また、ザイフェルトサークル

ルにおける線分のつなぎ規則より、図 18(a)の場合のみ起こり、(b)に対応する場合はおきかえないことによる。

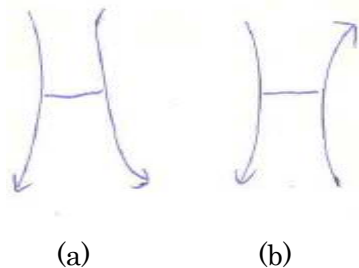


図 18

先程のザイフェルトサークルが同心円になるように変形したのが図 19 である。

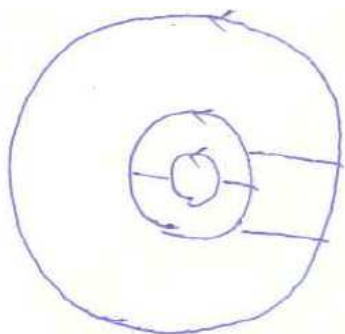


図 19

元のザイフェルトサークルから変形したものにいたる過程を、リンクダイアグラムによって見たのが、次の図 20 である。

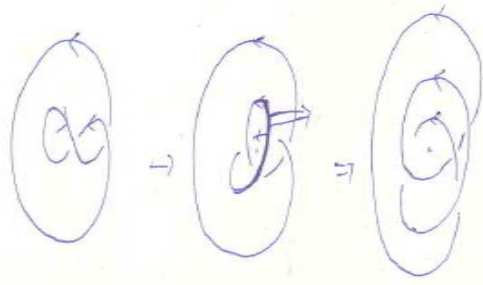


図 20

得られたザイフェルトサークルのすべて

が同じ向きを得たかどうかを確認する。

もうひとつの場合として、次のザイフェルトダイアグラムについて考えてみる。このときも先程の操作に同じく、ライドマイスター移動によって同心円のダイアグラムに変形することができる。

一般に、次の図 21 のようなザイフェルトダイアグラムが考えられるが、先ほど実行した 2 通りの操作で、それぞれ同じ向きが与えられた、同心円のダイアグラムにできるということがわかる。

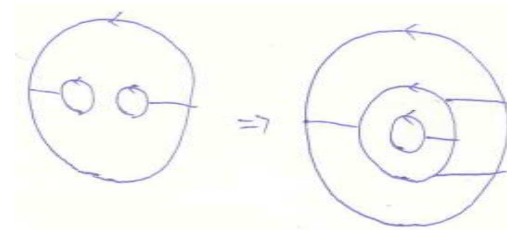


図 21

一番外側のザイフェルトサークルの向きが定まっている場合、その向きをそれぞれの円に与えるとすると、前提において話を進めていたように、一番外側のザイフェルトサークルがない場合については考えていない。だが、もし一番外側のザイフェルトサークルがないときは、一番外側にザイフェルトサークルが存在すると仮定して先程の 2 通りの変形を行い、その後、取り除けばよいということがわかる。

どのようなザイフェルトダイアグラムも、対応するリンクダイアグラムのライドマイスター移動により、同心円に変形できるということがわかる。すると、**アレクサンダーの定理**「すべてのリンクは、ある組みひもの両端をとじたものとしてあらわすことができる」を得る。

#### 4. 感想

今年は組みひもについて基本的な内容を理解することに時間がかかってしまった。一つひとつの内容を理解するまでが大変であった。

これからもさらに組みひもやリンクについて学んでいきたい。

#### 5. 参考文献

[1] 「組みひもの数理」, 河野俊丈, 遊星社

# 真の約数の和に関する考察

5年B組 秋山 健太  
指導教員 川口 慎二

## 1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生は、真の約数の和を取り続けるという操作について研究している。まず初期値が1~10000までの場合について調べてみたところ、操作の結果が単調に増加していくと思われるものがあり、特にそのような場合について考察した。

キーワード 真の約数の和、過剰数、完全数、不足数

## 2. 研究内容

### 2-1. 約数

整数 $a, b$ に対して、 $a = bq$ を満たす整数 $q$ が存在するとき、 $b$ を $a$ の**(広義の)約数**という。例えば、9の約数は $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ である。

また、自然数 $m, n$ に対して、 $m = nr$ を満たす自然数 $r$ が存在するとき、 $n$ を $m$ の**(狭義の)約数**または**正の約数**という。例えば、9の正の約数は1, 3, 9である。

「約数」の定義について、一般には広義の意で用いるが、本論文では以降自然数について議論を進めるので、「約数」という用語を使う際は狭義の意味に解釈することにする。つまり、負の数の方は考えない。

### 2-2. 真の約数とその和

自然数 $n$ の約数のうち、 $n$ 自身を除いたものを $n$ の**真の約数**という。  
なお、1の真の約数は定義されない。  
例えば、9の真の約数は1, 3である。

ここで真の約数の和をとるという操作を繰り返すことを考える。以下、自然数 $n$ の真の約数の和を $\Sigma(n)$ と表すと、例えば9の真の約数の和は

$$\Sigma(9) = 1 + 3 = 4$$

である。そして得られた値、つまりここでは「4」についても同様に真の約数の和を計算すると、

$$\Sigma(4) = 1 + 2 = 3$$

となり、また同様に「3」についても真の約数の和を計算すると、

$$\Sigma(3) = 1$$

となる。このように、初期値が「9」である場合は、 $9 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ と最終的に「1」に辿り着いた。

では、「9」に限らず、あらゆる自然数を初期値として、このように真の約数の和をとるという操作を続けていくと、どのようになるのだろうか。

### 2-3. 検証

そこでまず初期値が 1~10000 である場合について Excel を用いて計算してみた。  
その結果を表 1 に示す。

表 1 Excel を用いた計算結果

初期値	1	2	3	4	5	6	7	8	...
		1	1	3	1	6	1	7	
				1		6		1	
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						:			

しかし、この中には計算過程で非常に大きな数が出てくるものが少なからずあり、計算がとても遅くなってしまった。そこで、「真の約数の和をとる」という操作をそれぞれ 20 回ずつ行い、

- ・「1 で終わるもの」
  - ・「途中から循環するもの」
  - ・「20 回の操作では全貌が不明なもの」
- の 3 種類に分けた。  
次の表 2 はその 3 種類のそれぞれの例である。

表 2 3 種類の計算結果の例

操作数	1 で終わるものの例	循環するものの例	不明なものの例
	<b>30</b>	<b>4840</b>	<b>5880</b>
1	42	7130	14640
2	54	6694	31488
3	66	3350	54360
4	78	2974	123480
5	90	1490	344520
6	114	1210	951180
7	259	1184	2223720
8	45	1210	5552280
9	33	1184	13498920
10	15	1210	33157080
11	9	1184	87457320
12	4	1210	229221664
13	3	1184	635004288
14	1	1210	2401084672
15		1184	11596401664
16		1210	73281847296
17		1184	611709980092
18		1210	6386697940672
19		1184	82009391152128
20		1210	1125899906842620

そして、次ページの図 1 は 1 から  $n$  までの各種類の累計の割合を示す。

やはり操作回数が 20 回と少ないこともあり、徐々に「不明なもの」の個数の割合が増えていることがわかる。

ではこの「不明なもの」も、操作数を十分に増やせば、最終的に 1 になったり、あるいは循環したりするのだろうか。それとも永遠に 1 になったり循環したりすることはないのだろうか。

この疑問を解決するために、自然数を「過剰数」、「完全数」、「不足数」という 3 つのグループに分けて分析を試みた。

なお、これ以降は、便宜上 1 の真の約数の和を 0 として扱う。

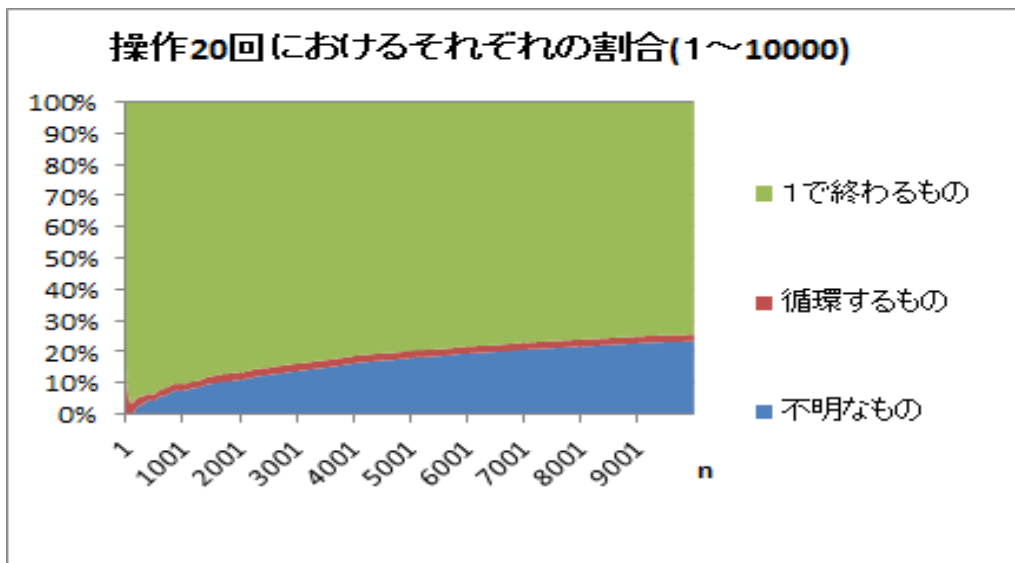


図 1

#### 2-4. 過剰数・完全数・不足数

不等式  $n < \Sigma(n)$  を満たす自然数  $n$  を過剰数といい、等式  $n = \Sigma(n)$  を満たす自然数  $n$  を完全数という。また、不等式  $n > \Sigma(n)$  を満たす自然数  $n$  を不足数という。

例えば、 $\Sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$  ゆえ、 $12 < \Sigma(12)$  であるから、12 は過剰数である。また、 $\Sigma(6) = 1 + 2 + 3 = 6$  ゆえ、6 は完全数とわかる。さらに、 $\Sigma(8) = 1 + 2 + 4 = 7$  ゆえ、 $8 > \Sigma(8)$  であるから、8 は不足数である。

定義からも分かるように、どの自然数も「過剰数」、「完全数」、「不足数」のいずれかである。

そこで、自然数の中にそれぞれの数はどのぐらいの割合で含まれているのかを調べるため、1~10000までの数について、その数が過剰数であるか、完全数であるか、不足数であるかを求めてみた。

図 2 は 1 から  $n$  までの数について、3 種類それぞれの累計の全体に占める割合を示す。

この図から、非常にグラフが安定していることがわかる。過剰数が約25%、不足数が約75%であり、完全数は10000の中に4つしかない。

よって、グラフが非常に安定していることから、1~10000という範囲だけでなく、自然数全体で、おおよそ25%の割合で過剰数が含まれ、また、おおよそ75%の割合で不足数が含まれ、完全数はごくわずかしかないと考えた。

すると、グラフから1~10000までの自然数のうち約2500個が過剰数、約7500個が不足数であると考えられる。これは初期値が1~10000である10000通りのうち、真の約数をとるという操作を1回行うと、(初期値より)値が増加する

ものが約2500通り、(初期値より)値が減少するものが約7500通りあるということになる。

そこで今度は値の増減に着目した。まず、2~10000までの自然数 $n$ を過剰数、完全数、不足数の3つのグループに分ける。さらに、グループごとに $\Sigma(n)$ を過剰数、完全数、不足数の3つのグループに分ける。つまり、 $n$ と $\Sigma(n)$ の大小を比べ、 $\Sigma(n)$ と $\Sigma(\Sigma(n))$ の大小を比べて、最終的に、計 $3 \times 3 = 9$ 個のグループに、初期値が1である場合を除く、先程の9999通りを分類する。

表3がそれらをまとめたものである。

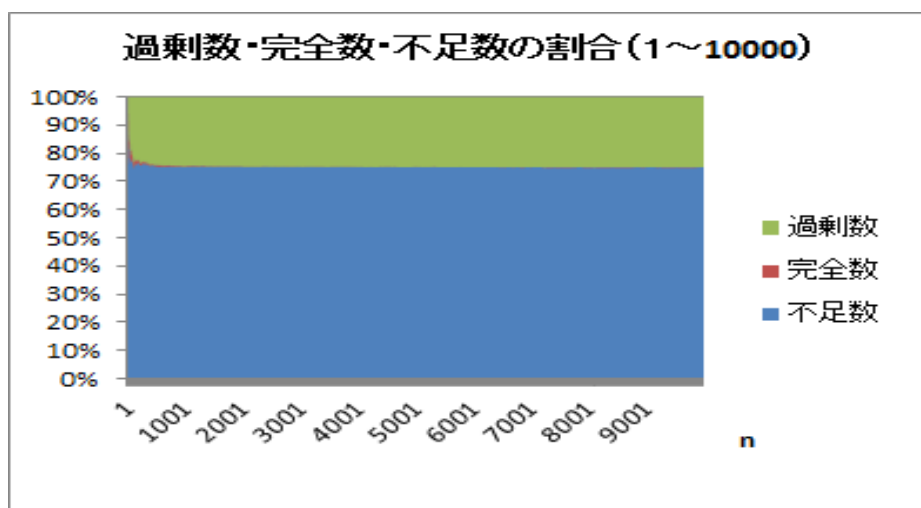


図2



表 3

		$\Sigma(n)$			
		総数	過剰数	完全数	不足数
	過剰数	2488	1869 (75.12%)	0 ( 0.00%)	619 (24.88%)
n	完全数	4	0 ( 0.00%)	4 (100.00%)	0 ( 0.00%)
	不足数	7507	478 ( 6.37%)	2 ( 0.03%)	7027 (93.60%)
※初期値1の場合は1回目の操作で0になってしまうため、除いている					

この表 3 から、「過剰数の真の約数の和は過剰数を、不足数の真の約数の和は不足数を生成しやすい」ということが読み取れる。

特に過剰数について詳しく見てみると、初期値が 2~10000 であるものの中で過剰数、つまり  $n < \Sigma(n)$  を満たす数は、全体の 25% ほどしかないが、そのうちの実に 75% 以上が過剰数、すなわち

$$\Sigma(n) < \Sigma(\Sigma(n))$$

を満たすことがわかる。

このことから、自然数の真の約数の和をとる、という操作を繰り返すと、どのような初期値で始めても、その全ての場合において、1 で終わったり、どこかから循環したりするのではなく、いくら操作数を増やしても、1 で終わることもなく、また循環もずっとしないようなものもある、と考えている。

### 3. 今後の課題

今後の最大の目標は「不明なもの」の結末を解明することである。そのためには、ある数が過剰数、完全数、不足数になるための条件を考えたり、「不明なもの」の中でグループ分けをしたりすることが解明の糸口になるのではないかと考えている。

### 4. 参考文献

- [1] 「プライムナンバーズ」, David Wells 著, 伊地知 宏監訳, さかいなおみ訳, オーム社

### 5. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導して下さった顧問の川口先生、ありがとうございました。

# ピタゴラス三角形とピタゴラス数

6年B組 清水 悠平

6年C組 西井 良徳

6年C組 森 宇宏

指導教員 川口 慎二

## 1. 概要

サイエンス研究会数学班6年生は、ピタゴラス三角形について4年間継続して研究を行った。主な内容はピタゴラス三角形の基本的性質や辺の長さ、周の長さ、面積に関する考察、ヘロン三角形とフェルマーの大定理との関係、そして辺の長さとの個数の関係である。本稿では、その結果について紹介し、これまでの研究を総括する。

キーワード ピタゴラスの定理(三平方の定理)、ピタゴラス三角形、ピタゴラス数、既約、平方数、フェルマー・ペル型不定方程式、ヘロン三角形、フェルマーの定理、近似式

## 2. 研究の背景と目的

**ピタゴラス三角形(Pythagorean triangle)**とは、3辺の長さを整数で表すことができる直角三角形である。

B.C.2000 頃のエジプトではすでに辺の長さが 3, 4, 5 のピタゴラス三角形の存在が知られていた。このようにピタゴラス三角形はとてつもなく長い歴史がある。

また、よく知られているように直角三角形の3辺の間には、ピタゴラスの定理(定理1)が成り立つ。

### **定理1 (ピタゴラスの定理)**

直角を挟む2辺の長さが  $x, y$  である直角三角形の斜辺の長さを  $z$  としたとき、

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots(1)$$

が成り立つ。

このとき、等式(1)を**ピタゴラス方程式**

(Pythagorean equation)という。

また逆に、等式(1)が成り立つ三角形は直角三角形となる(「**ピタゴラスの定理の逆**」と呼ばれる)。そして、ピタゴラス三角形の3辺の長さの組み合わせを**ピタゴラス数(Pythagorean number)**という。

あるピタゴラス三角形を拡大すると、新しい直角三角形ができる。新しくできた直角三角形は、各辺が自然数であり、もとの三角形に相似なので、これもまたピタゴラス三角形となる。このようにあるピタゴラス三角形を2倍、3倍、4倍…としていくと、次々に新たなピタゴラス三角形ができる。つまり、1つのピタゴラス三角形から無数のピタゴラス三角形が生み出される。これを記号で表現しよう。一般に、3辺が  $x, y, z$  であるピタゴラス三角形を  $(x, y, z)$  と表すことにする。このとき  $(kx, ky, kz)$  (ただし  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) はすべてピタゴラス三

角形になる。

例えば、(3, 4, 5)という組み合わせのピタゴラス三角形からは、(6, 8, 10), (9, 12, 15)などのピタゴラス三角形が得られる。

ここで、ピタゴラスの定理の証明をいくつか紹介する。

[証明 1]

3辺の長さが  $x, y, z$  であり、 $\angle A = 90^\circ$  である直角三角形  $ABC$  を考える。まず、

$\triangle ABC$  と合同な直角三角形を図1のように4枚並べて、正方形  $ADEF$  をつくる。

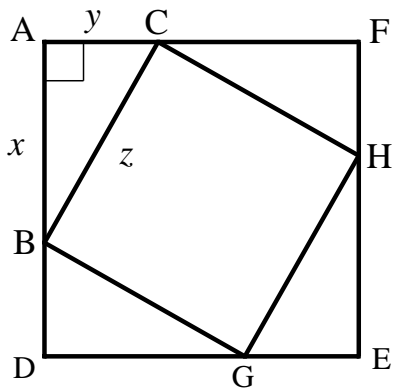


図 1

このとき、 $\triangle ABC$ ,  $\triangle DGB$ ,  $\triangle EHG$ ,  $\triangle FCH$  はすべて合同である。すると、

$$AB = DG = EH = FC = x,$$

$$AC = DB = EG = FH = y,$$

$$BC = GB = HG = CH = z.$$

であるから、正方形  $BGHC$  の面積  $S$  は、 $S = z^2$  と表すことができる。一方、正方形  $ADEF$  の面積は、一辺が  $(x+y)$  の正方形から、4枚分の直角三角形の面積を引いたものなので

$$(x+y)^2 - 4 \times \frac{1}{2}xy$$

と表すこともできる。したがって、

$$z^2 = (x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$$

となる。

(Q.E.D.)

[証明 2]

図2のように、3辺の長さが  $x, y, z$  であり、 $\angle C = 90^\circ$  である直角三角形  $ABC$  を考える。頂点  $C$  から斜辺  $AB$  へ下ろした垂線の足を  $D$  とする。

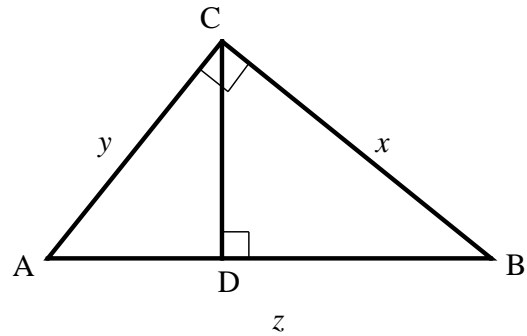


図 2

ここで、 $\angle D = 90^\circ$  より、

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$

となる。よって、 $\triangle ABC$  と  $\triangle ACD$  の相似比は  $y : AD = z : y$  である。

よって、 $AD = \frac{y^2}{z}$  である。

同様に、 $\triangle ABC$  と  $\triangle CBD$  の相似比は  $x : BD = z : x$  である。

したがって、 $BD = \frac{x^2}{z}$  となる。

いま、 $z = AB = AD + BD$  であるから、

$$z = \frac{y^2}{z} + \frac{x^2}{z} = \frac{x^2 + y^2}{z}$$

が成り立つ。この両辺に  $z (> 0)$  を掛ける

と、 $z^2 = x^2 + y^2$  となる。

(Q.E.D.)

[証明 3]

3 辺の長さが  $x, y, z$  ( $BC = x$ ,  $CA = y$ ,  $AB = z$  とする) であり、 $\angle A = 90^\circ$  である直角三角形  $ABC$  を考え、図 3 のように、各辺を一辺とする正方形を辺上につける。また、点  $C$  から辺  $DE$  におろした垂線の足を  $L$  とし、 $AB$  との交点を  $M$  とする。また、 $I$  を通り  $AB$  に平行な直線  $IJ$  を引き、線分  $AH$  との交点を  $J$ 、線分  $IJ$  と辺  $BD$  の延長線との交点を  $K$  とする。

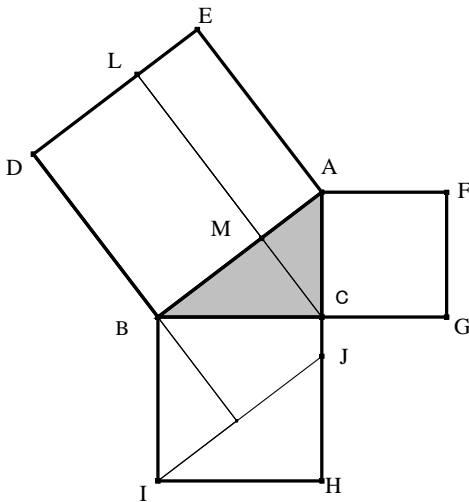


図 3

すると、 $IJ \parallel BA$ 、 $IB \parallel JA$  であるため、四角形  $ABIJ$  は平行四辺形である。ここで、 $\square ABIJ = BI \times BC$  なので、

$$\square ABIJ = \square BIHC \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $\square ABIJ$  と  $\square BIHC$  はそれぞれ平行四辺形  $ABIJ$  と正方形  $BIHC$  の面積をそれぞれ表している。

また、 $\triangle IBK$  と  $\triangle CBM$  において、 $BI = BC$  であり、

$$\angle IBK = 90^\circ - \angle KBC = \angle CBM$$

なので、ともに直角三角形であり、斜辺と 1 鋭角が等しいので、 $\triangle IBK \cong \triangle CBM$  である。

よって  $BK = BM$  となり、また  $KD \parallel CL$  であるから、

$$\begin{aligned} \square ABIJ &= AB \times BK = BD \times BM \\ &= \square BMLD \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで、 $\square BMLD$  は長方形  $BMLD$  の面積を表している。

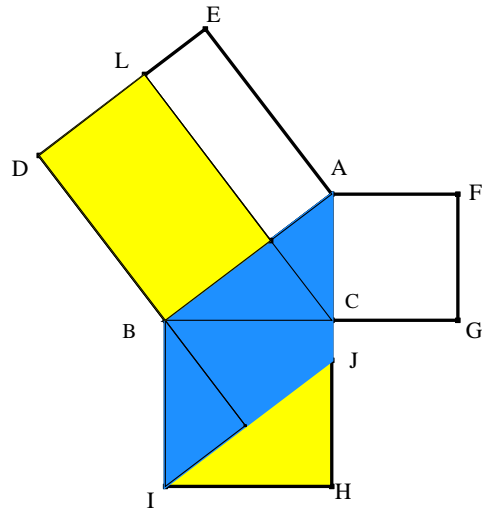


図 4

①, ②より、

$$\square BIHC = \square BMLD \quad \dots \textcircled{3}$$

であり、同様に、

$$\square ACGF = \square AELM \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③, ④より、

$$\square BIHC + \square ACGF = \square AEDB$$

つまり、 $x^2 + y^2 = z^2$  が成り立つ。

(Q.E.D.)

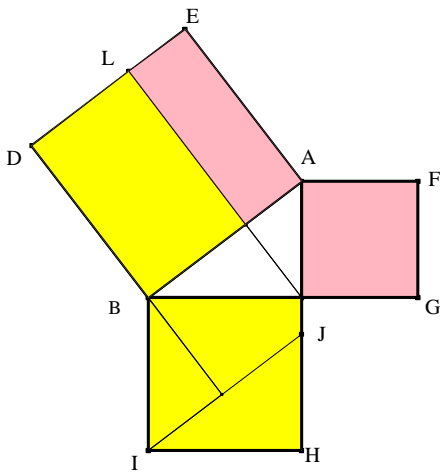


図 5

[証明 4]

3 辺の長さが  $x, y, z$  ( $AB=x, BC=y, CA=z$  とする) であり、 $\angle B=90^\circ$  である直角三角形  $ABC$  を考える。

図 6 のように、直角三角形の 1 辺  $AB$  の延長上に  $AD=BC$  となるような点  $D$  をとり、 $AD \perp DE$  かつ  $DE=AC$  となるような点  $E$  をとる。  $E$  と  $A$ ,  $E$  と  $C$  を結ぶ。

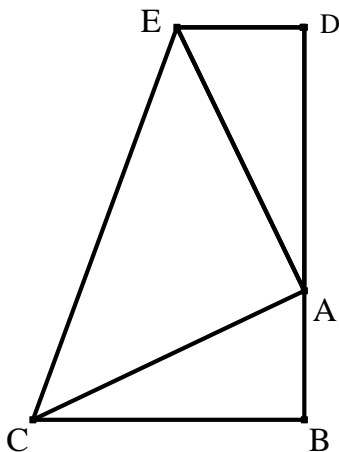


図 6

$\triangle EDA$  と  $\triangle ABC$  において、 $AD=CB$  であり、 $DE=BA$ ,  $\angle ADE=\angle CBA=90^\circ$  なので、 $\triangle EDA \cong \triangle ABC$  となる。よって  $AE=$

$CA=z$  である。

ここで、四角形  $BDEC$  は上底が  $DE=x$ , 下底が  $BC=y$ , 高さが  $BD=AB+AD=x+y$  の台形であるので、その面積は

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) \dots \textcircled{1}$$

である。また、この台形は  $\triangle ABC + \triangle ABE + \triangle EAD$  と表すことができる。 $\triangle EAD$  は一辺の長さが  $z$  の直角二等辺三角形なので、

$$\triangle EAD = \frac{1}{2}z^2 \dots \textcircled{2}$$

である。したがって、この台形  $BDEC$  の面積は、 $\textcircled{2}$  より、

$$\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}z^2 + xy \dots \textcircled{3}$$

となる。ゆえに、 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{3}$  から、

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy = \frac{1}{2}z^2 + xy$$

すなわち、 $x^2 + y^2 = z^2$  が成り立つ。

(Q.E.D)

本稿では、ピタゴラス三角形のもつ幾何的性質と、ピタゴラス数のもつ代数的性質の対応に注目しながら、ピタゴラス数の基本的性質や、様々な条件を加えた時のピタゴラス三角形の性質について紹介する。

### 3. 研究内容

#### 3-1. 既約なピタゴラス三角形

2 つの整数  $a, b$  が既約(irreducible)であるとは、2 数の最大公約数が 1 であるときをいう。一般に、2 数  $a, b$  の最大公約数を  $(a, b)$  と表すので、 $a, b$  が既約であることを  $(a, b) = 1$  と表す。このとき、 $a, b$  は互いに素(coprime)であるともいう。さらに、

$(a,b)=1$  かつ  $b \neq 0$  であるとき、分数  $\frac{a}{b}$  は

これ以上約分できない。このような分数を既約分数(irreducible fraction)という。

ピタゴラス三角形が既約であるとは、3辺のうち、どの2つの辺の長さも既約になっているときをいう。

以降、ピタゴラス三角形  $(x, y, z)$  を考え、 $z$  をその斜辺とする。つまり、 $x^2 + y^2 = z^2$  が成り立っているものとする。

まず、斜辺以外の2辺について既約なピタゴラス三角形を求めるためにまず既約なピタゴラス三角形  $(x, y, z)$  について、この3辺の長さの性質を調べていく。まず、3辺の偶奇性(パリティ)が決定される。その証明のために、次の補題を準備しておく。

### 補題 1

奇数の平方を8で割ると、1余る。

[証明]

ある自然数  $k$  をもちいて、ある奇数を  $2k+1$  と表す。この平方は

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

となる。このとき、 $k(k+1)$  は連続2数の積ゆえ偶数なので、 $4k(k+1)$  は8で割り切れる。ゆえに、 $(2k+1)^2$  は8で割ると1余る。

(Q.E.D.)

### 定理 2

$x, y$  は(奇数、偶数)または(偶数、奇数)の組合せとなる。

[証明]

まず仮定として、 $x, y$  が互いに素である

とする。

(i) どちらも偶数である場合

$x = 2m, y = 2n$  ( $m, n$  は自然数)と表すことができるので、どちらも2で割ることができ、2数が互いに素であるという仮定に反するため、起こり得ない。

(ii) どちらも奇数である場合

補題 1 から、2つの奇数の平方の和を8で割ると2余ることがわかる。したがって、2つの奇数の平方の和は4で割り切ることができない。奇数の平方は奇数なので、2つの奇数の平方の和は偶数になる。つまり、 $z^2$  は偶数になる。ゆえに、 $z$  も偶数であるとわかる。

ここで  $z = 2k$  とすると、 $z^2 = 4k^2$  となり4の倍数になる。つまり、 $x^2 + y^2$  が4の倍数である。これは、2つの奇数の平方の和を4で割り切ることができないという事実と反するので、2数が両方奇数ということはありません。

(i), (ii) から、 $x, y$  は一方が奇数であり、一方が偶数でなければならないことが示された。

(Q.E.D.)

$x, y, z$  をより具体的に求めるためには、次の補題が必要である。この補題は、2数を因数分解して考えれば、直感的には正しく思える。しかし、数学的に正確な証明をするためには、素因数分解の一意性を認めておく必要がある。ここでの証明は行わないので、参考文献[2]などを参照せよ。

### 補題 II

2つの互いに素である数の積が平方数のとき、この2数はどちらも平方数でなければならぬ。

### 定理 3

$x, y, z$  は互いに素な2数  $m, n$  を用いて、それぞれ

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

と表すことができる。

[証明]

定理 2 から、 $x, y$  の組の一方が奇数で、もう一方が偶数であることは証明された。ここで、 $x$  を奇数、 $y$  を偶数とおく（すると  $z$  は奇数となる）。

ピタゴラス方程式を変形させ、

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x) \cdots \textcircled{1}$$

としたとき、 $z+x$  と  $z-x$  は、 $x, z$  がともに奇数であることから、どちらも偶数となる。よって整数  $a, b$  を用いて、

$$z+x = 2a, z-x = 2b \cdots \textcircled{2}$$

と表すことができる。ゆえに、

$$z = a+b, x = a-b \cdots \textcircled{3}$$

となる。この等式から  $a, b$  が互いに素であることが導かれる。

なぜならば、背理法を用いて、 $a, b$  が 1 より大きな公約数  $d$  をもつとすると、 $\textcircled{3}$  から  $d$  は  $x, z$  の公約数となる。ゆえに、 $z+x$  と  $z-x$  も公約数  $d$  をもつことになる。ここで  $\textcircled{1}$  から、 $d^2$  は  $y^2$  の約数になり、 $d$  は  $y$  の約数ともなる。このとき、 $d$  は  $x, y$  の公約数となり、 $x, y$  が互いに素であるという仮定に反する。したがって、 $a, b$  は互いに素でないといけぬ。

また、自然数  $c$  を用いて  $y = 2c$  と表すこ

とができるので、 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  から、

$$4c^2 = 2a \times 2b, \text{つまり、} c^2 = ab \cdots \textcircled{4}$$

となる。ここで、補題 II と  $\textcircled{4}$  から、

$$a = m^2, b = n^2$$

と表せる。

いま、 $a$  と  $b$  が互いに素であるので、 $m$  と  $n$  も互いに素であることが分かる。 $\textcircled{3}$  から  $x, z$  は、

$$x = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$$

となる。さらに、 $c^2 = ab = m^2 n^2$  より、

$$y = 2c = 2mn$$

である。こうして、互いに素な2数  $m, n$  を用いて、 $x, y, z$  はそれぞれ

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2 \cdots \textcircled{5}$$

と表すことができた。

(Q.E.D.)

ちなみに、 $m, n$  がともに偶数または奇数のとき、 $x = m^2 - n^2$  から、 $x$  が偶数となり、最初の仮定に反するので、 $m, n$  の一方が偶数、他方が奇数でないといけぬことがわかる。

定理 3 の証明からわかるように、ピタゴラス三角形の斜辺でない2辺のうちどちらかは4で割りきることができる。したがって、3辺がすべて素数であるピタゴラス三角形は存在しないことになる。

これまでの結果をまとめると、次の定理のように記述できる。

### 定理 4

辺  $y$  が偶数であるような既約なピタゴラス三角形は、すべて

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

( $m > n$ ) から求められる。ただし、 $m, n$  は

一方が偶数で他方が奇数である互いに素な任意の2数である。

また、 $y$ が偶数である既約なピタゴラス三角形 $(x, y, z)$ は、このような2数 $m, n$ によって一意的に定まる。

[証明]

$m, n$ は互いに素な整数で、 $m > n$ とし、さらに一方が偶数、もう一方が奇数であるとする。⑤によって、これらの数から既約なピタゴラス三角形 $(x, y, z)$ の辺が決まる。恒等式

$$(m-n)^2 + (2mn)^2 = (m+n)^2$$

から、ピタゴラス方程式が成り立つことは明らかである。

次に、⑤のように定めた $x, y$ が互いに素になることを示そう。そこで、 $x, y$ が公約数 $d$  ( $d > 1$ )をもつとする。 $x$ は奇数なので、 $d$ も奇数となる。また、 $d$ は $z$ の約数にもなる。すると、⑤から $m^2 + n^2$ と $m^2 - n^2$ が公約数 $d$ を持つことになり、 $2m^2$ と $2n^2$ が $d$ で割り切れる。ゆえに $m^2$ と $n^2$ も $d$ で割り切れる。

しかし、これは $m, n$ が互いに素であるという最初の条件に反するので、 $x, y$ が互いに素であることになる。

最後に、 $m, n$ が異なる $(x, y, z)$ の組み合わせには、異なったピタゴラス三角形が対応するというのを確かめる。これは、⑤から

$$2m^2 = x + z, \quad 2n^2 = x + z$$

となるため $x, y, z$ が一致した場合 $m, n$ も一致する。したがって、 $m, n$ が異なると $x, y, z$ も異なることが示された。

(Q.E.D.)

### 定理5

$y$ が偶数であるようなすべてのピタゴラス三角形 $(x, y, z)$ は式

$$x = kl, \quad y = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

によって表される。ただし $k$ と $l$ は $k > l$ を満たす互いに素な奇数の組である。

さらに $y$ が偶数である既約なピタゴラス三角形 $(x, y, z)$ はこれによって一通りに表される。

[証明]

ピタゴラス方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ は、因数分解により、 $x^2 = (z + y)(z - y)$ と表すことができる。

ここで、 $y$ は偶数、 $x, z$ は奇数である。よって、 $u = z + y$ と $v = z - y$ はともに奇数で互いに素である。すると、 $x^2 = uv$ と表すことができる。

したがって、 $u = k^2, v = l^2$ をみたすような互いに素な2数 $k, l$ が存在する。つまり、 $x = kl$ であり、

$$y = \frac{u - v}{2} = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{u + v}{2} = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

となる。したがって、

$$x = kl, \quad y = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{k^2 + l^2}{2} \quad \dots \textcircled{6}$$

と表される。一意性については、定理4と同様に証明できる。

(Q.E.D.)

$y$ が偶数である既約なピタゴラス三角形を無限に求めたければ、まず $k$ に奇数の値3, 5, 7, 9, ...を順に代入し、 $l$ に $k$ より小さく $k$ と互いに素な奇数の値を順に代入する。最後に公式⑥によって $x, y, z$ の値



を計算すればよい。

公式⑥によって最初の 20 個の既約なピタゴラス三角形を表 1 に示す。

あらゆるピタゴラス三角形を求めるには、既約なピタゴラス三角形をなす自然数を次々にかけていけばよい。このようにして、 $y$  が偶数であるようなあらゆるピタゴラス三角形を得ることができる。さらに、 $x$  と  $y$  を入れ替えたピタゴラス三角形を追加すれば、すべてのピタゴラス三角形が得られる。

このような性質を用いて、次節以降では、特別な場合のピタゴラス三角形を調べていく。

表 1 既約なピタゴラス三角形  
(はじめの 20 個)

k	l	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65
11	1	11	60	61
11	3	33	56	65
11	5	55	48	73
11	7	77	36	85
11	9	99	20	101
13	1	13	84	85
13	3	39	80	89
13	5	65	72	97

13	7	91	60	109
13	9	117	44	125
13	11	143	24	145

### 3-2. 辺の長さが連続する自然数であるピタゴラス三角形

表 1 に挙げた既約なピタゴラス三角形を見ると、(3, 4, 5) というペアは連続する 3 数からできている。このようなピタゴラス三角形はこれしかない。この事実は、簡単に証明することができる。

#### 定理 6

連続する 3 数を辺としてもつピタゴラス三角形は(3, 4, 5)のみである。

[証明]

ある自然数  $n$  ( $n \geq 2$ ) を用いて、連続する 3 数を  $n-1, n, n+1$  と表す。この 3 数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1$$

から、 $n^2 = 4n$ ,  $n(n-4) = 0$  となり、 $n \geq 2$  なので、 $n = 4$  である。

よって、この条件を満たすものは(3, 4, 5)のみである。

(Q.E.D.)

また、辺の長さが等差数列となるものを求めることも簡単である。

#### 定理 7

等差数列をなす 3 数が辺の長さであるピタゴラス三角形は(3, 4, 5)と相似である。

[証明]

定理6と同じように自然数  $k$  を公差として、3辺を  $n-k$ ,  $n$ ,  $n+k$  とする。

この3数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-k)^2 + n^2 = (n+k)^2$$

$$n^2 - 2kn + k^2 + n^2 = n^2 + 2kn + k^2$$

から、

$$n^2 = 4kn, \quad n(n-4k) = 0$$

となり、 $n \geq 2$  なので、 $n = 4k$  である。

この条件を満たすものは  $(3k, 4k, 5k)$  であり、これらはすべて  $(3, 4, 5)$  と相似なものである。

(Q.E.D.)

次に2辺の長さが連続する自然数で表せるようなピタゴラス三角形を考える。このとき、

- [1] 斜辺と他の1辺が連続するとき
  - [2] 直角をはさむ2辺が連続するとき
- の2通りが考えられる。

### 3-2-1. 斜辺と他の1辺の長さが連続する自然数あるピタゴラス三角形

このとき、 $x, z$  は奇数としたので、 $z-y=1$  を満たせばよい。

定理5より、 $\frac{k^2+l^2}{2} - \frac{k^2-l^2}{2} = 1$  を解い

て  $l=1$  とわかるので、 $(x, y, z)$  は

$$x = k, \quad y = \frac{k^2-1}{2}, \quad z = \frac{k^2+1}{2} \quad \dots(2)$$

となる。

式(2)によって、 $z-y=1$  であるすべてのピタゴラス三角形が求められ、最初のい

くつかを挙げると次のようになる。

$$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), \dots$$

ここで、この式(2)以外でこのような三角形を求める方法を2つ紹介する。

1つ目は、次のメスネーラ(Moessner)の恒等式を用いる方法である。

### 定理8(メスネーラの恒等式)

すべての自然数  $n$  に対して、

$$(10n-5)^2 + \{50n(n-1)+12\}^2 = \{50n(n-1)+13\}^2$$

が成り立つ。

これによって求められるものの例として、 $n$  に1から5を代入すると、 $(5, 12, 13)$ ,  $(15, 112, 113)$ ,  $(35, 612, 613)$ ,  $(45, 1012, 1013)$  などが挙げられる。

さらに、メスネーラの恒等式と(2)式を組み合わせると次の恒等式を導くことができる。

### 定理9

$k$  を奇数とする。すべての自然数  $n$  に対して、

$$(2kn-k)^2 + \left\{ 2k^2n(n-1) + \frac{k^2-1}{2} \right\}^2 = \left\{ 2k^2n(n-1) + \frac{k^2+1}{2} \right\}^2$$

が成り立つ。

もうひとつの方法は、まず  $k$  が奇数であることから、 $k = 2n + 1$  とおき、さらに  $s$  を整数とし、 $n = 10^s$  とおくと、(2)から

$$x = 2 \times 10^s + 1 = \overbrace{20 \cdots 01}^{s-1}$$

$$y = 2 \times 10^{2s} + 2 \times 10^s = \overbrace{20 \cdots 020 \cdots 0}^{s-1} \quad \overbrace{\phantom{20 \cdots 020 \cdots 0}}^s$$

$$z = 2 \times 10^{2s} + 2 \times 10^s + 1 = \overbrace{20 \cdots 020 \cdots 01}^{s-1} \quad \overbrace{\phantom{20 \cdots 020 \cdots 01}}^{s-1}$$

が得られる。

例えば、 $s = 1, 2, 3, 4$  を代入すると下表 2 を得る。

表 2  $s = 1, 2, 3, 4$  の場合

$x$	$y$	$z$
21	220	221
201	20200	20201
2001	2002000	2002001
20001	200020000	200020001

このように、機械的にいくらでもピタゴラス三角形を求めることができる。

### 3-2-2. 直角をはさむ2辺の長さが連続する自然数であるピタゴラス三角形

直角をはさむ2辺の長さが連続する自然数で表せるピタゴラス三角形について次の事実はすぐに証明される。

#### 補題Ⅲ

直角をはさむ2辺の長さが連続する自然数で表せるピタゴラス三角形は無数に存在する。

[証明]

ある2つの自然数  $x, z$  によって表されるピタゴラス三角形  $(x, x+1, z)$  があるとき、 $(3x+2z+1, 3x+2z+2, 4x+3z+2)$  もピタゴラス三角形になる。

実際に、

$$\begin{aligned} & (3x+2z+1)^2 + (3x+2z+2)^2 \\ &= 18x^2 + 24xz + 8z^2 + 18x + 12z + 5 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。ここで、 $(x, x+1, z)$  はピタゴラス三角形なので、

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = z^2$$

つまり、 $2x^2 + 2x + 1 = z^2$  である。

したがって①から、

$$\begin{aligned} & 18x^2 + 24xz + 8z^2 + 18x + 12z + 5 \\ &= (2x^2 + 2x + 1) + 16x^2 + 24xz \\ & \quad + 8z^2 + 16x + 12z + 4 \\ &= 16x^2 + 24xz + 9z^2 + 16x + 12z + 4 \\ &= (4x + 3z + 2)^2 \end{aligned}$$

となり、

$(3x+2z+1, 3x+2z+2, 4x+3z+2)$  がピタゴラス三角形であることがわかる。

直角をはさむ2辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形を、この式に当てはめることでできた三角形は、これもまた直角をはさむ2辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形である。この操作を繰り返すと、次々に、直角をはさむ2辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形が求められる。

(Q.E.D.)

このようにして求められるもので、最初の4つを挙げると次のようになる。 $(3, 4, 5)$ ,  $(20, 21, 29)$ ,  $(119, 120, 169)$ ,  $(696, 697, 985)$  である。

次に、上の方法によって直角をはさむ2辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形がすべて求められることを証明しよう。

### 定理 10

直角をはさむ2辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形は、必ず三角形の無限列  $(3,4,5), f(3,4,5), f(f(3,4,5)) \dots$  の中に現れる。ただし、 $f(x, x+1, z)$  はピタゴラス三角形

$$(3x+2z+1, 3x+2z+2, 4x+3z+2)$$

を表すと定める。

この定理 10 を証明するために、次の補題を証明する。

### 補題 IV

$x > 3$  のとき、 $(x, x+1, z)$  がピタゴラス三角形ならば、 $f(p, p+1, q) = (x, x+1, z)$  を満たす  $(p, p+1, q)$  もピタゴラス三角形であり、 $q < z$  である。さらに、

$$(p, p+1, q) = (3x-2z+1, 3x-2z+2, 3z-4x-2)$$

である。

[証明]

まず、 $(p, p+1, q)$   
 $= (3x-2z+1, 3x-2z+2, 3z-4x-2)$   
 とするとき、 $(p, p+1, q)$  が  
 $f(p, p+1, q) = (x, x+1, z) \dots \textcircled{1}$   
 を満たすことを確かめればよい。  
 $3p-2q+1$   
 $= 3(3x-2z+1)+2(3z-4x-2)+1 = x,$   
 $4p+3q+2$   
 $= 4(3x-2z+1)+3(3z-4x-2)+2 = z$   
 となることから、 $(p, p+1, q)$  は $\textcircled{1}$ を満たす。

次に、 $p > 0, 0 < q < z$  となることを示す。 $x > 3$  ゆえ、

$$x^2 > 3x = 2x + x > 2x + 3$$

である。ところが、 $(x, x+1, z)$  がピタゴラス三角形なので、 $x^2 + (x+1)^2 = z^2$  であるから、

$$4z^2 = 8x^2 + 4 - (2x+3)$$

$$= 9x^2 + 8x + 4 - x^2$$

$$< 9x^2 + 8x + 4 - (2x+3)$$

$$= 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$$

であるから、 $2z < 3x+1 \dots \textcircled{2}$ 、つまり、

$$p = 3x - 2z + 1 > 0$$

となる。ここで、 $x > 0$  に注意すると、不等式 $\textcircled{2}$ を弱めて、 $2z < 4x+2$  とすることができる。ゆえに、 $z < 2x+1$  となり、さらに、

$x^2 + (x+1)^2 = z^2$  かつ  $x > 0$  であるから、

$$9z^2 = 18x^2 + 18x + 9$$

$$> 16x^2 + 16x + 4 = (4x+2)^2$$

つまり、 $3z > 4x+2$  となる。したがって、

$$0 < 3z - 4x - 2 = q \text{ である。一方、}$$

$$q = 3z - 4x - 2 < 3z - 2z = z$$

ゆえ、 $0 < q < z$  となり、これで不等式は証明された。

最後に、 $(p, p+1, q)$  がピタゴラス三角形になることを証明する。

$$p^2 + (p+1)^2 = (3x-2z+1)^2 + (3x-2z+2)^2$$

$$= 18x^2 + 8z^2 - 24xz + 18x - 12z + 5$$

$$q^2 = (3z-4x-2)^2$$

$$= 16x^2 + 9z^2 - 24xz + 16x - 12z + 4$$

であるが、 $z^2 = 2x^2 + 2x + 1$  であるので、

$$16x^2 + 9z^2 - 24xz + 18x - 12z + 5$$

$$= 18x^2 + 8z^2 - 24xz + 18x - 12z + 5$$

となる。したがって、 $q^2 = p^2 + (p+1)^2$  が

成り立ち、補題は証明された。

(Q.E.D.)

ここで、ピタゴラス三角形  $(x, x+1, z)$  に対して、

$$f(p, p+1, q) = (x, x+1, z)$$

を満たすピタゴラス三角形  $(p, p+1, q)$  を対応させる操作を  $g$  として表すことにすると、 $g$  は  $f$  の逆操作になる。つまり、

$$g(x, x+1, z) = (p, p+1, q) \\ = (3x-2z+1, 3x-2z+2, 3z-4x-2)$$

となる。

[定理 10 の証明]

補題IVによって、小さい2辺が連続する自然数になっているピタゴラス三角形  $(x, x+1, z)$  ( $x > 3$ ) から、また新たに、条件を満たすピタゴラス三角形  $(p, p+1, q)$  ができる。

そこでさらに  $x > 3$  ならば、再び補題IVによって新たなピタゴラス三角形ができる。しかし、また同様に操作を続けたからといって、無限に新たな三角形ができることはない。この操作をするごとに斜辺の長さは短くなっていくからである。つまり必ず、ある整数  $n$  に対して、ピタゴラス三角形

$$(x_n, x_n+1, z_n) = g^n(x, x+1, z) \\ \text{(ただし、} x_n = 3 \text{)}$$

に行きつくだろう。すると、

$$x_n^2 + (x_n+1)^2 = z_n^2$$

から、 $z_n = 5$  でなければならない。したがって、ある整数  $n$  に対して、

$$g^n(x, x+1, z) = (3, 4, 5) \cdots \textcircled{1}$$

が成り立たなければならない。

ここで、 $x > 3$  である任意のピタゴラス

三角形  $(x, x+1, z)$  に対して、

$$fg(x, x+1, z) \\ = f(3x-2z+1, 3x+2z+2, 3z-4x-2) \\ = (x, x+1, z) \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。よって、

$$ffg(x, x+1, z) = (x, x+1, z)$$

であり、一般に  $k = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$f^k g^k(x, x+1, z) = (x, x+1, z) \cdots \textcircled{3}$$

が導かれる。したがって、①より、ある整数  $n$  に対して、 $(x, x+1, z) = f^n(3, 4, 5)$  となり、定理 10 は証明された。

(Q.E.D.)

このようにして、直角をはさむ2辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形は無限に存在し、それらは必ずある三角形の無限列の中に現れることが証明できたが、実際に2辺の長さが連続する大きな自然数で表されるピタゴラス三角形をこの方法で求めることは困難である。

そこで、別の方法を用いて条件を満たすピタゴラス三角形の一般式を求める。

先ほどと同様に

$$x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

が成り立てばよいのだが、この式から  $k, l$  を効率的に求めることができなかった。そこで定理 5 よりピタゴラス三角形を求め、その中から  $x, y$  が連続しているときの  $k, l$  について注目すると、 $(k, l)$  は  $(3, 1), (7, 3), (17, 7), \dots$  となった。

実際に  $x - y = \pm 1$  を満たす  $(x, y, z)$  と対応する  $(k, l)$  の組を表 3 に示す。

表 3

k	l		x	y	z
3	1		3	4	5
7	3		21	20	29
17	7		119	120	169
41	17		697	696	985
99	41		4059	4060	5741
239	99		23661	23660	33461
577	239		137903	137904	195025
1393	577		803761	803760	1136689
3363	1393		4684659	4684660	6625109
8119	3363		27304197	27304196	38613965
19601	8119		159140519	159140520	225058681
47321	19601		927538921	927538920	1311738121
114243	47321		5406093003	5406093004	7645370045
275807	114243		31509019101	31509019100	44560482149

表 3 から以下のことが類推できる。

$k$  の  $n$  番目の項を  $k_n$ 、 $l$  の  $n$  番目の項を  $l_n$  とすると、

(i)  $k$  の第  $n$  項は、 $l$  の第  $n+1$  項に一致する。

$$k_n = l_{n+1}$$

(ii)  $l$  の第  $n$  項は第  $n-1$  項の 2 倍したものと第  $n-2$  項の和となる。

$$l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2}$$

(iii)  $x-y$  の値は  $1, -1$  が交互で出てくる。

このうち、(ii) の漸化式

$l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2}$  つまり  $l_{n+2} = 2l_{n+1} + l_n$  を解く。

$$l_{n+2} = 2l_{n+1} + l_n, \quad l_{n+2} - 2l_{n+1} - l_n = 0$$

ゆえに、特性方程式は

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

となる。

いま、 $x^2 - 2x - 1 = 0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$  とおくと、

$$\alpha = 1 - \sqrt{2}, \quad \beta = 1 + \sqrt{2} \text{ となる。}$$

解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、もとの漸化式に代入すると、

$$l_{n+2} = (\alpha + \beta)l_{n+1} - \alpha\beta l_n$$

$$l_{n+2} - \beta l_{n+1} = \alpha(l_{n+1} - \beta l_n)$$

$$l_{n+2} - \alpha l_{n+1} = \beta(l_{n+1} - \alpha l_n)$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} l_{n+1} - \beta l_n &= \alpha^{n-1}(l_2 - \beta l_1) \\ &= \alpha^{n-1}(3 - \beta) \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{n+1} - \alpha l_n &= \beta^{n-1}(l_2 - \alpha l_1) \\ &= \beta^{n-1}(3 - \alpha) \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{3} - \textcircled{2}$  より、

$$(\beta - \alpha)l_n = \beta^{n-1}(3 - \alpha) - \alpha^{n-1}(3 - \beta)$$

ここで、 $\textcircled{1}$  から  $3 = \alpha + \beta - \alpha\beta$  とわかるので代入すると、

$$(\beta - \alpha)l_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n$$

となる。

$\alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$  より、

$$\{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\}l_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n$$

$$\text{したがって } l_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$$

$$\text{ゆえに、 } k_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \text{ と表せる。}$$

これを用いて、 $x, y, z$  を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
x_n = k_n l_n &= \left( \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right) \left( \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \right) = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta^n}{4} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n \beta^n \times \beta + \alpha^n \beta^n \times \alpha}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n \beta + (-1)^n \alpha}{4} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n (\alpha + \beta)}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n \times 2}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} + (-1)^n
\end{aligned}$$

ここで、 $l_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$  より、 $x = \frac{l_{2n+1} + (-1)^n}{2}$  となる。

同様に、

$$\begin{aligned}
y_n = \frac{k_n^2 - l_n^2}{2} &= \frac{\left( \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right)^2 - \left( \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \right)^2}{2} = \frac{\alpha^{2n+1} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n}}{4} - \frac{\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{4} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n}}{8} = \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2 - 1) + \beta^{2n}(\beta^2 - 1) + 2\alpha^n\beta^n(\alpha\beta - 1)}{8} \\
&= \frac{\alpha^{2n}(1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1) + \beta^{2n}(1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1) - 4(-1)^n}{8} = \frac{2\alpha^{2n}(1 - \sqrt{2}) + 2\beta^{2n}(1 + \sqrt{2}) - 4(-1)^n}{8} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - 2(-1)^n}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} - (-1)^n = \frac{l_{2n+1} - (-1)^n}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_n = \frac{k_n^2 + l_n^2}{2} &= \frac{\left( \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \right)^2}{2} = \frac{\alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} + \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{4} + \frac{\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{4} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} + \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n(\alpha\beta + 1)}{8} = \frac{\alpha^{2n}(1 + \alpha^2) + \beta^{2n}(1 + \beta^2)}{4} \\
&= \frac{\alpha^{2n}(1 + \alpha) + \beta^{2n}(1 + \beta)}{2} = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} = \frac{l_{2n} + l_{2n+1}}{2}.
\end{aligned}$$

以上より、

$(x_n, y_n, z_n)$

$$= \left( \frac{l_{2n+1} + (-1)^n}{2}, \frac{l_{2n+1} - (-1)^n}{2}, \frac{l_{2n} + l_{2n+1}}{2} \right)$$

となることがわかった。

そこで、以下の2つのことを確かめた。

【1】  $x$  と  $y$  の差が1である。

【2】 ピタゴラス方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} x_n^2 + y_n^2 - z_n^2 &= \left\{ \frac{l_{2n+1} + (-1)^n}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{l_{2n+1} - (-1)^n}{2} \right\}^2 - \left( \frac{l_{2n} + l_{2n+1}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - \alpha^{4n} - \beta^{4n} + 4}{16} + \frac{-2\alpha^{4n+1} - 2\alpha^{2n+1}\beta^{2n} - 2\alpha^{2n}\beta^{2n+1} - 2\beta^{4n+1}}{16} \\ &= \frac{\alpha^{4n}(\alpha^2 - 2\alpha - 1) + \beta^{4n}(\beta^2 - 2\beta - 1) + 4 - 2\alpha - 2\beta}{16} \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって、ピタゴラス方程式が成り立つことがわかった。よって、

$(x_n, y_n, z_n)$

$$= \left( \frac{l_{2n+1} + (-1)^n}{2}, \frac{l_{2n+1} - (-1)^n}{2}, \frac{l_{2n} + l_{2n+1}}{2} \right)$$

に対して、 $n$  に自然数を順次代入していくことにより、 $x, y$  が連続するピタゴラス三角形を求めることができる。

しかし、この式を用いることで  $x, y$  が連続しているピタゴラス三角形をすべて求められているかどうかは判別することができなかった。

そこで、最初の条件であった不定方程式

【1】と【2】が成り立つと、 $(x_n, y_n, z_n)$  は、 $x, y$  が連続するピタゴラス三角形であるといえる。

まず【1】については、上式より明らかである。

次に【2】について、実際にピタゴラス方程式を満たすか否かを計算してみると、

$$x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

についてさらに考察を行った。

$$kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

両辺を2倍して、

$$2kl - (k^2 - l^2) = \pm 2.$$

これを整理すると、

$$2kl - k^2 + l^2 = \pm 2, (l+k)^2 - 2k^2 = \pm 2.$$

両辺を  $-\frac{1}{2}$  倍して、



$$k^2 - \frac{(l+k)^2}{2} = \pm 1$$

ここで、 $k = p, l = 2q$ とおくと、

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1$$

これはフェルマー・ペル型不定方程式と (Fermat-Pell indeterminate equation) と呼ばれる特殊な不定方程式である。

**定理 11** (フェルマー・ペル型不定方程式)

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

ただし、 $d > 0$ ,  $d$  は平方数でない。

上の不定方程式において、 $\sqrt{d}$  の連分数展開を  $\sqrt{d} = [k_0, \overline{k_1, k_2 \dots k_m}]$  とし、その近

似分数を  $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$  とする。

$n$  が奇数で  $n \equiv -1 \pmod{m}$  のような

$p_n, q_n$  は  $x^2 - dy^2 = \pm 1$  の解であり、これで尽くされる。

このフェルマー・ペル型不定方程式を用いて、ピタゴラス三角形の斜辺以外の 2 辺が連続するピタゴラス三角形が上の式すべて求められることを示す。

いま、 $x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$  を変形し

て得た不定方程式

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1$$

は、 $d = 2$  の場合のフェルマー・ペル型不定方程式である。

したがって、 $q^2$  の係数である  $\sqrt{2}$  の近似分数を求めることで解を得ることができる。

まず  $\sqrt{2}$  を連分数展開すると、 $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$

より、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

となる、

ゆえに  $\sqrt{2}$  の近似分数は、深さを 1 とすると

$$\sqrt{2} \doteq 1$$

深さを 2 とすると

$$\sqrt{2} \doteq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

深さを 3 とすると

$$\sqrt{2} \doteq 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$$

というように求められる。これらの例を見てもわかるように、深さを深くするほど  $\sqrt{2}$  に近い値となっている。同様にしてさらに  $\sqrt{2}$  の近似分数を求めた結果が以下の表である。

p	1	3	7	17	41	99	239	...
q	1	2	5	12	29	70	169	...

$k = p, k + l = 2q$  であったので、 $k = p, l = 2q - p$  より、 $k, l$  の解は次のようになる。

k	1	3	7	17	41	99	239	...
l	1	1	3	7	17	41	99	...

$k > l > 0$  より、

$$(k, l) = (3, 1), (7, 3), (17, 7), \\ (41, 17), (99, 41), (239, 99), \dots$$

を得ることができた。

フェルマー・ペル型不定方程式より、これがすべての解である。しかし、この  $k, l$  の数列は  $\sqrt{2}$  の近似分数の最初のいくつかを計算した結果なので、規則性があることを確かめられていない。そこで  $\sqrt{2}$  の近似分数を分母と分子に分け、それぞれについての漸化式を算出しようと試みた。

そこで、まず  $\sqrt{2}$  の近似分数の分母・分子の漸化式を推測することによって  $\sqrt{2}$  の近似分数の一般項を算出するというパターンと、連分数展開から考えた漸化式によって算出するというパターンの2つの方法で考察を行った。

[I]  $\sqrt{2}$  の近似分数の分母・分子の漸化式を推測

分子の数列を  $\{a_n\}$ 、分母の数列を  $\{b_n\}$  とすると、それぞれの漸化式は次式のように推測される。

$$\{a_n\} = 1, 3, 7, 17, \dots, \quad \{b_n\} = 1, 2, 5, 12, \dots \quad \text{な}$$

ので、

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$$

分子についての特性方程式を解いて

$$t^2 = 2t + 1, \quad t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{2}. \quad \text{したがって、}$$

$$\{a_{n+2} - (1 + \sqrt{2})a_{n+1}\} \\ = (1 - \sqrt{2})\{a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n\}$$

$$a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n = c_n \quad \text{とおくと、}$$

$$c_{n+1} = (1 - \sqrt{2})c_n. \quad \text{また、}$$

$$c_1 = a_2 - (1 + \sqrt{2})a_1 = 3 - (1 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{より、} \quad c_n = (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

同様に、

$$\{a_{n+2} - (1 - \sqrt{2})a_{n+1}\} \\ = (1 + \sqrt{2})\{a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n\}$$

$$a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n = d_n \quad \text{とおくと、}$$

$$d_{n+1} = (1 + \sqrt{2})d_n. \quad \text{また、}$$

$$d_1 = a_2 - (1 - \sqrt{2})a_1 = 3 - (1 - \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{より、 } d_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1}$$

整理すると、

$$a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n = (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} \dots \textcircled{2}$$

①-②すると、

$$\begin{aligned} a_n \{ (1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2}) \} \\ = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2}a_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$a_n = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$a_n = \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$\text{同じく、 } b_n = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^n$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\left( \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1}}{\frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^n} \\ &= \frac{2 \left\{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right\}}{\sqrt{2} \left\{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right\}} \end{aligned}$$

このようにして、 $\sqrt{2}$  の近似分数の一般項を算出することができた。ここで留意しておきたいことは、この一般項が推測された漸化式によって求めた一般項なので、この一般項もまた推測の範囲を超えないとい

うことである。

そしてこの一般項について極限をとると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{2 \left\{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right\}}{\sqrt{2} \left\{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right\}}$$

両辺を  $(1 + \sqrt{2})^n$  で割って、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left\{ 1 + \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n \right\}}{\sqrt{2} \left\{ 1 + \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n \right\}} = \sqrt{2}$$

となり、たしかに  $\sqrt{2}$  の近似分数であることがわかった。

【II】 連分数展開から考えた漸化式

$\sqrt{2}$  の近似分数は、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \end{aligned}$$

と変形できるので、 $\sqrt{2}$  の近似分数の数列

を  $\{A_n\}$  とすると、その漸化式は、

$$A_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + A_n} = \frac{A_n + 2}{A_n + 1}$$

となる。ただし、 $A_1 = 1$ 、 $A_2 = \frac{3}{2}$  とする。

特性方程式  $t = \frac{t+2}{t+1}$  を解いて、

$t = \pm\sqrt{2}$  であるから、

$$A_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})(A_n + \sqrt{2})}{A_n + 1} \dots \textcircled{1}$$

$$A_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(1 - \sqrt{2})(A_n - \sqrt{2})}{A_n + 1} \dots \textcircled{2}$$

①÷②より、

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1} + \sqrt{2}}{A_{n+1} - \sqrt{2}} &= \frac{(1 + \sqrt{2})(A_n + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(A_n - \sqrt{2})} \\ &= -(3 + 2\sqrt{2}) \frac{A_n + \sqrt{2}}{A_n - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

ここで、 $B_n = \frac{A_n + \sqrt{2}}{A_n - \sqrt{2}}$  とおくと、

$$B_{n+1} = -(3 + 2\sqrt{2})B_n.$$

また、 $B_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -(3 + 2\sqrt{2})$  より、

$$\begin{aligned} B_n &= -(3 + 2\sqrt{2}) \cdot (-1)^{n-1} \cdot (3 + 2\sqrt{2})^{n-1} \\ &= (-1)^n \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$B_n = \frac{A_n + \sqrt{2}}{A_n - \sqrt{2}} = (-1)^n \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n.$$

$$A_n + \sqrt{2} = (-1)^n \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n \cdot (A_n - \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} A_n \left\{ 1 - (-1)^n \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n \right\} \\ = -\sqrt{2} \cdot (-1)^n \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$A_n = \frac{(-1)^n (3 + 2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n (3 + 2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2}.$$

このようにして、もう1つの $\sqrt{2}$ の近似分数を求めることができた。また[I]のときと同様に極限をとってみると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (3 + 2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n (3 + 2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2}.$$

この式を $(3 + 2\sqrt{2})^n$ で割ると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^n}}{(-1)^n - \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^n}} \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

となって、たしかに $\sqrt{2}$ の近似分数であることが確かめられた。

ここまでの結果を整理すると $\sqrt{2}$ の分母分子の数列を類推して得られた一般項は、

分子の数列を $\{\alpha_n\}$ 、分母の数列を $\{\beta_n\}$ 、

$\sqrt{2}$ の数列を $\{\gamma_n\}$ とした場合、

$$\alpha_n = \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$\beta_n = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^n$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{2 \left\{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right\}}{\sqrt{2} \left\{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right\}}.$$

また、連分数の漸化式から求めた一般項を $\{\delta_n\}$ とすると、

$$\delta_n = \frac{(-1)^n (3 + 2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n (3 + 2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2}$$

である。

ここから、得られた2つの $\sqrt{2}$ の一般項による数列が一致していることを証明する。

[証明]

$\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の値が等しいことを確かめる。

$$\begin{aligned} \gamma_n \div \delta_n &= \frac{2\left\{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}} \div \frac{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{\left\{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right\}\left\{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - 1\right\}}{\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}\left\{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + 1\right\}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n} \\ &= \frac{(-1)^n(7+5\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n + (-1)^n(-1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{(-1)^n(7+5\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n - (-1)^n(-1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n} \\ &= \frac{(-1)^n\left\{(7+5\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}}{(-1)^n\left\{(7+5\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}} = 1. \end{aligned}$$

よって、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の値が等しいことを確かめられた。

しかしこれでは、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ が一致しているかどうかはわからない。なぜなら、 $\{\delta_n\}$ は既約分数になるまで計算しているが、 $\{\gamma_n\}$ はもともと分母と分子の数列を合わせたものなので既約とは限らない。

例えば、 $\alpha_n = 6, \beta_n = 4, \delta_n = \frac{3}{2}$  とす

る。このとき $\gamma_n = \frac{3}{2}$ なので、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の値は等しいが、 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ によって求めた分母、分子を組み合わせたものである

$\frac{6}{4}$ とでは一致していない。そこで、

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ が既約であることを確認し、

$\frac{\{\alpha_n\}}{\{\beta_n\}}$ が既約分数であることを示す。

ここで、

$$\alpha_n - \beta_n - \beta_{n-1} = 0$$

を確かめた。与式は、

$$\alpha_n - \beta_n = \beta_{n-1} \cdots \textcircled{1}$$

に変形できる。

ここから、背理法により証明する。

仮に、 $\alpha_n$ と $\beta_n$ が公約数 $k$ をもつとする。

①より $\beta_{n-1}$ も約数 $k$ を持つ。漸化式

$$\beta_{n+2} = 2\beta_{n+1} + \beta_n$$

から、 $\beta_{n-2}$  も約数  $k$  をもっているとわかる。

さらにこの作業を続けて行くと

$\beta_{n-3}, \beta_{n-4} \cdots, \beta_1$  も約数  $k$  をもつ。

しかし、 $\beta_n$  の数列  $\{\beta_n\} = 1, 2, 5, 12, \dots$  から明らかに矛盾している。ゆえに最初の仮定が間違っているので  $\alpha_n$  と  $\beta_n$  は既約である。したがって、 $\frac{\{\alpha_n\}}{\{\beta_n\}}$  が既約分数である

ことを示すことができたので、2つの数列

$\{\gamma_n\}, \{\delta_n\}$  は一致している。

ゆえに  $\sqrt{2}$  の近似分数の分母と分子の数列が  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$  であることがわかり、 $p, q$  の

解が求められる。したがって、今までの類推がすべて正しかったとわかる。

(Q.E.D.)

### 3-3. 辺が3または5で割り切れるピタゴラス三角形

3-1節で述べたように、すべてのピタゴラス三角形では直角をはさむ2辺のうち少なくとも一つは4で割りきれなくてはならない。

さらに、次の事実が成り立つ。

#### 定理 12

任意のピタゴラス三角形について、直角をはさむ2辺のうち少なくとも一つは3で割り切れなければならない。

[証明]

この定理を証明するために、直角をはさむ2辺  $x, y$  のどちらも3で割り切れないあるピタゴラス三角形  $(x, y, z)$  が存在すると

仮定する。このとき、

$$x = 3k \pm 1, \quad y = 3l \pm 1$$

( $k, l$  は整数) とおく。

すると、ピタゴラスの定理において、 $x^2 + y^2 = 3(3k^2 + 3l^2 \pm 2k \pm 2l) + 2 \cdots \textcircled{1}$  となる。ところが、この式①の右辺は平方数にはなりえない。まず、この数は3では割り切れないので、3の倍数の平方でないことは明らかである。また、3で割り切れない数  $3t \pm 1$  ( $t$  は整数) の平方は

$$(3t \pm 1)^2 = 3(3t^2 \pm 2t) + 1$$

であり、3で割ると1余る。しかし、 $x^2 + y^2$  は3で割ると2余る。したがって、3で割り切れない数の平方にもなり得ない。

こうして、直角をはさむ2辺のいずれもが、3で割り切れないという仮定は矛盾を引き起こす。

ゆえに、 $x, y$  のうち一方は3で割り切れないといけな

(Q.E.D.)

実例を見ると、 $(5, 12, 13)$  のように3で割り切れる数と、4で割り切れる数が一致することもあり、また、 $(3, 4, 5)$  のように3で割り切れる数と、4で割り切れる数が一致しないこともある。

すべてのピタゴラス三角形について、直角をはさむ2辺の少なくとも一方が  $n$  で割り切れるとき、このような自然数  $n$  は、1, 2, 3, 4に限られることがすぐわかる。なぜなら、ピタゴラス三角形  $(3, 4, 5)$  をとると小さい2辺のどちらをとっても4より大きい自然数では割り切れないからである。

また、ピタゴラス三角形の3辺については、次の事実がある。

### 定理 13

任意のピタゴラス三角形について、3辺のうち少なくとも一つは5で割り切れなければならない。

[証明]

この定理を証明するために、数 $n$ は5で割り切れないと仮定する。すると、整数 $k$ を用いて、 $n$ は  $n = 5k \pm 1$  あるいは  $n = 5k \pm 2$  の形をしている。

$n = 5k \pm 1$  の場合には

$$n^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1,$$

$n = 5k \pm 2$  の場合には

$$n^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$$

が成り立つ。

以上から、5で割り切れない数の平方は、5で割ると1または4余ることがわかる。

もし、ピタゴラス三角形 $(x, y, z)$ の $x, y$ がどちらも5で割り切れないとすると、上の式から $x^2, y^2$ はいずれも1または4余るため、その結果 $x^2 + y^2$ を5で割った余りは2, 3, 0のどれかになる。ここで、上で示したように、 $z^2$ は5で割って2または3で余ることはない。したがって、 $z^2$ は5で割ると0あまるという最後の条件のみに当てはまることがわかる。つまり、 $z^2$ が5で割り切れるので、 $z$ も5で割り切れる。

(Q.E.D.)

よって、直角をはさむ2辺がいずれも5で割り切れない場合は、斜辺が5で割り切れないといけない。

また、既約なピタゴラス三角形では明らかに5で割り切れる辺はただ1つしかない。

次の三角形

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (21, 20, 29)

を見てわかるように、5で割ることのできる辺は、直角をはさむ2辺のうち偶数のものであったり、奇数のものであったり、または斜辺であったりする。

以上からわかるように、すべてのピタゴラス三角形において、3辺のうち1つが $n$ で割り切れるとき、このような自然数 $n$ は1, 2, 3, 4, 5のいずれかに限られる。

### 3-4. ピタゴラス三角形の辺の値

ここで、どのような自然数 $n$ を与えたら、直角をはさむ2辺のうち、一方が $n$ に等しいピタゴラス三角形を作ることができるのだろうか。

これに対して次の定理を証明しよう。

### 定理 14

直角をはさむ2辺のうち小さい方が $n$ に等しいピタゴラス三角形が存在するための必要十分条件は、 $n$ が2より大きい整数となることである。

[証明]

この定理を証明するために、まず次のことに注意しよう。つまり、ピタゴラス三角形 $(a, b, c)$ において

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$$

が成り立ち、また $c > b$ なので、 $b \geq 1$ ,  $c \geq 2$ である。したがって、 $c-b \geq 1$ ,  $c+b \geq 3$ であるため、 $a^2 \geq 3$ となり、 $a=1$ とはならない。

また、 $a=2$ ともならない。なぜなら、 $a=2$ とすると、

$$4 = (c+b)(c-b)$$

が成立しなくてはならず、 $c-b \geq 1$ ,  $c+b \geq 3$  であるため、 $c-b=1$ ,  $c+b=4$  となる。しかし、この式から  $2c=5$  が導かれ、 $c$  が自然数でなくなってしまう。したがって、 $a=2$  ともなり得ない。

このように、ピタゴラス三角形の小さい2辺はどちらも2より大きいことがわかった。

さて、ここで逆に、 $n$  が2より大きい奇数だとする。すると、

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

が成り立ち、また  $\frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$  はどちらも自然数になるため、ピタゴラス三角形

$$\left(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}\right) \dots \textcircled{1}$$

ができる。

同様に、 $n$  が2より大きい偶数だとすると、

$$n^2 + \left(\frac{n^2}{4}-1\right)^2 = \left(\frac{n^2}{4}+1\right)^2$$

が成り立ち、ピタゴラス三角形

$$\left(n, \frac{n^2}{4}-1, \frac{n^2}{4}+1\right) \dots \textcircled{2}$$

ができる。

(Q.E.D.)

この2つの式①, ②を利用し、直角をはさむ辺が3, 4, ..., 10のピタゴラス三角形の例は

(3, 4, 5), (4, 3, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10),

(7, 24, 25), (8, 6, 10), (9, 40, 41),

(10, 24, 26)

などである。

しかし、 $t > 2$  を満たすすべての整数  $t$  に対して、直角をはさむ辺が  $t$  となる既約なピタゴラス三角形がいつも存在するわけではない。例えば、 $t=6$  のとき、そのピタゴラス三角形は既約にはならない。なぜなら、定理3から  $2mn=6$  であるが、 $mn=3$  となるため、 $m, n$  の一方が偶数でなければならないという事実に反するので、 $t=6$  となる既約なピタゴラス三角形は存在しない。

次に、斜辺が自然数  $n$  と一致するピタゴラス三角形は存在するのだろうか。この問題を解くの困難なので、ここでは証明なしで次の定理を紹介する。

### 定理 15

$n$  を斜辺とするピタゴラス三角形が存在するための必要十分条件は、 $n$  が  $4k+1$  という形の素因数を少なくとも1つ持つことである。

したがって、 $n \leq 50$  に対して、以下の  $n$  を斜辺とするピタゴラス三角形が存在する。

$n = 5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 26, 29, 30,$   
 $34, 35, 37, 41, 39, 40, 45, 50$

つまり、これらの数は素因数5, 13, 17, 29, 37, 41を持つ。

斜辺の長さが連続する2つの自然数  $n$ ,  $n+1$  で表される2つのピタゴラス三角形の組合せが無数にあることは、次の恒等式からすぐに導かれる。



$$(25 + 65k)^2 = (15 + 39k)^2 + (20 + 52k)^2$$

$$(26 + 65k)^2 = (10 + 25k)^2 + (24 + 60k)^2$$

(ただし、 $k = 1, 2, 3, \dots$ )

また、次の事実も成り立つことがわかっている。

### 定理 16

任意の自然数  $m$  に対して、斜辺の長さが  $m$  個の連続する自然数

$$n, n+1, n+2, \dots, n+m-1$$

( $n$  は適当な自然数) で表される  $m$  個のピタゴラス三角形が存在する。

例えば、 $m = 3$  に対しては、 $n = 39$  とすることができ、ピタゴラス三角形

$$(15, 36, 39), (24, 32, 40), (9, 40, 41)$$

が求められる。

また、 $m = 4$  に対しては、 $n = 50$  とすることができ、ピタゴラス三角形

$$(30, 40, 50), (24, 45, 51),$$

$$(20, 48, 52), (28, 45, 53)$$

が求められる。

### 3-5. 共通する辺をもつピタゴラス三角形

ある自然数  $a$  を、直角をはさむ 1 辺とするピタゴラス三角形は有限個しか存在しない。なぜなら、ピタゴラス三角形  $(a, b, c)$  において、 $a^2 = (c+b)(c-b)$  から  $b+c$  が  $a^2$  の約数になるためには、 $b < a^2$ 、 $c < a^2$  とならないといけなくて、このような  $b, c$  の組み合わせは有限個しかないからである。

簡単に証明できるように、次のことが成り立つ。

### 定理 17

任意の自然数  $n$  に対して、直角をはさむ辺を共有している少なくとも  $n$  個のピタゴラス三角形が存在する。

[証明]

これを示すため、 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  として、

$$b_k = 2^k(2^{2n-2k} - 1), c_k = 2^k(2^{2n-2k} + 1)$$

とおく。このとき、 $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  は  $2^n$  で割るといつも異なった余り  $2^k$  が生じるので、明らかにすべて違っている。

$$\text{さらに、} c_k^2 - b_k^2 = (2^{n+1})^2 \text{ が成り立つ}$$

ので、ここで  $a = 2^{n+1}$  とおくとピタゴラス方程式が成り立ち、 $n$  個のピタゴラス三角形  $(a, b_k, c_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) を得るが、これらはみな共通辺  $a$  を持ち、斜辺はすべて異なっているので、これらの中に同じピタゴラス三角形は存在しない。

(Q.E.D.)

例えば、 $n = 2$  のときには共通辺 8 をもった 2 つのピタゴラス三角形

$$(8, 15, 17), (8, 6, 10)$$

が、 $n = 3$  のときには、共通辺 16 をもった 3 つのピタゴラス三角形

$$(16, 63, 65), (16, 30, 34), (16, 12, 20)$$

が求められる。

また、少し複雑なので証明などは加えないが、次が成り立つことも知られている。

### 定理 18

任意の自然数  $n$  に対して、直角をはさむ辺を共有する、少なくとも  $n$  個の既約なピタゴラス三角形が存在する。

例えば、 $n = 2$  のときには、三角形

$$(5, 12, 13), (35, 12, 37)$$

が求められ、 $n = 4$  のときには、三角形

$$(105, 88, 137), (105, 208, 233),$$

$$(105, 608, 617), (105, 5512, 5513)$$

が求められる。

共通な斜辺  $c$  を持つピタゴラス三角形は有限個しかない。これは簡単に示すことができる。なぜなら、直角三角形  $(a, b, c)$  において、 $a < c$ 、 $b < c$  なので、与えられた  $c$  に対する  $a, b$  の組み合わせが有限だからである。それと同時に次のことも成り立つ。

### 定理 19

任意の自然数  $n$  に対して、共通の斜辺を持つ少なくとも  $n$  個の異なるピタゴラス三角形が存在する。

[証明]

まず、自然数  $n$  に対して、  
 $c = (3^2 + 1)(4^2 + 1)(5^2 + 1) \cdots \{(n^2 + 2) + 1\}$   
 とおく。このとき、 $k = 3, 4, \dots, n + 2$  とすると、  
 $\frac{c}{k^2 + 1}$  はいつも自然数となる。

したがって、同様に  $k = 3, 4, \dots, n + 2$  としたとき、

$$a_k = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} c, \quad b_k = \frac{2kc}{k^2 + 1}$$

はどちらも自然数になる。

よって、恒等式

$$a_k = \left( \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} c \right)^2 + \left( \frac{2kc}{k^2 + 1} \right)^2$$

から  $c^2 = a_k^2 - b_k^2$  が成り立ち、 $(a_k, b_k, c)$

がピタゴラス三角形であることがわかる。

ここで、 $k = 3, 4, \dots, n + 2$  に対して  $a_k$  は

$$a_k = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} c, = c - \frac{2kc}{k^2 + 1}$$

と変形することができ、 $k$  が増えれば  $a_k$  も増えていることがわかる。したがってピタゴラス三角形  $(a_k, b_k, c)$  が共通の斜辺をもつ  $n$  個の異なる三角形が得られることがわかった。

(Q.E.D.)

### 3-6. 等しい周を持つピタゴラス三角形

まず次の定理を紹介する。

### 定理 20

任意に自然数  $n$  に対して、共通の周を持つ  $n$  個のピタゴラス三角形が存在する。

[証明]

この定理は容易に示される。

まず、 $n$  個の異なる既約なピタゴラス三角形  $(a_k, b_k, c_k)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) をとり、

$$a_k + b_k + c_k = s_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

とおく。さらに、 $s = s_1 s_2 \cdots s_n$ ,

$$a'_k = \frac{a_k s}{s_k}, \quad b'_k = \frac{b_k s}{s_k}, \quad c'_k = \frac{c_k s}{s_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

とおく。このとき、任意の  $k$  に対して、

$$a'_k + b'_k + c'_k = s \text{ となり、このうち、どのピ}$$

ピタゴラス三角形をとっても相似になる組み合わせはない。

よって、もとの三角形 $(a_k, b_k, c_k)$ によって、共通の斜辺を持つ $n$ 個のピタゴラス三角形ができた。

(Q.E.D.)

例を挙げると、 $n = 3$ として、もとのピタゴラス三角形を

$$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17)$$

とすると

$$s_1 = 3 + 4 + 5 = 12$$

$$s_2 = 5 + 12 + 13 = 30$$

$$s_3 = 8 + 15 + 17 = 40$$

$$s = 12 \times 30 \times 40 = 1440$$

したがって、

$$a'_1 = \frac{3 \times 1440}{12} = 360$$

$$b'_1 = \frac{4 \times 1440}{12} = 480$$

$$c'_1 = \frac{5 \times 1440}{12} = 600$$

となる。つまり、三角形 $(a'_1, b'_1, c'_1)$ は $(360, 480, 600)$ である。同様に

$$(a'_2, b'_2, c'_2) = (240, 576, 624)$$

$$(a'_3, b'_3, c'_3) = (288, 540, 612)$$

となり、これらの周は1440と等しくなる。

上の証明では $s$ の値を $s_1, s_2, \dots, s_n$ の積としたが、これは $s_1, s_2, \dots, s_n$ の公倍数をとっても良い。そのようにすると、先程使った既約なピタゴラス三角形 $(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17)$ を用いて周の長さが120に等しい3つのピタゴラス三角形ができる。これは先ほどの三角形よりも簡単なものになっている。

ちなみに周の長さが平方数である既約な

ピタゴラス三角形も存在する。その中でも最も小さい三角形が $(16, 63, 65)$ である。この三角形では周の長さが144のため、 $12^2$ に等しくなっている。

### 3-7. 等しい面積を持つピタゴラス三角形

前節は三角形の周に注目したが、次は面積について注目しよう。

既約なピタゴラス三角形の面積に注意してみると、 $(21, 20, 29)$ と $(35, 12, 37)$ の面積が210と等しく、この1組のみである。実際これと同じ面積をもち、しかも斜辺の異なる既約なピタゴラス三角形で、これより小さなものは存在しない。そこで、斜辺が37以下の既約でないピタゴラス三角形を挙げてみると、次のようになる。

表4 斜辺が37以下の既約でないピタゴラス三角形

x	y	z	面積
6	8	10	24
9	12	15	54
12	16	20	96
15	20	25	150
18	24	30	216
21	28	35	296
10	24	26	120
30	16	34	240

この表4を見てもわかるように、斜辺が37以下の直角三角形の中で、同じ面積をもつものの組み合わせは $(21, 20, 29)$ と $(35, 12, 37)$ 以外にない。つまり、異なった斜辺で、同じ面積を持つ既約なピタゴラス三角形の組で最小なものは $(21, 20, 29), (35, 12, 37)$

の組である。

### 定理 21

斜辺が同じで、面積も等しいピタゴラス三角形は一致する。

[証明]

まず、このようなピタゴラス三角形を  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$  とし、 $a_1 \geq a_2$ ,  $b_1 \geq b_2$  とする。

すると、面積が等しいことと、斜辺が等しいことから、 $a_1 b_1 = a_2 b_2$ ,  $c_1 = c_2$  となる。加えて、ピタゴラス方程式が成り立つので、

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$$

である。これらの式から

$$a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2 = a_2^2 - 2a_2 b_2 + b_2^2$$

より、 $(a_1 - b_1)^2 = (a_2 - b_2)^2 \dots \textcircled{1}$

$$a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2 = a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_2^2$$

より、 $(a_1 + b_1)^2 = (a_2 + b_2)^2 \dots \textcircled{2}$  となる。

したがって、 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  から、連立方程式

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \\ a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

を解くと、 $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$  が導かれ、斜辺が同じで、面積も等しい三角形は一致することが証明された。

(Q.E.D.)

ここで、面積の等しいピタゴラス三角形の他の例をいくつか挙げよう。

ピタゴラス三角形(15, 112, 113)の面積は 840 に等しい。またこれは、三角形(21, 20, 29), (35, 12, 37)の面積である 210 の 4 倍に

等しいため、三角形(21, 20, 29), (35, 12, 37)の各辺を 2 倍した三角形(42, 40, 58), (70, 24, 74)の面積に等しいことがわかる。つまり、3つの三角形

(15, 112, 113), (42, 40, 58), (70, 24, 74)

の面積が等しいということである。

しかし、これらがみな既約なピタゴラス三角形というわけではない。3つの既約なピタゴラス三角形に共通な最小の面積は 13123110 であり、その三角形は

(4485, 5852, 7373), (19019, 1380, 19069), (3509, 8580, 9109)

である。

次に、周のときと同様に、条件を満たす任意個のピタゴラス三角形が存在するかどうかである。この問題は次のフェルマーの定理によって証明される。

### 定理 22

任意の自然数  $n$  に対して、異なった斜辺で等しい面積をもつピタゴラス三角形が  $n$  個存在する。

定理 22 は次の補題 V を用いて、帰納法で証明される。

### 補題 V

異なった斜辺で等しい面積をもつ  $n$  個 ( $n \geq 1$ ) のピタゴラス三角形が存在し、そのうち 1 つが奇数の斜辺をもつと仮定すれば、やはり異なった斜辺で等しい面積をもつ  $(n+1)$  個のピタゴラス三角形が存在し、そのうち 1 つは奇数の斜辺をもつ。

[証明]

$n \geq 1$  をある自然数とし、異なった斜辺で同じ面積を持つ  $n$  個のピタゴラス三角形  $(a_k, b_k, c_k)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) を考える。また、 $a_k < b_k < c_k$  であり、 $c_1^2$  は奇数であるとする。

$k = 1, 2, \dots, n$  に対して、

$$\begin{aligned} a'_k &= 2(b_1^2 - a_1^2)c_1 a_k \\ b'_k &= 2(b_1^2 - a_1^2)c_1 b_k \\ c'_k &= 2(b_1^2 - a_1^2)c_1 c_k \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおき、さらに、

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= (b_1^2 - a_1^2)^2 \\ b'_{n+1} &= 4a_1 b_1 c_1^2 \\ c'_{n+1} &= 4a_1^2 b_1^2 + c_1^4 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

とおく。

すると、三角形  $(a'_k, b'_k, c'_k)$  はピタゴラス三角形になる。なぜなら、これらの三角形の辺は自然数で表され、しかもピタゴラス三角形  $(a_k, b_k, c_k)$  に相似だからである。

また三角形  $(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$  もピタゴラス三角形である。これは、 $\textcircled{2}$  とピタゴラス方程式  $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$  から導かれる。

さて、これらの三角形  $(a'_k, b'_k, c'_k)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) が必要な条件を満たしていること示そう。

三角形  $(a_k, b_k, c_k)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) に共通な面積を  $\Delta$  とすると、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して、

$$a_k b_k = 2\Delta$$

が成り立つ。一方、三角形  $(a'_k, b'_k, c'_k)$  の面積は、 $\textcircled{1}$  から

$$\frac{1}{2} a'_k b'_k = 2(b_1^2 - a_1^2)^2 c_1^2 a_k b_k$$

$$= 4(b_1^2 - a_1^2)^2 c_1^2 \Delta$$

となる。また、 $(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$  の面積は  $\textcircled{2}$  から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a'_{n+1} b'_{n+1} &= 2(b_1^2 - a_1^2)^2 a_1 b_1 c_1^2 \\ &= 4(b_1^2 - a_1^2)^2 c_1^2 \Delta \end{aligned}$$

と、互いに面積は等しくなる。したがって、三角形はすべて同じ面積を持ち、さらに  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して、三角形

$(a_k, b_k, c_k)$  の斜辺はすべて異なっているから、三角形  $(a'_k, b'_k, c'_k)$  の斜辺もみな異なっている。それらの斜辺はどれも  $\textcircled{1}$  からわかるように偶数である。

一方、 $c'_{n+1}$  は  $\textcircled{2}$  によって、奇数で表されている。だから、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して斜辺  $c'_k$  はみな異なっている。

これで補題は証明された。

(Q.E.D.)

この補題 V に対して、最も簡単な  $n$  の値として  $n = 1$  を考えよう。補題 V が適応できる最も小さいピタゴラス三角形は、辺の長さが

$$a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = 5$$

のピタゴラス三角形である。このピタゴラス三角形から始めて、同じ面積を持つ 2 つのピタゴラス三角形  $(a'_1, b'_1, c'_1)$ ,  $(a'_2, b'_2, c'_2)$  が求められる。

$$2(b_1^2 - a_1^2)c_1 = 2 \times 7 \times 5 = 70$$

より、 $\textcircled{1}$  から

$$\begin{aligned} a'_1 &= 70 \times 3 = 210 \\ b'_1 &= 70 \times 4 = 280 \\ c'_1 &= 70 \times 5 = 350 \end{aligned}$$

となり、②から

$$a'_2 = (4^2 - 3^2)^2 = 49$$

$$b'_2 = 4 \times 3 \times 4 \times 5^2 = 1200$$

$$c'_2 = 4 \times 3^2 \times 4^2 + 5^2 = 1201$$

となる。

これら2つのピタゴラス三角形は、異なった斜辺をもち、そのうち一方の辺が奇数となっている、面積が29400に等しいピタゴラス三角形である。

また、こうして求められた2つの三角形に同じ操作を行えば、新たに3つの同じ面積を持つピタゴラス三角形ができる。このようにしてできたピタゴラス三角形の各辺は10桁以上になる。

以前にも別の方法で3つの同じ面積を持つピタゴラス三角形を求めた。このときの三角形は、上とは違い各辺が3桁程度だった。同様にしてもとめられた、同じ面積をもつ簡単なピタゴラス三角形の例で、4つの組み合わせと、5つのものを挙げよう。

4つのピタゴラス三角形の組み合わせは、

$$(518, 1320, 1418), (280, 2442, 2458)$$

$$(231, 2961, 2969), (111, 6160, 6161)$$

であり、これらの三角形の面積は341880に等しく、三角形の各辺は4桁程度で表されている。

5つのピタゴラス三角形の組み合わせは

$$(2805, 52416, 52491),$$

$$(3168, 46410, 46518),$$

$$(5236, 28080, 28564),$$

$$(6006, 24480, 25206),$$

$$(8580, 17136, 19164)$$

であり、これらの三角形もまた、面積が73513440に等しく、各辺は5桁程度になっている。

面積が $\Delta$ に等しいピタゴラス三角形は明

らかに有限個である。なぜなら、このような三角形の直角をはさむ辺は $2\Delta$ の約数だからである。しかし、例えば面積が6に等しく、有理数辺をもつ異なった直角三角形は無数に存在する。この事実を示そう。

まず、補題Vから、異なった斜辺をもち、面積が同じ $\Delta$ であるピタゴラス三角形が $n$ 個( $n \geq 1$ )存在するとして、そのうち1つの三角形の斜辺が奇数であると考え。このとき、異なった斜辺をもち、面積が同じ $\Delta d^2$  ( $d$ は整数)であるピタゴラス三角形は $(n+1)$ 個存在し、そのうち1つの三角形の斜辺が奇数である。

ピタゴラス三角形(3, 4, 5)を考えよう。この三角形に補題Vを $(n-1)$ 回適用すると、異なる斜辺を持ち、面積が $6m^2$  ( $m$ は①, ②から求められる)と等しい $n$ 個のピタゴラス三角形が求められる。このときできたピタゴラス三角形の各辺を $m$ で割ると、その三角形の面積は6になり、また各辺は有理数になる。つまり、各辺が有理数で面積が6である異なったピタゴラス三角形が求められたということである。

また、 $n$ は任意の自然数であるから、上の方法でできた三角形は無数にあるとわかる。

### 3-9. 平方数を辺とするピタゴラス三角形

この節ではまず、斜辺を平方数とするピタゴラス三角形について、次を示そう。

#### 定理 23

斜辺を平方数とするピタゴラス三角形は無数にある。

[証明]

まず、 $n < p < m$  であるピタゴラス三角形  $(m, n, p)$  を適当にとる。すると、2 数  $m, n$  は一方が奇数、他方が偶数であり、この 2 数は互いに素である。ここで、定理 3 から新たなピタゴラス三角形  $(x, y, z)$  を作ることができる。この  $x, y, z$  は公式

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

によって求められる。このとき斜辺  $z$  は

$$z = m^2 + n^2 = p^2$$

となり、自然数の平方数になっている。同様に、 $x, y$  は

$$x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

となる。これを繰り返して、斜辺を平方数とするピタゴラス三角形を無数に作ることができる。

(Q.E.D.)

例えば、既約なピタゴラス三角形  $(3, 4, 5)$  からは、既約な三角形  $(7, 24, 25)$  が求められる。このとき斜辺は  $5^2$  になっている。また、既約なピタゴラス三角形  $(5, 12, 13)$  からは、既約な三角形  $(119, 120, 169)$  が求められ、斜辺は  $13^2$  になっている。ちなみに、斜辺が立方数になる三角形も存在し、その例には  $(117, 44, 125)$  があり、斜辺は  $5^3$  である。

次に、直角をはさむ辺に注目しよう。

#### 定理 24

直角をはさむ一方の辺が平方数であるような既約なピタゴラス三角形は無数に存在する。

[証明]

まず、既約なピタゴラス三角形  $(q, n, m)$  で  $n$  が偶数、 $q, m$  が奇数であり、 $m, n$  が互いに素なものを考える。

斜辺のときと同様に、定理 3 を使って、直角をはさむ辺のうち奇数の方である  $x$  は

$$x = m^2 - n^2 = q^2$$

となり、自然数の平方数になっている。同じく  $y, z$  は

$$y = 2mn$$

$$z = m^2 + n^2$$

となる。したがって、この方法で新たな既約であるピタゴラス三角形で、かつ直角をはさむ辺の奇数の方(=  $x$ ) が平方数であるものが求められる。

(Q.E.D.)

この方法を使うと、既約なピタゴラス三角形  $(3, 4, 5)$  からは、既約な三角形  $(9, 40, 41)$  が求められ、 $x$  の値は  $3^2$  になっている。また、既約な三角形  $(5, 12, 13)$  からは、既約な三角形  $(25, 312, 313)$  が求められる。この三角形の  $x$  の値も  $5^2$  であり、自然数の平方数になっている。

上の  $x$  は、直角をはさむ辺のうち奇数のものだったが、次にこれが偶数であるものを考えよう。

#### 定理 25

直角をはさむ偶数辺が平方数であるような既約なピタゴラス三角形は無数に存在する。

[証明]

この証明には、次の恒等式

$$(k^4 - 4)^2 + (2k)^4 = (k^4 + 4)^2$$

を用いる。ただしこのとき、 $k^4 - 4$  と  $4k^2$

は互いに素でないといけないので、 $k$  は奇数でないといけない。したがって、無数に存在する。

(Q.E.D.)

例えば、

$$k=1 \text{ のときは、 } (3, 2^2, 5)$$

$$k=3 \text{ のときは、 } (77, 6^2, 85)$$

$$k=5 \text{ のときは、 } (621, 10^2, 629)$$

が求められる。

さて、2辺が平方数で表せるピタゴラス三角形は存在するのだろうか。この問題については、次のフェルマーによる定理によって解決される。

### 定理 26

少なくとも2つの辺が平方数であるようなピタゴラス三角形は存在しない。

[証明]

直角をはさむ2辺が平方数であるようなピタゴラス三角形が存在すると仮定する。このようなピタゴラス三角形の中には、斜辺が最も小さいものがあり、その三角形を  $(x, y, z)$  とする。そこで、 $x = a^2$ ,  $y = b^2$  ( $a, b$  は自然数) とおく。まず  $a, b$  が互いに素であることを示す。

数  $a, b$  が整数  $d > 1$  で割り切れるとすると、 $a = da_1$ ,  $b = db_1$  より、 $a_1, b_1$  は整数になる。すると、

$$z^2 = d^4(a_1^4 + b_1^4)$$

が成り立つ。

この等式から  $z^2$  が  $d^4$  で割り切れることがわかり、したがって、 $z$  が  $d^2$  で割り切れて、 $z = d^2 z_1$  ( $z_1$  は整数) となることがわか

る。ここで、等式  $z^2 = d^4(a_1^4 + b_1^4)$  の両辺を  $d^4$  で割ると、

$$a_1^4 + b_1^4 = z_1^2, \quad z_1 < d^2 z_1 = z$$

の形になる。つまり、ピタゴラス三角形

$(a_1^2, b_1^2, z_1)$  は斜辺  $z_1 < z$  をもち、直角を

はさむ2辺は平方数である。

しかしこのとき、最初の仮定である最も小さい斜辺  $z$  をもつピタゴラス三角形  $(x, y, z)$  であるということに反するので、矛盾している。

したがって、数  $a, b$  は互いに素であり、ピタゴラス三角形

$$(x, y, z) = (a^2, b^2, z)$$

は既約でなければならない。

そこで、このピタゴラス三角形に定理 3 を適用し、2数  $a^2, b^2$  のうち一方が偶数(ここでは  $b^2$  を偶数とする)であり、3数  $a^2, b^2, z$  は

$$a^2 = m^2 - n^2$$

$$b^2 = 2mn \quad \dots \textcircled{1}$$

$$z^2 = m^2 + n^2$$

と表せることがわかる。

このとき、 $m, n$  は互いに素であり、そのうち一方が偶数で、他方が奇数である。さらに、 $m > n$  である。

ここでもし、 $m$  が偶数で  $n$  が奇数であるとする、①のはじめの等式を変形させた  $a^2 + n^2 = m^2$  から  $a^2$  が奇数であるとわかる。ところが、この等式から  $(a, n, m)$  はピタゴラス三角形になるから、 $a$  と  $n$  がどちらも奇数であるということはいえない。

なぜなら、以前示したようにピタゴラス三角形において、直角をはさむ辺のうち一



方は偶数でないといけないからである。

したがって、 $m$ が奇数で、 $n$ が偶数でないといけない。そこで、 $k$ を整数として、 $n = 2k$ とおける。また、 $m$ と $n$ が互いに素なので、 $m$ と $k$ も互いに素である。①の第2式によって

$$b^2 = 2m \times 2k = 2^2 mk$$

となる。 $b$ は偶数としたから、 $l$ を自然数として、 $b = 2l$ とおく。すると、上の式から $l^2 = mk$ となる。

ここで、 $m, k$ が互いに素であることを考えると、 $m$ も $k$ も平方数でなければいけないことがわかる。だから整数 $r, s$ を用いて

$$m = r^2, \quad k = s^2$$

と表すことにする。

さらに、今までの式から

$$b^2 = 4l^2 = 4mk, \quad b^2 = 2mn$$

である。したがって

$$4mk = 2mn, \quad n = 2k = 2s^2$$

となる。

また、 $m$ と $n$ が互いに素なので、①から $a$ と $n$ は互いに素である。だからピタゴラス三角形 $(a, m, n)$ は既約である。

ここで、定理3から $n$ が偶数であることを考えると、一方が偶数で互いに素な2数 $m_1$ と $n_1$ が存在し、

$$n = 2m_1n_1, \quad m = m_1^2 + n_1^2$$

という式が作れる。ところで、 $n = 2s^2$ であったから、

$$s^2 = m_1n_1$$

とおくことができる。したがって、2数 $m_1, n_1$ はそれぞれ平方数であり、自然数 $a_1$ と $b_1$ を用いて、

$$m_1 = a_1^2, \quad n_1 = b_1^2$$

と表すことができる。

そこで、等式 $m = m_1^2 + n_1^2$ に $m, m_1, n_1$ の値を代入すると、

$$a_1^4 + b_1^4 = r^2$$

となる。上式の $r$ は

$$r \leq r^2 = m < m^2 + n^2 = z$$

を満たす。つまり、ピタゴラス三角形

$(a_1^2, b_1^2, r)$ は、直角をはさむ2辺が平方数で、斜辺 $r$ は $z$ よりも小さい。したがって、この三角形は最初の三角形 $(x, y, z)$ も小さく、仮定に反している。

だから、直角をはさむ辺が平方数となるピタゴラス三角形があると仮定すると矛盾が生じる。したがってこのような三角形は存在しない。

次に、斜辺と他のもう一辺が平方数となる三角形を考えよう。

まず、三角形 $(x, y, z)$ が、上のような三角形の中で最も小さな斜辺を持つものとする。したがって、自然数 $a$ と $c$ を用いて $x = a^2$ ,  $z = c^2$ と表す。

最初に三角形 $(x, y, z)$ が既約であることを示そう。それには $x$ と $z$ が既約であることを証明するだけで十分である。そこで、 $x$ と $z$ に公約数 $e$ があると仮定する。すると $a, c$ が公約数 $e$ を持つことになり、自然数 $a_1, b_1$ を用いて、

$$a = ea_1, \quad c = ec_1$$

と表せる。したがって、3数 $x, y, z$ は

$$x = a^2 = e^2 a_1^2$$

$$y^2 = x^2 - z^2 = e^4 (c_1^4 - a_1^4)$$

$$z = c^2 = e^2 c_1^2$$

である。これから、 $y^2$ は $e^4$ で割り切れ、したがって、 $y$ は $e^2$ で割り切れる。よって $y$ は、自然数 $y_1$ を用いて、

$$y = e^2 y_1$$

と表すことができる。

ここで、三角形 $(x, y, z)$ の等式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

にこれまでの式を代入し、 $e^4$ でわると

$$e^4 a_1^4 + e^4 y_1^4 = e^4 c_1^4$$

$$a_1^4 + y_1^4 = c_1^4$$

が得られる。

さらに、 $z = e^2 c_1^2$ で $e > 1$ のため、 $c_1^2 < z$ である。つまり、ピタゴラス三角形 $(a_1^2, y_1, c_1^2)$ は斜辺と、もうひとつの辺も平方数であり、その斜辺の長さは $z$ よりも小さい。これは最初の仮定である、ピタゴラス三角形 $(x, y, z)$ が最も小さい斜辺をもち、斜辺ともうひとつも辺が平方数であるということに反している。

次に、 $y$ は偶数ではないことを示そう。なぜなら、 $y$ が偶数であるとする、定理3によって、互いに素な2数 $m, n$  ( $m > n$ )が存在して、

$$a^2 = x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

$$c^2 = z = m^2 + n^2$$

と表すことができる。これから、

$$c^2 > m^2, (ac)^2 = m^4 - n^4$$

であり、 $n^4 + (ac)^2 = m^4$ となる。

したがって、ピタゴラス三角形

$(n^2, ac, m^2)$ では、直角をはさむ1辺が平方数で、斜辺は $m^2 < z$ である。しかし、これは最初の仮定に反する。

これにより、 $y$ は奇数でなければならず、 $x = a^2$ が偶数でなければならない。また、 $a^4 + y^2 = c^4$ となり、 $a$ は偶数、 $y$ は奇数であるから、 $c$ は奇数で、

$$y^2 = c^4 - a^4 = (c^2 + a^2)(c^2 - a^2)$$

が成り立つ。

次に、2つの奇数 $c^2 + a^2, c^2 - a^2$ は互いに素であることを示す。

ここで、 $c^2 + a^2$ と $c^2 - a^2$ の公約数は $2c^2$ と $2a^2$ の約数であるが、それは奇数でなければならないから、実は互いに素な2数 $a^2, c^2$ の公約数でなければならない。だから、2数 $c^2 + a^2, c^2 - a^2$ は互いに素である。

つまり、 $y^2$ は2つの素な因数に分解されるから

$$c^2 - a^2 = r^2, c^2 + a^2 = s^2$$

でなければならない。これから、

$$2c^2 = r^2 + s^2$$

となるが、ここで $r, s$ は互いに奇数である

から数 $\frac{s+r}{2}$ と $\frac{s-r}{2}$ は整数になる。

この2数は、それらの和と差が互いに素だから、それら自身も互いに素である。

だから、定理3によって互いに素な2数 $m, n$ が存在して、一方は偶数であり、

$$\frac{s+r}{2} = m^2 - n^2, \frac{s-r}{2} = 2mn,$$

$$c = m^2 + n^2$$

あるいは、

$$\frac{s-r}{2} = m^2 - n^2, \frac{s+r}{2} = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

が成り立つ。

ここから、どちらの場合も

$$2a^2 = s^2 - r^2 = 8mn(m^2 - n^2) \dots ②$$

が得られる。 $a$  は偶数だから、 $a = 2a_1$  とおけて、

$$a_1^2 = mn(m^2 - n^2) = mn(m+n)(m-n)$$

が成り立つ。数  $m, n$  は互いに素でそのうち一方は偶数である。2 数  $m-n, m+n$  も互いに素で、 $m$  と  $m-n$ 、 $m$  と  $m+n$  もそれぞれ互いに素である。

ゆえに、②の右辺にある 4 つの因数どの 2 つを組み合わせても、互いに素である。したがって、等式②の右辺の各因数はそれぞれ平方数でなければならない。つまり、

$$m = k, \quad n = l, \quad m - n = p, \\ m + n = q$$

となる。ここから、

$$k^4 - l^4 = m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(pq)^2$$

で、さらに

$$k^4 = m^2 < m^2 + n^2 = c < c^2 = z$$

ゆえに、 $k^2 < z$  でもある。つまり、ピタゴラス三角形  $(l^2, pq, k^2)$  は、斜辺と一方の辺が平方数で、斜辺  $k^2$  は  $z$  よりも小さい。しかし、これは前の仮定に反する。

したがって、ピタゴラス三角形の斜辺と一方の辺が平方数であるようなものが存在するという仮定により矛盾が生じる。よって、このような三角形は存在しない。これで定理 24 は証明された。

(Q.E.D.)

この定理から 3 辺が平方数であるピタゴラス三角形はもちろん存在しないことが分かる。また、これを代数的に言い直すと、

次の定理のような命題になる。

### 定理 27

不定方程式  $x^4 + y^4 = z^4$  は自然数解をもたない。

この定理は、有名な「フェルマーの大定理」(定理 28)の特別な場合である。

### 定理 28 (フェルマーの大定理)

任意の整数  $n > 2$  に対して、不定方程式  $x^n + y^n = z^n$  は自然数の解をもたない。

「フェルマーの大定理」は、数学者フェルマー(Pierre de Fermat)がディオファントスの著書『数論』の余白に命題のみを記述し、証明を付していなかったエピソードで有名であり、その後、「フェルマー予想」として、数論の未解決問題となった。多くの数学者が証明に挑戦し、失敗を重ねてきた。しかし、少しずつ進歩を重ねていき、ついに、1994 年アメリカの数学者アンドリュウ・ワイルズ(Andrew John Wiles)によって、完全な証明が与えられた。その過程には、志村五郎、谷山豊という 2 人の日本人数学者による「志村-谷山予想」が大きな役割を果たしたことも有名である。このような深遠な理論にまで達することは、数学の世界の広がりと深さを実感できる。

### 3-10. ピタゴラス三角形と平面上の点

$(a, b, c)$  を既約なピタゴラス三角形とする。この三角形に  $x$  座標  $\frac{a}{c}$ 、 $y$  座標  $\frac{b}{c}$  をもつ平面上の点  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$  を対応させる。すると

ピタゴラス方程式  $a^2 + b^2 = c^2$  から

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

となる。

よって、点  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$  は原点を中心とした半径 1 の円、つまり単位円上に存在する。

つまり、1つのピタゴラス三角形について、単位円  $x^2 + y^2 = 1$  上の正の有理数座標をもつ点、つまり、単位上の有理点に対応する。逆に、点  $(x, y)$  を円  $x^2 + y^2 = 1$  上の正の有理数座標をもつ。つまり、 $x, y$  が方程式  $x^2 + y^2 = 1$  を満たす正の有理数であると仮定すると、

$$x^2 + y^2 = 1 = \frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

$$x = \frac{a}{c}, \quad y = \frac{b}{c} \text{ とみなすことができる。}$$

よって、この点  $(x, y)$  と既約なピタゴラス三角形  $(a, b, c)$  を対応させることができた。

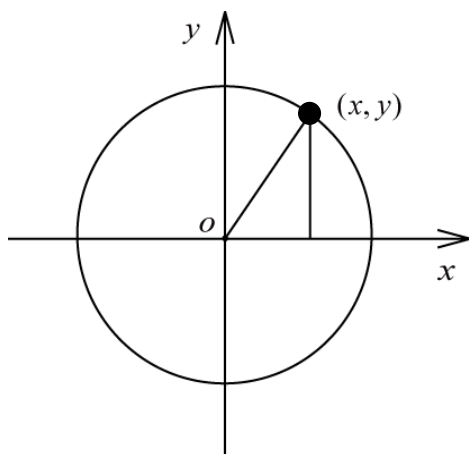


図 5

こうして、既約なピタゴラス三角形と、単位円上の有理点で第一象限にあるものと

の間に 1 対 1 の対応がつけられる。

### 定理 29

2つの任意の実数  $x_1, x_2$  を

$0 < x_1 < x_2 < 1$  と定める。この 2 数  $x_1, x_2$  に対して、既約なピタゴラス三角形  $(a, b, c)$  が存在して、それに対応する単位円上の点  $(x, y)$  が  $x_1 < x < x_2$  を満たす。

[証明]

$0 < x_1 < x_2 < 1$  であることから、

$$1 < \frac{1+x_1}{1-x_1} < \frac{1+x_2}{1-x_2}.$$

$$\text{これより、} 1 < \sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}} < \sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}}.$$

有理数の稠密性から、

$$\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}}, \sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}} \text{ の間には有理数 } \frac{m}{n} \text{ はい$$

くらでも存在するので、 $m, n$  は互いに素で、 $m$  が奇数、 $n$  が偶数とおくことができる。よって、

$$\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}} < \frac{m}{n} < \sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2} &= 1 - 2 \times \frac{n^2}{n^2 + m^2} \\ &= \frac{n^2 + m^2 - 2n^2}{n^2 + m^2} \\ &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

であるから①より、

$$x_1 < \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} < x_2$$

となる。

定理3より、

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$$

とおくと、既約なピタゴラス三角形が得られ、 $x_1 < \frac{a}{c} < x_2$  になる。

よって、この三角形に対して単位円上で点  $(x, y)$  が対応し、 $x = \frac{a}{c}$ ,  $y = \frac{b}{c}$  かつ  $x_1 < x < x_2$  が成り立つことがわかった。

(Q.E.D.)

この結果から、第一象限の単位円上にある2点を取ると、その間には必ず既約なピタゴラス三角形に対応する点があることがわかった。

また言い換えると、 $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  を満たす任意の角  $\alpha$  に対して、角  $\alpha$  にいくらでも近い鋭角をもつ有理数辺の直角三角形を得ることができる。すべての辺が有理数なので、うまく拡大するとピタゴラス三角形を得ることができる。

このようにして、任意の角に近いものを作ることができる。その中で角が  $45^\circ$  に限りなく近いピタゴラス三角形を作ることにはできるが、 $45^\circ$  のピタゴラス三角形は存在しない。理由は以下の通りである。

まず、ピタゴラス三角形に限らず各辺が整数の任意の三角形  $ABC$  について考える。この三角形について、余弦定理を適用すると、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

である。ここで  $a, b, c$  は整数なので、

$\cos A, \cos B, \cos C$  は有理数となる。

これより、 $\cos A, \cos B, \cos C$  のうち1つでも無理数となると  $a, b, c$  のうち少なくとも1つは無理数となる。

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より、} 45^\circ \text{ のときは } a, b, c$$

のうち少なくとも1つが無理数である。よって、1つの角が  $45^\circ$  であり、各辺が整数であるような三角形は存在しない。

#### 4. 主結果 (条件を満たすピタゴラス三角形の個数)

ピタゴラス三角形について、すべての辺の長さが  $n$  以下のピタゴラス三角形の個数を  $F(n)$  として  $n$  と  $F(n)$  の関係を考える。

ここで、ピタゴラス三角形は直角三角形であり斜辺が最長辺なので、斜辺が  $n$  以下のピタゴラス三角形を考えればよい。

実際に私たちがコンピュータで調べた結果を下の図6に示す。 $x$  軸を個数  $n$ 、 $y$  軸を個数  $F(n)$  とする。

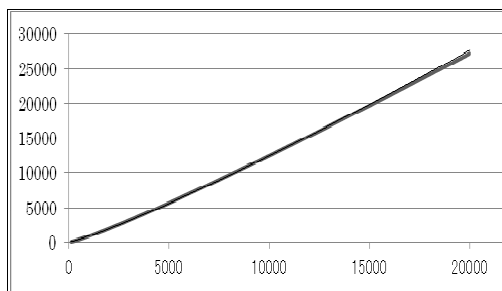


図6

このグラフから、私たちは斜辺の制限  $n$  と個数  $F(n)$  に線型関係が成り立つと予想し、個数  $F(n)$  に対する斜辺の制限  $n$  の比を調べた。その結果を次ページの図7に示す。

$x$  軸を個数  $n$ 、 $y$  軸を個数  $F(n)$  に対する斜

辺の制限  $n$  の比  $\frac{F(n)}{n}$  である。

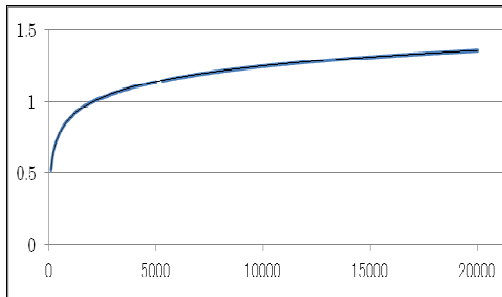


図 7

斜辺の制限  $n$  と個数  $F(n)$  に線型関係が成り立つならば、比のグラフは一定の値をとる。しかし上のグラフは一定の値をとるようには見えない。つまり、 $n$  と  $F(n)$  の関係は単純な線型関係では表せない、より複雑なものであると推察できる。

#### 4-1. 辺の長さが任意の数以下である既約なピタゴラス三角形の個数

さらに条件を絞った斜辺の長さが  $n$  以下であるような既約なピタゴラス三角形の個数  $f(n)$  を考える。

すると、次のような先行研究があった。

#### 定理 30 (レーマーの近似式)

斜辺の長さが  $n$  以下である、既約なピタゴラス三角形の個数  $f(n)$  は

$$f(n) \approx \frac{n}{2\pi}$$

で与えられる。

文献[5]の中にはこの定理の証明がなかったため、証明は私たち独自の方法で行った。

[証明]

既約なピタゴラス三角形の斜辺  $z$  は互いに素である奇数の組み合わせ  $(k, l)$  を用

いて、 $z = \frac{k^2 + l^2}{2}$  と表せる。

このとき、 $z$  は  $n$  以下であるから、

$z = \frac{k^2 + l^2}{2} \leq n$  となる。この式を変形して、

$$k^2 + l^2 \leq 2n \quad \dots \textcircled{1}$$

である。いま、横軸を  $k$  軸、縦軸を  $l$  軸とすると、図 8 のように①は中心が原点、半径が  $\sqrt{2n}$  の円の内部を表している。

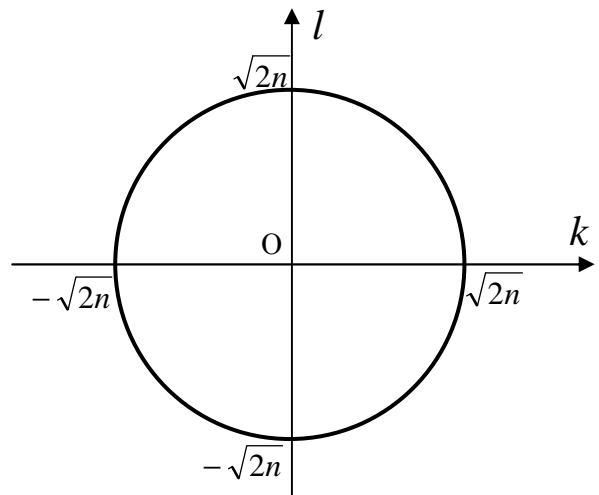


図 8

このとき、求めたいピタゴラス三角形の個数  $f(n)$  は①の円の内部および境界上の格子点  $(k, l)$  の個数である。さらに、 $kl$  座標上の一辺 1 の正方形は、格子点 1 つに対応しているため、 $n$  を十分大きくすれば、 $N$

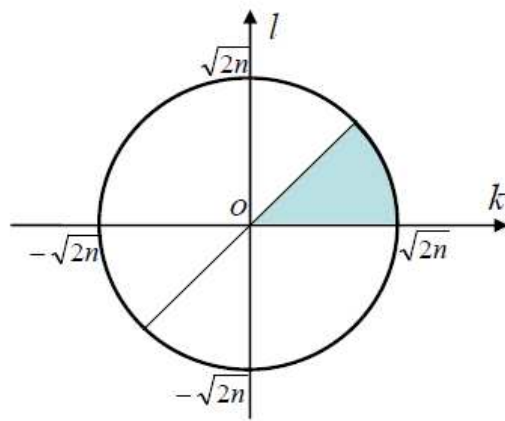


図 9

は  $kl$  座標上の条件を満たす部分の面積と等しくなると考えて良い。これは後述の補題 VI で示す。

そこで、①の面積  $S$  を求めると、

$$S = \sqrt{2n}^2 \pi = 2n\pi.$$

ここで、 $k, l$  について  $k > l > 0$  であるので、この条件を満たすのは図 2 の斜線部分であり、面積は  $S$  の 8 分の 1 なので、

$$\frac{S}{8} = \frac{2n\pi}{8} = \frac{n\pi}{4}.$$

さらに、 $k, l$  はどちらも奇数なので、この条件を満たすのは図 9 の斜線部内の 4 分の 1 なので、求める面積は

$$\frac{n\pi}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{n\pi}{16}.$$

最後に、 $k, l$  は互いに素である奇数であったので、この条件を満たす確率である  $\frac{8}{\pi^2}$  (後述の補題 VII で示す) をかけて、

$$\frac{n\pi}{16} \times \frac{8}{\pi^2} = \frac{n}{2\pi}.$$

したがって、条件を満たすピタゴラス三角形の個数  $f(n)$  は

$$f(n) \approx \frac{n}{2\pi}$$

となる。

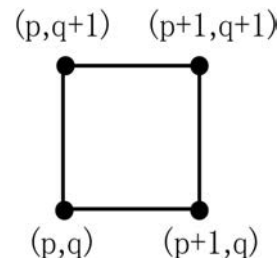
(Q.E.D)

### 補題 VI

$n$  を十分大きくする。このとき、領域  $D: k^2 + l^2 \leq 2n$  内に含まれる格子点の数は、その領域の面積と等しくなることを示す。

[証明]

ここでは、四分円を考える。まず頂点が点  $(p, q)$ 、点  $(p, q+1)$ 、点  $(p+1, q)$ 、点  $(p+1, q+1)$  で囲まれた格子を  $F_{p,q}$  とおく。



格子点の数を  $T_n$ 、 $(p, q) \in D$  となる  $F_{p,q}$  をすべて合わせてできる図形の面積を  $U_n$ 、 $F_{p,q} \subset D$  となる  $F_{p,q}$  をすべて合わせてできる図形の面積を  $R_n$  とする。このとき、 $T_n = U_n$  であることは明らかである。さらに、 $R_n < S_n < T_n = U_n$  であることも明らかである。ここで、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $R_n \rightarrow T_n$  であることを示し、はさみうちの原理から  $S_n \rightarrow T_n$  であることを示す。

まず、 $T_n$  について、 $k = p$

( $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq [\sqrt{2n}]$ ) のとき、格子点は

$$(p, 0), (p, 1), \dots, (p, [\sqrt{2n - p^2}])$$

なので、この個数は  $[\sqrt{2n - p^2} + 1]$  個である。ここで、 $p$  は 0 から  $[\sqrt{2n}]$  まで動くので、

$$T_n = \sum_{k=0}^{[\sqrt{2n}]} [\sqrt{2n - p^2} + 1]$$

である。

同様に考えて、

$$R_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \sqrt{2n} \rfloor} \lfloor \sqrt{2n-k^2} \rfloor$$

である。

ここから、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $R_n \rightarrow T_n$  であることを示す。 $n \rightarrow \infty$  のとき  $T_n, R_n$  はどちらも  $R_n \rightarrow \infty, T_n \rightarrow \infty$  なのでそれを解消する

ために  $T_n, R_n$  を  $n^{\frac{3}{2}}$  で割って考える。

すると、 $T_n, R_n$  はどちらも同じ値に収束する。したがって はさみうちの原理から

$$R_n = S_n = T_n = U_n \quad (n \rightarrow \infty)$$

ゆえに、格子点の数  $T_n$  はその領域内の面積  $U_n$  によって近似してもよいことがわかった。  
(Q.E.D)

## 補題VII

2つの奇数の組み合わせ  $(k, l)$  が互いに素である確率は  $\frac{6}{\pi^2}$  である。

[証明]

まず、2数  $(a, b)$  が互いに素となる確率を求めよう。 $a$  と  $b$  が互いに素であるならば同じ素数を共通の約数にはもたないということを用いる。

まず、ある素数  $p_1$  で任意に選んだ整数が割り切れる確率は  $\frac{1}{p_1}$  となる。ゆえに、 $a$  と  $b$  のうち少なくとも一つが  $p_1$  で割り切れないという事象は、 $a$  と  $b$  がどちらも  $p_1$  によって割り切れるという事象の余事象なので、 $a$  と  $b$  のうち少なくとも一つが  $p_1$  で割り切れない、つまり素数  $p_1$  を共通の約数にもたない確率を考える。 $a$  が  $p_1$  で割り切れ

る確率を  $p_2$ 、 $b$  が  $p_1$  で割り切れる確率を  $p_3$  とすると、

$$1 - (p_2 \times p_3) = 1 - \frac{1}{p_1}$$

となる。さらに、すべての素数に関してこの確率の積をとったものが  $a$  と  $b$  が互いに素である確率である。つまり、

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \dots \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p:\text{prime}} (1 - p^{-2}) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1 - p^{-2}}\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2} \end{aligned}$$

である。ここで  $\zeta(n)$  はゼータ関数(zeta function)を表す。

こうして、2つの奇数  $(a, b)$  が互いに素となる確率は  $\frac{6}{\pi^2}$  であることが証明された。

では互いに素である2つの奇数の組  $(k, l)$  の場合について考えてみよう。 $(k, l)$  はどちらも奇数なので明らかにどちらも2で割ることはできない。したがって求める確率は、2数  $(a, b)$  が互いに素となる確率を求める中で素数が2の場合を除けばよいので、実際にその確率を求めると、



$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \\ & \quad \times \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdots \div \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \\ &= \frac{6}{\pi^2} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{\pi^2}. \end{aligned}$$

このようにして、奇数の組み合わせ  $(k, l)$  が互いに素である確率は  $\frac{8}{\pi^2}$  であることが示された。 (Q.E.D)

これまで得られた結果から、各辺が  $n$  以下の既約なピタゴラス三角形の個数  $f(n)$

は、 $f(n) \approx \frac{n}{2\pi}$  で近似できることが分かった。

この結果を利用して、 $F(n)$  を考える。

#### 4-2. 辺の長さが任意の数以下であるすべてのピタゴラス三角形の個数

$f(n)$  は既約なピタゴラス三角形の個数のみを考えたものなので、斜辺が  $n$  を超えない範囲で整数倍して、既約でない三角形も加える必要がある。

まず、1倍しても斜辺が  $n$  を超えない既約なピタゴラス三角形の個数は  $f(n)$  自身である。次に2倍しても斜辺が  $n$  を超えない

ものは、斜辺が  $\frac{n}{2}$  以下であればよいのでその

個数は  $f\left(\frac{n}{2}\right)$  である。

同様にして、3倍、4倍、 $\dots$ 、 $n$ 倍と考えていく。このときそれぞれの個数は、 $f\left(\frac{n}{3}\right)$ ,

$f\left(\frac{n}{4}\right), \dots, f\left(\frac{n}{n}\right)$  である。

このとき、各辺が  $n$  以下のピタゴラス三角形の個数は、

$$\begin{aligned} F(n) &= f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \cdots + f(1) \\ &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{n}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{2\pi k} \\ &= \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

このように、 $F(n)$  を計算する過程で調和数列の有限和が現れた。そこで、次の事実を利用して計算を進めた。

#### 定理 31

$n$  番目までの調和級数の和と  $n$  の自然対数の差はオイラ一定数  $\gamma$  に収束する。つまり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right\} &= \gamma \\ &= 0.5772156649 \cdots \end{aligned}$$

これを利用して、 $n$  が十分大きいとき  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln n + \gamma$  という近似式を用いて計算すると、

$$G(n) = \frac{n}{2\pi} (\ln n + \gamma)$$

ただし  $\gamma = 0.57721 \cdots$

という、辺の長さが  $n$  以下のすべてのピタゴラス三角形の個数の近似式を得る。

次に、この近似式の精度について考える。

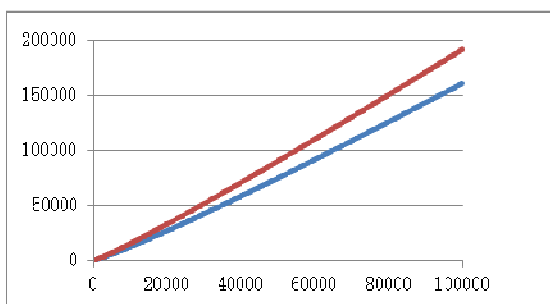


図 10

図 10 において、 $x$  軸は  $n$ 、 $y$  軸は個数であり、青のグラフは実際の個数  $F(n)$ 、赤のグラフは近似式で求めた個数  $G(n)$  である。

このグラフを見ると、誤差が大きいのに見える。そこで、誤差の割合について調べると次のようになる。

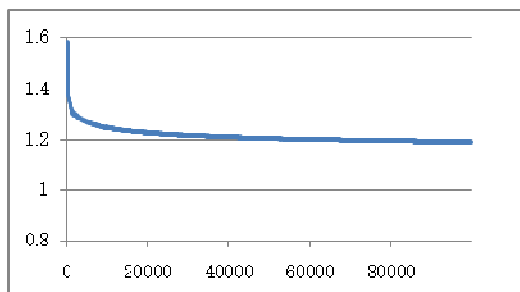


図 11

図 11 において、 $x$  軸は  $n$ 、 $y$  軸は実際の個数に対する近似式で求めた個数の比  $\frac{G(n)}{F(n)}$  である。つまり、 $y=1$  に近いほど実際の値に近い。

しかし、グラフを見ると実際の値より 20%ほど多く数えている。

そこで、この誤差がなぜ出てきてしまうのかを考えた。レーマーによる既約なピタ

ゴラス三角形の個数を求める近似式の精度は高いことが実際に調べてみてわかったので、

$$F(n) = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)$$

という部分に注目してみた。そして、私たちは誤差の理由は「斜辺は少なくとも 5 以上である」ということではないかと推測した。この条件を加えることによって近似式の精度を向上させようと考えた。

これはつまり斜辺が 5 未満であるピタゴラス三角形は存在しないということである。レーマーの近似式を用いると、

$$f\left(\frac{n}{n}\right), f\left(\frac{n}{n-1}\right), \dots$$

という値を余計に数えている。 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{n}{n-k} \rightarrow 1$  であ

り、 $f(1) = \frac{1}{2\pi} \doteq 0.16$  より、小さい数では

あるが項数は  $n$  を大きくするほど多くなるので、誤差大きくなるのは明らかである。したがって、斜辺が 5 未満のものは無視しなければならない。つまり、

$$F(n) = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(5)$$

としなければならないということである。

これを考慮した近似式を  $G^*(n)$  すると、

$$\begin{aligned} G^*(n) &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} f\left(\frac{n}{k}\right) \\ &= \frac{n}{2\pi} \left( \ln \frac{n}{5} + \gamma \right) \end{aligned}$$

を得る。

ここでも同様に誤差の割合について調べると次のようになる。

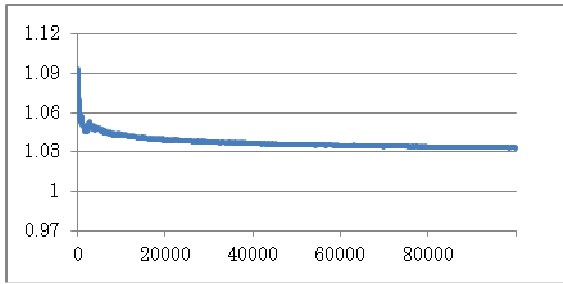


図 12

図 12 において、 $x$  軸は  $n$ 、 $y$  軸は実際の個数に対する近似式で求めた個数の比  $\frac{G^*(n)}{F(n)}$  である。

$G(n)$  の場合での誤差が約 20%なのに対し、 $G^*(n)$  の場合は約 3%とかなり誤差を減らすことができた。

さらに斜辺が 5 より大きく 13 以下であるものが 1 つ、13 より大きく 17 以下であるものが 1 つ、と同様に繰り返すと誤差はさらに小さくなる。しかし、この方法ではいくら誤差を減らしても常に実際の個数より多く数えている。

そこで、実際の個数より少なく数える近似式を考えることで実際の個数の範囲を絞ることができるのではないかと考え、新たな近似式を導いた。

レーマーの近似式において  $f(n)=1, 2, \dots$  となる  $n$  の値は 1 番目、2 番目…の既約なピタゴラス三角形の斜辺の近似になっている。

例えば  $f(n)=100$  となる  $n$  は、 $\frac{n}{2\pi}=100$

を解いて  $n=628.3\dots$  である。小さいほうから数えて 100 番目の既約なピタゴラス三角形の斜辺の大きさは 629 なので確かに近い値をとっている。この誤差はレーマーの近似式と同様  $n$  を大きくするほど小さくな

る。

つまり、小さいほうから数えて  $k$  番目の既約なピタゴラス三角形の斜辺の大きさ  $z_k$  は  $z_k = 2\pi k$  と表せる。また、 $z_k = n$  となるのは  $k = \frac{n}{2\pi}$  のときである。

さらに、 $z$  は  $n$  を超えない範囲で  $\frac{n}{z}$  倍できる。つまり、斜辺が  $z$  である既約なピタゴラス三角形と相似なものは  $\frac{n}{z}$  個あるとい

うことになる。しかし、 $\frac{n}{z}$  は常に割り切れるとは限らず、割り切れない場合は実際の個数より大きい値になる。そこで、 $\frac{n}{z}-1$  とすることによって実際の値より確実に小さく、かつ最も近く計算できる。

この考え方を利用すると、

$$\begin{aligned} F(n) &= \left(\frac{n}{z_1}-1\right) + \left(\frac{n}{z_2}-1\right) + \dots + \left(\frac{n}{z_{\frac{n}{2\pi}}}-1\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2\pi}} \left(\frac{n}{z_k}-1\right) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2\pi}} \left(\frac{n}{2\pi k}-1\right) \\ &= \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2\pi}} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2\pi}} 1 \end{aligned}$$

ここでも  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln n + \gamma$  を用いて、近似式を  $H(n)$  とすると、

$$H(n) = \frac{n}{2\pi} \left( \ln \frac{n}{2\pi} + \gamma - 1 \right)$$

という小さく数える近似式を得る。  
このときの誤差は次のようになる。

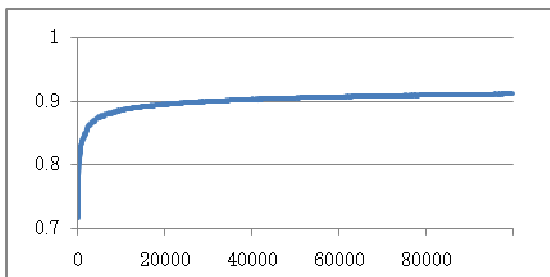


図 13

図 13 において、 $x$  軸は  $n$ 、 $y$  軸は実際の個数に対する近似式で求めた個数の比  $\frac{H(n)}{F(n)}$  である。

グラフは常に  $y=1$  より下になっている。つまり、求めたかった実際の個数より少なく数える近似式が得られた。

ここでこれまでの考察から、 $F(n), G(n), H(n)$  には

$$H(n) < F(n) < G(n)$$

すなわち

$$\frac{n}{2\pi} \left( \ln \frac{n}{2\pi} + \gamma - 1 \right) < F(n) < \frac{n}{2\pi} (\ln n + \gamma)$$

という大小関係が成り立っている。

この式の ( ) 内の定数を計算すると、

$$\frac{n}{2\pi} (\ln n - 2.26) < F(n) < \frac{n}{2\pi} (\ln n + 0.57)$$

となる。ここで、 $\tau$  を定数として辺々を

$$\frac{n}{2\pi} (\ln n - \tau)$$

$$\frac{\ln n - 2.26}{\ln n - \tau} < \frac{F(n)}{\frac{n}{2\pi} (\ln n - \tau)} < \frac{\ln n + 0.57}{\ln n - \tau}$$

$$\frac{1 - \frac{2.26}{\ln n}}{1 - \frac{\tau}{\ln n}} < \frac{F(n)}{\frac{n}{2\pi} (\ln n - \tau)} < \frac{1 + \frac{0.57}{\ln n}}{1 - \frac{\tau}{\ln n}}$$

$n \rightarrow \infty$  のとき、はさみうちの原理より

$$\frac{F(n)}{\frac{n}{2\pi} (\ln n - \tau)} \rightarrow 1$$

$$\text{すなわち } \frac{n}{2\pi} (\ln n - \tau) \rightarrow F(n).$$

つまり、 $\frac{n}{2\pi} (\ln n - \tau)$  と表せる関数はすべてピタゴラス三角形の個数の近似式になっていて、これまで求めた式は確かに近似式になっている。また、

$$\frac{n}{2\pi} (\ln n - 2.26) < F(n) < \frac{n}{2\pi} (\ln n + 0.57)$$

より、 $-0.57 < \tau < 2.26$  の範囲に精度の高い近似式を与える定数  $\tau$  が存在する。

この  $\tau$  をコンピュータを用いて区間縮小により調べると、 $\tau = 1.37042909005805$  のとき誤差のグラフが次のようになった

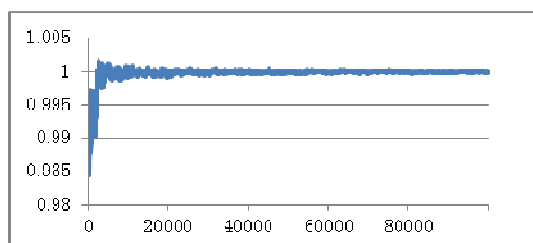


図 14

このことから、辺の長さが任意の数以下

であるすべてのピタゴラス三角形の個数の精度の高い近似式を求めることができた。

## 5. ピタゴラス三角形の種々の性質 (補遺)

### 5-1. ヘロン三角形と有理三角形

これまで、各辺が整数で表される直角三角形について考えてきたが、この章では各辺が整数の直角三角形とは限らない三角形を考える。

3辺の長さと同面積がいずれもしえ数である三角形をヘロン三角形(Heron triangle)という。明らかに、ピタゴラス三角形はヘロン三角形の一部である。

ここで、ヘロン三角形を求める方法をいくつか紹介する。

まず、3辺が整数となる三角形を作る方法はよく知られている。3数  $a, b, c$  を  $|b-c| < a < b+c$  が成り立つように選び、三角形  $(a, b, c)$  を与える。

例えば  $a=2, b=3, c=4$  とすると

$|2-3| < 4 < 2+3$  であり、またこの3数は

三角形を作ることができる。ちなみにこの三角形の内角はすべて整数値ではなく、その面積は  $\frac{3\sqrt{15}}{4}$  となった。

この例では、各辺は整数だが、内角と面積は整数にならなかった。

この方法では、内角はどれも整数ではなかった。そこで、ある1つの角が整数であり、各辺が整数である三角形を計算で求める方法を紹介します。

### 定理 32

$$\begin{cases} a = m^2 + n^2 + mn \\ b = m^2 - n^2 \\ c = 2mn + n^2 \end{cases} \quad \dots(*)$$

これらの式(\*)を満たす三角形  $(a, b, c)$  は  $\angle A = 120^\circ$  であり、各辺が整数である三角形を表す。

[証明]

図 15 のような三角形 ABC を考える。

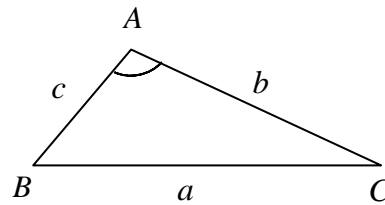


図 15

余弦定理から

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(\*)より、

$\cos A$

$$= \frac{(m^2 - n^2)^2 + (2mn + n^2)^2 - (m^2 + n^2 + mn)^2}{2(m^2 - n^2)(2mn + n^2)}$$

$$= \frac{(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + (4m^2n^2 + 4mn^3 + n^4)}{2(2m^3n + m^2n^2 - 2mn^3 - n^4)}$$

$$= \frac{(m^4 + n^4 + m^2n^2 + 2m^2n^2 + 2mn^3 + 2m^3n)}{2(2m^3n + m^2n^2 - 2mn^3 - n^4)}$$

$$= \frac{2m^3n - m^2n^2 + 2mn^3 + n^4}{-2(2m^3n - m^2n^2 + 2mn^3 + n^4)}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

よって、 $0^\circ < A < 180^\circ$  より  $\angle A = 120^\circ$  を  
みたす。 (Q. E. D.)

例えば、定理 32 において、 $m = 5, n = 3$   
とすると

$$\begin{cases} a = 5^2 + 3^2 + 5 \times 3 = 49 \\ b = 5^2 - 3^2 = 16 \\ c = 2 \times 5 \times 3 + 3^2 = 39 \end{cases}$$

こうして、 $\angle A = 120^\circ$  で各辺が整数の三角  
形(49,16,39)を求めることができた。

図 16 のように(5,12,13)と(35,12,37)を用  
意する。ここで、長さが 12 である辺同士を  
合わせると、新たに各辺が整数ではある鈍  
角三角形(13,40,37)を作ることができる。

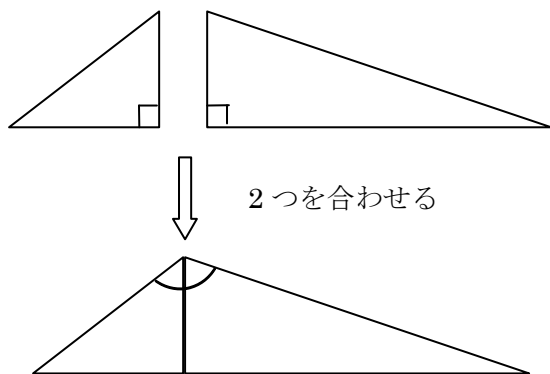


図 16

ちなみに、この場合の鈍角はおよそ

$$23^\circ + 71^\circ = 94^\circ$$

となっていて、面積は、(5,12,13)と  
(35,12,37)の面積をあわせたもの、つまり  
 $30 + 210 = 240$ となる。この方法で求めると、  
各辺だけでなく面積も整数となる。

ここで、この方法について注目する。こ  
のように、直角を挟む辺が等しいピタゴラ  
ス三角形はいくらでも求めることができる。

2つのピタゴラス三角形( $a_1, b_1, c_1$ )と

( $a_2, b_2, c_2$ )を考える。このとき、 $b_1$ と $b_2$ が  
その最小公倍数になるように、2つのピタ  
ゴラス三角形を適当に拡大すると、 $b_1, b_2$ が  
対応する辺が等しいピタゴラス三角形の組  
を作り出すことができる。

このようにして、各辺と面積が整数で表  
される2つのピタゴラス三角形を用意する  
ことで無限に求められることがわかった。

しかし、各辺と面積が整数で表される三  
角形が、すべて2つの直角三角形によって  
できているわけではない。

例えば、(65,119,180)を考える。この3  
数は

$$|65 - 119| < 180 < 65 + 119$$

$$54 < 180 < 184$$

を満たし、またこの三角形の面積はヘロン  
の公式を用いて、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{182(182 - 65)(182 - 119)(182 - 180)} \\ &= \sqrt{2683044} \\ &= 1638 \end{aligned}$$

となった。確かに面積は整数となっている。

ここで(65,119,180)が2つのピタゴラ  
ス三角形の組み合わせでないことを示す。

もし(65,119,180)が2つのピタゴラ  
ス三角形の組み合わせだとすると、その三角  
形の高さが整数となるはずである。

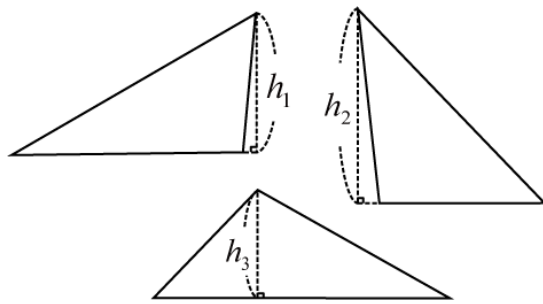


図 17

図 17 のようにそれぞれの辺を底辺とすると、その高さは

- ・底辺が 65 のとき  $3276 \div 65 = 50.4$
- ・底辺が 119 のとき  $3276 \div 119 = 27.5294\dots$
- ・底辺が 180 のとき  $3276 \div 180 = 18.2$

となって、どの場合も高さが整数でないことがわかった。すなわち、(65,119,180)が2つのピタゴラス三角形の組み合わせではない。

では、ここから3辺が連続してかつ面積と各辺の長さが整数である三角形を考える。まず、その性質として、それが直角をはさむ1辺を共有する2つのピタゴラス三角形によってできているという点が挙げられる。それを証明する。

### 定理 33

3辺が連続しかつ面積と各辺の長さが整数である三角形(つまり、ヘロン三角形)は、直角をはさむ1辺を共有する2つのピタゴラス三角形によってできている。

[証明]

まず、このような三角形のうち最小の辺が奇数であることを示す。

背理法を用いて、最小の辺が偶数  $2k$  であるとする。すると三角形は  $(2k, 2k+1, 2k+2)$  と

なる。ヘロンの公式から、三角形の面積  $S$  は

$$s = \frac{2k + 2k + 1 + 2k + 2}{2} = \frac{6k + 3}{2}$$

ヘロンの公式から、次式を導いて、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$16S^2 = 2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c).$$

これに、 $s$  と3辺を代入して

$$\begin{aligned} 4(4S^2) &= (6k+3)(2k+3)(2k+1)(2k-1) \\ &= 4(3k^2+8k+2)(4k^2-1)+4k^2-1 \end{aligned}$$

ここで、左辺は4で割り切れるが、右辺は4で割ると1余り、矛盾が生じる。したがって、三角形の最小の辺は奇数である。

そこで、最小の辺を  $2k-1$  とすると、三角形は  $(2k-1, 2k, 2k+1)$  となる。このとき上と同様に三角形の面積の平方は

$$S^2 = 3k^2(k^2-1)$$

となる。この等式から  $k^2$  は  $S^2$  の約数であることがわかる。よって、背理法を用いて  $k$  が  $S$  の約数であることがわかる。すると、 $S$  は整数  $h$  を用いて、 $S = kh$  と表せる。

一方、辺  $2k$  に対する高さを  $h_1$  とすると、 $S = kh_1$  と表すことができる。

これらの2式を比べると、 $h = h_1$  であることがわかる。つまり、辺  $2k$  に対する高さは整数となることがわかる。

さらに、 $S^2 = 3k^2(k^2-1)$  と  $S = kh$  を比べると、

$$3k^2(k^2-1) = k^2h^2$$

ここで、

$$h^2 = 3(k^2-1) = (2k+1)^2 - (k+2)^2$$

$$h^2 = 3(k^2-1) = (2k-1)^2 - (k-2)^2$$

より

$$(2k+1)^2 = h^2 + (k+2)^2$$

$$(2k-1)^2 = h^2 + (k-2)^2$$

つまり、ピタゴラス方程式が成り立ち、 $(2k+1, h, k+2)$  と  $(2k+1, h, k+2)$  がピタゴラス三角形であることがわかる。これらのピタゴラス三角形をはり合わせると、 $(2k-1, 2k, 2k+1)$  という三角形ができる。したがって、3辺が連続する三角形がピタゴラス三角形の組み合わせによってできていることがわかった。

(Q.E.D.)

ところで、

$$(2k+h \pm 2, 3k+2h, 4k+2h \pm 1)$$

(複号同順)

という2つの三角形を考える。

次の計算から、これらの三角形がピタゴラス方程式を満たすことがわかる。

$$\begin{aligned} (2k+h \pm 2)^2 + (3k+2h)^2 - (4k+2h \pm 1)^2 \\ = 4k^2 + h^2 + 4 + 4kh + \pm 4h \pm 8k \\ + 9k^2 + 4k^2 + 12kh \\ - 16k^2 - 4h^2 - 1 - 16kh \mp 4h \mp 8k \\ = -3k^2 + h^2 + 3 \end{aligned}$$

ここで、上の証明より、

$$3(k^2 - 1) = h^2$$

$$3k^2 = h^2 + 3$$

とわかるので、

$$\begin{aligned} (2k+h \pm 2)^2 + (3k+2h)^2 - (4k+2h \pm 1)^2 \\ = -3k^2 + h^2 + 3 \\ = 0 \end{aligned}$$

となり、ピタゴラス方程式が成り立つことがわかる。

ここで、これらの三角形は  $(3k+2h)$  という辺を共有している。そこで、2つのピタ

ゴラス三角形を組み合わせると、

$$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$$

という三角形ができる。この三角形は明らかに、3辺が連続する整数で表せる三角形である。

このことから、3辺が連続する整数である三角形があれば、新たに同じ性質をもつ三角形を求めることができるということがわかる。

例えば  $(3, 4, 5)$  という三角形を考える。このとき、 $(2k-1, 2k, 2k+1) = (3, 4, 5)$  となるのは、 $k=2$  のときである。また、 $S=6$  から  $h=3$  である。

これらの数を

$$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$$

に代入して、 $(13, 14, 15)$  という三角形ができる。この三角形の面積はヘロンの公式から、

$$S = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$$

より、確かに面積が整数になっている。

さらに、 $(13, 14, 15)$  から新たな三角形を作る。この場合、 $k=7, h=12$  である。

よって、 $(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$  から  $(51, 52, 53)$  が得られた。この三角形の面積は、

$$S = \sqrt{78 \times 27 \times 26 \times 25} = 1170$$

となり、面積も確かに整数になっている。

また、この方法によって3辺が連続する整数であるような三角形を無限に求められることがわかった。

では、3辺の長さや面積が整数である三角形を求めるにはどうすればよいかを考える。この問題は、各辺と面積が有理数である三角形を求めることと同値である。このように、各辺と面積が有理数で表せる三角形を**有理三角形(rational triangle)**とよぶ。

そこで、有理三角形は、別の2つの有理



三角形の組み合わせであることを証明する。

**定理 34**

有理数の辺をもつどのような三角形においても、三角形の内部に引いた高さは、それに垂直な辺を2つの有理数比に分ける。

[証明]

図 18 のような三角形  $(a, b, c)$  を考える。そして、 $a, b$  の正射影を  $a_1, b_1$  とする。

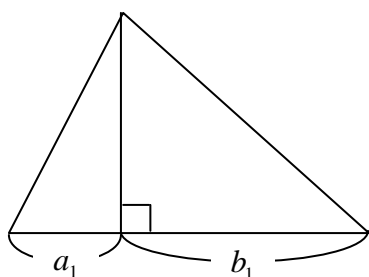


図 18

まず仮定から、

$$a_1 + b_1 = c \quad \dots \textcircled{1}$$

であることがわかる。

高さ  $h$  は、三角形  $(a, b, c)$  を2つの直角三角形に分ける。その三角形は  $(a_1, h, a)$  と  $(b_1, h, b)$  であるので、ピタゴラス方程式から、

$$a_1^2 = a^2 - h^2, b_1^2 = b^2 - h^2$$

よって、 $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$

ここで、 $\textcircled{1}$  から

$$\begin{aligned} c(a_1 - b_1) &= (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) \\ &= a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

より、 $a_1 - b_1 = \frac{a^2 - b^2}{c}$  となる一方、 $\textcircled{1}$  から

$$a_1 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}, b_1 = \frac{b^2 - a^2 + c}{2c}$$

となる。この等式から、 $a_1, b_1$  は有理数である。

したがって、

有理数の辺をもつ三角形において、三角形の内部に引いた高さは、それに垂直な辺を2つの有理数比に分けるということが証明された。 (Q.E.D.)

ここで、もし各辺だけでなく面積も有理数ならば、すべての高さも有理数になるということがわかる。

なぜなら、辺  $c$  に対する高さを  $h$  とすると、 $S = \frac{ch}{2}$  から、 $h = \frac{2S}{c}$  である。

したがって、辺と面積が有理数ならば高さも有理数になることがわかる。

すると、ある有理三角形を考えたとき、辺  $c$  に対する高さを  $h$  とすると、上の証明から、分けられる2つの直角三角形は各辺が有理数となり、有理三角形はそれとは別の2つの有理三角形の組み合わせによってできているということが証明された。

次に、各辺と中線が有理数である三角形について考える。

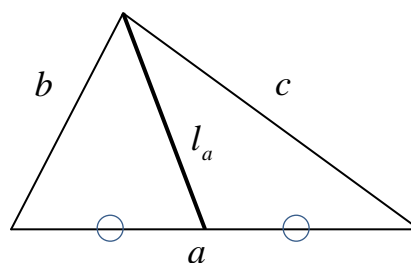


図 19

辺  $a$  へおろした中線を  $l_a$  とする。すると、

中線定理より、

$$b^2 + c^2 = 2\left(l_a + \frac{a^2}{4}\right),$$

$$4l_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

この公式から、各辺と中線が有理数である三角形が求められる。

例えば、(68,85,87)が中線と各辺が有理数である三角形であることがわかる。実際、

$$l_a = 79, l_b = \frac{131}{2}, l_c = \frac{127}{2}$$

とすべての中線が有理数になっている。

他にも、(127,131,158)や(204,255,261)という三角形も中線と各辺が有理数になっている。

## 5-2. 自然数の逆数を辺としてもつ直角三角形

まず $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ の直角三角形について考

える。三平方の定理より、

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

これを变形した $x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$ より、 $x^{-2} < z^{-2}$ がわかる。これを解くと、 $z < x$ となる。

ここで、 $z, x$ の最大公約数 $d$ と互いに素な2つの数 $a, c$ を用いて、 $x = da, z = dc$ と表すことができる。

すると $\textcircled{1}$ より、 $y^2 z^2 + x^2 y^2 = x^2 y^2$  ゆえ、 $y^2(x^2 - z^2) = x^2 z^2$

$$y^2(a^2 - c^2) = (dac)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

このことから、 $y^2$ が $(dac)^2$ の約数である。

よって、 $y$ は $dac$ の約数であるといえる。

したがって、ある整数 $b$ が存在して、

$$yb = dac \quad \dots \textcircled{3}$$

これを $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$y^2(a^2 - c^2) = y^2 b^2, \quad a^2 - c^2 = b^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

$a, c$ は互いに素な数なので、 $b, c$ も互いに素である。よって、 $\textcircled{4}$ を变形すると、

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

つまり、三角形 $(b, c, a)$ は既約なピタゴラス三角形である。だから、定理2より、互いに素な整数 $m, n$  ( $m < n$ )によって、

$$\begin{cases} a = m^2 + n^2 \\ b = m^2 - n^2 \\ c = 2mn \end{cases} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\begin{cases} a = m^2 + n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 - n^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{7}$$

のどちらかが成り立つ。

また $a, b, c$ は互いに素であり、 $\textcircled{5}$ から $b$ と $ac$ は互いに素でなければならぬ。すると、 $\textcircled{3}$ より、 $d$ は $b$ で割り切れなければならぬ。だから、自然数 $\delta$ が存在し、 $d = b\delta$ が成り立つ。

$$x = da = \delta ab, y = \delta ac, z = dc = \delta bc$$

が成り立つので $\textcircled{6}$ より、

$$x = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2)\delta$$

$$y = 2mn(m^2 + n^2)\delta$$

$$z = 2mn(m^2 - n^2)\delta$$

また、 $\textcircled{7}$ より、

$$x = 2mn(m^2 + n^2)\delta$$

$$y = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2)\delta$$

$$z = 2mn(m^2 - n^2)\delta$$

を得る。

一方、任意の自然数  $m, n, \delta$  ( $n < m$ ) に対して上の等式により、 $x, y, z$  を定義し、等式⑥、⑦により  $b, c, a$  を定義すると、 $x = \delta ab, y = \delta ac, z = \delta bc$  になる。こうして、得られた  $x, y, z$  の値は、先程の方程式  $y^2(x^2 - z^2) = x^2z^2$  および  $b^2 + c^2 = a^2$  を満たすから、 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$  も満たす。

したがって、方程式  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$  のあ

らゆる正の整数解は、等式

$$\begin{aligned} x &= (m^4 - n^4)\delta \\ y &= 2mn(m^2 + n^2)\delta \\ z &= 2mn(m^2 - n^2)\delta \end{aligned}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} x &= 2mn(m^2 + n^2)\delta \\ y &= (m^4 - n^4)\delta \\ z &= 2mn(m^2 - n^2)\delta \end{aligned}$$

から得られる。ここで、 $\delta$  は任意の自然数であり、 $m, n$  をみたく  $m > n$  は互いに素な整数である。

実際に直角三角形を求める。最も小さい整数解を求めるために、 $m = 2, n = 1, \delta = 1$  とおく。すると上の式より、 $x = 80, y = 60, z = 15, y = 20, z = 12$  となる。よって、 $\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} = \frac{1}{12^2}$  が得られる。

ちなみに  $m = 3, n = 1, \delta = 1$  のときは、 $z = 48$  なので、 $\frac{1}{80^2} + \frac{1}{60^2} = \frac{1}{48^2}$  が得られる。

また、 $m = 3, n = 2, \delta = 1$  のときは、

$x = 65, y = 156, z = 60$  であるので、

$$\frac{1}{65^2} + \frac{1}{156^2} = \frac{1}{60^2} \text{ が得られる。}$$

また、3辺の長さが平方数の逆数の場合について考える。上と同様に、ピタゴラスの定理より、 $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = \frac{1}{z^4}$  が成り立つ。

しかし、フェルマーの定理より上の式を満たす  $x, y, z$  は存在しない。よって3辺の長さが平方数の逆数であるような直角三角形は存在しない。

### 5-3. 各辺と対角線が自然数になる直方体

1つのピタゴラス三角形があれば、そこから各辺および、対角線が自然数である長方形を得ることができる。

また逆に、そのような長方形からピタゴラス三角形を得ることができる。この問題を3次元空間と認識すると各辺と対角線が自然数で表せられる直方体を

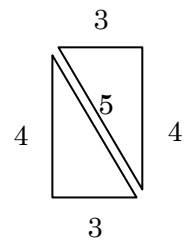


図 20

どのように見つけるかという問題になる。直方体の各辺を  $x, y, z$ 、また対角線を  $t$  とすると

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

が成り立つ。逆に  $x, y, z$  および  $t$  が上の方程式を満たすと  $x, y, z$  は直方体の辺の長さとなり、 $t$  はその対角線の長さとなる。

さらに、各辺と対角線が自然数で表すことができる直方体を求めることは、上の方程式を満たす整数解を求めることと同値である。

そのために、いくつかの準備を行う。

### 補題Ⅶ

自然数  $x, y, z, t$  に対して、方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  が成り立つとき、 $x, y, z$  のうち少なくとも2つは偶数である。

[証明]

まず、すべてが奇数であると仮定する。  
奇数の2乗は4で割ると1余るため  $x^2 + y^2 + z^2$  を4で割ると3余ることがわかる。しかし、 $t^2$  は平方数であるため、等号は成り立たない。

次に1つだけ偶数とすると  $x^2 + y^2 + z^2$  は4で割ると2余る。しかし、 $t^2$  は平方数であるためこちらも等号が成り立たない。

よって  $x, y, z$  のうち少なくとも2つは偶数であることがわかった。

### 補題Ⅷ

自然数  $x, y, z, t$  に対して、方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  が成り立つとき、 $x, y, z, t$  のうち少なくとも1つは3の倍数である。

[証明]

$x, y, z$  のうち、どの1つも3の倍数でないとして仮定するとき、 $t$  は3で割り切れなければならないことを示す。

まず、3の倍数でない数を2乗すると、3で割ると1が余る。 $x, y, z$  のいずれも3で割り切れないのだから、 $t^2$  は3で割り切れる。したがって、 $t$  は3の倍数でなければならない。

よって、 $x, y, z, t$  のうち少なくとも1つは3の倍数であることがわかった。

(Q.E.D.)

### 補題Ⅸ

任意の自然数  $x$  に対して、方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  を満たすような3数  $y, z, t$  の組が無数に存在する。

$n$  を任意の自然数とする。

(i)  $x$  が奇数であるとき

$$x, y = 2n, z = \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2, \\ t = \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2 + 1$$

は明らかに自然数であり、方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  を満たす。

(ii)  $x$  が偶数であるとき

$$x, y = 2n + 1, z = \frac{x^2}{2} + 2n^2 + 2n, \\ t = \frac{x^2}{2} + 2n^2 + 2n + 1$$

は明らかに自然数であり、方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  が成り立つ。

(Q. E. D.)

### 補題Ⅹ

任意の自然数の組  $x, y$  に対して、方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  を満たすような  $z, t$  が存在する。

[証明]

(i) 2数  $x, y$  がともに偶数のとき

$x^2 + y^2$  は4で割り切れるから、

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4} - 1, t = \frac{x^2 + y^2}{4} + 1$$

は自然数であり、 $x, y, z, t$  は方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  を満たす。

(ii) 2数  $x, y$  のうち一方が偶数、もう一方が奇数であるとき

(i) このとき、数  $x^2 + y^2 \pm 1$  は偶数となり、

$$z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2}, t = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2}$$

は自然数であり、 $x, y, z, t$  は方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  を満たす。

(Q. E. D.)

そこで、これまでの式を用いて直方体を求めてみよう。ここでは、 $x$  が奇数の場合を考える。よって、 $x = 3$ ,  $n = 4$  としてみよう。

$$\begin{aligned} x, y &= 2n, \\ z &= \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2, \\ t &= \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2 + 1 \end{aligned}$$

より、 $x = 3$ ,  $y = 2 \times 4 = 8$ ,

$$z = \frac{3^2 - 1}{2} + 2 \times 4^2 = 4 + 32 = 36$$

$$t = \frac{3^2 - 1}{2} + 2 \times 4^2 + 1 = 4 + 32 + 1 = 37$$

となり、 $(x, y, z, t) = (3, 8, 36, 37)$  が求められた。実際、この4数は

$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 = 1369$  を満たしている。

ここまですら整理すると、直方体の2辺を表す数は両方ともが奇数であるという場合以外は、他の辺と対角線を表す残りの  $z, t$  も与えることができる。

### 定理 35

対角線が自然数で表されて、3辺が連続するような直方体は存在しない。

[証明]

いま、直方体の3辺を  $(y-1, y, y+1)$ 、対角線を整数  $t$  で表すとすると、

$$(y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2 = t^2$$

$$3y^2 + 2 = t^2$$

が成り立つ。

ここで、 $y$  が奇数のときは、 $y^2$  を8で割ると1余り、左辺  $3y^2 + 2$  を8で割ると5余る。しかし、8で割って5余る数は平方数にはなりえない。また、 $y$  が偶数のときは、左辺  $3y^2 + 2$  は4で割ると2余る。しかし、そのような数も平方数にはなり得ない。(Q.E.D.)

最後に、各辺が自然数で表される直方体の対角線について、次の事実が成り立つ。

### 定理 36

各辺が自然数で表せるような直方体の対角線は、 $2^k$  または  $2^k \times 5$  のような形にはならない。ここで、 $k$  は0以上の整数である。

[証明]

負でない整数  $k$  が存在して、 $t = 2^k$  とするとき、方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  が自然数の解をもつと仮定する。

このような  $k$  の中には最小のもの  $m$  が存在する。しかも方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  の左辺の和  $x^2 + y^2 + z^2$  は、 $x, y, z$  が自然数のときは3より小さくはなり得ないから、 $m > 2$  である。

$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2m}$  で、3数  $x, y, z$  のうち少なくとも2つは偶数であることを考えると、残りの1つも偶数でなければならないことがわかる。

よって、ある自然数  $x_1, y_1, z_1$  を用いて、 $x = 2x_1$ ,  $y = 2y_1$ ,  $z = 2z_1$  とかける。

$$\text{すると、 } x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (2^{m-1})^2.$$

このとき、不定方程式が自然数解をもつ

という条件での  $m$  の最小性に反するため、直方体の対角線は  $t = 2^k$  という形にはならないことが証明された。

次に、 $t = 2^k \times 5$  という形にはならないことを証明する。そこで、同様に  $t = 2^k \times 5$  とするとき、条件を満たす  $k$  の最小値  $m$  を考える。

まず  $m = 0$  のときを考える。このとき、 $x, y, z$  について

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$$

が成り立つことがわかる。

ここで、補題IXから  $x, y, z, t$  のうち1つは3の倍数でなければならず、 $t$  は3の倍数ではないので、 $x$  が3の倍数であると仮定する。

すると、

$$y^2 + z^2 = t^2 - x^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$$

が成り立ち、 $(y, z, 4)$  がピタゴラス方程式を満たす。しかし、斜辺が4であるピタゴラス三角形は存在しないので矛盾する。したがって、 $m = 0$  のときは成り立たないことがわかる。

次に  $m > 0$  の場合を考えよう。

$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  より、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2m} \times 25$$

が成り立つ。ここで、右辺は偶数なので、 $x, y, z$  はすべて偶数でなければならない。

よって、 $x_1, y_1, z_1$  という整数が存在して、 $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$  を満たすことがわかる。

よって、 $x_1, y_1, z_1$  の3数は

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (2^{m-1} \times 5)^2$$

を満たす。しかしこれは、 $m$  が不定方程式

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (2^k \times 5)^2$$

を満たす  $k$  のうち最小であるということに反する。したがって、直方体の対角線は  $t = 2^k \times 5$  という形にもならないことが証明された。 (Q.E.D.)

直方体の対角線について、上述とは逆に、辺が整数により表すことができる直方体の対角線の長さになり得ないのは、 $2^k$  という形と  $2^k \times 5$  という形のみであるということ、フルヴィッツ (A. Hurwitz) が証明している。

つまり、100以下の整数について考えると、1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 64, 80 のような数が直方体の対角線の長さになり得ないのである。

## 6. 今後の課題

斜辺が  $n$  以下であるピタゴラス三角形の個数を精度のよい近似式として求めることができた。しがし、定数  $\tau$  の値はあくまでコンピュータを用いて絞り込んだ結果なので計算によって  $\tau$  の値を求めたい。また、 $\tau$  の値にどのような意味があるのかについても考察を深めたい。

## 7. 参考文献

- [1] 「ピタゴラスの三角形」, B. シェルピンスキー著, 銀林浩訳, 東京図書 (1993)
- [2] 「はじめての数論」, J. H. シルヴァーマン著, 鈴木治郎訳, ピアソン・エデュケーション (2007)
- [3] 「数論入門」, 北村泰一著, 槇書店 (1965)
- [4] 「数論入門」, 芹沢正三, 講談社ブルーバックス

- [5] *Asymptotic Evaluation of certain Totient Sums*, D.N.Lehmer, American J. of Math. (1900)
- [6] 「1つの角の大きさが決まっています、3辺の長さがすべて整数である三角形の作り方」, 山田 潤

## 8. 謝辞

顧問の川口先生には、整数論に関する基本的な部分を説明していただき、各発表会および本稿について様々なアドバイスをいただきました。また、サイエンス研究会物理班武田君には、データを求める際の基本的なパソコンの使用方法、プログラミングについて説明していただきました。ありがとうございました。

# カルボン酸を配位子とした酸化銅(II)による金属錯体の合成

4年C組 坂野 文香

4年C組 安浪 涼花

指導教員 越野 省三

## 1. 概要

今回、私たちはカルボン酸を配位子とした酸化銅(II)による錯体の合成を試みた。これら2つの物質の比を変えて合成を行い、錯体ができることを期待して実験を試みた。酸化銅(II)と酢酸との反応では黒色沈殿物が生成された。ギ酸との反応では茶色沈殿物が生成され、青色水溶液になった。実験の結果から実験に用いる配位子の種類によって反応の違いがあることがわかった。

キーワード 酸化銅(II)、カルボン酸、錯体合成

## 2. はじめに

カルボン酸は架橋構造をとる配位子の一つである。合成に架橋構造を持つ配位子を用いることで物質が多核錯体になる可能性が高くなる。また、多核錯体には特徴のある性質を持つ物質も報告されている。そこで、今回、合成にカルボン酸を用いることにした。

酢酸の構造式は図1のように表される。

酢酸イオンのカルボキシル基の2つの酸素原子には図2のように電子が均等に分布して2つの酸素原子を区別することはできない。(非局在化)

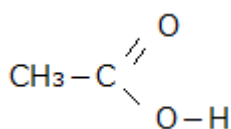


図1

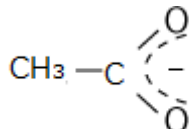


図2

また、ギ酸は図3のように表される。

図4も図2と同様に、2つの酸素原子を

区別することはできない。

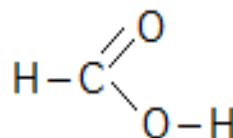


図3

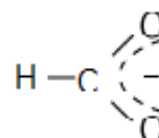


図4

直鎖カルボン酸は炭素数の少ないものからギ酸(R=H)、酢酸(R=CH<sub>3</sub>)、プロピオン酸(R=C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)、酪酸(R=C<sub>3</sub>H<sub>7</sub>)、吉草酸(R=C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>)、カプロン(R=C<sub>5</sub>H<sub>11</sub>)、エナント(R=C<sub>6</sub>H<sub>13</sub>)、カプリル(R=C<sub>7</sub>H<sub>15</sub>)、ペラルゴン(R=C<sub>8</sub>H<sub>17</sub>)、カプリン(R=C<sub>9</sub>H<sub>19</sub>)、ラウリン(R=C<sub>11</sub>H<sub>23</sub>)、ミリスチン(R=C<sub>13</sub>H<sub>27</sub>)、パルミチン(R=C<sub>15</sub>H<sub>31</sub>)、マルガリン(R=C<sub>16</sub>H<sub>33</sub>)、ステアリン(R=C<sub>17</sub>H<sub>35</sub>)などがある。

配位子とは孤立電子対を持つ基を有し、この基が金属と配位結合して錯体を合成するものである。

今回合成に使用したCu<sup>2+</sup>は図5のように正八面体の6つの頂点に、配位子が結合する6配位の金属イオンである。



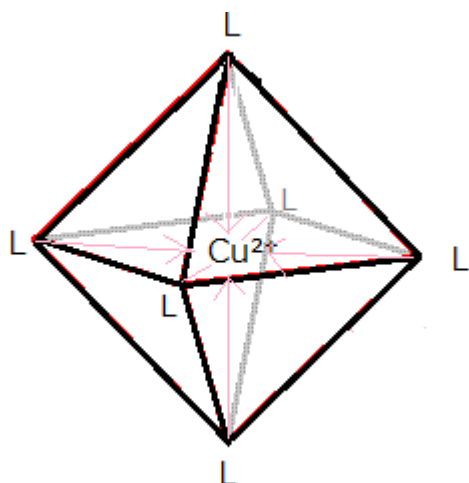


図 5

また、 $\text{Cu}^{2+}$ は6配位なので4配位の $\text{Zn}^{2+}$ や2配位の $\text{Ag}^+$ よりも多様な錯体を合成する可能性がある。そこで今回、銅の酸化物である酸化銅を合成に用いることにした。

$\text{Cu}^{2+}$ の個数が増加すると配位子の結合の仕方によって、図5とは異なる、 $\text{Cu}^{2+}$ を2個以上持つ多核錯体の構造をとることも考えられる。

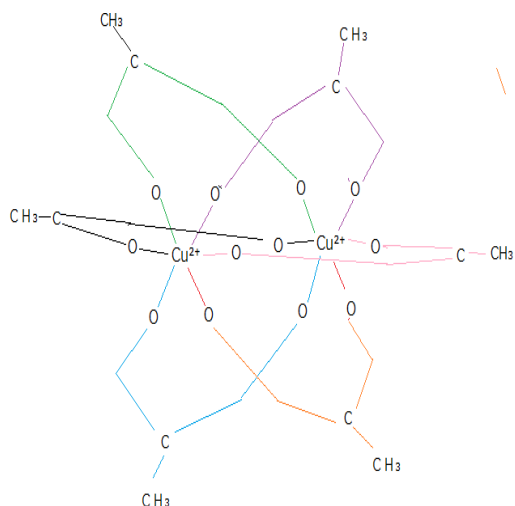


図 6

図6は $\text{CH}_3\text{COO}^-$ が架橋配位した $\text{Cu}^{2+}$ の錯体の一例である。

### 3. 実験

- ① 酸化銅(II)0.04g (0.01mol)、ギ酸 $19\mu\text{L}$ を水15mLに加えた。



図 7

- ② マグネティックスターラーで、2日攪拌した。



図 8

- ③ 底に沈殿した茶色の粉末状の物質を吸引過した。

以下同様に、攪拌時間・カルボン酸と酸化銅(II)の物質量の比を変えて実験を行った結果を示す。

実験	ギ酸( $\mu\text{L}$ )	酢酸( $\mu\text{L}$ )	攪拌時間 (日)	溶液の色	沈殿物の色
1	19		2	青緑	茶・多い
2	38		2	青緑	黒茶
3	57		2	青緑	茶
4	76		2	水色	茶・少ない
5	95		2	青緑	茶
6		28.5	1.5	黒	黒
7		57	1.5	青黒	黒
8		85.5	1.5	黒	黒
9		114	1.5	青黒	黒
10		142.5	1.5	青黒	黒

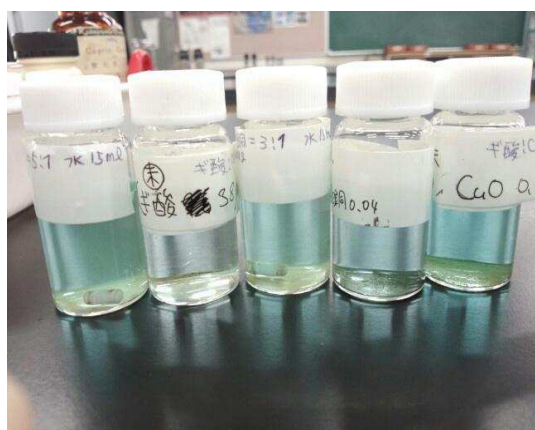


図9

左から順に実験5、4、3、2、1の攪拌後の様子である。ギ酸を配位子として合成した溶液の色は水色になっている。



図10

左から順に実験10、9、8、7、6の攪拌後の様子である。酢酸を配位子として合成した溶液にはほぼすべてに黒色沈殿物が見られるが、色には変化がなかった。

#### 4. 考察



図11 実験1

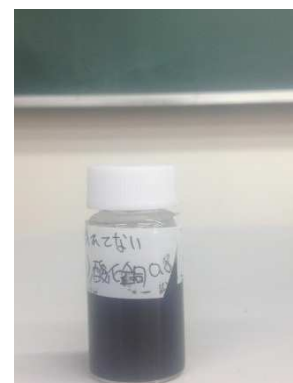


図12 実験6

実験1と実験6を比べると、実験1は図11のように茶色の粉末が沈殿し、溶液が青色に変化していたが、実験6は図12のように黒色の粉末が沈殿したままで溶液の色に変化がなかった。ギ酸を配位子として用いた溶液が青くなっていたことから、実験1

は何らかの反応をしていたのではないかと  
思われる。反応に違いがあったのは、ギ酸  
と酢酸の構造上の違い、アルデヒド基  
(C-H-O)の有無が関係しているのではない  
かと考えられる。

ギ酸のアルデヒド基は還元性を持つので、  
相手を還元し、自らは酸化されやすい。  
さらに酸化銅(II)は水に溶けないという性  
質がある。これらより溶液の色が青くなっ  
たのは、アルデヒド基が酸化銅(II)の持つ  
 $O^{2+}$ を奪い、水溶液が青系統の色を示すこ  
とが多い $Cu^{2+}$ が溶液中に存在しているからで  
はないかと考えられる。

一方、実験6で酢酸の溶液に反応が見ら  
れず、 $Cu^{2+}$ が存在していないのは、酢酸が  
アルデヒド基を持たず還元性がないためだ  
と考えられる。

よって、この実験から酢酸あるいはギ酸  
を配位子とした酸化銅(II)との合成反応で  
は、配位子の還元性の有無が関わっていると  
推測される。

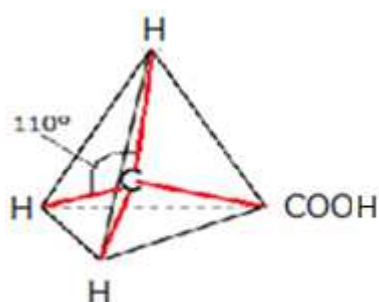


図 13

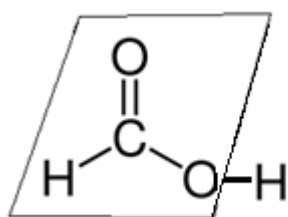


図 14

また、図13のように酢酸イオンのメチル  
基の水素-炭素-水素の結合角は $110^\circ$ である。

一方、ギ酸イオンは図14のように炭素、  
水素、酸素の4つの原子が同一平面上にあ  
る。つまりギ酸イオンは酢酸イオンと比べ  
ると、かさ高さが小さいため配位結合する  
際に金属イオンに接近しやすい。このこと  
も、反応に違いがあった原因の1つではな  
いかと考える。

## 5. 今後の課題

ギ酸や酢酸以外のカルボン酸と酸化銅  
(II)や水酸化銅(II)との合成を行っていく  
予定である。また合成された化合物の性質  
を調べ、何らかの規則性を考えていきたい。

## 6. 謝辞

今回はサイエンス研究会化学班の活動に  
おきまして指導教員の越野先生に多大なご  
指導を賜りました。また、その他教員の方々  
にも多大なご指導をいただきました。

この場で、深く感謝申し上げます。

## 7. 参考文献

[1] カルボン酸物質の一覧表

[HTTP://JA.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/%E3%82%AB%E3%83%AB%E3%83%9C%E3%83%B3%E9%85%B8](http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AB%E3%83%AB%E3%83%9C%E3%83%B3%E9%85%B8)

[2] アルデヒド基の基礎知識

[HTTP://WWW.WDIC.ORG/W/SCI/%E3%82%A2%E3%83%AB%E3%83%87%E3%83%92%E3%83%89%E5%9F%BA](http://www.wdic.org/w/sci/%E3%82%A2%E3%83%AB%E3%83%87%E3%83%92%E3%83%89%E5%9F%BA)

[3] 金属錯体

[HTTP://WWW.CH.NAGASAKI-U.AC.JP/COO/GUIDE/COMPLEXES.HTM](http://www.ch.nagasaki-u.ac.jp/coo/guide/complexes.htm)

# マツタケの人工培養を目指して

3年B組 岡田 瀬礼奈 3年C組 熊谷 京香 3年C組 榊田 奈央  
3年C組 米田 英里奈 2年A組 松井 絵莉子 1年B組 結崎 祈  
指導教員 櫻井 昭

## 1. 要約

私たちの班は、マツタケの人工培養を目指し昨年度から研究を始めて2年になる。1年目は、キノコの子実体形成に関する基礎を学ぶため、自分たちでシイタケの人工培養を行う方法を確立した。2年目の今年度は、シイタケの人工培養の際、子実体形成を促進するために必要となる栄養分の検討を行い、子実体形成をスムーズに進めさせる方法の確立を目指した。また、マツタケ菌の純粋培養を試み、なぜマツタケ菌の人工培養が困難であるのか、培養するための培地条件の検討を行なった。

キーワード 子実体、菌糸、組織、培地、呼吸

## 2. 研究の背景と目的

マツタケの人工培養の成功例はいまだ報告されていない。私たちは、なぜマツタケは人工培養が困難なのか興味をもち、マツタケの人工培養の成功を目指して研究を昨年度から始めた。昨年度の研究では、マツタケを培養するための基礎固めとして、人工培養に成功しているシイタケの培養を試みた。そして、自分たちだけでシイタケの人工培養に成功した。そこで今年度は、子実体形成時に培地に入れる栄養素によって成長に違いは出るのか検討し、マツタケ菌を子実体誘導に導くための足掛かりにしようと考えた。また、シイタケの人工培養を自分たちで確立できたため、今度はマツタケ菌の培養にも取りかかることにした。

## 3. 研究内容

### 3-1 シイタケの子実体形成時の栄養の検討

#### 3-1-1 実験仮説

シイタケの子実体形成時には、栄養としておがくず培地に米ぬかを加える方法が確立されており、私たちも米ぬかを使用した培地で子実体の形成に成功した。このとき、なぜ米ぬかが使用されるのか疑問に思い、米ぬか内に含まれる栄養素が菌の成長に有効なのではないかと仮説を立てた。

#### 3-1-2 実験方法

シイタケの菌糸を培養するため、寒天培地におけるシイタケの組織培養を行った。寒天培地の組成は、酵母エキス、麦芽エキス、ブドウ糖で、それらを混合させた培養液を寒天で固めた。その培地にシイタケの子実体から採取した組織を植え、25℃で培養した。

菌糸が殖えていることを確かめた後、子実体を形成させるためにおがくず培地に菌糸を移し替えた。

私たちが参考にしているキノコ培養の実験書では、おがくず培地の栄養素として米ぬかが用いられていたのですが、その米ぬかのところを、それぞれ雑穀、二種類の野菜ジュース、スポーツドリンク(以下、スポドリ)に替えた培地を作成した。

実験に使用した培地の組成をまとめると以下ようになる。

・寒天培地(YMG 培地)

酵母エキス	3g
麦芽エキス	7.5g
ブドウ糖	3g
寒天	11.25g
蒸留水	750mL

・おがくず培地

※米ぬか、雑穀

<div style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">{</div>	おがくず	900g
	※	300mL
	水	2145g

\* スポドリ、野菜ジュース

<div style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">{</div>	おがくず	1200mL
	*	715mL

菌糸を植えた、これらの培地を 17°C で培養した。

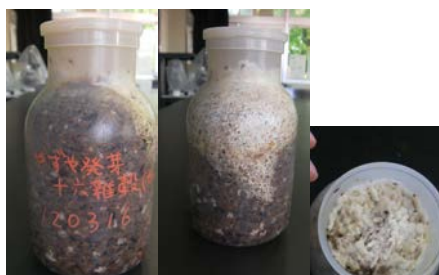
3-1-3 実験結果

約2ヶ月後に、すべての培地において、菌糸が殖えているのが確認された。以下の写真は3ヶ月後のものである。

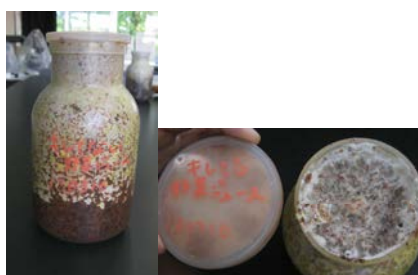
・米ぬか



・雑穀



・野菜ジュース①



・野菜ジュース②



・スポーツドリンク



さらに培養を続け、植え付けから6ヶ月後、各ポットに子実体ができているのが確認できた。



米ぬか 雑穀 野菜ジュース 野菜ジュース スポーツ  
① ② ドリンク

スポーツドリンクのポット以外のどのサンプルも子実体ができしたが、菌糸の伸びるスピードや子実体の数は、米ぬかが最もよかった。

### 3-2 マツタケ菌の純粋培養

#### 3-2-1 実験仮説

通常、マツタケ菌は IFO-7 培地という培地で培養されるが、私たちがこの培地を使ってマツタケ菌の培養を試みたところ、マツタケ菌が殖えず、すぐに他の菌に浸食されてしまった。

##### ・ IFO-7 培地

エビオス	5g,	グルコース	20g
寒天	18g,	蒸留水	1L

そこで、「なぜマツタケ菌が他の菌に負けてしまうのか。」「成長速度(分裂速度)の違いは何から生じてしまうのか。」その要因を突き止めたいと考えた。マツタケ菌は真核生物(単細胞生物)であるため、図1のような代謝経路を用いた成長(分裂)をするためのエネルギーを細胞内で作っている。マツタケは、グルコースを少しずつ分解してエネルギーを得ているが、グルコースをピルビン酸に分解する解糖系の回路の反応効率が悪いといわれている。そこで、グルコースの代わりにクエン酸回路でつくられる有機酸を、培地に直接加えればマツタケ菌の成長

速度が上がるのではないかと仮説を立て、実験を試みることにした。

#### 3-2-2 実験方法

IFO-7 培地のグルコースの代わりとしてそれぞれクエン酸、酢酸を加えた培地を 250mL ずつ作成し、それらの培地にマツタケ菌糸を植え付けた。250mL の IFO-7 培地に含まれているグルコース 5g の分子量と同じ分子量になるようにクエン酸あるいは酢酸を加えた。

#### 3-2-3 実験結果

クエン酸培地は IFO-7 培地同様凝固し培地を作成できたが、植え付けたマツタケ菌は殖えなかった。酢酸培地は固まらなかったため、菌糸を植え付けることができなかった。

## 4. 考察

#### 4-1 シイタケの子実体形成時の栄養の検討

スポーツドリンクのポットにあまり菌糸が広がらなかったのは、栄養分が糖とナトリウムのみのもを使用したためだと考えられる。反対に、一番栄養価の高い米ぬかのポットの菌糸が一番よく成長したので、シイタケは栄養があればあるほど成長が速くなると考えられる。(図1参照)

#### 4-2 マツタケ菌の純粋培養について

今回、培地にクエン酸を加えた際、培地が強い酸性になってしまったことにより酢酸培地が固まらず、またマツタケ菌が殖えなかったと考えられる。

## 5. 今後の課題

#### 5-1 シイタケの子実体形成時の栄養の検討

今回の実験で、米ぬかが最適であるとわかったので、米ぬか内のどの栄養素が子実体形成に有効なのか検討をしたい(表)。また、本来はポットの口の部分に子実体を形成させたいのだが、今回はポットの側面に形成されてしまった。子実体形成の向きを制御する方法も検討したい。

### 5-2 マツタケ菌の純粋培養について

有機酸を加えても培地が中性になるように pH 計を用いて調整し、再度マツタケ菌の培養に挑戦したい。また、クエン酸回路のどの有機酸を加えたときに最もマツタケ菌の成長が速くなるか検討したい。シイタケのように、マツタケも栄養分があればあ

るほど成長が速くなるのか確かめたい。

## 6. 参考文献

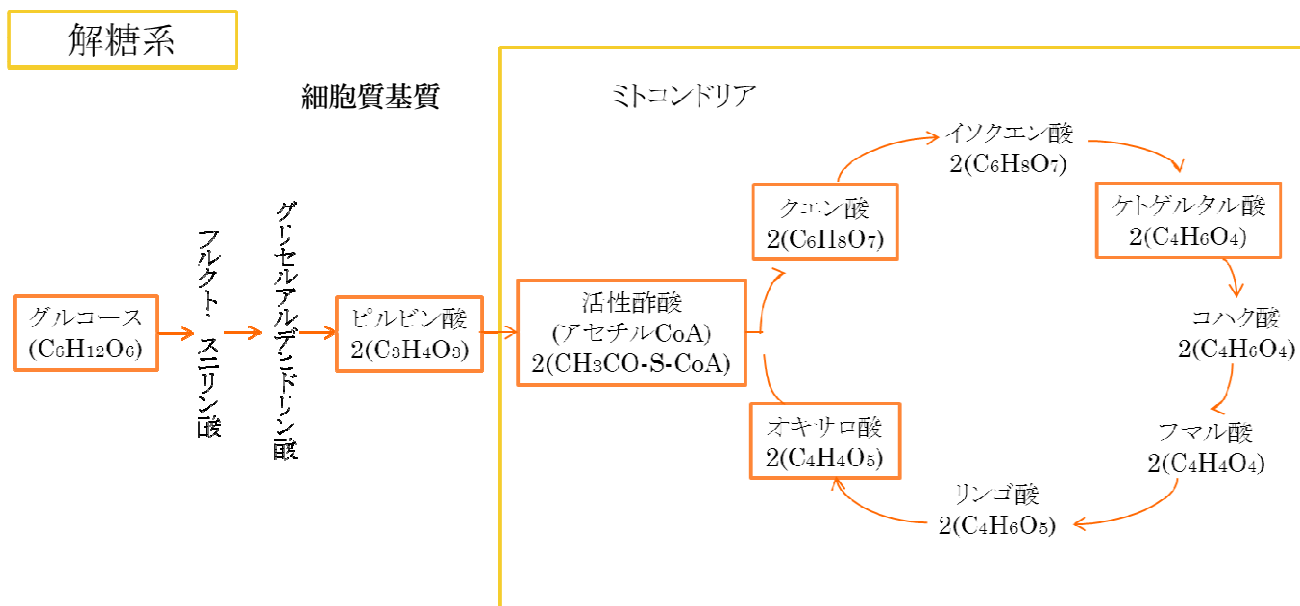
- [1]「きのこ実験マニュアル」,善如寺厚,渡辺直明,講談社,1987
- [2]「きのこの実験法」,衣川堅二郎,築地書館,1988

## 7. 謝辞

サイエンス研究会生物班の活動において、櫻井先生と奈良女子大学の植野洋志先生、片桐美香さんに、多大なご指導を賜りました。この場で、深く感謝申し上げます。

## 8. 図表

(図 1)



(表 1) 栄養分析

	野菜ジュース①	野菜ジュース②	雑穀	米ぬか	スポーツドリンク
エネルギー kcal	291.72	246.28	1062	858	114.4
タンパク質 g	6.864	0.795~4.77	26.7	39.6	0
脂質 g	0.572	0	10.5	54.9	0
糖質 g	62.92	54.817	195		
食物繊維 g	2.86	7.15	19.5	23.4	
ナトリウム mg	137.28	11.917~385.306	48	15	357.5
カルシウム mg	120.12		4101	138	
カリウム mg	2860	1016.9		5400	
鉄 mg	1.3156			18	
マグネシウム mg	74.36				
βカロテン μg		7070.6~38252.5			
葉酸 μg		4~31.8			
ビタミン A μg	2230.8				
ビタミン B1mg		0~194.6		7.5	
ビタミン B2mg		15.9		1.5	
ビタミン C mg	29.172	2.4~27.4			
ビタミン K μg	21.736				
シヨ糖 g			21		
水分 g				40.5	
炭水化物 g				114.9	28.028
ナイアシン mg				75	
リン mg				4500	



# 猿沢池の水質からプランクトンを考える

3年C組 狩田 帆乃夏  
3年C組 赤木 美穂  
3年C組 梅本 京芳  
3年B組 佐藤 輝歩  
3年A組 森本 奈都子  
指導教諭 矢野 幸洋

## 1. 要約

私たちは、奈良市の猿沢池に生息するプランクトンについて調べ、図鑑を作った。また、環境データの結果から、池の環境とプランクトンの増減について検証実験を行った。

## 2. 研究の背景と目的

- ・本校近くにある猿沢池では、季節によって水の濁り方が違うということに気づき、池の水質を調べることにした。
- ・濁りには、植物プランクトンの増減が関係しているのではないかと考え、プランクトンの採集も行った。
- ・植物プランクトンの量を数値としてとらえるために、クロロフィルの抽出実験を行った。
- ・猿沢池で確認したプランクトンを整理するため、図鑑を作った。

## ②環境データの測定

採集した直後に、気温、水温、pH、COD、DO、濁度の値を調べ、記録する。(気温、水温、pHの測定はデジタルpH計を、CODはパックテストを、DOはデジタルDO計を、濁度はデジタル濁度計を用いる。)

## ③遠心分離

持ち帰った水を、30mL 遠心分離管に入れ、遠心分離する。遠心分離管の底に沈殿したプランクトンをピペットで吸い上げ、スライドガラスに1滴ドロップし、プレパラートを作成する。

## ④観察

作成したプレパラートを顕微鏡で観察する。植物プランクトンにおいては、個体数が少ないものはカウントし、多いものはどの種が特に多かったのかを記録する。また、動物プランクトンにおいては、形の残っているもののみカウントし、すべての種について数を数える。

## 3. 研究内容

<I.環境データとプランクトンの採集・観察>

### (1)実験方法

#### ①水の採集

プランクトンネットを使用し、あらかじめ決めた場所で採水ビン1本分の水を採集する。

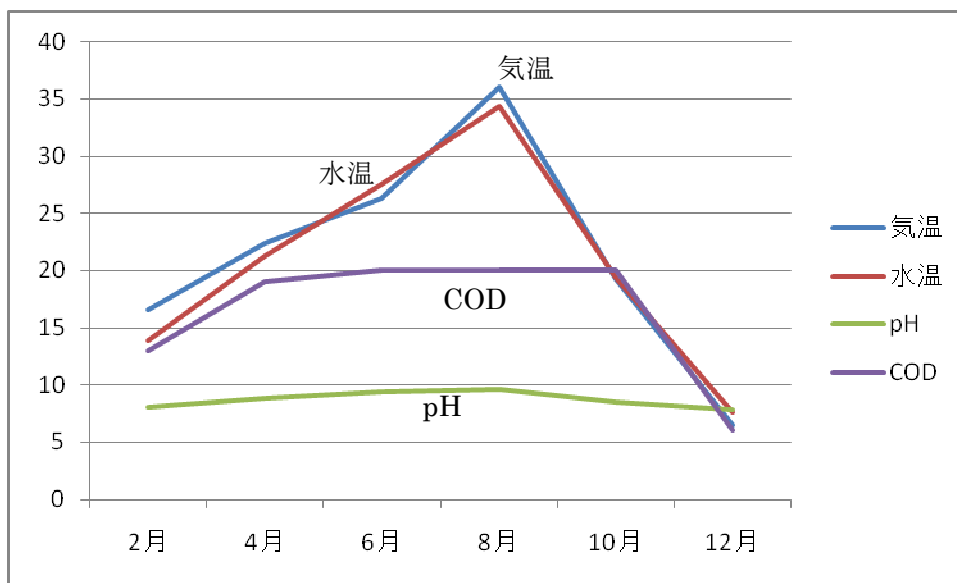
(2)実験結果

結果は、次の表・グラフのとおりである。

	気温	水温	pH	COD	DO	濁度
2011/01/27(木)		8.4	7.82	7		
2011/02/24(木)	16.6	13.9	8.07	13		
2011/06/09(木)			9.71	20		20
2011/09/24(土)	22.9	23.7	9.50	17		
2011/10/08(木)	17.5	18.6	9.23	19		
2011/11/05(土)						
2012/03/13(火)						
2012/04/21(土)	22.4	21.3	8.88	19	9.7	
2012/05/17(木)	24.4	26.3	9.58			
2012/06/28(木)	26.3	27.6	9.39	20	8.6	10.7
2012/07/17(火)		34.8	9.32		7.3	10.3
2012/10/09(火)	25.0			20		20以上
2012/10/20(土)	19.2	19.4	8.58	20		20以上

※表1において、空欄は、測定機器の故障または不足によって測定できなかった場合と、データ紛失の場合を示している。

表1



グラフ1

※グラフ1において、縦軸の目盛りは  
気温と水温は℃、CODはmg/Lを示す。

表2

※数は、確認された個体数を表す。  
 また、目測でのカウントが難しいものについては、○はある程度見られた、●はたくさん見られたことを示す。

		2010年11月4日(木)	2010年11月25日(金)	2011年2月24日(木)	2011年5月12日(木)	2011年9月24日(木)	2011年10月8日(土)	2011年11月5日(土)	2012年3月13日(火)	2012年4月21日(土)	2012年5月17日(木)	2012年6月28日(木)	2012年7月17日(火)	2012年10月9日(火)
藍藻	アナベナ・マクロスポーラ		○		○	○		○			○	●	●	
	アナベナ・フロスクアエ				○						○			
	アナベナ・スピロイデスクラッサ				●									
	M.ペーゼンベルギー	●	●		○	●	●	○	○	●	●	●	●	○
	M.ノバセッキ	○	●		○	●	○		○	●	○	○	○	○
	M.イクチオブラーベ				○	●								
緑藻	コエラストルム・マイクロボルム													
	スタウラストルム・セバルディ					○								
	スタウラストルム・ドルシデンティフェルム									4		●	○	3
	スタウラストルム・アークチスコン											1		
	セネデスムス・オポリエンシス					1						1	6	2
	テトラスポラ・ラクストリス				1	○						●	○	○
	ヒビミドロ					1								
	コスマリウム・ラルフス					1								
	キルクネリエラ											3	1	
	サメハダクンショウモ													1
	ヒトヅノクンショウモ(変種)					1								
フタヅノクンショウモ(変種)													1	
珪藻	A.アンビグア(変種)	●	○	○		●	○			●	●	●	●	●
	ハリケイソウ	●	●	●		●				○		●	●	●
	ホシガタケイソウ	○		○		○				○			○	○
鞭毛	ケラチウム・ヒルンディネラ					1				12	2	3	1	4
	ヤコウチュウの仲間													
	ディノブリオン・シリンドリウム								●					
原生生物	ゾウリムシ									1				
	ブレファリズマ					1								1
	ナベカムリ													
	タイヨウチュウ												3	
	ヒスチオバランチウム		1											
	特定不可													
ワムシ	テマリワムシ								1					
	チビワムシ												1	
	不明		1			●			5					
節足動物	アミメネコゼミジンコ													
	ケンミジンコ		●	1					10			○		
	ゾウミジンコ			6										
	ノロ													1
	ミジンコ									2				
	ヒゲナガケンミジンコ									●	●			

### (3)考察

- ・猿沢池の水質はアルカリ性である。  
→家庭用排水などの影響だと思われる。
- ・夏ごろ、COD、pHの値が増加する。  
→CODの値が増加したのは、生物の増加と関連があると思われる。
- ・夏ごろ、プランクトンの個体数が増加し、冬になると、減少する傾向にある。  
→気温が上がるにつれ、プランクトンが増加すると考えられる。
- ・藍藻類や珪藻類は、特定の2～4種が大量に見られるが、それに比べ、緑藻は、確認できた種類数は多いものの、個体数は少ない。  
→猿沢池の水が藍藻類や珪藻類が増殖しやすい水質であるのだと考えられる。また、藍藻類や珪藻類の方がもともと繁殖力が強い可能性があると考えられる。

### <II.クロロフィル抽出実験>

採水に行った日のうち、数回に1回の割合でクロロフィルの抽出実験を行った。

#### (1)実験方法

##### ①プランクトンのろ過

I-(1)と同じ方法で採集した200mLの水を、ろ過装置でろ過をする。

##### ②90%のアセトンの作製

アセトン54mL、蒸留水6mLを混ぜ、濃度90%のアセトンを60mL作製する。

##### ③クロロフィルの抽出

ビーカーに90%アセトンを入れ、そこに、①のろ紙を下向きになるように入れ、超音波洗浄機で、30℃で30秒間洗浄する。

### ④吸光度の測定

2本のセルに、③の上澄み液と90%アセトンを2/3ほどずつ入れ、分光光度計で、それぞれ750nm、663nm、645nm、630nmで吸光度を測定する。

### ⑤クロロフィル値の計算

上澄み液の測定値からアセトンの測定値を引き(引いたものをそれぞれの波長の測定値とする)、以下の式に数をあてはめて、クロロフィルa(Chl.a)、クロロフィルb(Chl.b)、クロロフィルc(Chl.c)の値を計算する。

※参考文献(1)より

Chl.a	$(11.64A - 2.16B + 0.1C)a \div VL$
Chl.b	$(20.97B - 3.94A - 3.66C)a \div VL$
Chl.c	$(54.22C - 14.81B - 5.53A)a \div VL$

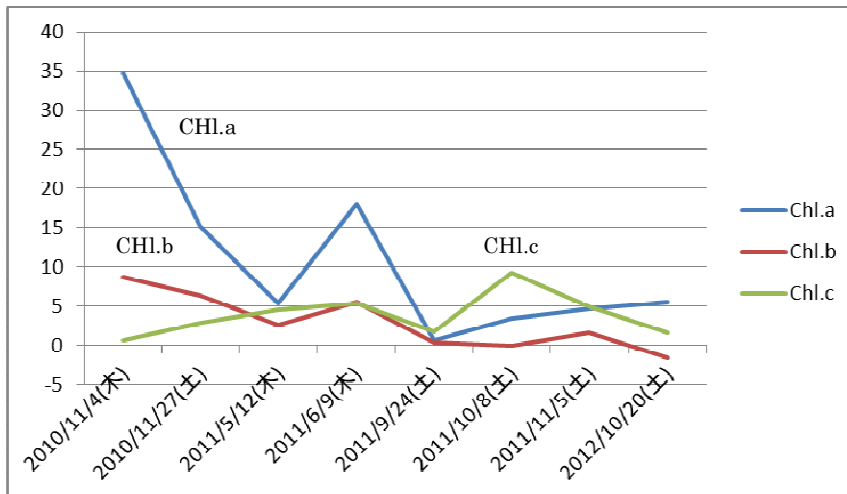
- ・A=663nmの測定値-750nmの測定値
- ・B=645nmの測定値-750nmの測定値
- ・C=630nmの測定値-750nmの測定値
- ・V=ろ過量=0.2(L)
- ・L=セルの長さ=5(cm)
- ・a=溶液の量=50(ml)

### (2)実験結果

結果は、次の表・グラフの通りである。

	Chl.a	Chl.b	Chl.c
2010/11/6(土)	34.8	8.66	0.67
2010/11/27(土)	15.1	6.34	2.88
2011/5/12(木)	5.41	2.59	4.52
2011/6/9(木)	18.1	5.59	5.36
2011/9/24(土)	0.68	0.4	1.76
2011/10/8(土)	3.42	0.03	9.28
2011/11/5(土)	4.66	1.68	5.01
2012/10/20(土)	5.58	-1.51	1.68

表 3



グラフ 2

(3) 考察

	藍藻	緑藻	珪藻
クロロフィルa	○	○	○
クロロフィルb		○	
クロロフィルc			○

表 4

表 4 は、それぞれの植物プランクトンがどのクロロフィルを保有しているのかを表したものである。

○は保有していることを表す。

※参考文献(1)より

また、表 3 より、

- ・ 藍藻類全体のクロロフィル量 =  $a - (b + c)$
- ・ 緑藻類全体のクロロフィル量 =  $b$
- ・ 珪藻類全体のクロロフィル量 =  $c$

これらをグラフにしたものがグラフ 3 である。

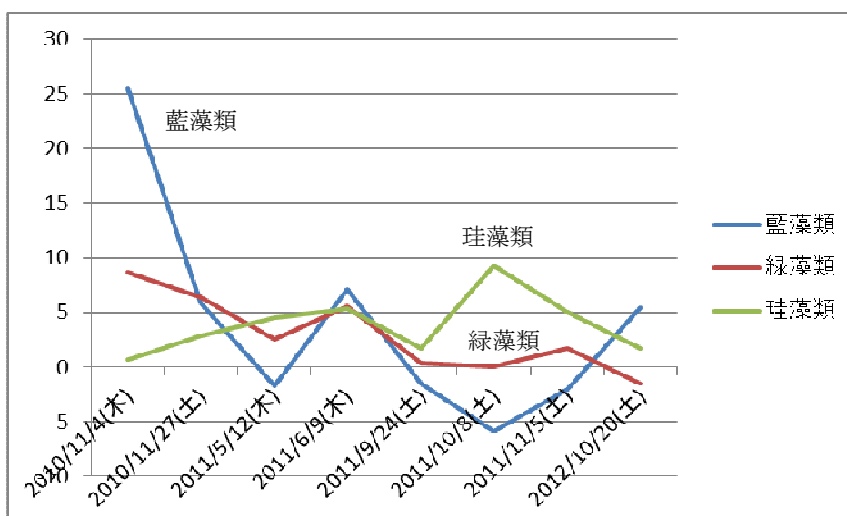
- ・ 表 4 より、クロロフィル a の量が最も大きいとわかるが、実験では、そのような結果にならなかった場合もあった。  
→ 計測におけるの誤差があったと考えられる。
- ・ 全体のデータを通して見ると、猿沢池では、クロロフィル量の値は  $a > c > b$  にな

る傾向があるとわかった。(グラフ 2)

→ 藍藻類や珪藻類は、ミクロキスティスやハリケイソウの大量発生によって、全体のクロロフィル量が多くなったと考えられる。

グラフ 3 より、

- ・ 藍藻類全体のクロロフィル量は、変化が大きい。  
→ 藍藻類であるミクロキスティスやアナベナの仲間はよく大量発生するので、このような変化が見られたのだと考えられる。
- ・ 緑藻類全体のクロロフィル量は、変化が小さく、他の類に比べて低い傾向がある。また、目測では圧倒的に緑藻類が少ないが、グラフにしてみると、珪藻類との差があまりなかった。  
→ 緑藻類は、1 個体が他の類に比べて大きいものが多いので、全体におけるクロロフィル量が予想以上に多かったと考えられる。
- ・ 珪藻類全体のクロロフィル量は変化が小さく、急に増加することがある。



グラフ 3

#### 4. 今後の課題

環境データとプランクトンの採集における改善点と、これからの実験方針について次に述べる。

- ・定期的な調査を目標として、研究を進めたい。
- ・データの管理を徹底する。
- ・他の池にも採水に行き、データを比較することで、猿沢池の特徴、またプランクトンの性質を調べたい。
- ・データを集めるだけでなく、そのプランクトンに合った水質を知るため、培養実験などを行っていきたい。
- ・植物プランクトンの増減と動物プランクトンの増減には関係があるのかを調べたい。

#### 5. 参考文献

[1]「新編湖沼調査法」,西條八束、三田村緒佐武著,講談社サイエンティフィク

[2]「やさしい日本の淡水プランクトン図解ハンドブック」,一瀬諭,若林徹哉著,合同出版株式会社

[3]「淡水微生物図鑑原生生物ビジュアルガイドブック」,月井雄二著,誠文堂新光社

#### 6. 謝辞

今回の研究を進めるにあたって、指導して下さった顧問の矢野先生、櫻井先生には深く感謝申し上げます。

# エネルギー変換効率について

4年B組 行松 美樹

4年C組 中森 春奈

指導教員 藤野 智美

## 1. 要約

サイエンス研究会地学班は、東日本大震災をきっかけにエネルギーに関する研究活動を行っている。この研究では、抽象的なイメージの強いエネルギーというものを、科学的に分析することを目的としている。今回は、電気エネルギーから光エネルギーに変換される際のエネルギーの変換効率について考察した。本稿ではその実験の一部を考察したい。

キーワード：電気エネルギー、熱エネルギー、光エネルギー、変換効率

## 2. 研究の背景と目的

前回までの研究を通して、位置エネルギーを電気エネルギーに変換するしくみと、その変換効率について理解することができた。そこで、今回は違う種類のエネルギー変換を調べようと思い、電気エネルギーから光エネルギーへの変換について考察することにした。

一への変換が白熱電球と比べると少ないという話をよく耳にする。そこで私たちは、白熱電球や LED 電球における光エネルギーへの変換効率の測定に興味を持った。しかし、光エネルギーを直接求めることは難しい。そこで、今回は電気エネルギーと熱エネルギーを求め、その差から光エネルギーを算出することにした。

## 3. 研究内容

### (1) 基礎知識

電球を光らせたとき、電気エネルギーがすべて光エネルギーに変わっているように見えるが、実際はそうではない。光エネルギーだけでなく熱エネルギーにも変換されている。白熱電球の場合、発生する光エネルギーと熱エネルギーの割合は約 2:8 程度といわれており、熱エネルギーへの変換がとて大きい。つまり、本来取り出したい光エネルギーへの変換効率が低いことがわかる。これに対し、LED 電球は熱エネルギ

次に理論的背景について説明する。電気エネルギー  $E$ [J] は、電流を  $I$ [A]、電圧を  $V$ [V]、時間を  $t$ [s]、電力を  $P$ [W] とすると、以下の式で与えられる。

$$E=IVt=Pt \quad \dots\textcircled{1}$$

また、熱エネルギー  $Q$ [J] は質量を  $m$ [g]、比熱を  $c$ [J/(g·K)]、温度変化を  $\Delta t$ [°C] とすると、以下の式で与えられる。

$$Q=mc\Delta t \quad \dots\textcircled{2}$$

比熱とは、物質 1g を温度 1°C だけ上昇させるのに必要な熱量のことであり、一般的に水の比熱は 4.2J/(g·K) とされている。

今回の実験では、①から②を引いて得ら

れたエネルギーを光エネルギーとして扱う。

## (2) 実験内容

図1のように、豆電球または白熱電球を直接水につけ、水の温度上昇から熱エネルギーを算出した。また、電気エネルギーは、電球の規格に基づいて算出した。

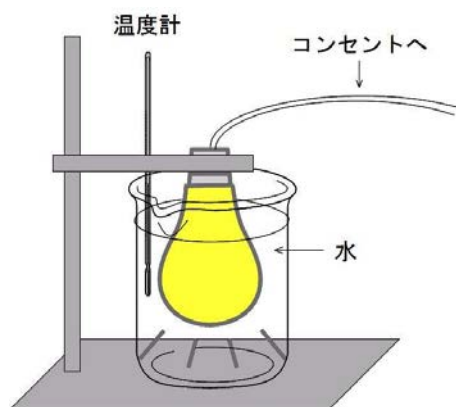


図1

### <実験1>

室温 28.7°Cの部屋で、水温 27°Cの水が 400mL 入ったプラスチックのビーカーに、5V,6.9W の豆電球をひたし、138mA の電流を流して6分間様子を見た。

#### [実験結果1]

温度変化はみられなかった。

#### [分析1]

使用した豆電球が小さかったため変化が見られなかったと考える。

### <実験2>

温度変化をわかりやすくするため、室温 27.8°Cの部屋で、電球を 100V,40W の直接コンセントにさすものに変え、実験1と同様に6分間様子を見た。また、ビーカーを

ガラス製のものに変えた。

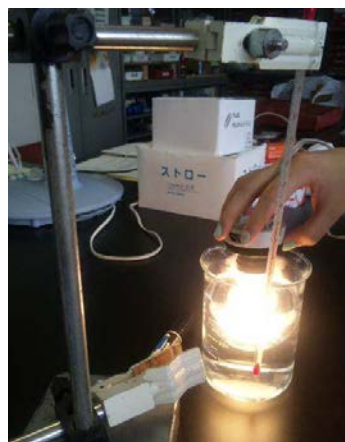


図2 実験2の様子

#### [実験結果2]

水温は 28.0°Cから 30.3°Cまで、2.3°C上昇した。よって、以下の値が求められる。

$$\text{電気エネルギー}(E)=40 \times 6 \times 60=14400[\text{J}]$$

$$\text{熱エネルギー}(Q)=400 \times 4.2 \times 2.3=3864[\text{J}]$$

$$\begin{aligned} \text{光エネルギー}(E-Q) &= 14400 - 3864 = 10536 \\ &= 1.05 \times 10^4 [\text{J}] \end{aligned}$$

すなわち、電気エネルギーの約73%が光エネルギーに変換されたことになる。

#### [分析2]

本来、白熱電球における光エネルギーへの変換は約20%であるのに対して、実験2では73%であった。その理由として、以下のことが考えられる。

- ・容器が小さすぎたため電球全体が水の中に入っていなかった。
  - ・白熱電球と温度計の間の距離が近すぎた。
- これらの分析を考慮し、実験3を行った。

### <実験3>

室温 28.2°Cの部屋で、水が 3000ml 入ったプラスチック製の水槽に実験2と同じ電



球を水にいれ、時々混ぜながら6分間温度変化を測定した。

[実験結果3]

水温は28.9℃から29.7℃まで、0.8℃上昇した。よって、以下の値が求められる。

$$\text{電気エネルギー}(E)=40 \times 6 \times 60=14400[\text{J}]$$

$$\begin{aligned} \text{熱エネルギー}(Q) &= 3000 \times 4.2 \times 0.8 \\ &= 10080[\text{J}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{光エネルギー}(E-Q) &= 14400 - 10080 \\ &= 4320 = 4.32 \times 10^3[\text{J}] \end{aligned}$$

すなわち、電気エネルギーの約30%が光エネルギーに変換されたことになる。

[分析3]

先ほどの実験と比べると、熱エネルギーが大きくなった。しかし、本来の割合と比べるとやはりまだ光エネルギーの割合が高い。その理由として、水槽を通して熱が外部に放熱してしまい、すべての熱エネルギーを測定できていないためだと考えられる。そこで、外部への放熱を防ぐために、発砲スチロールを使用して実験4を行った。

<実験4>

室温28.2℃の部屋で、水が400ml入ったガラス製のビーカーを大きめの発砲スチロール容器の中に入れ、10分間温度変化を測定した。電球は100V、40Wのものを使用した。

[実験結果4]

水温は26.5℃から37.6℃まで、11.1℃上昇した。よって、以下の値が求められる。

$$\text{電気エネルギー}(E)=40 \times 10 \times 60=24000(\text{J})$$

$$\text{熱エネルギー}(Q)=400 \times 4.2 \times 11.1=18648(\text{J})$$

$$\begin{aligned} \text{光エネルギー}(E-Q) &= 24000 - 18648 = 5352 \\ &= 5.35 \times 10^4[\text{J}] \end{aligned}$$

すなわち、電気エネルギーの約22%が光エネルギーに変換されたことになる。

また、今回は温度上昇の様子を図3にまとめた。Rとは相関係数のことであり、Rの2乗値が1に近づくほど近似曲線の信頼性が高くなる。

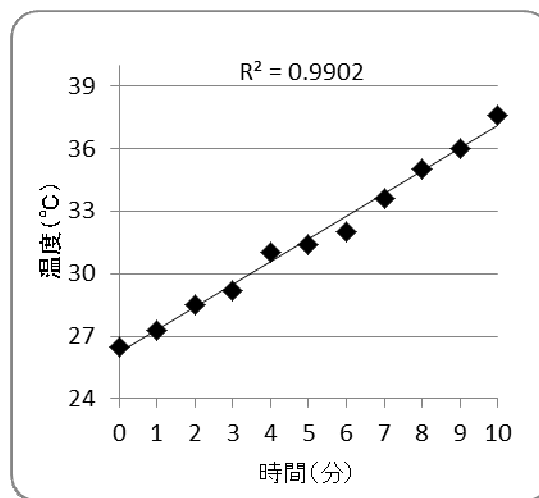


図3 実験4の温度変化

[分析4]

グラフから、時間の経過と温度変化は比例していることが分かった。また、発砲スチロールで周りを囲むことで、ある程度の放熱を防ぐことができた。ビーカーと発砲スチロールが密着していたらさらに放熱を防げたかもしれない。そこで、直接発砲スチロールに水をいれたら、より正確な測定ができるのではないかと考え、実験5を行った。

<実験5>

1000cm<sup>3</sup>の発砲スチロールの容器を製作し、その中にビニール袋をして水を発砲スチロール容器に直接700mL入れたもの

を用意し、室温 17.5°Cの部屋で、実験 4 と同じように 10 分間温度変化を測定した。



図 4 発砲スチロールの容器

[実験結果 5]

水温は 11.0°Cから 18.0°Cまで、7.0°C上昇した。よって、以下の値が求められる。

$$\text{電気エネルギー}(E)=40\times 6\times 60=24000\text{ (J)}$$

$$\text{熱エネルギー}(Q)=700\times 4.2\times 7=20580\text{ (J)}$$

$$\begin{aligned}\text{光エネルギー}(E-Q)&=24000-20580 \\ &=3420=3.42\times 10^3\text{ (J)}\end{aligned}$$

すなわち、電気エネルギーの約 14%が光エネルギーに変換されたことになる。

また温度上昇の様子を図 5 にまとめた。

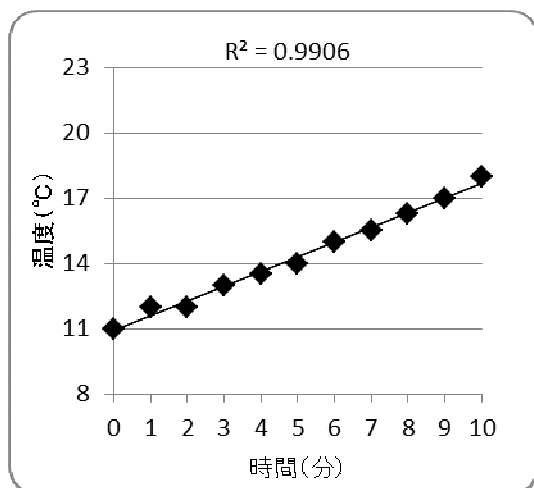


図 4 実験 5 の温度変化

[分析 5]

光エネルギーの割合が 14%になり、一般的にいわれているのとほぼ同値の結果を出

せた。外部への放熱をうまく防ぐことができたのだろう。また、図 3 と図 4 のグラフを比べると、図 4 の方が温度上昇のばらつきが少なかった。より正確な実験ができていると考える。

#### 4. 考察

実験 1 から実験 5 の結果をふまえ、次のような考察を行った。

- ・最終的に、光エネルギーの割合が 14%となり、一般的な数値に近づけることができた。
- ・白熱電球の熱エネルギーによる水の温度上昇は時間に比例しているようである。
- ・白熱電球は光エネルギーへの変換効率が低いことが確かめられた。

今回の実験で、熱エネルギーの測定が正確になればなるほど光エネルギーが小さくなっていったため、白熱電球の場合、本当に光エネルギーと熱エネルギーの割合が約 2 : 8 程度であることがわかった。

#### 5. 今後の課題

今回の実験で、熱エネルギーを正確に測定することができた。次は光エネルギーへの変換効率が高いとされる LED 電球で実験 5 と同様の測定を行って、白熱電球と LED 電球の比較を行いたい。

#### 6. 謝辞

サイエンス研究会地学班の活動において、藤野先生、米田先生に多大なご指導を賜りました。また、サイエンス研究会のみなさんにもたくさんご協力いただきました。この場で、深く感謝申し上げます。

# 「サイエンスライブ」参加報告

サイエンスライブプロジェクト

代表 1年B組 阿部 綾美

4年B組 玉置翔太郎

指導教員 野上 朋子

## 1. 概要

「サイエンスライブ」とは、まほろば・けいはんな科学ネットワーク推進室(以下、科学ネットワークとする)が主催する小学生対象の科学講座や工作実験コーナー等のイベントのことであり、奈良県下を中心に年4回実施されている。多数の機関が関わっているネットワークであるが、「サイエンスライブ」の工作実験コーナーは、奈良女子大学が主となりいくつかのブースを出展し小学生の指導にあたっている。私たちはその工作指導の補助役として昨年度(2011年度)から参加している。今年度(2012年度)は、昨年度の反省を生かし、サイエンスライブ当日に向けての事前学習と、当日の活動を振り返り次回へ繋げるための事後学習を行うことにした。

以下、私たちが参加したサイエンスライブの様子と、そのサイエンスライブ前後に行った事前学習・事後学習内容とその成果について報告する。

開催地	奈良	枚方
開催日時	2012年7月22日(日)8:30~17:00	2012年8月9日(木)8:30~17:00
開催場所	奈良市教育センター	枚方市教育文化センター
参加人数	1年生7名、4年生3名 計10名	1年生5名、4年生2名 計7名
担当 ブース	LEDプラネタリウム・ピンホールカメラ・風船カー・折り紙・ひも編み・室内凧・・・各ブースを1,2名が担当	室内凧・空気砲・ストロー笛・ひも編み・折り紙 ・・・各ブースを1,2名が担当
事前学習	2012年7月13日(金) 本校物理教室にて	2012年8月1日(水) 科学ネットワーク事務局にて
事後学習	2012年8月1日(水) 科学ネットワーク事務局にて	2012年9月3日(月) 本校ゼミ1教室にて

## 2. 活動報告

### (1)事前学習の実施

図1は、枚方で実施されるサイエンスライブに向けて行った事前学習の様子である。

サイエンスライブ当日に指導予定の工作を実際に作製することにより、工作の手順を確認すると同時に、指導する上で注意すべきことをみんなで確認し合うことができた。



図1「事前学習」

## (2)サイエンスライブ当日の活動

図2および図3は、本校生徒が担当したブースの様子である。



図2「空気砲」



図3「ピンホールカメラ」

工作に参加した小学生からは「わかりやすかった」や「楽しかった」などの声が、本校生徒からは「団結力を感じた」や「事

前学習で学習したことを応用して、教えられた」などの声があり、事前学習の効果が見られた。

## (3)事後学習の実施

事後学習では、サイエンスライブ当日に科学ネットワークが行っている、参加者用アンケートの結果が公表され、それをもとにして、良かった点や反省すべき点を共有した。そして、みんなで議論することで、次回のサイエンスライブにその反省がいかせるよう改善方法を検討した。

## (4)サイエンスライブプロジェクトの設立

事後学習で、来年度は補助役としてではなく、出展者として活動したいという意見が多かった。そこで、私たちは「サイエンスライブプロジェクト」を設立し、出展する工作を検討することにした。

2013年2月現在、このプロジェクトには1年生9名、3年生1名、4年生7名計17名が所属しており、3班(1班5~6名程度)に分かれ活動している。班ごとに放課後などを利用して、工作内容を決定し、試作を繰り返している。来年度のサイエンスライブには出展できる見通しであり、校内で開催している中間報告会で、より良い工作内容や指導方法をプロジェクトメンバー全員で意見交換をしている段階である。

## 3. 謝辞

今回のサイエンスライブに参加するにあたりご指導やご助言をして下さった本校校長の小林毅先生、まほろば・けいはんな科学ネットワーク事務局の森田聖さんにこの場をお借りして深くお礼申し上げます。

平成24年度 SSHサイエンス研究会  
生徒研究論文集

平成25年(2013年) 3月1日 発行

国立大学法人 奈良女子大学附属中等教育学校

〒630-8305 奈良市東紀寺町1丁目60-1

TEL. 0742-26-2571

FAX 0742-20-3660

<http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/>