

The background of the entire page is decorated with a repeating pattern of vertical, elongated, orange-colored shapes. Each shape has a blue outline and a small blue dot at its top and bottom, resembling a stylized drop or a cell. These shapes are arranged in five vertical columns, with varying lengths and positions, creating a rhythmic, organic texture.

平成 25 年度
スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会 研究論文集

SUPER SCIENCE HIGHSCHOOL SCIENCE LABORATORY
NARA WOMEN'S UNIVERSITY SECONDARY SCHOOL

平成25年度
スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会
研究論文集

奈良女子大学附属中等教育学校

平成 26 年 3 月 1 日

平成 25 年度スーパーサイエンスハイスクール

サイエンス研究会生徒研究論文集

目次

刊行にあって	1
2013 年度教育課程表	2
奈良女子大学附属中等教育学校 SSH カリキュラム	3
研究論文	
物理班	
クアッドコプターの製作	5
放電の探究	9
Web カメラの映像からの目検出ソフトの作成	13
拡張型情報表示デバイスの開発	17
文字認識ソフトウェアの作成	21
高精度車両挙動モデル開発へ向けて	33
二輪車での姿勢制御の研究	39
マイクロ波実験装置の製作	43
物質中でのマイクロ波の波長測定実験	47
豆電球と LED の電力特性	51
数学班	
完全数について	55
正五角形と黄金比	59
カプレカー変換に関する考察	65
素数の並びに規則はあるかⅢ	73
生物班	
猿沢池のアオコの発生を考える	81
植物の成長と音楽との関係	89
黄金比と植物	93
トカゲの生態	97
繊毛虫 ブレファリズマの細胞サイズの巨大化メカニズムを探る	99
カツオブシ菌の最適な培養条件について	103
地学班	
マイクロ波の研究	107

平成 25 年度 スーパーサイエンスハイスクール サイエンス研究会研究論文集刊行にあたって

奈良女子大学附属中等教育学校は、平成 17 年度に SSH(スーパーサイエンスハイスクール)の第 I 期 5 年間の指定を受け、現在、第 II 期の 4 年目を終了しようとしています。本校の SSH は、中高一貫の SSH の魁として研究を進め、深めてきました。理数教育のカリキュラム開発や、生徒全員の数学的リテラシー・科学的リテラシーの育成と、リベラルアーツの涵養を目標として実践研究を行っています。これらの研究は高い評価を受けていますが、それとともにサイエンス研究会の生徒たちの研究内容とその活躍も、非常に高く評価されています。

本研究論文集は、サイエンス研究会に所属する生徒の日頃の研究成果をまとめあげたものです。全校 6 学年で約 90 名が所属する、サイエンス研究会の生徒の研究テーマの選択と研究は、本校の校是の通り「自由に、自主的に、自立して」行っています。そして、中高一貫教育の 6 年間のゆったりとした時間の中で、「下級生は、上級生の姿を真似つつ育ち、上級生は、下級生を指導しながら育つ」のです。このような生徒たちを指導する教員は、生徒の自由な研究を尊重し、ときには「壁」となりながら、情熱を込めて指導しています。サイエンス研究会を指導する教員は、生徒の研究には 3 段階があると考えています。指導する教員は、各段階に応じた関わり方が求められますが、そのキーワードとともに 3 段階を示すと、次のようになります。

1. 研究課題を決定する段階

- ・徹底した話し合い
- ・助言者としての指導
- ・引っ張り上げる支援

2. 研究を軌道に乗せる段階

- ・細部にわたる問いかけ
- ・相談相手としての指導
- ・背中を軽く支える支援

3. 研究を自分で進める段階

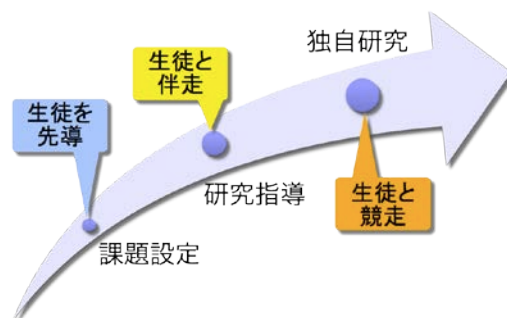
- ・対等な立場での討論
- ・競争相手としての指導
- ・後方から見守る支援

このような生徒の研究の状態と、教員の指導の様子をマラソンに例えると、右図のようになります。生徒と教員がともに学びつつ成長していくのが、サイエンス研究会の活動の大きな特徴の 1 つです。

さて、2013 年 11 月には、アメリカの 15 歳の高校生ジャック・アンドレイカ君が、すい臓がんの早期発見方法を開発し、国際科学技術フェア(ISEF)をはじめとして各種の賞を受賞するなど、大きな話題となりました。彼は、抗体とカーボンナノチューブの異分野の融合を思い付き、ICT を活用して論文を検索し、199 人の教授に断られても 200 人目で OK を勝ち取るなど、信念を持って成功するまで頑張った結果、格安(3 円)、高精度(400 倍)、短時間(5 分)でほぼ 100%完治の早期発見ができる検査方法の開発に成功したのです。また、2014 年 1 月には、小保方晴子さんが画期的な方法で「STAP 細胞」を作製しました。これも、自由な発想に基づく粘り強い努力が、研究成果として現れたものです。

サイエンス研究会の生徒諸君も、志を持って興味のある分野の研究に没頭することで、将来の日本を背負って立つ人間に育ってくれることを願っています。

平成 26 年 3 月



奈良女子大学附属中等教育学校

副校長 吉田信也

2013年度(平成25年度) 教育課程

学年 時間	1年	2年	3年	4年	5年		6年	
	共通	共通	共通	共通	文系	理系	文系	理系
1	国語基礎(4)	国語基礎(3) 情報と表現(1)	国語総合(4)	国語総合(5)	現代文(2)		現代文(2)	
2					古文(2)		古典(2)	
3								
4								
5	社会(3) 地理的分野	社会(3) 歴史的分野	現代社会(2)	現代社会(2)	漢文(1)		日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) *(3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)
6			現代史(2)		日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)	古典講読(1) *(1)	化学(4) △(0)or(4)
7								
8	基礎数学Ⅰ(4) 代数分野 幾何分野	基礎数学Ⅱ(5) 代数分野 幾何分野	数学探究ⅠA(3)	現代史(2)	世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)	物理(3) 生物(3) *(3)	世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) △(0)or(3)	化学(4) △(0)or(4)
9				数学探究ⅡA(3)				
10								
11								
12	情報と科学(1)	数学探究ⅠB(2)	自然探究Ⅰ (3)	数学探究ⅡB(2)	化学基礎(2) *(2)	化学基礎(2) 化学(2) *(4)	日本史特講(2) 世界史特講(2) 地理特講(2) △(0)or(2)	物理(4) 生物(4) △(0)or(4)
13	基礎理科Ⅰ(4)						基礎理科Ⅱ(4)	
14								
15								
16	音楽(2)	音楽(2)	音楽Ⅰ(2) 美術Ⅰ(2) 書道Ⅰ(2) 工芸Ⅰ(2) *(2)	解析Ⅰ(4) *(4)	解析Ⅰ(4) *(4)	数学 基礎演習Ⅰ・Ⅱ(2) △(0)or(1)or(2)	解析Ⅱ(5) △(0)or(5)	
17								
18	美術(2)	美術(2)	技術総合・ 家庭総合(2)	音楽Ⅰ(2) 美術Ⅰ(2) 書道Ⅰ(2) 工芸Ⅰ(2) *(2)	代数・幾何(3) △(0)or(3)	代数・幾何(3) *(3)	数学発展演習(2) 音楽Ⅲ(2) 美術Ⅲ(2) △(0)or(2)	解析Ⅱ特論(2) △(0)or(2)
19								
20	工創基礎1 生活基礎1 (2)	工創基礎2 生活基礎2 (2)	体育(3)	家庭総合(2)	代数・幾何(3) △(0)or(3)	代数・幾何(3) *(3)	発展現代文(2) △(0)or(2)	数学演習(1)△ (0)or(1)
21								
22	体育(3)	体育(2)	保健(1)	体育(2)	Reading(2) △(0)or(2)		体育(3)	
23								
24								
25	IE(3)	IE(3)	IE(2)	保健(1)	体育(3)		Topic StudiesⅡ(3)	
26								
27								
28	BE(1)	BE(1)	NET(1)	IE(Writing)(1)	Topic StudiesⅠ(3)		Reading(2) △(0)or(2)	
29								
30								
31	NET(1)	NET(1)	情報の科学(1)	NET(Speaking)(1)	Writing(1)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特論(2) △(0)or(2)
32	道徳(1)	道徳(1)	探究・世界Ⅰ(2)	情報の科学(1)				
33	HR(1)	HR(1)		探究・世界Ⅱ(2)	コロキウム(2)		Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)
34			道徳(1)					
短期集中	探究・奈良Ⅰ(1)	探究・奈良Ⅱ(1)	CGⅠ(1)	AG(1)	AG(1)		補講・AG(1)	
				テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)		テーマ研究(1) △(0)or(1)	

奈良女子大学附属中等教育学校 中高一貫SSH概念図



奈良女子大学附属中等教育学校 SSH リテラシーとリベラルアーツ



奈良女子大学 他大学



附属中等教育学校

高大接続
カリキュラム

21 世紀のリベラルアーツ

自然科学リテラシー

授業・特別講義

コロキウム(対話)・学術の智

生活科学
リテラシー

人文社会科学
リテラシー

育成したい力のキーワード

- 言語能力・言語認識
- 批判的思考力
- 他者への寛容・理解
- 学び方

生命論
環境論
宇宙論
数理科学
科学技術社会論
……
人間とは何か
現代社会論
文化と社会
歴史探究
比較文化論
……

サイエンス研究会

- 「スーパー」な生徒の育成
- 科学の面白さの普及

数学的リテラシーの育成

科学的リテラシーの育成

生活科学リテラシーの育成

教材開発・出版

高大接続(学習面)

ESD に基づく海外連携
コア SSH

研 究 論 文

クアッドコプターの製作

2年A組 上林 幹宜

2年A組 三浦 聡汰

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私たちは、強風などの悪条件下でも飛行することのできる、クアッドコプター（4枚のプロペラで姿勢制御を行う小型ヘリコプター）の開発を目指している。そのために、可能な限り簡単に無線通信をする方法の考察とともに、安定した飛行方法を研究している。

今回は、モータドライバー「TA7291P」と無線マイクロコンピューター「TWE-Lite DIP」を使用して、モータ制御と無線制御の研究を行った。

キーワード モータドライバー、モータ制御、無線マイコン、無線制御

2. 研究の背景と目的

東日本大震災などのような大災害が起こった場合に、がれきなどが散乱した道路では車などを使つての情報収集は難しいと考えられる。そのため、狭い隙間でも入ることのできるような小型で飛行する、小回りの利くものが情報収集の手段として必要だと考えた。そこで、そのような場合にクアッドコプター（図1）が便利ではないかと考えた。今回は、クアッドコプターを製作することを目的とし、まずは、モータ制御部分と無線制御部分に分けて、製作することにした。



図1 クアッドコプター
（参考文献5より引用）

3. 研究内容

3.1 モータ制御

今回使用したモータドライバー

「TA7291P」（図2）は東芝製のDCモータ用フルブリッジドライバーである。



図2 TA7291P

このモータドライバーは、2つのピンを制御するだけで正転、逆転、ストップのコントロールを行うことができる（図3）。

図3のLは0Vに近い電圧、Hは電源電圧に近い電圧である。また、出力端子、制御端子、Vref端子（一定の電圧を出力する端子）を持っているため、モータへ印加する電圧を調整することができる。

入力		出力		モード
IN 1	IN 2	OUT1	OUT2	
0	0	∞	∞	ストップ
1	1	L	L	
1	0	H	L	回転
0	1	L	H	逆回転

図3 TA7291Pでの入力、出力
(∞ は、ハイインピーダンス)

そこで、このモータドライバーを利用して、簡単にモータ制御を行うことができると考えた。今回は、TA7291PとDIPスイッチ（小型のスライドスイッチ）を用いてモータの制御を行った（図4、図5）。この回路を4つ使用して、4つのモータを同時に制御することに成功した。

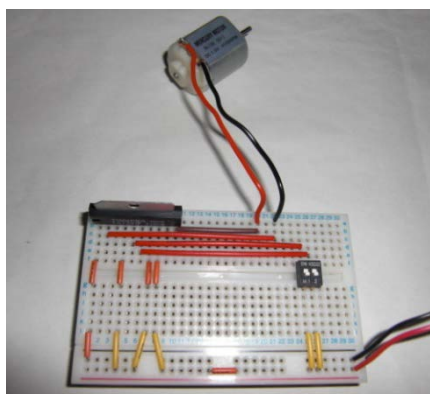


図4 モータの制御

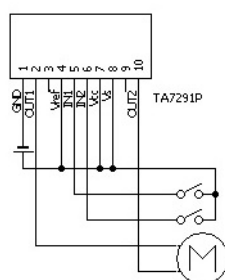


図5 図4の回路図

3.2 無線制御

今回使用する「TWE-Lite DIP（トワイライト・ディップ）」（図6）は、東京コスモス電機株式会社製の無線マイコンである。

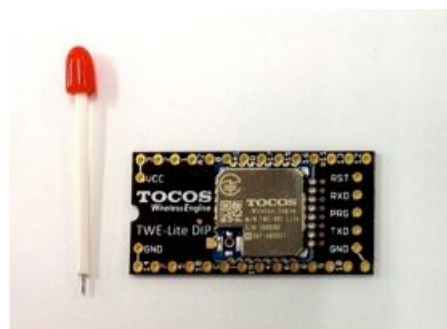


図6 TWE-Lite DIP
(参考文献3より引用)

この無線マイコンは、「簡単にすぐに使用できる無線モジュール」をコンセプトに開発されている。そのため、外部に制御用のマイコンを必要とせずに無線通信を行うことができる。また、はじめからプログラムが書き込まれているため、プログラム開発なしで使用することができる。TWE-Lite DIPは、以下のような仕様になっている。

- ・動作電圧：2.3～3.6V
- ・電波認証：ARIB STD-T66
(日本の電波法認証を取得している)
- ・デジタル入力：4つ
- ・デジタル出力：4つ
- ・アナログ入力：4つ
- ・アナログ出力：4つ

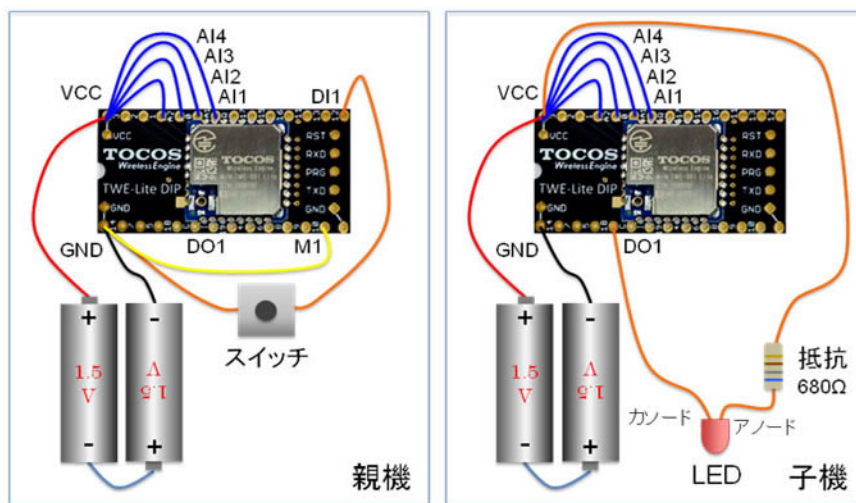


図7 実態配線図
(参考文献4より引用)

私たちは、はんだ付けを行う必要のない、ブレッドボード上で無線通信を行うことにした。この無線マイコンでは、デジタル制御とアナログ制御の両方が行える。今回はデジタル通信を行い、タクトスイッチなどを使用してLEDを点滅させた(図7)。

親機のタクトスイッチを押すと、DI1にGND(一端子)が接続されたことになり、無線でスイッチのON、OFFのデータが子機へ送られる。それが子機のDO1に出力され、DO1に接続されているLEDが点灯する。この仕組みを利用し、私たちは無線でLEDの点灯を制御することに成功した。

また、この無線マイコンは双方向デジタル信号通信(双方向リモコン)も可能なため、それにも挑戦した(図8)。親機にもLEDをつけ、子機にスイッチをつける。

すると、上の一方向通信と同じ仕組みで、子機から親機へもスイッチのON、OFFのデータが送られる。

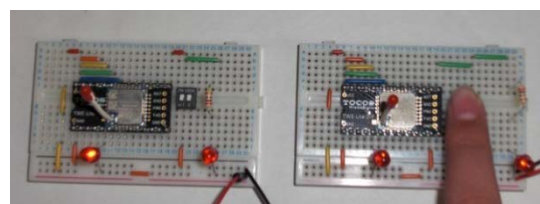


図8 双方向デジタル信号通信

4. 反省点

今回は、ブレッドボードを使うのに慣れていないこともあり、ジャンパーワイヤの接続ミスが多くなってしまい、それに気付くのに時間がかかってしまった。そのため、完成させるのにも時間がかかってしまった。

5. 今後の課題

今回、スイッチによって、モータドライバを用いたモータ制御と、無線制御を行うことができた。しかし、モータ制御と無線制御をつなげての制御を行うことがまだできていない。今後は、PICマイコンを用いたモータ制御や、加速度センサを用いたクアッドコプターの姿勢制御を行いたい。

また、TA7291P と TWE-Lite DIP とをつなげての、無線でのモータ制御を行いたい。

6. 参考文献

- [1]『電子工作マガジン No.20』電波新聞社(2013)
- [2]TA7291P データシート
<http://akizukidenshi.com/download/ta7291p.pdf>
- [3]TWE-Lite DIP マニュアル
http://akizukidenshi.com/download/ds/toc/os/TWE-Lite_DIP_manual.pdf
- [4]TWE-Lite DIP ピン配置表
http://akizukidenshi.com/download/ds/toc/os/TWE-Lite_DIP_pin.pdf
- [5]鋼のペンギン(Fullmetal-Penguin)
<http://ameblo.jp/fullmetal-moon/entry-11330869139.html>

7. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ、多くの先輩方から多大なご指導や、ご協力していただきました。この場で深く感謝申し上げます。

放電の探究

2年B組 清家 悠大

2年B組 中谷 駿介

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私たちは、周りの空気量などの環境によって放電がどう変化するかを調べた。また、放電から発生する電磁波の性質についても調べた。それらについて、わかったことを報告する。

キーワード 真空、放電、電磁波

2. 研究の背景と目的

近年、蛍光灯やLED(発光ダイオード)などの発光体が目覚ましく発達している。私たちはそのような発光体の中でも気体と放電の関係性に注目し、今後の私たちの電球開発で電球の発光体に放電を用いるとしたときに発生する課題や疑問を改善しようと思った。

また、光源として放電を利用する際、次の2点について考察し、改善しようとした。1つ目は、普通の空気中の放電だと電球として利用するほどの明るさを得られないと考えたため、明るくする必要があるということ。2つ目は放電からは電磁波が発生している可能性があり、ラジオなどの電波を使う機器に影響が出る可能性がある。このため、もしそれが出ているなら、それを遮断するべきということである。

3. 研究内容

今回は2つの実験を行った。

[実験Ⅰ] 普通の空気中の放電では電球として利用するほどの明るさが得られないので、明るくする必要がある。

これについては、放電の周りの環境を変えることで明るくなるのではないかと考えた。そこで微真空にする場合と、その中に様々な気体を入れた場合の2パターン(A、B)について調べた。

[実験Ⅱ] 放電からは電磁波が出ている可能性があり、ラジオなどの電波を使う機器に影響が出る可能性があり、もし出ているならそれを遮断する方法を考えるべきである。こちらでも2パターン(C、D)行った。

4. 実験Ⅰ

4.1 実験A

放電の周りの空気を段々と抜いていき、微真空にする。

4.1.1 実験Aの装置の説明

真空ポンプ、真空容器(直径約30cm、高さ約12cm)、電池、9V入力の高電圧発生装置(放電を発生させる機器)、リードスイッチ(磁石によってスイッチをon、offできる部品)、ネオジム磁石

真空容器の中に、高電圧発生装置と電池とリードスイッチを繋いだものを入れ、真空ポンプで真空容器の空気を微真空になる

まで抜く。そして、真空容器の外からネオジム磁石を使ってリードスイッチを on にし、高電圧発生装置で放電させる。つぎに、真空容器のバルブを緩め、空気を徐々に入れていく。

この実験を行う際、放電は周りの空気が減れば、光りの強さが増し、パチパチという音も小さくなると私たちは予想した。

4.1.2 実験 A の結果と考察

放電は微真空のときは光もあまり見えず、音もしなかったが、空気を入れるにしたがって、光が現れて太くなっていき、音も徐々に大きくなっていった。しかし、音は空気が少ないため、伝わりにくかったという可能性がある。このことから放電は周りの気圧が下がると、放電する力が下がるということが判明した。

4.2 実験 B

放電の周りの気体を変える。

4.2.1 実験 B の装置の説明

100V 入力の高電圧発生装置、放電管(窒素,水素,酸素,ネオン)、分光器

高電圧発生装置の端子と放電管をワニ口クリップでつなぎ様子を観察する。そして、分光器で放電のスペクトルを見る。この実験を行う際、私たちは周りの気体が変わっても放電の様子やスペクトルに変化はないと考えた。

4.2.2 実験 B の結果と考察

実験結果は図 1 の通りになった。4.1 の放電に比べて、明らかに明るくなっていた。このことより、放電は周りの気体が変わると色が変わり、明るさは通常のとくに比べてとても明るくなることがわかった。

5. 実験 II

放電からは電磁波が出ている可能性があり、ラジオなどの電波を使う機器に影響が出る可能性があり、もし出ているならそれを遮断する方法を考えるべきである。

5.1 実験 C

放電から本当に電磁波が出ているかを確認する。

5.1 実験 C の装置の説明

100V 入力の高電圧発生装置、ラジオを準備する。

高電圧発生装置で放電を発生させ、ラジオを近づけたり、遠ざけたりしながら雑音の入り具合で、放電から電磁波が出ているということを確認する。私たちは放電からは電磁波が出ているので、ラジオを放電へと近づけるほど、雑音は徐々に大きくなると予想した。

5.1.1 実験 C の結果と考察

ラジオを放電部分へと近づけるにつれて、雑音が大きくなっているので、放電から電磁波が発生している。しかし、このときに高電圧発生装置の端子同士が当たると、ラジオに小さく雑音が入った。さらに、蛍光灯の方に近づけると雑音が入った。

このことから、放電からは電磁波が出ている。さらに、端子同士が接触したときにも電磁波が発生している。また、蛍光灯からも電磁波は発生していると考えられる。

5.2 実験 D

放電からの電磁波を遮断する物質を考える。

5.2.1 実験 D の装置の説明

100V 入力の高電圧発生装置、ラジオ、金網(鉄製)、発泡スチロールケース、プラスチック皿(3枚)、A4用紙(2枚)

まず、高電圧発生装置で放電を発生させる。次に、金網、発泡スチロール、プラスチック皿、A4用紙のそれぞれでラジオを完全に覆う。そして、覆っているときと覆っていないときでの雑音の大きさを、物質ごとに電磁波を遮断することができるかを調べる。また、蛍光灯についても同じように調べる。私たちの仮説はどの物質を用いても電磁波を遮断することはできないというものである。

5.2.2 実験Dの結果と考察

放電から発せられる電磁波は金網のみで遮断することができた。また、他の物質では全く効果がなかった。さらに、蛍光灯についても同じ結果が出た。今回のことから、放電から出る電磁波は鉄を使うことで遮断できると考えられる。

6. 今後の課題

実験をしていく中で下記の疑問が発生したためそれぞれを解決していきたい。

- ・空気を抜いていくと、なぜ放電の光は弱くなっていったのか？また、なぜ通常の空気では青白い放電なのに、様々な気体の中ではカラフルな色に光ったのだろうかということについては、放電が発生する原理を調べるべきである。
- ・カラフルな色が混ざり合うとなぜ青白くなったのかということについては、空気の成分の割合と、光の混ざる度合いによる光りの色の変化について調べるべきだと考える。
- ・高電圧発生装置の端子同士が接近すると、なぜ、電磁波が発生するのかということについては、他の金属でも試してみるべきだと考える。

また、実験を行った際のこととして、今回の実験は真空容器内で行ったが、容器内は大きくなく、実験器具が散在しており実験がしづらい状況となってしまった。今後、実験を行うときは、部品等の配置などを決めて行いたい。

7. 謝辞

今回のサイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ、多くの先生方、先輩方から多大なご指導やご協力をいただきました。この場で深く感謝申し上げます。

図1 放電管内での放電の様子

気体名	放電の様子	放電の色	スペクトルのスケッチ	スペクトルの特徴
窒素		青紫色		・赤が最も明るく、縦線が多い。
水素		ピンク色		・明るさは全て同じで、色がはっきり分かっている。
酸素		白色		・全てが同じ明るさで光る。
ネオン		赤色		・赤, オレンジ, 黄色が明るい。

Web カメラの映像からの目検出ソフトの作成

4 年 A 組 稲益 秀成

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は、コンピュータに搭載されている Web カメラを用いて利用者を撮影し、その映像から利用者の顔、そして目線を検出する方法を研究した。

今回作成したソフトは、Web カメラで利用者を撮影し、その映像から顔の位置を検出し、そこから映像中の利用者の目の位置を検出することができるものである。

キーワード 目、目線、目線検出、Web カメラ、OpenCV、Processing

2. 研究の背景と目的

人間は他人の目を見ると、その目線と目線の先にあるものから、その人が何を見ているのかをおおまかに知ることができる。そこで私は、人間の目は視覚情報を得るといふ感覚器官としての機能だけでなく、自分の視覚情報を他人に知らせるといふ情報伝達の役割も持っているのではないかと考えた。今日幅広く普及しているコンピュータやスマートフォンなどが人間の目線を情報として取得できれば、これらの電子機器の使い方が広がるのではないだろうか。例えばコンピュータが利用者の見ているものを検出できれば、そこから利用者の興味のあるものを予測する、といったことが考えられる。

そこで、コンピュータが利用者の目線を得る方法について考えていくことにした。

現時点では目線検出までは完成していないため、顔検出、目検出について報告する。

3. 研究内容

コンピュータが利用者の目線を取得するために、Web カメラを用いた。

Web カメラとは、Skype や FaceTime などといった、インターネットでテレビ電話を楽しむときに相手にリアルタイムで送信するための自分の顔の映像を撮影するカメラのことである。



図1 Web カメラ



図2 スマートフォン等のインカメラ

また、図2のように最近のスマートフォンや、タブレット端末などには同様な用途のカメラが標準で内蔵されていることが多い。たとえ、標準で搭載されていない場合や、搭載されているカメラが低性能であったとしても、Webカメラは複数のメーカーから多数販売されており、手軽に高性能なカメラを用意することができる。よって、他に目線検出専用の機器を追加するよりもWebカメラを利用したほうが、手軽に目線検出を行うことができると考え、Webカメラで目線検出に向けた目検出を行った。

Webカメラの映像から利用者の目線の動きを検出する流れとしては、

- (A) Webカメラの映像から利用者の顔部分のみを切り出す。
- (B) 切り出した顔の範囲から目の位置を検出する。
- (C) 目の位置から、目の中心を計算し、その動きから目線を計算する。

といったものである。



図3 目検出までの流れ

これまで、目の認識までは成功していたが、今年度は精度を高めるために、顔検出方法についてさらに深く研究した。

現在、目線計算の部分はまだ完成していないため、(B)までを報告する。

3. 1 ノイズ除去

昨年度の時点で、目検出自体は安定したものが完成したが、その処理を行う顔検出が安定していないため、最終的な目検出の精度は十分なものではなかった。そこで、顔検出が安定しないのはカメラのノイズが原因だと考え、映像のノイズを除去する方法を調べた。そして、「メディアンフィルター」「平均値フィルター」という方法を検討した。

まず、「メディアンフィルター」とは、映像から、例えば3ピクセル×3ピクセルの大きさを切り出し、その範囲の9つのピクセルの濃度の中央値をその範囲の中心のピクセルの濃度にする、という方法である。

「平均値フィルター」は、同様に9つのピクセルについて考え、その平均値をその範囲の中心のピクセルにする、というものであるが、今回のプログラムではこの2つの方法は使えないと考えた。なぜなら、もし色相の中央値をとってしまうと、肌の色相が大きく変化してしまう可能性が高いからである。そうすると、逆に肌の色の検出が安定なくなってしまう。また、平均値をとることでは大きく色相の値が変化しないが、それでも色相が変化してしまい、肌の色だったものが肌の色と認識されなくなる可能性があるため、他の方法を考えた。

そして考えたノイズ除去方法は、まず肌の色が検出されたピクセルから左方向と上方向に、5ピクセルの範囲で、近いところから順番に肌の色のピクセルがあるかを探す。肌の色のピクセルが5ピクセル以内にあれば、最初の肌の色の点とその5ピクセル以内の点の間も肌の色にする。という方法である。

顔の映像にあるノイズを除去できればいいので、肌の色だけを見ていくことにした。この方法を使うことで、元々肌の色だったピクセルは変化せず、肌の色だと予想されるものは肌の色だと認識できるので、はじめの2つの方法に比べて良いと考えた。

結果

この方法では、ノイズが強い状態では顔以外の部分も肌の色に変更してしまったという問題点があった。また、リアルタイムで計算を行うには処理が重いものであった。

3. 2 OpenCV を用いた顔検出

肌の色を探していく方法では、なかなか精度を出すのが難しかったため、今度は肌の色ではなく、パターン認識を使う方法を用いた。たとえば、鼻筋の方がその隣の目のある部分の方より手前にあり、光が当たりやすいため明るくなる、といったように顔の一部分と別の部分との色の違いの特徴をデータベースに持っておき、このデータをパターンとして映像の左上から1ピクセルごとにずらしながら、今調べている範囲の映像の特徴が、データベース上の顔の特徴と一致するかを調べていく方法である。

また、この顔の特徴のデータは1つひとつでの認識率は低いものだが、2つの部分



図4 顔検出におけるパターン認識の例
(参考文献[6]より引用)

の色の違いであるため、シンプルで計算量が少なく済み、それらをたくさん用意して調べていくことで認識率を高めていくものである。

そこで、この顔検出を手軽に行うことができる、インテル株式会社が発表したオープンソースライブラリーである OpenCV を利用することにした。

この方法は点ではなく、部分と部分の色の差を用いるので、ノイズの影響を受けないという利点がある。

結果

OpenCV による顔検出の精度は高いものだったが、リアルタイムで目検出を行うには処理が重すぎるものであった。

しかしながら、この OpenCV による高精度かつ処理の重い方法と昨年度研究した、低精度かつ処理の軽い方法とを組み合わせれば今回の研究目標を達成するのに十分な性能の顔検出が行えると考えている。

4. 考察

今回、コンピュータで利用者の視線を取得するために、Web カメラで利用者を撮影し、その映像から目の位置を検出する方法を研究した。

顔の範囲の検出は、まだまだ改善の余地があるが、目の位置の検出の処理は軽く、安定しており、顔検出さえ改善すれば目認識をリアルタイムで動かすことができると考えている。

今後は、肌の色を使う方法と OpenCV によるパターン認識を用いる方法をどのように組み合わせて行くか、考えて行きたい。

5. 今後の展望

今回検出した目の中心から視線を推定し、それをコンピュータに活用させるようにしていくことが次の課題である。

そのためには、顔の向きや、顔と画面との位置関係を取得し、それらの情報から利用者の見ているものを計算していく必要がある。

これが完成すると、コンピュータは、利用者が何を見ているのかという情報を得ることができるようになる。これにより、例えばインターネットブラウザ利用者の視線から、その利用者の興味がどこにあるかがわかることになる。あるいはどのような内容が読んでもらえるかを今まで以上に調べることができるようになり、うまく使えば、Web サイトの質の改善につながると考えられる。

また、体の不自由な人でも視線の動きだけでコンピュータを操作できるようになる。例えば、画面に「あいうえお…」といったような文字の表を表示しておき、それを一

定時間見ることでその文字を選択したことにすれば、文章入力はもちろんだが、その文字を音声で出力することで、体が不自由な人でも会話することができるようになる。このような社会貢献につながると考えられる。

6. 参考文献

[1] メディアンフィルター

「<http://www.gifu-nct.ac.jp/elec/yamada/iwata/median/index.html>」

[2] Processing Reference

「<http://processing.org/reference/>」

[3] OpenCV ¥ Library

「<http://ubaa.net/shared/processing/open-cv/>」

[4] コンピュータビジョンのセカイ - 今そこにあるミライ

「http://news.mynavi.jp/series/computer_vision/008/index.html」

[5] Adam Harvey Explains

Viola-Jones Face Detection

「<http://makemantics.com/research/viola-jones/>」

[6] OpenCV.jp

「<http://opencv.jp/>」

7. 謝辞

今回の研究にあたり、サイエンス研究会物理班顧問の米田隆恒先生、藤野智美先生には、研究に関する助言や指導をしていただきました。また、同研究会のメンバーには研究のサポートをしていただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

拡張型情報表示デバイスの開発

4年B組 青木 雅典

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は、昨年度から、表示領域をハードウェア面でユーザーが自由に伸縮できる新しい情報表示デバイスの開発を行っている。今回は、その基本部分として、小型ディスプレイを搭載したデバイスを複数台組み合わせてユーザーが自由に操作できるデバイスのプロトタイプを製作した。

キーワード OLED、小型ディスプレイ、PIC マイコン、SPI、UART

2. 研究の背景と目的

近年、タブレット端末やスマートフォン等が普及したことで、ディスプレイを利用した小型の電子デバイスがより身近なものになってきた。



図1 液晶ディスプレイを搭載したスマートフォン

老若男女問わず、たくさんの人々が利用しているこれらのデバイスには、使用目的に応じた様々なサイズのディスプレイが取り付けられている。しかしながら、ユーザーが行える操作はすべて、たった一つの画

面の中でしか行うことができないので、デバイス本体の画面サイズによってユーザーにできることが限られてしまう。

この現状を打破するため、現在主流となっている「一つのデバイスあるいはシステムに、一つの画面」という考え方ではなく、「小型ディスプレイを複数枚組み合わせて使用する」ことを考えた。これにより、ユーザーはデバイスの並びや構成を変化させることでさらに多様な情報入力の手段を得ることができ、同様に多様な情報出力手段も得られると考えられる。

今回は、昨年度の課題であったデバイス間のデータ共有を可能にすることを目標に研究を行った。

3. 研究内容

3.1 研究事項

<研究1>

マイクロコンピュータから小型ディスプレイを制御し、画面に文字や写真などを描画する

<研究 2 >

デバイス間で通信を行い、一つの図形を複数のディスプレイにわたって表示する

3.2 研究内容

<研究 1 >

私は昨年度の研究で、小型の有機 EL ディスプレイ (以下、OLED) を搭載した情報表示デバイスを作成した (図 2)。

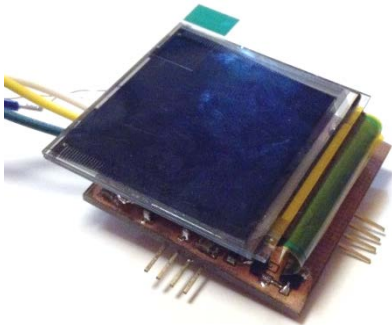


図 2 製作した情報表示デバイス

このプロトタイプデバイスでは、「UG-2828GDEDF11」と呼ばれる OLED を「PIC24FJ64GA004」マイクロコンピュータを用いて制御している。デバイスには、四辺それぞれに 2.0mm ピッチのオスピンとメスピンが対になって備わっている。ここにマイクロコンピュータのデータ通信端子を接続し、デバイス間で通信ができるようにする。また、自作の制御基板と小型の表面実装型部品を用いることで、制御回路を薄く、かつコンパクトにまとめた。これにより、デバイスを OLED 側から見たときディスプレイのみが見えるようになったため、連結時のディスプレイ同士の隙間を少なくすることができた。

今回使用している PIC マイクロコンピュータには UART (汎用非同期送受信回路) と呼ばれる通信モジュールが搭載されてい

る。UART は、SPI や I²C などの他の通信プロトコルと比べて、コンピュータとの通信が容易であることや、信号線の本数が少なくてもよい。そこで、ここでは、このデバイスとコンピュータを UART で接続し、OLED に表示する文字列や画像のデータを送受信する。

コンピュータから UART でデータを送信するには、「Tera Term」というシリアル通信のプログラムを利用する。キーボードからコマンドを直接入力できれば操作性が向上するため、今回は、ASCII コードで表されるアルファベット一文字をコマンドとして扱う。

<研究 2 >

研究 1 では単体のデバイスを制御することを目的としていたが、ここでは、拡張型の情報表示デバイスを実現するために、2 つのデバイスを接続し、2 つのディスプレイを一つの画面として使用することを目指とする。

コンピュータからデバイスに画像データを送るには、1 ピクセルごとのデータを UART で送らなければならない。そこで、私は、プログラミング言語 Visual C#を用いて専用の制御ソフトウェアを制作し、画像データを非常に簡単にデバイスへ送信できるようにした (図 3)。コンピュータからデバイスへ送信するデータは、「どのデバイスに対するデータか」と「画像の各画素データ」の 2 つを送る。画素データは、OLED のデータ形式と同じ、赤 5bit、緑 6bit、青 5bit の 16bit カラーにソフトウェアで変換してから送信している。

これにより、ソフトウェア利用者が、ど

のデバイスにどの画像を表示させたいかコンピュータ上で選択でき、デバイスはそれに従って動作することが可能となる。



図3 自作の制御ソフトウェア

4. 研究結果

＜研究1＞

コンピュータから UART で受信したコマンドに対応する動作を行い、受け取った情報を元に、文字列を OLED 上に描画させることに成功した(図4)。

また、昨年度よりも通信速度を上げたことで、データ送信から文字列描画までのタイムラグを少なくすることができた。

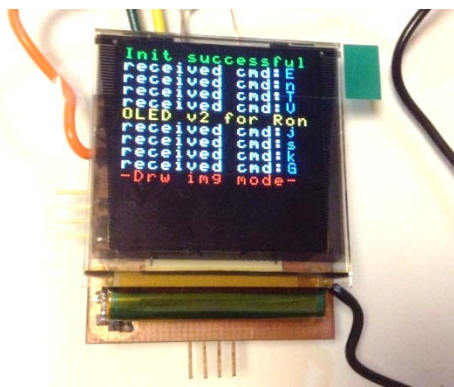


図4 OLED 上に文字列を表示

＜研究2＞

コンピュータ上の制御ソフトウェアから UART で画像をデバイスへ送信し、OLED 上に表示することに成功した。

また、2つのデバイスを接続し、1つのディスプレイのように画面を拡張させ、1枚の画像を表示させることにも成功した(図5)。



図5 1枚の画像を表示している

5. 考察

今回の研究で、デバイスは単体動作だけでなく、組み合わせることで、画面を拡張して使用することが可能となった。

しかしながら、今回のプロトタイプではコンピュータから画像データを受信しているため、デバイス単体では画像を表示することができない。また、画像を表示できるデバイスの数が2つに制限されてしまっているため、画面を次々に拡張していくことは難しい。

6. 今後の課題

今回製作したプロトタイプでは、実用性が非常に低い。単に画像の表示や文字列を描画するだけでなく、時計や地図などの、特定の目的に沿った、ユーザーが求めていると考えられる情報や機能を提供できるデ

バイスを開発する必要があると考える。

実用性のあるデバイスを開発するためには、様々な使用環境や、ユーザーの利用方法を考える必要がある。スクリーンサイズやシステム全体の大きさ、可搬性、汎用性などを踏まえ、これからの研究をより向上させ、より良いシステムを開発できると考えている。

7. 参考文献

[1] PIC24F リファレンスマニュアル <http://www.microchip.co.jp/download.html>

[2] SSD1351 データシート
http://aitendo2.sakura.ne.jp/aitendo_data/product_img2/product_img/oled/UG-2828GDEDF11/SSD1351.pdf

[3] UG-2828GDEDF11 データシート
http://aitendo2.sakura.ne.jp/aitendo_data/product_img2/product_img/oled/UG-2828GDEDF11/UG-2828GDEDF11.pdf

8. 謝辞

今回の研究にあたり、サイエンス研究会物理班顧問の米田隆恒先生には、日頃からご指導、ご助言をしていただきました。さらに、本校サイエンス研究会の先輩方にも多大なご協力をいただきました。この場をお借りして、御礼申し上げます。

文字認識ソフトウェアの作成

4年B組 上田 樹

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は、看板などで読めない漢字を見つけたとき、読みが分からなければ意味を調べるのも困難であると感じた。そこで、日本語に限らず、それらの文字を全て写真に撮るだけで認識することができれば、外国など読めない文字が使われている場所へも、もっと気楽に行くことができるようになって、便利であると考えた。

市販の文字認識ソフトもあるが、文字の状態によっては読めないことがある。そこで、Visual Basic を用いて、様々な状態の文字の写真に対応できる文字認識ソフトを自分で開発することにした。

キーワード 文字認識、エッジ、HLS、細線化、輪郭追跡、学習機能

2. 研究の背景と目的

看板などで読めない漢字や知らない言語の文字などを見つけたとき、そのたびに意味を調べるのは大変である。そこで、そのような場合でも全て、写真に撮るだけで文字を認識することができればよいと考えた。携帯電話などに付属している文字認識ソフトは、文字の並びや大きさによっては読めない、文字のバランスが悪いと読めない、斜めだと読めない、言語によっては読めないなど、読みとれる条件が限られている。また、私は昨年度までもこの研究を行っていたが、背景に模様等があると正しく文字を認識することができなかった。そこで、これらの問題を解消し、より多くの場合に対応できる文字認識ソフトの開発を行うことにした。

3. 研究内容

文字の特徴点を抽出し、それらをつないでいくことができれば、文字を線の集まりとして読み取ることができると考えた。そのために、前処理として文字の領域の抽出、また文字の頂点の認識のために線の中心部の抽出を行った。

3.1 文字の抽出

昨年度の研究では、写真から文字を検出する手段として閾値を決め、その値を境に輝度情報を2つに分けて写真を白と黒のみの画像にする2値化を行っていた。しかし、文字部分だけを正確に2値化で抽出するためには、文字と背景で輝度の差があることが最低条件であり、図1の写真のように写っている影の色が、文字に使われている色より暗い場合、背景部分の画素の全てが背

景色に含まれるような閾値にすると文字部分の色も含まれてしまうため、図2のように正しく抽出することが不可能となってしまった。また、本来の目的である看板からの認識では、背景に複雑な模様が映っている場合も予想される。そこで、それらの場合でも正しく動作するような文字の抽出方法を考案した。

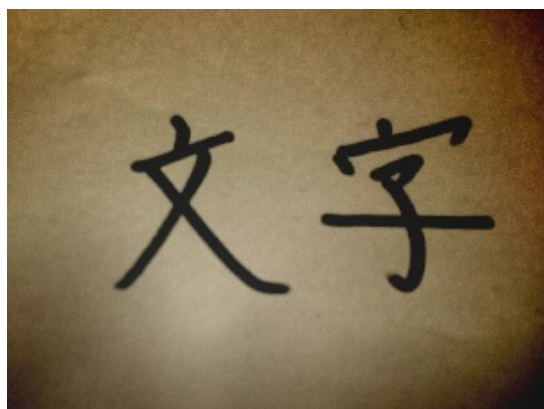


図1 影のほうが文字よりも暗い写真

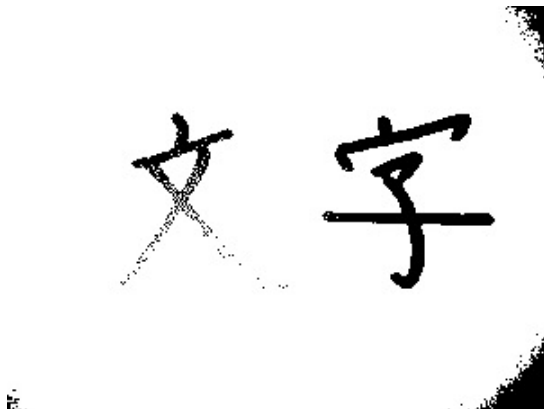


図2 図1の2値化結果

(1) エッジの検出

画像内で色が変わる部分の画素では、周辺画素との色の差が大きくなる。これを利用して、まず文字と背景との境目を求める。

画像内での色の変わり目の画素をエッジという。文字と背景では普通、輝度が異なるため、今回は各画素について周辺画素の

輝度の値の差をエッジ値とし、その値からエッジの強さを検出する。

まず横方向のエッジ値は、調べたい画素の周辺画素の輝度の値に以下の値をかける。この値の和は、その画素の右側の方が明るければ正、暗ければ負になり、また輝度の差が大きいほど絶対値が大きくなる。そこで、この値を右向きエッジ値とする。

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

縦方向のエッジも同様に、周辺画素に以下の値をかけることで計算できる。

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

この値から、縦横それぞれのエッジの向き、強さを計算できる。例として、図1の写真についてそれぞれの画素のエッジ値を求め、各画素のRGB値にそれぞれエッジの強さをあてはめた画像を作成したところ、図3、図4のような画像が得られた。

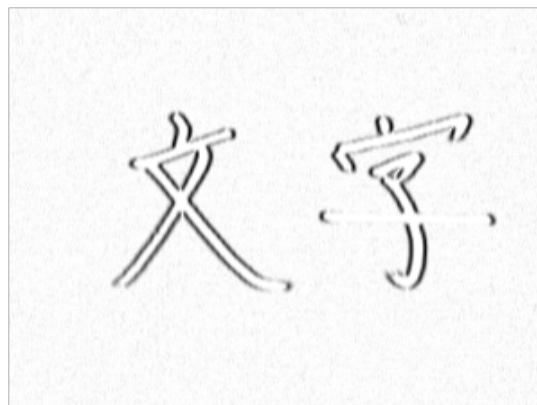


図3 横方向のエッジの強さ

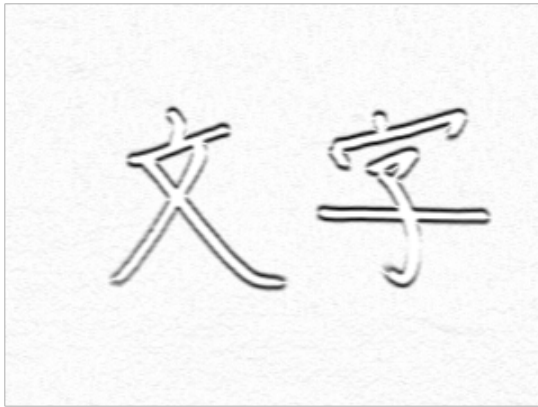


図4 縦方向のエッジの強さ

(2) エッジの方向の検出

先ほど得た値を横方向のベクトルと縦方向のベクトルと考えると、その合成ベクトルから各画素のエッジの向きと大きさが分かるのではないかと考えた。

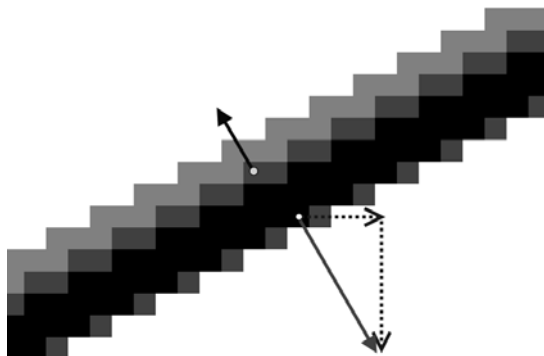


図5 エッジベクトル

まずこのベクトルの角度は、 x 成分と y 成分が分かっているため、 $\tan$ の逆関数によって求めることができる。またこのベクトルの大きさは3平方の定理から計算することができる。こうして得られるベクトルは、たとえば図5のような右上に向けてひかれた直線の画像の中では、図のように、その画素から見て明るい側に線の向きと垂直な角度をとる。また、得られるベクトル

の大きさは、図のように、周辺画素の輝度の差が大きいほど大きくなる。

こうして得られるデータを、エッジの角度を色相、エッジの強さを彩度として可視化すると、図6のようになった。



図6 エッジベクトルの角度と強さ

(3) エッジ間の距離検出

エッジの角度を計算したとき、文字の線の部分を挟む2つのエッジの向きはほぼ逆方向になるため、ある2つのエッジについて角度が真逆で、かつそのエッジの角度が2点を繋いだときの角度と一致するような位置関係のエッジ同士をつないで、その間の画素を記録すれば、線の部分を抽出できると考えた。

検出したエッジの強さが一定以上のとき、一般的に文字は背景より暗いため、そのエッジの向きと反対向きに直線を引き、重なった画素をたどって対応する線の端を探す。直線は (エッジの Y 成分) $\div$ (エッジの X 成分) を比例定数 a とする1次関数と考え、 $|a| \leq 1$ のとき (傾きが 45 度以下のとき) は $(X, a \cdot X)$ となる点を X を1ずつ変化させて、 $|a| > 1$ のとき (傾きが 45 度以上のとき) は $(Y/a, Y)$ となる点を Y を1ずつ変化させてその画素に注目していく。注目画

素について、(注目画素のエッジの強さ)×cos(注目画素と初めの画素のエッジの角度の差)を調べ、その値を足していく。この値の和について、本来注目画素が線から背景に移った時に0になるはずだが、判断基準がそれだけだと、線を挟んだ両側で影などによって背景色が異なっている場合正しく処理することができない。そこで、この和が始めのエッジの強さの半分より小さくなる、または(その値) ≤ -1 × (始めのエッジの強さ) のとき、初めの点からその点までを文字の線の内側であるとし、内側のそれぞれの画素についてエッジの強さを記録していくようにしたところ処理が安定した。すると文字である部分ほど値が大きくなる。そこで、各画素について、その値を最大値で割ったものをその画素が文字である割合とした。

しかし、この方法では文字のほうが明るい色である場合に対応できない。また、背景に模様がある場合、背景に文字よりも明るい色も暗い色も存在する場合がある。そこで、検出したエッジに対して逆の向きだけではなく同じ向きにも同様の処理を行うことにした。その結果を、文字である割合を輝度として可視化したものが図7である。



図7 ある画素が文字である割合

この得られた値にはノイズが多いため、平滑化を行う。平滑化の際、ただ単純に画像をぼかすだけでは、本当に線である部分の値も大きく変わってしまう。そこで、抽出したエッジの強さを利用して、本来の輪郭をできるだけ保持しながら平滑化を行う方法を考えた。

エッジが強い画素は元の画像では別の線の部分との境目になっていると考えられる。そこで、注目画素とその周辺画素について、エッジが強い画素ほど平滑化後の値への影響が小さくなるようにすれば、2つの線の間にエッジの強い部分が間にあればその両側の値が混ざらず、輪郭が保たれると考えた。そのため、注目画素とその周辺画素について、それぞれのエッジの強さをかけた重み付き平均を計算する。画素(x,y)の得られた文字である割合の値を $f(x,y)$ 、エッジの強さをその画像内でのエッジの強さの最大値で割り 0.0～1.0 までの値にしたものを $g(x,y)$ とすると、平滑化後の(x,y)の値は

$$\frac{\sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 f(x+i, y+j) \{1.0 - g(x+i, y+j)\}}{\sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 \{1.0 - g(x+i, y+j)\}}$$

となる。この処理を先ほどの抽出結果で行ったところ、図8のようになった。



図8 平滑化後の画像

ただし、このままでは線同士の間も線とされてしまっている。そこで、エッジ同士を繋ぐとき、その距離を記録するようにした。

先ほどの画像でそれぞれのエッジ同士の距離を求め、疑似カラーで可視化すると、図9のようになった

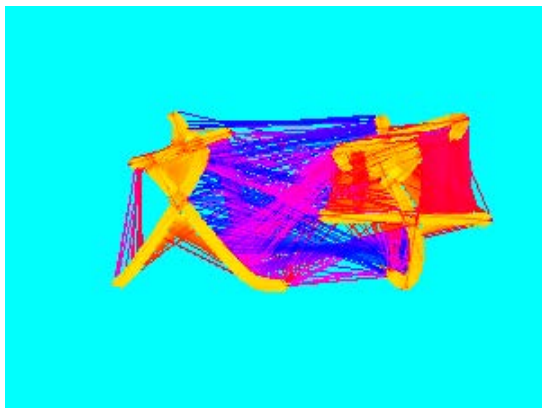


図9 それぞれの線の幅

このように、線の部分と線同士の間の部分に、明確に差がでた。

この記録した距離について、文字の部分と背景の部分では、文字の部分のほうが距離の値が小さいことが多い。そこで、文字である割合を計算する際、 $(1.0 - \text{記録した距離} / \text{距離の最大値} / 10)$ をかけ、線の距離が短いほど文字である割合が大きくなるよ

うにした。この方法で、街中などの背景が複雑な写真で文字である割合を計算したところ、次の図10のようになった。



写真の引用元 街画ガイド

(<http://komekami.sakura.ne.jp/archives/567/p8236268>)

図10 街中の写真からの文字部分の検出

このように、複雑な背景である写真の中からでも、文字の大まかな位置を認識することができるようになった。

(4) HLS モデル上の座標の計算

写真の中で、文字と背景では色に偏りがあることが多い。エッジからの線の抽出だけでは「線」と「線と同じ幅の模様」を区別することができない。そこで、各画素の色の情報についても考慮することにした。色の違いを正確に数値化するために、各画素の色の HLS モデル上の座標を計算する。HLS とは、色情報を双六角錐にモデル化

されたもので、H が色相、L が明度、S が彩度を表している。

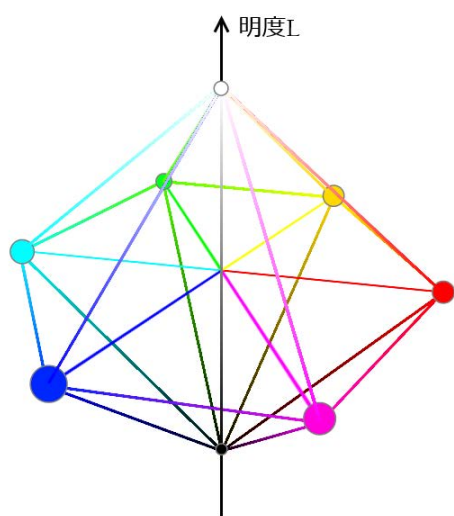


図 11 HLS モデル

調べたい画素の赤の値を R、緑の値を G、青の値を B とおき、それぞれの値を 255 で割って範囲を 0～1.0 に変換する。

X、Y 座標について、図 12 のように双 6 角錐を上から見て考える。

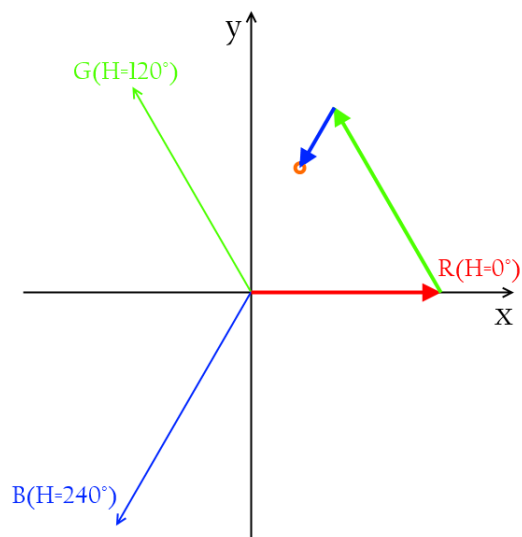


図 12 真上から見た HLS モデル

R の方向を X 軸とすると G の方向は正の X 軸から反時計回りに 120°、B の方向は

正の X 軸から反時計回りに 240° であるから、

$$x = R - \frac{G}{2} - \frac{B}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}G - \frac{\sqrt{3}}{2}B$$

と計算できる。また、モデル内の高さ Z について、R,G,B の最大値を I_{max}、最小値を I_{min} とすると、

$$Z = L = \frac{I_{max} + I_{min}}{2}$$

である。

2 つの色の違いは、このモデル上での距離と考えられるので、数値化することができるようになった。

(5) クラスタリング

データを自動的に分類する手法をクラスタリング、同じものと分類された部分をクラスタ、それぞれのクラスタの中心をクラスタ中心という。検出したデータを基に、どの部分が背景でどの部分が文字かを分けるため、k-means++法を参考にクラスタリングを行った。

まず、文字と背景の 2 つのクラスタ中心を作る。クラスタ中心の初期値は、1 つ目をデータからランダムに選ぶ。それぞれのデータ点 x に関して、最も近いクラスタ中心との距離 D(x)（この場合は 1 つめのクラスタ中心からの距離）を計算し、その値が最も大きいものを 2 つめのクラスタ中心とした。クラスタ数を 3 つ以上にする場合も同様に、距離 D(x) が最大である点を新しいクラスタ中心としていく。

次に、各データ点に、クラスタ中心が最も近いクラスタを割り振っていき、割り振ったデータを基に各クラスタの中心を計算

する。そして、もう一度各データ点にクラスタを割り振っていく。これを全てのクラスタの割り当てが変化しなくなるまで行う。先ほどの写真についてクラスタ数を2個としてクラスタリングを行ったところ、図13のようになった。

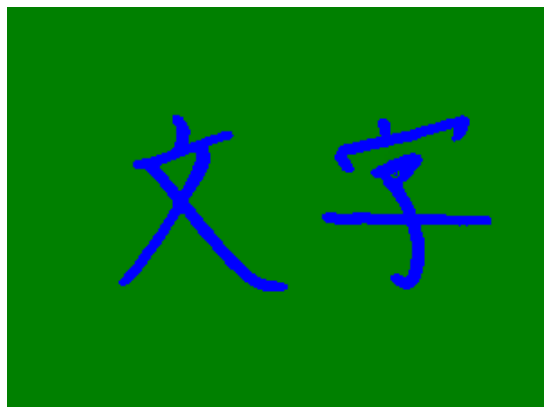


図13 クラスタリング結果

(6) 文字のクラスタの特定

割り振ったクラスタについて、どのクラスタが文字であるかを特定する。

一般的に文字の形は図形より複雑である。その為、そのクラスタと他のクラスタとの境目に当たる画素数を調べれば、文字と背景で違いが現れ、見分けることができるのではないかと考えた。

そこで、簡単な図形と文字とで実際に比較を行った。その結果が図14である。

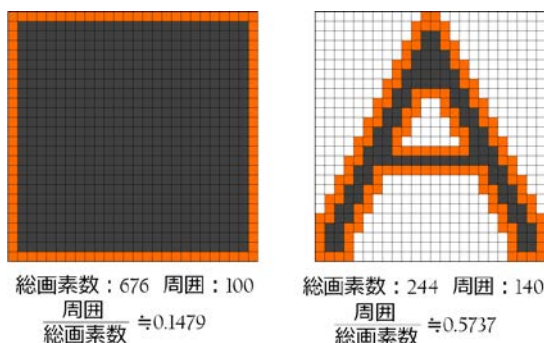


図14 端の画素の数の違い

このように、四角形と文字とでそれぞれ

クラスタの端にあたる画素の数

クラスタ内の総画素数

を求めたとき、図形と文字とで明確な差が生じた。そこで、各クラスタについてこの値を求め、その平均よりも値が大きいクラスタを「文字のクラスタ」とした。

3.2 細線化

文字の形を認識する際、線に太さがあると認識しづらい。そこで、文字の中心1画素以外を除去する細線化を行った。今回は、田村の方法（参考文献4）を基に、文字の認識に最適な細線化方法を考案した。

文字の画素を1、背景の画素を0とおく。この時、例えば注目画素が1でその右が0の時、その画素は線の右の端であると考えられる。上、左、下も同様に線の端であるので、そのような画素を除去(0に)していくと、線が細くなっていく。しかし、それだけでは線が途切れてしまう。そこで、図15、図16のように、除去しないパターンに相当する場合は除去を行わないようにした。その結果が図17である。

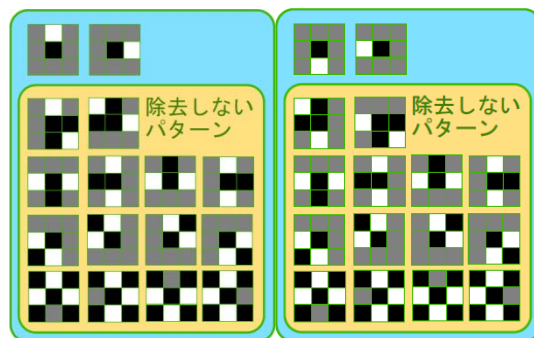


図15 (左) 除去パターン1

図16 (右) 除去パターン2

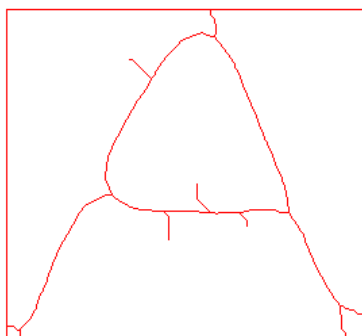


図 17 細線化結果

図 17 をみると、線が本来無いはずの場所に飛び出てしまっているところがある。また、線の交点付近が大きく歪んでおり、このままでは処理が困難である。

線が飛び出ているところを処理前の画像データで確認すると、飛び出ている線の端の部分が 1 画素分の突起になっていて、そこが線の端であるとされてしまっていることが分かった。そこで、図 18 のような 4 パターンに相当する場合は、除去しないパターンにあてはまっても強制的に除去するようにした。その結果が図 19 である。このように、飛び出ている線を大幅に減らすことができた。

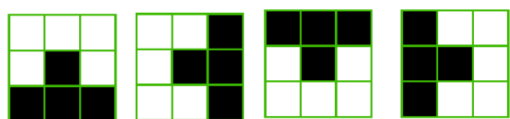


図 18 強制除去するパターン

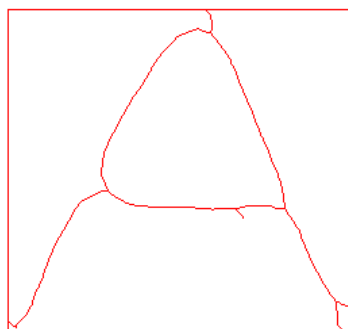


図 19 細線化結果

また、歪みについて、細線化のパターンが「上または右」が 0 の場合と「下または左」が 0 の場合という 2 パターンのみであったが、「上または左」「下または右」が 0 であるというパターンも考えられる。そこで、その 2 パターンを追加すれば、除去していく向きの偏りが減り、歪みが軽減されんと考えた。そこで、除去パターン 1、2 を参考に、図 20、図 21 の除去パターン 3、4 を作成した。この処理の結果が図 22 である。

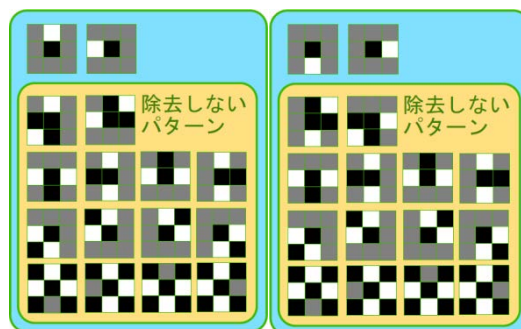


図 20 (左) 除去パターン 3

図 21 (右) 除去パターン 4

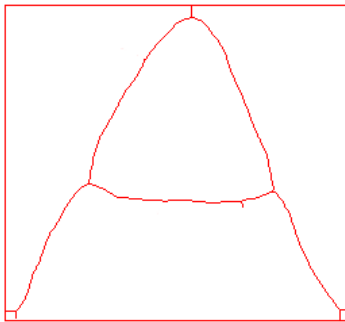


図 22 細線化結果

このように、線の歪みを大幅に軽減することができた。

3.3 線の座標抽出

細線化した画像データから、どこからどこに線が引かれているかを抽出する。そのためには、線の端、交点、角を認識すればよいと考えた。

細線化したデータにおいて、ある画素が 1 で、隣り合う 1 の画素が 1 つだけの場合、その画素は線の画素と考えられる。また、ある画素が 1 で、隣り合う 1 の画素が 3 つ以上ある場合、その画素で線が交わっていると考えられる。そこで、まずこの 2 種類の特徴点を抽出する。

次に、抽出した特徴点を結んでいく。この際、線の角の抽出も行いたいのので、輪郭追跡を行った。輪郭追跡では、文字のクラスタと他のクラスタとの境界部分を、反時計回りに一周する。

輪郭追跡の開始位置は、特徴点を結んでいきやすいよう、線の端の中の一つから行う。線の端が存在しない場合はそのクラスタ内でもっとも上にある画素から行う。

6	5	4
7		3
0	1	2

図 23 進む方向

進む方向に、図 23 のように番号をふる。輪郭を辿る際、例えばひとつ前に下に進んでいた場合、次の画素は今の注目画素の左上や左になることはない。なぜなら、下に進んだ時点で、すでに左と左下（今の注目画素から見て左上と左）はすでにチェックされ除外されているということなので、下に進んだ後も選ばれることはない。一般化すると、ひとつ前の向きから時計回りに 3 つ分の向きに進むことはない。この性質を利用し、輪郭を検索するときの 1 つ前の向きを V_{old} 、次の向きの検索の初めの向きを V_{new} とすると、

$$V_{new} = (V_{old} + 6) \bmod 8$$

となる V_{new} から向きの検索を始めれば効率が良い。このように開始地点に戻るまで輪郭を辿る。

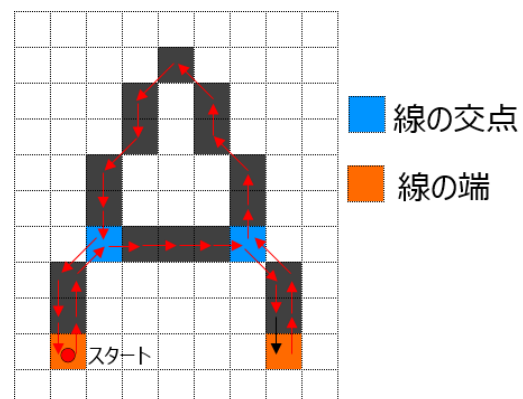


図 24 輪郭追跡

辿っていく際、最後に通った特徴点からひとつ前までの角度を計算し、次に進む向き

との差が一定値以上のとき、その画素を線の角とする。角も特徴点であるため、その画素から次の特徴点までで計算する角度は、その画素からの角度となる。

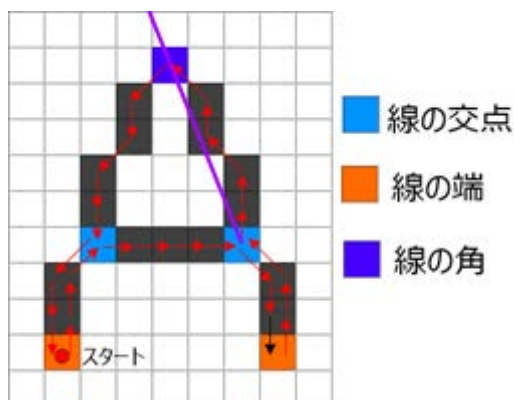


図 25 線の角の認識

こうして抽出した3種類の特徴点を、輪郭追跡の際に通った順に結んでいく。これで、画像から線を抽出できた。

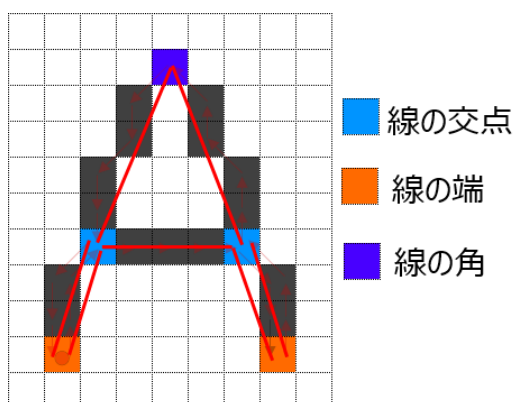


図 26 線の抽出

しかし、この段階では、一周しているため2回通る場所ができ、図のように抽出した線が2重になってしまうことがある。また、交点によって本来1つの線であるべき線が2つの線に分けられてしまっている部分がある。

そこで、これらの線の調整を行う。

線が2重になっている部分を除去する際、線の角の位置は通る向きによって変わることがあり、完全に同じ線になるとは限らない。そこで、線一本一本の座標を確認していき、類似した直線がないかを探す。2本の直線について、角度がほぼ同じで、かつそれぞれの対応する点との距離の和が一定値以下の場合、その2本の線を同じ線だとみなし、対応する点同士の中央を結んだ線を新しい線とし、元の2本の線を除去するこの際に、線の座標が変わった場合、もともと繋がっていた他の線と離れてしまう場合がある。そこで、座標を変更する際、ほかの線がその座標を使用していれば、その座標も新しい線に合わせるようにした。

また、分かれている線について、2つの線が頂点で接しており、かつ角度の差が一定値以下の場合は、接していないほうの2つの点から新しい線をつくり、もとの2本の線を除去することで1本にまとめた。

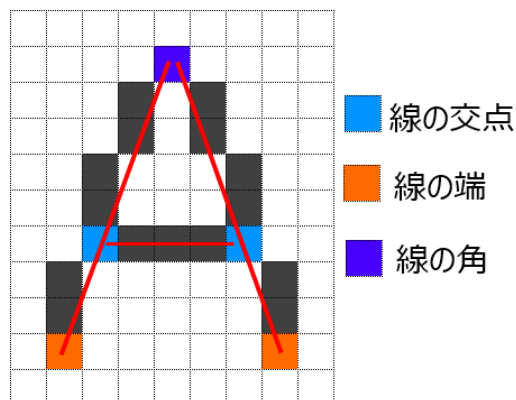


図 27 線情報の調整

3.4 文字の判定

登録された文字データと照合するために、読み取った文字の大きさ、縦横比を、次のようにして登録されたデータのものに合わせる。読み取った文字の大きさについて

て、抽出した線の頂点のなかから最も上にある点、右にある点、左にある点、下にある点をもとめる。すると、左上の頂点が（最も左の点の x 、最も上の点の y ）、右下の頂点が（最も右の点の x 、最も下の点の y ）である長方形に、文字がちょうどおさまる。この長方形の横幅を文字の幅、この長方形の高さを文字の高さとする。読み取った線の頂点の x 座標にそれぞれ $\frac{\text{登録された文字データの幅}}{\text{読み取った文字の幅}}$ をかけ、 y 座標にそれぞれ $\frac{\text{登録された文字データの高さ}}{\text{読み取った文字の高さ}}$ をかければ、大きさ、縦横比が同じになる。

次に、文字の判定のために文字の形の一致度を求める。文字の形の一致度は、各座標の絶対位置だけではなく、線の角度や相対的な位置の違いなどを含め、字に癖があったり字のバランスがある程度崩れていても認識できるようにした。読み取った線について、登録された文字データのすべての線に対して $\{1.0 - (\text{角度の差})/360\} \times (\text{対応する頂点間の距離の合計}) / (\text{判定用データを囲む長方形の対角線の長さ}) \times (\text{その線の長さ})$ を求める。全ての線でこの値を計算し、その和を、読み取った線の長さの和で割れば、線の一致度の合計が出せる。また、頂点同士の位置関係について、ある点より右か左か、上か下か、という関係が同じである点を数え、(一致した点の情報の数)/(全ての組み合わせ)を求める。これを先ほどの線の一致度にかけて、完全に同じ形のときを 1 とする一致度が求まる。

3.5. 推測

人は文中に読めない文字があっても、前後の文字から推測して読むことができる。

もし同じことが機械でもできれば、読み取れない文字を減らし、また読み間違いも減り精度を上げることができると考えた。推測のために、まず単語のデータベースを作り、言葉を大量に登録する。読み取った文字を、その登録された全ての単語と比較し、一致度を調べた。読み取った単語には、間違った文字が含まれている可能性があるため、登録された単語の側から相当する文字を探していく。また、言葉の最初の文字と最後の文字は言葉を判別するうえで重要であると考えた。そこで、単語の初めの文字と最後の文字は一致しているときに 4 pt、それ以外の文字は場所も同じで 2 pt、何文字目かがずれていてもその文字が存在すれば 1 pt とし、文字の一致度は「 $\frac{\text{ポイントの合計}}{\text{全てあっていたときの合計}}$ 」とした。さらに文字数の違いについて、文字数の一致度を文字数の差に反比例するように、 $\frac{1}{(\text{文字数の差})+1}$ とした。単語の一致度を文字の一致度と文字数の一致度の積とすると、単語の一致度は完全に同じ単語のときに 1 となる割合となる。この値が最大になる単語が、本来そこに書かれていた単語であると考え校正を行うことで、正しく読み取れていない文字が混じっていても、自然な読み取りができるようになった。

3.6. 学習機能

文字を認識していく中で、自動的に精度を上げていく「学習機能」が実現すれば、文字の登録効率が非常によくなると考えた。判定時、形の一致度が 8 割以上の場合や、読み取りに失敗した文字を推測したときに文字数が完全一致かつ単語の一致度が 8 割

以上の場合、読み取った文字を「その文字」としてデータベースに追加するようにした。また、形の一致度が8割以上でかつ使われている線の数が同じである場合、その登録された文字データの各座標を、読み取った文字の座標に、一致度に応じて近づけるようにした。これで、認識の際にある程度の精度で読み取れていれば、使っているだけで自動的に精度が上がっていくようになった。

4. まとめと今後の課題

今回の研究で、文字を線として認識し、判定することができた。しかし、今の段階では文字が斜めになっている場合に正しく判定することができない。そこで、今後は判定時に、それぞれの最も長い線の向きが同じになるように回転させてから判定するなどして、写真が斜めに撮られていても認識できるようにしたい。

また、背景に影や模様が入っているような場合でも、文字の大体の場所の抽出ができるようになった。しかし、実際に背景が複雑な写真のクラスタリングを行おうとすると、様々な模様と区別するため多くのクラスタ中心が必要になる。そこで今後、最適なクラスタ数を計算する方法を考案し、より精度のよいクラスタリングを行えるようにしたいと考えている。

5. 参考文献

- (1) Visual Basic 中学校
「<http://homepage1.nifty.com/rucio/main/main.htm>」
- (2) DOBON.NET
「<http://dobon.net/index.html>」

- (3) C#とVB.NETの入門サイト
「<http://jeanne.wankuma.com/>」
- (4) 画像処理ソリューション
「<http://imagingsolution.blog107.fc2.com/blog-entry-151.html>」
- (5) 村上研究室 画像処理
「http://ipr20.cs.ehime-u.ac.jp/column/gazo_syori/index.html」
- (6) イメージングソリューション
「<http://imagingsolution.net/>」
- (7) 無作為研究所 「<http://www.faicha.com/>」

6. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の米田隆恒先生には多大なご指導を賜りました。また、サイエンス研究会の先輩方にも多くの助言をいただきました。この場を借りて、深く御礼申し上げます。

高精度車両挙動モデル開発へ向けて

4年C組 村田 宏暁

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は、交通渋滞などの道路交通における問題を小さくするため、交通シミュレーターを開発して研究を行っている。しかしこれまで採用していた車両挙動モデルでは精度が不足していたため、より精度の高い車両の挙動モデルを開発しようと試みた。現在モデルは完成していないが、その開発の過程と今後の方針について述べる。なお、本稿における車両挙動モデルとは車両の加減速の挙動のモデルを言う。

キーワード 交通渋滞、シミュレーション、モデル、JAVA

2. 背景

道路交通は、現在この国の主要な移動手段である。しかし、交通集中などによって円滑な交通ができない状況が生まれると、所要時間の延伸や事故率の上昇、排出ガスの増加など、さまざまな問題が生まれる。円滑な道路交通を実現するため、私は昨年度までも、JAVA 言語を用いて独自に開発した道路交通シミュレーターを用いて研究を行ってきたが、そのシミュレーターにおいて用いていた車両の挙動モデルは処理速度を重視したシンプルなものであり、精度はあまり高くなかった。そのため、より詳細に実際の道路交通の様子を再現するためには精度の高い車両挙動モデルが必要であった。

3. 開発

車両挙動モデルを開発する際、前提として、運転する際に考慮する要素は自車の速度、前方車の速度、車間距離の三つであるとし、それら

の情報の取得から影響が加速度に現れるまでの時間は、人間の反応時間を考慮して1秒とした。

まず私は、実際の自動車の挙動を一つの式で表すことはできないと考え、「両車が現在の速度を保てば近い将来衝突する」場合、「近い将来に衝突することはないが車間距離が短い」場合、「十分な車間距離があり、衝突のおそれがほぼない」場合の三つに分けてモデルを構築した。

これを元に検証と修正を繰り返すことで、精度の高いモデルを開発することを試みた。モデルの検証は、以下のような条件下でシミュレーションを行い、各車の速度や加速度の変化のグラフを作成することで行った。

- ・100台の車列が直線道路を走行している
- ・信号などは無い
- ・歩行者や二輪車などはいない
- ・先頭車両は定められた動き、または、キー入力に応じた動きをする
- ・先頭以外の車両はモデルに従って走行する。

4. 結果

以下に結果のグラフを示す。以下のグラフは先頭車両(1台目)の速度をグラフのように変化させた際の後続車両の挙動を表すものであり、図1と図2、および図3と図4はそれぞれ同じ

シミュレーションの速度と加速度を表し、図1と図3はモデルのパラメータのみが異なる。なお、加速度の単位は通常は(m/s^2)を用いるが、今回はより直感的に理解できる(km/h/s)を用いる。

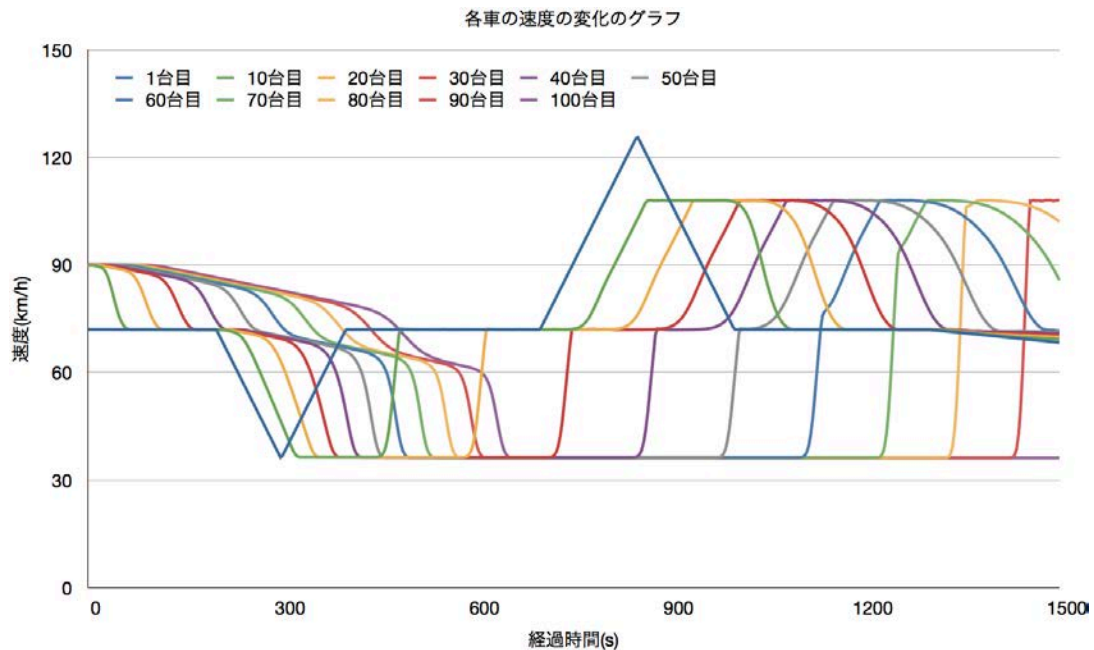


図1 速度の変化のグラフ 1

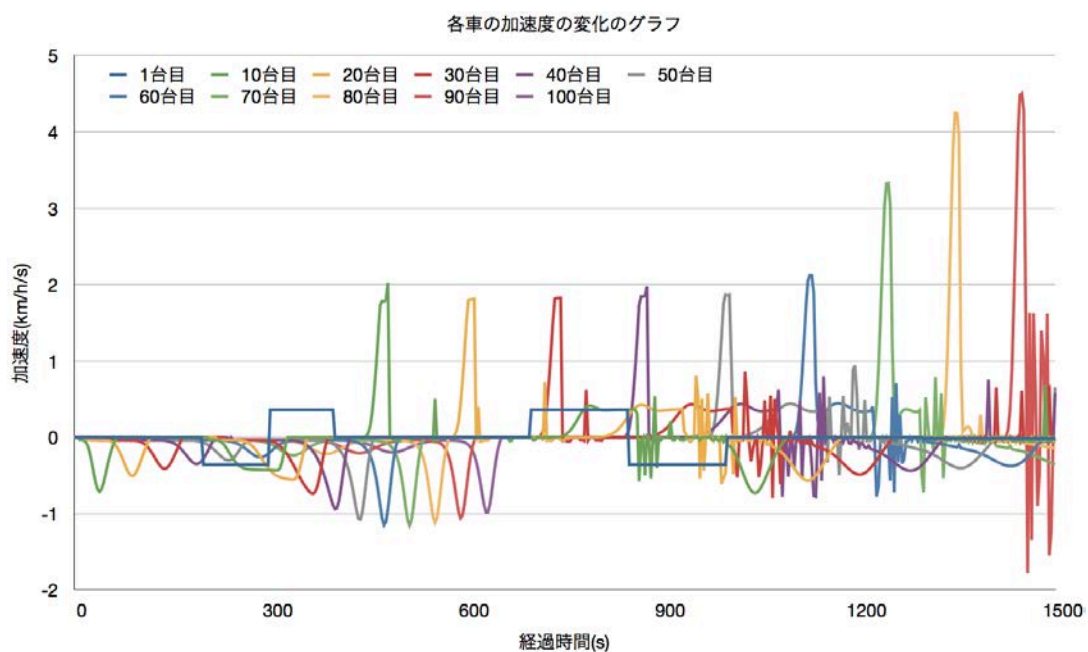


図2 加速度の変化のグラフ 1

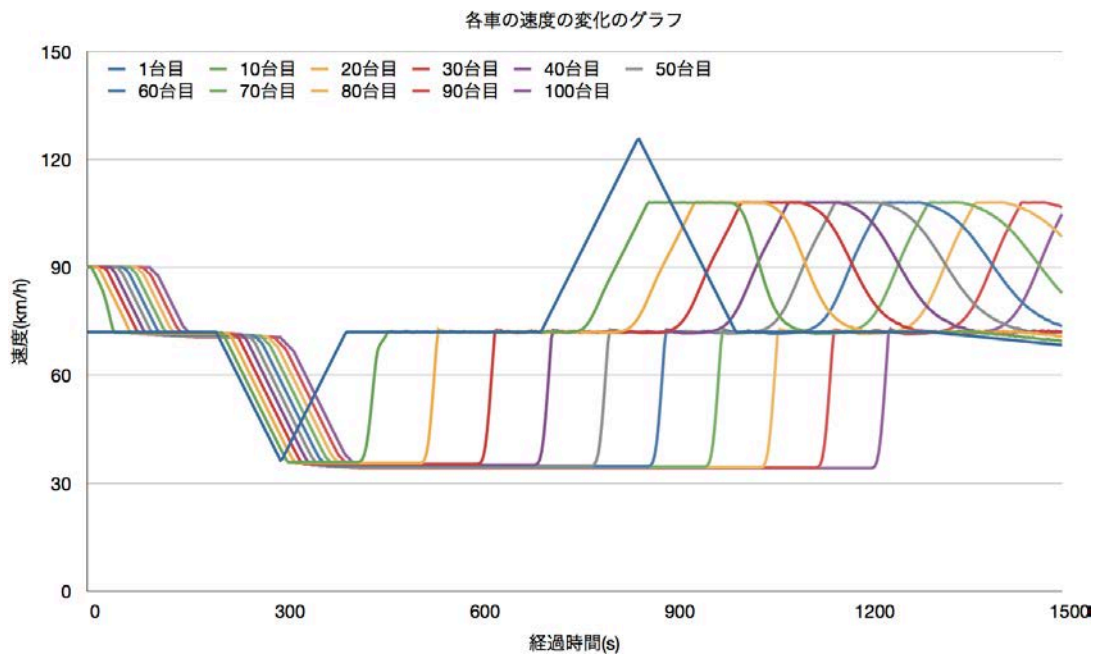


図3 速度の変化のグラフ 2

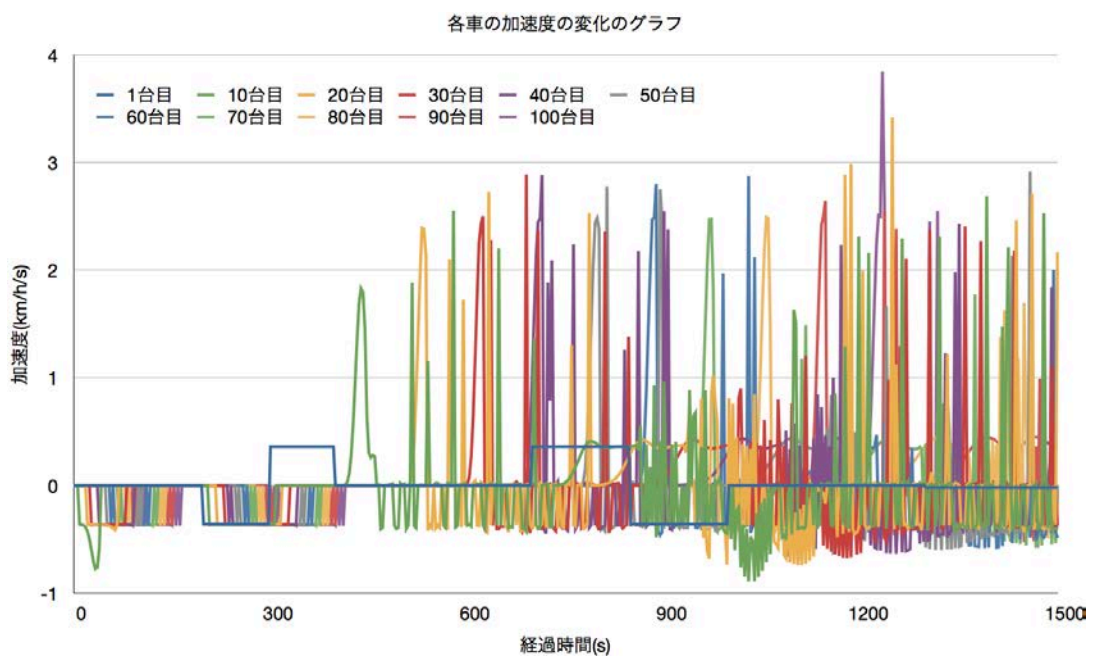


図4 加速度の変化のグラフ 2

5. 考察

図1、図2では、減速の際、加速度が非常に緩やかに変化しており、極端に緩やかな減速が長時間にわたって行われている。これは速度差

が小さい段階から反応していることによるものだと考え、導きだされた加速度の絶対値が非常に小さい場合は0にするようにモデルを調整した。その結果が図3、図4であるが、前方車と

ほぼ同じ速度になった後も小さな加減速を繰り返しており、現実と一致しない。これらを同時に解決するためには小さな加減速によって前方の車と同じ速度にする必要の有無を判断する必要があるが、そのためには前方の車の動きを予測する必要がある。人間がどのように予測しているのか推察することは困難であるから、実際の自動車の挙動を観測する必要があると考えた。

6. 検討

得る必要があるデータは自車の速度、前方車の速度、車間距離、加速度の4つであるが、前方車の速度は車間距離の変化と自車の速度から求めることができる。そのため、自車の速度と車間距離、加速度を取得できれば実際の自動車の挙動を表すことができる。そこで、車両に装置を搭載する方法と車外から観測を行う方法の二つに分けて、それぞれの情報の取得方法についての検討を記載する。

6.1 車両に装置を搭載する方法

車両に装置を搭載することで、運転手や車種が同一の場合の挙動を長時間にわたって観測することができるため、個人差や個体差による差異と、人間の曖昧さなどによるばらつきを区別することができる。しかし、測定の際に協力していただく運転手の方々は少数であるため、必ずしも母集団である国内の運転手全体の特徴を反映していないと考えられる。そのため、運転手などの持つ特性の分布については信頼のできないものになってしまう。

6.1.1 速度の測定方法

■GPSを用いる方法

GPSとはGlobal Positioning Systemの略であり、複数の専用人口衛星からの信号を受信することでGPS受信機の位置を知ることができるシステムである。GPS受信機から速度を得ることは容易であり、また、スマートフォンなどはGPS受信機となるため、最も容易な取得方法であると言える。しかし、データは1回/秒程度しか得られず、そこから得られる約1秒間の平均速度では、精度が悪いと考えられる。

■OBD2を用いる方法

OBD2は車両故障の自己診断のための通信に関する規格であるが、車速なども送信するため、OBD2アダプター搭載車に専用の機器を接続することで、車から速度の情報を得ることができる。車載の速度計と同じ値が得られるため、運転手が速度計に表示される速度を元に運転している場合は最も精度の高い方法となる。しかし、速度計は平成19年以降は、速度計が40km/hを示した際に速度計試験機を用いて計測した速度を $V(\text{km/h})$ として、 $30.9 \leq V \leq 42.6$ を満たすように作られており、速度計が実際の速度より大きい値を表示する場合は比較的大きな誤差を許容するため、測定値より大きな値を表示していることが多い。そのため、運転手が速度計以外から速度を知り、運転している場合には多少精度が低くなる。

6.1.2 車間距離の測定方法

■カメラで撮影した映像のナンバープレートの大きさから算出する方法

ナンバープレートの大きさは既知であるため、前方車後面のナンバープレートの、画像の中で大きさを調べることで前方車までの距離が算出できる。ただし、2 m程度しか車間距離がない場合でも前方車両が映像内に収まっている必要があり、車両の横幅は2 m程度なのでカメラの水平画角は60°より小さくすることはできない。また、ナンバープレートは普通乗用車の物で横幅が33cmなので、30m先の車のナンバープレートは画像横幅の1/100程度の大きさになる。デジタル画像を扱う際には1ピクセルの誤差を無視できる必要があるが、横幅2000ピクセルの映像を撮影できるカメラを使用してもナンバープレートは20ピクセルとなってしまう、1ピクセルが5%もの誤差を生んでしまう。ただし、この問題は倍率の異なる複数台のカメラを設置することによって解決する。

■車載した2台のカメラの視差を元に測定する方法

車内2カ所に取り付けたカメラそれぞれで前方車の輪郭を抽出し、その視差から距離を求める。前方の車両を直方体として考え、どちらのカメラにもその後面のみが映っているとの仮定のもとで行うため、カーブなどでは距離を測定することはできない。ナンバープレートより大きい物を認識するため誤差は小さくなるが、車両の輪郭抽出が困難である。

■2台の車両を前後に並べて走行させ、両車に搭載したGPS受信機を用いる方法

GPSの誤差は、電波が地球の大気を通過する際にかかる時間が大気の状態によって変動する

ことによる部分が大きい。それぞれのGPS受信機が同一のGPS衛星からの電波をもとに位置を算出している場合は車間距離の誤差は小さいものになることが期待できる。ただし、速度と同様にデータは1回/秒程度しか得られず、また、トンネルや都市部などでは精度が大幅に落ちる。さらに、他の方法では通常走行している車に装置を搭載することによって測定が行えるのに対して、この方法では装置を搭載した2台の車が前後に並んで走行する必要があるため、測定が困難である。

6.1.3 加速度の測定方法

■加速度センサーを用いる方法

加速度センサーはスマートフォンなどにも搭載されており、手軽に使うことができる。また、精度も未確認ではあるが高精度が期待できる。

6.2 車外から観測する方法

カメラや各種センサーなどを設置し、観測するため、観測時間帯に観測区域を通過した車すべての情報が得られる。そのため、得られる挙動はその地域の運転手の特性の分布を反映していると考えられる。ただし、特定の車については非常に短い時間しか観測することができないため、人間の曖昧さなどに起因するばらつきと個人差や個体差による差異とを区別することは難しい。

6.2.1 速度の測定方法

■カメラで撮影する方法

カメラで撮影した映像から車両の位置の変化を解析し、速度を算出する。しかし、2枚の画

像の車両の位置の差から求める場合、撮影時刻に誤差がないものとし、それぞれ画像における車両の位置の誤差を $\pm \Delta x(\text{m})$ 、2枚の画像の撮影時刻の差を $t(\text{s})$ とすると、 $\pm 2 \Delta x/t(\text{m/s})$ の誤差が出てしまう。 $\Delta x=0.10$, $t=0.50$ としても $\pm 0.40(\text{m/s})=1.4(\text{km/h})$ と、非常に大きい。また、何らかの関数で近似する場合、データ点以外での関数の挙動の妥当性について検証することが難しいため、その近似方法にモデルが大きく影響されてしまう可能性がある。

■速度測定器を用いる方法

複数の車両の同時測定や連続測定ができないと考えられる。

6.2.2 車間距離の測定方法

■カメラで撮影する方法

カメラの画像から車間距離を算出する。画像内での車を十分な精度で認識することができるのであれば、車間距離の算出は比較的容易であり、また精度も高くなる。

6.2.3 加速度の測定方法

■カメラで撮影する方法

上の方法で測定した速度の変化から算出する。しかし、2つの異なる時間における速度の変化から求めると、それぞれの速度の誤差を $\pm \Delta v(\text{m/s})$ 、2つの速度の測定時刻の差を $t(\text{s})$ として、 $\pm \Delta 2v/t(\text{m/s}^2)$ の誤差が出る。 $\Delta v=0.40$, $t=0.50$ とすると $\pm 1.6(\text{m/s}^2)=5.7(\text{km/h/s})$ となり、意味をなさない。そのため、何らかの関数で近似する必要があるが、データ点以外での関数の挙動の妥当性について検証することが難しい

ため、その近似方法にモデルが大きく影響されてしまう可能性がある。

7. 今後の課題

まず、上のいずれかの方法で観測を実際に行う必要がある。車外から観測する方法は加速度の精度を確保する見通しが立っていないため、車内に機器を搭載する方法が現実的であると考ええる。その場合、速度はOBD2、加速度は加速度センサーを用いれば比較的容易に計測できるが、車間距離はナンバープレートの大きさから算出する方法を主に検討しているため、ナンバープレートの認識を行う必要があると考えている。

8. 参考文献

[1]「交通工学」飯田恭敬 監修、北村隆一 編著、オーム社 版(2008年)

[2]「Java Platform, Standard Edition 6 API仕様」

<http://docs.oracle.com/javase/jp/6/api/>

[3]「Android Developers」

<http://developer.android.com/>

9. 謝辞

この研究を行うにあたり、顧問の米田隆恒先生には多大なご指導を賜りました。また、サイエンス研究会の先輩方や、立命館大学の野間春生先生、近畿大学の多田昌裕先生には多くの助言をいただきました。この場を借りて、深く御礼申し上げます。

二輪車での姿勢制御の研究

4 年 C 組 船井遼太郎

指導教員 米田 隆恒

1. 概要

私は現在、ロボットが左右についた二輪車で前後に倒れることなくバランスを取るための「姿勢制御」の研究を行っている。今回は、前後のバランスをとるために距離センサを用いる方法と、3 軸加速度センサを用いる方法の二つの視点から取り組んだ。ここでは、その途中経過を報告する。

キーワード 姿勢制御、距離センサ、3 軸加速度センサ、倒立振り子

2. 研究の背景と目的

私は、レゴ社が販売している「マインドストーム」と呼ばれる、プログラミングロボット開発キットを用いて製作された、姿勢制御ロボットを見る機会を得た。このロボットは、手で押してもバランスをとりながら、自立し続けることができるものである。私もこのような、自立型の姿勢制御ロボットを開発したいと考えた。そこで、今回は 2 つの車輪を持った、シンプルな形状の試作機を製作することにした。

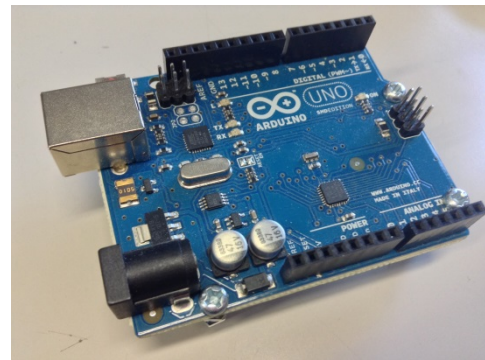


図 1 Arduino Uno

3. 研究内容

3.1 研究 1

まず私は、地面と機体の高い位置に取り付けたセンサとの間の距離を測定し、そのデータを元に機体の姿勢制御を目指した。

できるだけバランスを取りやすくするため、箱形の機体を製作した。今回用いたマイクロコンピュータ (以下マイコン) には、複雑な制御でも、利用者ができるだけプログラミングをしやすく改良された、Arduino と呼ばれるものを選択した。

車輪の動力には、機体の重さに耐えて走ることができるだけのトルクのある、タミヤ製ハイパーダッシュモータ PRO を使用した。モータの回転方向、及び、印加電圧を調整できるモータドライバ IC(TA7291P) を使用して、マイコンからモータの回転を制御した。

地面からの距離を計測するための距離センサとしては、GP2Y0A21YK という、10~80cm までの距離を計測することができるセンサを使用した。高い位置にこのセンサをつけることで、機体のわずかな傾きも

より早く検出できるようになるのではないかと考え、このセンサを利用した。



図2 距離センサ (GP2Y0A21YK)



図3 距離センサで測定する距離

まずこのセンサを用いて、図3の矢印で表しているように地面からの距離を測定し、値の範囲を見た上で、しきい値を設定する。次に、その値を超えたときモータの回転方向を逆回転させることで本体が倒れる前に機体の位置を修正するようにした。

機体の重さは前後でなるべく調整を行ったが、均等にはならず常にアンバランスな状態となっている。



図4 自作した箱型ロボット

実際に作動させたところうまくバランスを取ることができなかった。1回目に行った実験では、機体のプラスチック板の重さ

が原因となり、モータが空回りしてしまった。そこで本体の重心を一度糸で引っ張り上げ、動くようにしてから再度実験を行ってみた。しかし、それでも上手く動かなかった。まず考えられたのがしきい値の決め方である。最初は目で確認して設定していたが、その後倒立振子という考え方をご教示していただいた。この考え方は、重心が上にあり、支持点がある場合の考え方で、その支持点を重心の下に持っていくように制御するという考え方である。

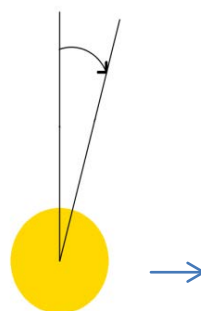


図5 倒立振子模式図

ところが、この考え方で厳密に計算を行うのは困難であり、断念した。そこで、別の方法を用いて次のような研究を行うことにした。

3.2 研究2

倒立振子を用いずに、3軸加速度センサを用いた姿勢制御方法を考えた。研究1で製作した機体を軽量化したものに、赤外線距離センサの代わりに、3軸加速度センサを搭載したものを使う。このセンサを用いることで、どちらの方向に機体がどれだけ傾いているかを測定することができる。初期の状態をバランスが取れている状態とした時に、そこからどれだけ傾いたかを計測

して制御を行う。また、できる限り精密に測定するために三端子レギュレータを用いてなるべく電圧を安定させるようにした。

まず、私は3軸加速度センサの動作実験を行った。この実験は、加速度センサの6, 7, 8ピンがそれぞれx軸, y軸, z軸方向への加速度データを出力しているため、そこからArduinoの入力ピンがデータを受け取り、10進数に変換して数値化するものである(図5)。

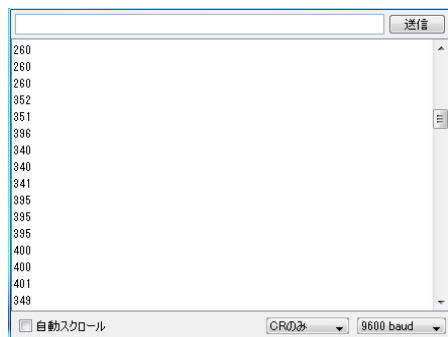


図6 3軸加速度センサから取得した値

しかし、このままでは直感的に数字の変化を捉えにくい。そこで、私は、Processingを用いてアナログデータをグラフ化するプログラムを見つけ、Arduinoマイコンと連動させることにした。先に実験したときと同じようにマイコンからセンサ入力値を取得し、そのデータを一度別の変数に格納する。その後、Processingを用いて制作されたソフトウェアで、シリアル通信のライブラリをインポートし、そのデータをグラフに変換する。しかし、送られてきたデータが全て0になっていたため今回その実験は失敗だった。原因として、取得したデータを上手くインポートできなかったことが考えられる。

実際に機体にこのセンサを用いるときに

は、センサから取得した数値が変わるのに応じて、モータの回転方向を変え、バランスを保つことができると考えている。

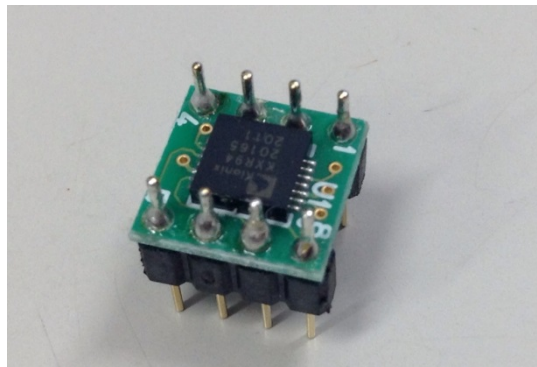


図7 3軸加速度センサ (kxr94-2050)

4. 今後の課題

今回行った研究1は、非常に複雑なものになるため一度断念することにした。しかし、今後、機会があれば再度取り組んでみたいと思う。

研究2では、まだ実際に動作させていないが、モータの回転が空回りしないための本体の軽量化と、センサの値とモータとの連動を行うことで姿勢制御が行えるのではないかと考えている。

今回行った実験により、センサの値を確認することができた。センサから取得した値をグラフで描画する実験は、シリアル通信からデータの送信ができず、グラフ化を実行することができなかった。今後はシリアル通信から得たデータをインポートし、グラフ化を行えるようにしていきたいと思う。

5. 参考文献

[1] 倒立振子を作ってみよう

<http://www.kumikomi.net/archives/2009/04/01beauto.php?page=1>

[2]倒立振子の製作

<http://maverickengineer.web.fc2.com/>

[3]加速度センサで遊ぼう

http://jkoba.net/prototyping/arduino/accel_practice.html

6. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ多くの先生、先輩方に多大なご指導をいただきました。この場で深く感謝申し上げます。

マイクロ波実験装置の製作

5 年 B 組 寺川 峻平

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

電磁波の性質を学習する際、学習者が自らの手で実験を行うことによって、より理解が深まると考えられる。そこで、市販のドップラーセンサモジュールを利用し、高校物理の生徒実験に使えるマイクロ波実験装置を製作した。

キーワード マイクロ波、実験装置、ドップラーセンサ、教材、多重反射、干渉

2. 研究の背景と目的

数年前、私は電磁波の性質に興味を持ち、物理の教科書を読んでそれらを理解しようとした。また、実験によってそれらを確かめたいと思った。しかし、本校にはそのような実験を行うための実験装置が無かったため、自作することにした。

製作にあたり、装置はなるべく単純な構造となるように注意した。これは、部品点数を減らすことで材料費を抑えられること、装置への理解と製作・保守が容易になることを目指したからである。

また、これらの目標は装置を教材として生徒実験に用いるというもう一つの目的にも沿うものであるため、教材としての用途にも留意しながら研究を進めることにした。

3. 研究内容

3.1 装置の概要

一口に電磁波といっても、X 線・可視光線・赤外線など、周波数によっていくつか分類される。製作に使用したドップラーセンサは、マイクロ波と呼ばれる周波数帯域の電磁波を扱うものであり、その波長が

数 cm であるため、実験を机の上のスケールで手軽に行うことができる。



図1 マイクロ波実験装置

今回製作した装置は、送信機・受信機・分配器・電圧計で構成されている(図1)。それぞれの役割は以下の通りである。

- ・送信機：マイクロ波の送信を行う
 - ・受信機：マイクロ波を受信し、受信強度を出力する
 - ・分配器：受信機へ電源供給を行い、受信機からの出力信号を電圧計へ中継する
 - ・電圧計：受信機の出力電圧を表示する
- これらを組み合わせて使用し、受信強度測定を行う。以下に実験例を挙げる。
- ・物質中のマイクロ波の波長測定
 - ・反射、屈折、回折、干渉などの確認
 - ・透過率の測定

- ・横波の検証と電場の振動面の測定
- ・レンズ、フレネルゾーンプレートの実験装置の製作にかかった費用(材料費)はおよそ 9000 円である。性能の差はもちろんあるが、市販の実験装置が数十万円と高価なのに対して非常に安価に製作できた。

3.2 ドップラーセンサ

マイクロ波の発振回路やアンテナの設計・製作は困難であったため、市販のドップラーセンサモジュール(以下ドップラーセンサ)を利用し、その機能の一部を活用することにした。使用したドップラーセンサは新日本無線社の NJR4178(図 2)という製品で、本来はその名前の通りドップラー効果を利用した動体検知などに用いられるものである。

マイクロ波はドップラーセンサ内部の誘導発振器(約 10.5GHz)で生成され、送信アンテナから出力される。反射して返ってきたマイクロ波は同じドップラーセンサの受信アンテナで受信され、ドップラーセンサ内部で送信波と混合、検波され出力されるという仕組みである(図 2)。ドップラー効果によって受信波の振動数が変化するとドップラーセンサ内部で混合された内部合成波にうなりが生じ、出力信号は送信波と受信波の差の周波数で振動する。

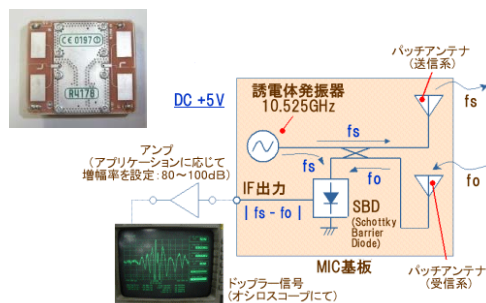


図 2 NJR4178

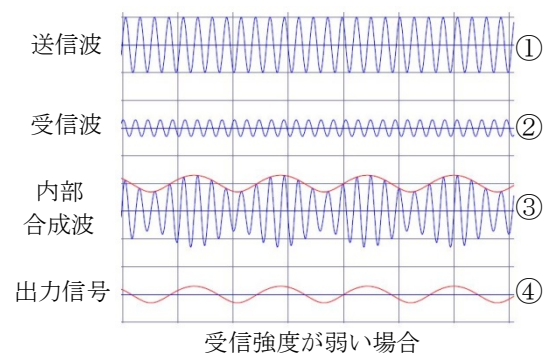
新日本無線 Web サイトより引用

3.3 受信強度測定への応用

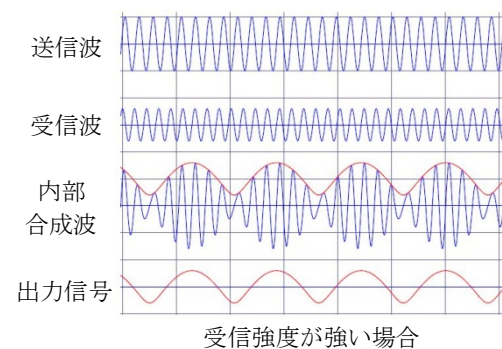
2つのドップラーセンサを向かい合わせて静置すると、出力信号④はドップラー効果の有無に関わらず振動する。これは、2つのドップラーセンサの発振周波数の個体差によって送信波①と受信波②の周波数が一致していないためである。今回使用したドップラーセンサの仕様を確認すると、“周波数安定度：± 5 MHz max.”とある。つまり、異なる2つのドップラーセンサでは、発振周波数に最大 10MHz の差があるということである。このため、出力信号④は最大で 10MHz の周波数を持ちうる。

また、うなり成分④(③)の振幅は受信波②の強度に従って大小に変化する(図 3)。

よって、ドップラーセンサを2つ使用し、どちらか一方の出力信号の振幅を測定することによって受信強度測定を行うことができる。



受信強度が弱い場合



受信強度が強い場合

図 3 受信強度と出力信号の
振幅(電圧)との関係

3.4 構成

[送信機]

ドップラーセンサ、電源回路とスタンドで構成される。

電源回路はACアダプタからの直流電源を5Vの三端子レギュレータで安定化させてドップラーセンサに供給するだけのものである。送信側ドップラーセンサの信号出力端子は未使用である。

スタンドには田宮模型のユニバーサルアームを利用した。ユニバーサルアームとはスチロール樹脂でできた棒状の工作用構造材で、5mm間隔で穴が開けられており切ったり組み合わせたりといった工作が簡単に行えるという特徴を持つ。これを用いることで、木材やアクリル板などと比べて加工の手間が減り、実験に合わせてスタンドを作り替えたり同じ状態を再現したりといったことが行い易くなった。

設置の自由度を高めるため、電源は受信機側とは別に用意した。

[受信機]

ドップラーセンサ、増幅回路とスタンドで構成される。

増幅回路では、ドップラーセンサの出力信号の振幅を電圧計で扱えるレベルに増幅する。出力信号の中心電圧は0Vではなく受信機の設置位置や周辺環境によって変動するので、コンデンサを直列につないで直流成分をカットし、中心電圧を0Vとする必要がある。その後、ダイオードとコンデンサで負電圧側カット・平滑化し、オペアンプで増幅する。

スタンドは送信機と同じようにユニバーサルアームで製作した。

[分配器]

2芯シールド線で受信機と接続し、増幅回路への電源の供給と増幅回路からの出力信号の中継を行う。配線は図のようになっている。

受信機と分配器を接続するケーブルは図4のように電源とGND線をクロスさせている。こうすることで、分配器側ではジャックの一番奥に、受信機側ではプラグの最後に刺さる端子に電源ラインが引かれることになり、ACアダプタをコンセントに挿したままケーブルを抜き差ししてもドップラーセンサや増幅回路が壊れにくくなる。

ケースには百元ショップのタッパーを用いた。



図4 クロスカбель

[電圧計]

学校の直流電圧計を用いた。

マイクロ波の受信強度が0のとき、増幅回路からの出力電圧は0Vではない。このため、実験に際しては受信強度0のときの値をオフセット電圧として記録しておき、実験値から引く作業が必要になる。

3.5 多重反射防止シールド

2つのドップラーセンサに何も手を加えない状態で本実験装置を使用し、送信機と受信機を遠ざけて行き、電圧計の値を記録すると、値は単調に小さくなるのではなく

距離が約 $\lambda/2$ 変化するとに極大が現れる。ここで λ はマイクロ波の波長であり、空気中では約 28mm である。極大が現れるのは送信機と受信機の間でマイクロ波が反射を繰り返し、干渉しあうためだと考えられる。このままでは不便なので、多重反射が起こらないようにするためにシールドを製作した。

マイクロ波を正面以外へ反射させるために、シールドの形は図5のような四角錐とした。アルミホイルをコピー用紙で挟むようにしてそれぞれ接着し、それを切り抜いて組み立てた。コピー用紙で挟んだのは、加工が簡単になり絶縁にもなるためである。



図 5

これを送信・受信用のドップラーセンサそれぞれに装着したところ、出力信号の変動を減らすことができた。しかし、干渉の影響を完全になくすことはできなかったため、定量的な実験を行うときにはこの変動に注意する必要がある。

4. 今後の課題

高校3年生の物理の授業で生徒実験に使用してもらったとき、受信機と分配器をつなぐケーブルが断線してしまうことがあった。また、プラグをケーブルにハンダ付けするのは手間がかかるので、これらを踏まえてケーブルの構造、作り方を見直す必要がある。

また、多重反射防止シールドを改良したい。送信機と受信機のなす角によっては四角錐のシールドが邪魔になる場合がある。

そこで、マイクロ波を正面以外の方向に反射するのではなく、吸収してしまう素材を使うことを考えている。

5. 参考文献

- [1]新日本無線 技術サポート
http://mc.njr.co.jp/jpn/technical/sensor_2.html
- [2]RF ワールド サンプルページ
「ドップラー・センサを使ったスピード・ガンの製作」
<http://www.rf-world.jp/bn/RFW05/samples/p126-127.pdf>
- [3]「電子回路入門講座」見城尚志・高橋久、電波新聞社

6. 謝辞

今回の研究において、顧問の米田先生をはじめとして多くの方々にアドバイスをいただきました。また、何人かの友人に実験を手伝っていただきました。この場をお借りして、深くお礼申し上げます。

物質中でのマイクロ波の波長測定実験

5 年 B 組 寺川 峻平

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は数年前から電磁波の性質に興味を持ち、マイクロ波実験装置の製作に取り組んでいる。その実験装置を使用し、マイクロ波の波長測定実験を行った。マイクロ波が物質を透過する際、物質と空気との境界面で一部のマイクロ波は反射する。それらの経路差により、物質の厚さに対応して透過後のマイクロ波の強度が変化する。これを利用し、物質の厚さを段階的に変えてマイクロ波の受信強度を調べることで物質中の波長を測定した。その結果、紙中においては約 3% の誤差で波長を測定できた。水中においてはデータの分析方法を現在研究中である。

キーワード マイクロ波、実験装置、多重反射、干渉、波長、薄膜干渉

2. 研究の背景と目的

私たちの生活は電磁波の活用によって支えられている。しかし、身近なはずの電磁波のことを私はよく知らなかった。そこで、実験を通して電磁波の基本的な性質を理解するため、まずは物質中でのマイクロ波の波長を測定することにした。

しかし本校には波動実験を行う電波実験装置がなかったため、実験装置を自作し、それを使用した。よって、今回はこの実験装置を用いた波長測定実験の手法や考え方を確立することを目標として研究を行った。

3. 研究内容

紙・水(水道水)の中でのマイクロ波の波長を調べた。

製作したマイクロ波(10.5GHz)実験装置は、出力信号の電圧からマイクロ波の受信強度を判断するものである。

文献[1]による比誘電率 ϵ_r から計算した

それぞれの物質の波長 λ は以下のとおりである。

$$c = \lambda f = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{f\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0\mu}}$$

紙 $\cdots \epsilon_r = 2.0$, $\lambda = 18$ [mm]

水 $\cdots \epsilon_r = 80$, $\lambda = 2.9$ [mm]

3.1 仮説

マイクロ波実験装置の送信機と受信機を向かい合わせて設置し、それらの間に波長測定を行う物質を置く。物質の厚みを変えると、その変化にあわせてマイクロ波の受信強度が周期的に変化する(簡易実験にて確認)。この現象を利用し、受信強度の変動から物質中でのマイクロ波の波長を測定できると考えた。

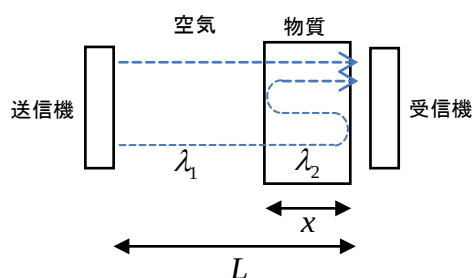


図1 波長測定簡略図

空気中のマイクロ波の波長を λ_1 、物質中の波長を λ_2 、物質の厚みを x 、送信機と受信機との距離を L とする。

いま、厚みが x のときに受信強度が極大になったとする。物質の厚さを増やしていく、 $x + \delta$ で再び極大となったとすると、

$$3x - x = \lambda_2 m \quad (m: \text{整数})$$

$$3(x + \delta) - (x + \delta) = \lambda_2 (m + 1)$$

となり、これらの差を求めると、

$$2(x + \delta) - 2x = \lambda_2$$

$$\therefore \delta = \frac{\lambda_2}{2}$$

よって物質の厚みを $\lambda_2/2$ 変化させるごとに極大があらわれることになる。

この予測のもと、物質に紙と水を用いてそれぞれ測定を行った。

3.2 紙中の波長測定

<実験方法>

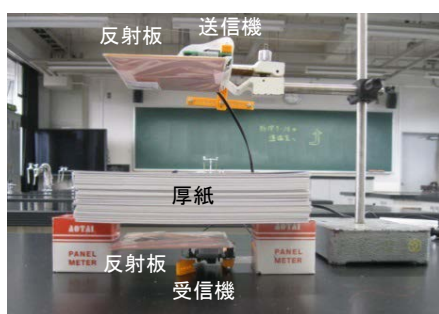


図2 実験装置

(1)送信機と受信機に反射板を取り付け、鉄柱スタンドで図2のように固定する。このとき、出力電圧が飽和(約 8.5V で振りきれ)ないように気をつけながら、できるだけ送信機と受信機を近づける。

(2)送信機と受信機の上に厚紙を重ねて置く。

(3)受信機だけ電源を入れ、受信強度0でのオフセット電圧を記録する。

(4)送信機の電源を入れ、紙を一枚ずつ取り除いてゆき、受信機の出力電圧を記録する。

※(1)反射板を取り付けるのは、未使用のアンテナを無効にするためである。送信機は受信アンテナを、受信機は送信アンテナをふさぐように取り付ける。

※(4)重ねて揃えられた状態から紙を取り除いてゆくことで、一枚一枚積み上げるよりも厚紙同士の隙間を小さくできると考えたためこのような方法をとった。

<結果>

グラフの極大・極大間の距離より、

$$\delta \text{ の平均} = 9.41 \text{ [mm]}$$

$$\lambda_2 = 18.8 \text{ [mm]}$$

となり、理論値に非常に近い値が得られた。

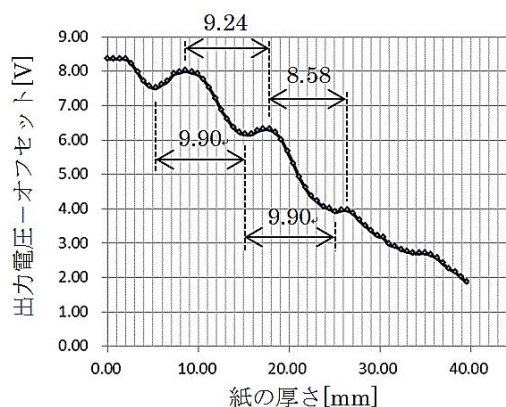


図3 紙の測定結果

厚み[mm]	電圧-オフセット[V]		
39.60	1.85	19.14	6.00
38.94	2.00	18.48	6.20
38.28	2.15	17.82	6.30
37.62	2.25	17.16	6.30
36.96	2.40	16.50	6.25
36.30	2.55	15.84	6.15
35.64	2.65	15.18	6.15
34.98	2.70	14.52	6.20
34.32	2.70	13.86	6.35
33.66	2.70	13.20	6.60
33.00	2.75	12.54	6.85
32.34	2.80	11.88	7.20
31.68	2.90	11.22	7.50
31.02	2.95	10.56	7.75
30.36	3.15	9.90	7.90
29.70	3.20	9.24	7.95
29.04	3.35	8.58	8.00
28.38	3.50	7.92	7.95
27.72	3.65	7.26	7.90
27.06	3.85	6.60	7.70
26.40	3.95	5.94	7.60
25.74	3.95	5.28	7.50
25.08	3.90	4.62	7.55
24.42	4.00	3.96	7.70
23.76	4.05	3.30	7.95
23.10	4.20	2.64	8.20
22.44	4.35	1.98	8.35
21.78	4.60	1.32	8.35
21.12	4.90	0.66	8.35
20.46	5.30	0.00	8.35
19.80	5.65		

電圧計は 15V レンジで測定を行い、最小目盛は 0.5V である。

3.3 水中の波長測定

<実験方法>



図4 実験装置

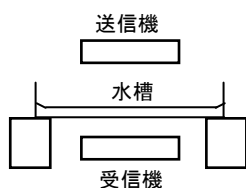


図5 配置

(1)送信機と受信機に反射板を取り付け、鉄柱スタンドで図4、図5のように固定する。水中ではマイクロ波が非常に減衰しやすいため、送信機と受信機を水槽に接触しないようにしてできるだけ近づける。

(2)受信機だけ電源を入れ、受信強度0でのオフセット電圧を記録する。

(3)送信機の電源を入れる。送信機と受信機の上に水槽を置き、受信強度が0になるまで水を入れていく。このとき、表面張力によって水槽壁面付近の液面が平らにならないことがあるので、ときどき水槽を揺らして壁面をしっかりと濡らす必要がある。

(4)ピペットで水を水槽から約 1 ml ずつ取り出していく。取り出した水は電子天秤に乗せたメスシリンダーに移し、電圧計の値とともに、取り除いた水の質量も記録する。この操作を水槽の底面の一部が乾いて島のようなまで繰り返す。

※(4)水中ではマイクロ波が減衰しやすいため、できるだけ浅い水深で実験を行う必要がある。しかし、水を滴下していくと、水量が少なく水深が浅いときに、表面張力によって水が水槽の底面に広がらない恐れがあると考えたため、水を増やすのではなく減らしていく方法にした。

水 1 ml を 1 g と考えて体積及び水の厚さを求める。

<結果>

極大・極小間で変化した厚さを $\delta/2$ と考え、 $\delta=0.53 \times 2=1.06$ [mm]

よって、水中での波長 λ_2 は

$$\lambda_2 = 2.12 \text{ [mm]}$$

となった。

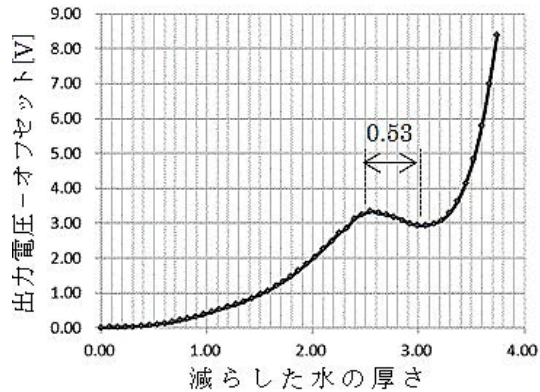


図6 水の測定結果

減った水深[mm]		電圧-オフセット[V]	
0.00	0.01	1.94	1.83
0.08	0.02	2.02	2.03
0.16	0.02	2.10	2.26
0.23	0.03	2.18	2.49
0.30	0.04	2.25	2.72
0.38	0.05	2.32	2.86
0.46	0.08	2.40	3.14
0.53	0.11	2.47	3.24
0.60	0.13	2.54	3.34
0.68	0.17	2.62	3.29
0.74	0.22	2.70	3.24
0.82	0.26	2.77	3.19
0.89	0.32	2.85	3.09
0.97	0.38	2.92	2.99
1.05	0.46	2.99	2.94
1.12	0.53	3.07	2.94
1.20	0.60	3.15	2.99
1.28	0.67	3.22	3.09
1.35	0.76	3.29	3.29
1.43	0.86	3.37	3.64
1.50	0.96	3.44	4.14
1.58	1.07	3.52	4.84
1.65	1.20	3.60	5.79
1.72	1.33	3.67	6.99
1.79	1.47	3.74	8.39
1.87	1.64		

3V
15V

電圧計は3Vレンジと15Vレンジを途中で切り替えて測定を行い、最小目盛はそれぞれ0.1Vと0.5Vである。

4. 考察・今後の課題

境界面での反射を利用して、紙中のマイクロ波の波長を測定することができた。実

際には図1で表したものの以外にも反射は起きるはずであるが、位相の変化が物質の厚みの変化によらなかったり、伝搬によって減衰し影響が小さくなると考えられる。

水中の波長測定では極大-極小間で変化した厚さを $\delta/2$ とみなしたが、これによって誤差が大きくなった可能性がある。紙中の波長測定結果をみると、極大-極小間に変化した厚さと極小-極大間に変化した厚さが異なっている。このため、どちらかを二倍しても極大-極大間に変化した厚さとして扱うことができない。

マイクロ波の減衰が大きい物質においては紙に対して行ったような実験で波長測定ができるようになった。

今後の課題は、水のように減衰が大きく極大(極小)点が観測しづらい物質でも波長測定ができるような方法を考えることである。

5. 参考文献

[1]誘電率表

http://www.rkcinst.co.jp/cp1/yudenritsu_hyou.htm

6. 謝辞

今回の研究において、顧問の米田先生をはじめ、多くの方々にアドバイスをいただきました。この場をお借りして、深くお礼申し上げます。

豆電球と LED の電力特性

5 年 C 組 田中 一輝

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は、本校の太陽光発電の発電量を見たとき、発電量は何によって決まるのかという疑問を持った。昨年、豆電球と小型の太陽電池を用いて光源から太陽電池までの距離と太陽電池の発電電圧の関係性を調べた結果、それらの間に規則性があることがわかった。今回は距離ではなく、光源の種類と発電量の関係性を調べた。その結果、興味深い事実がわかったので報告する。

キーワード 太陽電池、発電電圧、LED、豆電球

2. 研究の背景

私は、これまでの実験で豆電球を光源として使用してきた。しかし、最近は LED が新しい照明として注目されている。そこで、LED を光源としたとき、太陽電池の発電電圧は豆電球と比較して、どうなるのか、また LED の色の違いによって、太陽電池の発電電圧は変わるのか、について実験を行い、考察した。

ミホイルで覆い、上部に光源を下向きに取り付けたものを太陽電池にかぶせ、光源以外の光が太陽電池に当たらないようにする。また、ガムのケースの内部にもアルミホイルを貼り、光源の光がすべて太陽電池に当たるようにする。

光源にかける電圧を上げていき、各電圧において、光源に流れる電流と、その光を受けた太陽電池の発電電圧を測定する。

光源には、耐電圧が 6.0V、3.8V、2.5V の豆電球と、白色 LED を使用する。

3. 研究内容

3.1 仮説 1

LED は通常、豆電球よりも効率が良いとされている。そこで、

「同じ消費電力において LED を光源とした方が豆電球を光源とするよりも発電電圧が大きくなる」

という仮説をたて、実験を行った。

(1) 仮説 1 の検証

図 1 が製作した実験装置の写真である。市販のガムのケースの底を切り取り、アル



図1 実験装置

(2) 仮説 1 の検証結果

図 2 は、豆電球、LED それぞれにかけた電圧と太陽電池の発電電圧の関係を表したグラフである。同じ電圧においては、豆電球の方が LED よりも発電電圧が高いことがわかる。つまり、同じ電圧においては豆電球の方が明るいことがわかる。また、LED は電圧が一定値を超えるまでは電流が流れず光を出していないので、太陽電池は発電しないことがわかる。

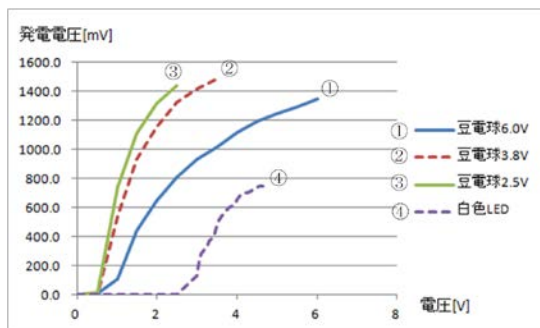


図2 電圧と発電電圧の関係

図 3 は、光源の消費電力と太陽電池の発電電圧の関係を表したグラフである。およそ 0.2W までは、同じ電力において白色 LED が最も発電電圧が高いが、それ以上の消費電力になると豆電球の方が高くなることがわかる。よって、仮説 1 「同じ消費電力において LED を光源とした方が豆電球を光源とするよりも発電電圧が大きくなる」は正しくない。

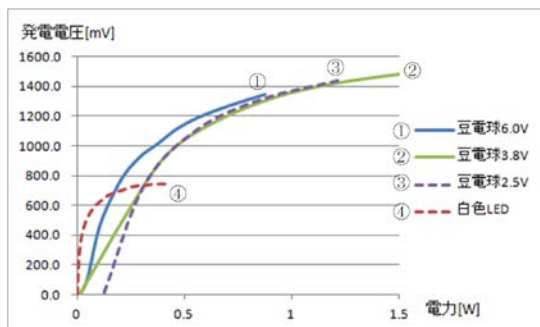


図3 消費電力と発電電圧の関係

(3) 仮説 1 の考察

仮説 1 の検証結果をみると、豆電球の方が LED より効率が良いように思える。しかし、LED の特徴である小さい消費電力で発電電圧が高いことを利用して、LED を複数個使用すれば、総消費電力において LED の方が効率が良いといえる。

3.2 仮説 2

LED は様々な色のものがあるが、その色によって発電電圧は変わるのかという疑問を持った。そこで、

「同じ消費電力において発電電圧は LED の色に依存しない」

という仮説をたて、実験を行った。

(1) 仮説 2 の検証

実験装置は、仮説 1 の検証に用いたものと同じ装置を使用する。光源には、白色、赤色、黄色、緑色、青色 LED を使用する。

(2) 仮説 2 の検証結果

図 4 は、LED の電圧と太陽電池の発電電圧の関係を表したグラフである。同じ電圧において発電電圧は LED の種類によって異なっているが、赤色 LED と黄色 LED は非常に近いといえる。また、白色 LED、緑色 LED、青色 LED も近いといえる。

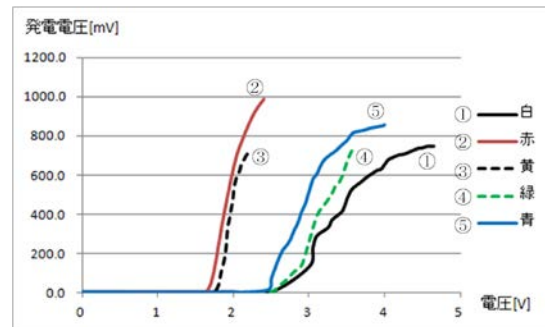


図4 電圧と発電電圧の関係

図5は、各色の LED の消費電力と太陽電池の発電電圧の関係を表したグラフである。赤色 LED を除くと、同じ消費電力において発電電圧はかなり近いといえるが、多少の違いはある。よって仮説2「同じ消費電力において発電電圧は LED の色に依存しない」は正しくない。

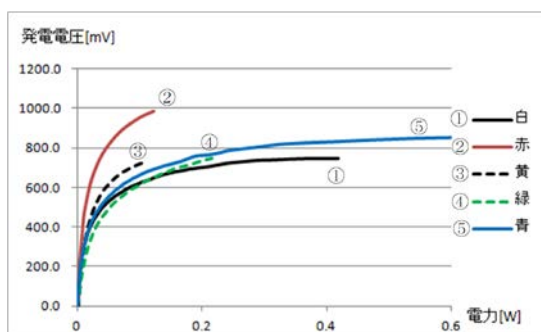


図5 消費電力と発電電圧の関係

(3) 仮説2の考察

図5をみると、グラフが対数関数であるようにみえる。そこで Excel を用いて、それぞれのグラフについて、対数関数の近似曲線を描いた。

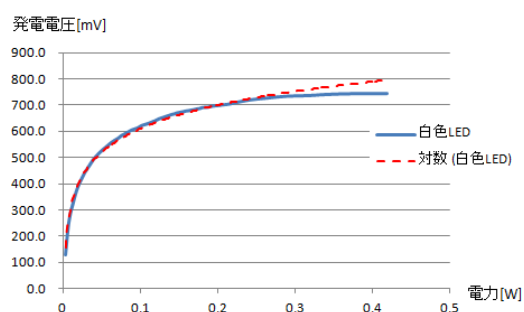


図6 白色 LED

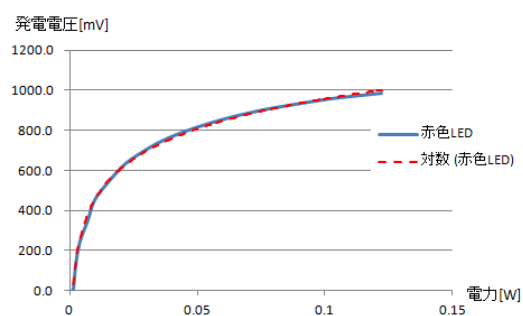


図7 赤色 LED

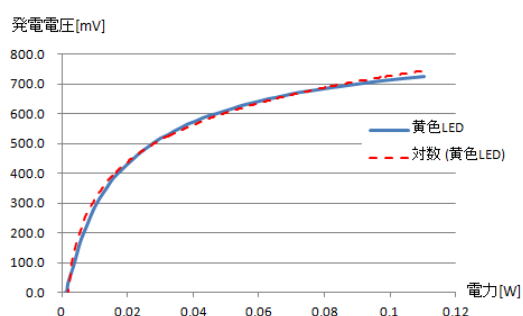


図8 黄色 LED

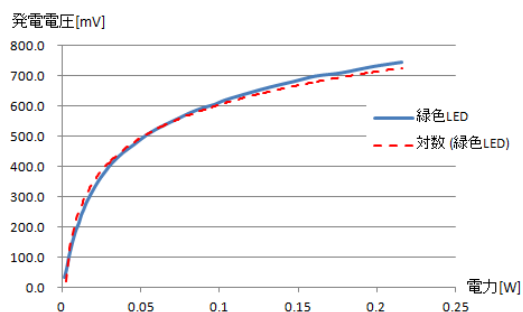


図9 緑色 LED

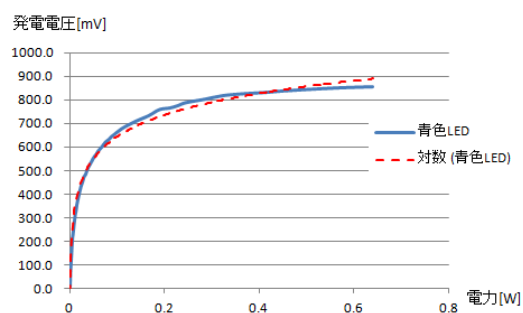


図10 青色 LED

図 6 が白色 LED、図 7 が赤色 LED、図 8 が黄色 LED、図 9 が緑色 LED、図 10 が青色 LED であり、それぞれのグラフに対する対数関数の近似曲線を重ねたものである。いずれのグラフも、対数関数の近似曲線とほぼ重なっており、対数関数で表せるといえる。

4. まとめと今後の展望

今回の実験で、図 3 から小さい消費電力については、LED の方が太陽電池の発電効率が良いが、大きい消費電力になると、豆電球の方が発電効率が良い、つまり明るいことがわかった。しかし、明るさを得るために LED を複数個使用すれば、LED の方が豆電球よりも効率が良いことがわかった。

また、図 5 から LED の色によって発電効率は少し違うということがわかった。さらに、図 6、7、8、9、10 から LED の消費電力と発電電圧のグラフは対数関数で表せることがわかった。

今後は、なぜこのグラフが対数関数になるのかについて考察したい。

5. 謝辞

この研究にあたりご指導くださったサイエンス研究会顧問の米田隆恒先生にこの場をお借りして深くお礼申し上げます。

完全数について

1年C組 小椋 晃一

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班1年生は完全数について学習している。今回は完全数を扱い、新たなことを見つけることを目標とした。その過程において、完全数に関する考察をすることができたので紹介する。

キーワード 完全数、約数、準完全数、概完全数、奇数、 k 倍完全数

2. 研究の背景と目的

完全数とはその数 n の正の約数の和が $2n$ と等しくなる自然数のことであり、 $6, 28, 496 \dots$ と続く。

私は、完全数に先行興味をもった。すると、完全数に関する研究がいくつもあることを知った。そこで、基本的な内容と発見できたことを本稿にまとめることにした。

3. 研究内容

3.1 定義

■約数

通常、整数 α に対して、 $\alpha = \beta\chi$ を満たす整数 β, χ が存在するとき、 β, χ を α の約数というが、今回は自然数 α に対して $\alpha = \beta\chi$ を満たす自然数 β, χ が存在するとき、 β, χ を α の約数という。つまり、負の数について考えないことにする。

■準完全数

ある数 n の約数の和が $2n+1$ になるとき、その数 n を準完全数という。未だに見つかっていない数である。

■概完全数

ある数 n の約数の和が $2n-1$ になるとき、その数 n を概完全数という。具体的には、 $4, 8, 16, 32 \dots$ があるが、 2^x 以外には見つかっていない数である。

■ k 倍完全数

本稿では、 k を整数として、ある数 n の約数の和が kn になるとき、その数を k 倍完全数という。

■メルセンヌ素数

$2^n - 1$ になっている素数をメルセンヌ素数という。例えば、 $3, 7, 31 \dots$ がある。

3.2 偶数の完全数

命題

$2^n - 1$ が素数ならば $2^{n-1}(2^n - 1)$ は完全数である。

(証明)

$2^{n-1}(2^n - 1)$ は既に素因数分解されており、約数も素因数分解ができるか素数であるため、小さい順に

$$1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, (2^n - 1), 2(2^n - 1), \\ 4(2^n - 1) \dots 2^{n-1}(2^n - 1)$$

となる。 $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$ の和は、

$$2^n \div 2 = 2^{n-1}, 2^{n-1} \div 2 = 2^{n-2}, \dots$$

より、 $2^n - 1$ 、

$$(2^n - 1), 2(2^n - 1), 4(2^n - 1) \dots 2^{n-1}(2^n - 1)$$

の和は分配法則より $(2^n - 1)^2$ となるので

$$2^n - 1 + (2^n - 1)^2 = 2^n(2^n - 1)$$

より $2^{n-1}(2^n - 1)$ の約数の総和は

$2^n(2^n - 1)$ となり、 $2^{n-1}(2^n - 1)$ の2倍であるため、 $2^{n-1}(2^n - 1)$ は素数である。

(Q.E.D)

これは有名な定理であるが、偶数の完全数に関する定理である。次項からは奇数の考察を述べていく。

3.3 奇数の完全数

命題

奇数の完全数は平方数ではない

(証明)

平方数である奇数の完全数を n とおいたとき、その約数を小さい順に

$$1, n_1, n_2, \dots, n_a, \sqrt{n}, \dots, n_{m-1}, n_m \text{ とする。こ}$$

のとき、 n_m は n 自身になり、

$$n_1 \times n_{m-1} = n, n_2 \times n_{m-2} = n, \dots \text{ となる。}$$

また、奇数の約数は奇数であるため、 $n_1, n_2, \dots$ もすべて奇数である。この約数を

縦同士を掛けると n になるように並べ替える。 $\sqrt{n}$ も約数になるが、掛けるのはおなじ $\sqrt{n}$ となるため

$$1, n_1, \quad n_2, \dots, n_{a-1}, \quad n_a, \sqrt{n} \\ n, n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_{m-a+1}, n_{m-a}$$

この約数の和は奇数個の和ゆえ奇数である。

しかし、奇数の完全数 n の約数の和は偶数 $2n$ でなければならない。したがって、奇数の完全数は平方数ではない。(Q.E.D)

3.4 奇数の準完全数および概完全数

命題

奇数の準完全数と概完全数はともに平方数である。

(証明)

約数の和が奇数になるが、約数は全て奇数で偶数個あるため和が奇数にならない。約数の和を奇数にするにはもう一つ奇数を足す必要があり、平方数である必要があるため、奇数の準完全数と奇数の概完全数は平方数である (Q.E.D)

3.5 奇数の k 倍完全数

まず、3倍完全数 n をつくるためには、 n の約数の和が奇数である必要がある。これは平方数でない約数の和は奇数にならない。

約数の和が $3n$ ということは n を除いた

$$1, n_1, \quad n_2, \dots, n_{a-1}, \quad n_a, \sqrt{n} \\ n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_{m-a+1}, n_{m-a}$$

の和が $2n$ になればいいということであり、

$$n_{m-1} + n_{m-2} + \cdots + n_{m-a} > n_1 + n_2 + \cdots + n_a$$

なので

$$n_{m-1} + n_{m-2} + \cdots + n_{m-a} + \sqrt{n} > n$$

となる。

$$n_1 \times n_{m-1} = n, \quad n_1 \geq 3 \text{ なので}$$

$$\frac{1}{3}n \geq n_{m-1}, \frac{1}{5}n \geq n_{m-2}, \cdots \text{ となり}$$

n 以上になるには

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \geq 1$$

より、7 つ必要なので

$$n_{m-1}, n_{m-2}, \cdots, n_{m-a}, \sqrt{n} \text{ の約数の数が 7 つ}$$

以上になる。

となると、 $n_1, n_2 \cdots n_a$ は 6 つ以上になるため奇数の 3 倍完全数の約数は 13 個と n と 1 をあわせた 15 個以上となる。

同様に奇数の 4 倍完全数についても考えると、

$$n_{m-1} + n_{m-2} + \cdots + n_{m-a} + \sqrt{n} > 1.5n$$

になるようにすればよいため、計算した結果より、約数は 41 個以上となる。

奇数の 5 倍完全数についても、113 個以上の約数があることがわかった。

4. 今後の課題

今回研究するにあたって約数を並び替えるという操作をしたが、その際約数が奇数に限られるように「奇数の」と限定するという方法を用いた。この場合主にある偶数の完全数については考えていなかったため、かなり強い条件のもとでの証明になってしまった。偶数についても今後自分で挑戦したい。

5. 参考文献

美しく感動する数の教室

6. 謝辞

今回の研究にあたり顧問の川口先生をはじめとした方々にアドバイスをいただきました。ありがとうございました。

正五角形と黄金比

1 年 B 組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 1 年生は、三角比について学習している。今回は、正五角形と黄金比について理解することを目標とし、その理解のために三角比、黄金比、二次方程式、について学習した。また、その考察もできたので、紹介する。

キーワード 三角比、 36° 、黄金比、二次方程式

2. 研究の背景と目的

正五角形の一辺の長さとお角線の長さの比が黄金比になっているということは、広く知られていることである。そこについて私は、なぜそうなるか興味をもったからである。

3. 研究内容

3.1 基本的な定義と定理

■黄金比

黄金比とは比 $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のことであり

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を ϕ で表すことが多い。

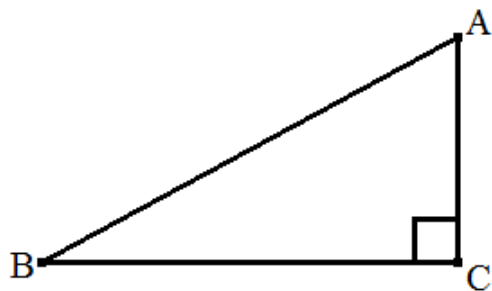
ϕ には、 $\phi^2+1=\phi+1$ 、 $\frac{1}{\phi}=\phi-1$ という

不思議な性質をもっている。

■三角比

下図の AB を斜辺とする直角三角形 ABC において、 $\angle ABC$ を θ とする。このとき、

$\sin \theta = \frac{AC}{AB}$ 、 $\cos \theta = \frac{BC}{AB}$ 、 $\tan \theta = \frac{AC}{BC}$
と定義する。



定理 1 (ピタゴラスの定理)

直角三角形 ABC において、 AB を斜辺とする。このとき、 $AB^2 = BC^2 + CA^2$ が成り立つ。

証明

下図で、 $AB=z$ 、 $AC=x$ 、 $BC=y$ とする。このとき、4つの直角三角形は、すべて

合同である。すると、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2}xy$

と表すことができる。しかし、

$\frac{1}{4}\{(x+y)^2 - z^2\}$ と表すことができる。

よって、

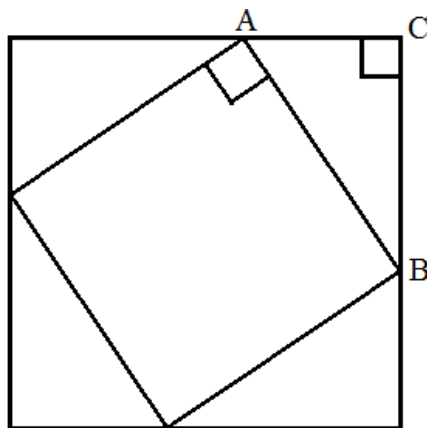
$$\frac{1}{4}\{(x+y)^2 - z^2\} = \frac{1}{2}xy$$

これを変形させて、

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 2xy$$

したがって、

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (Q.E.D)$$



定理 2

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

証明

直角三角形 ABC で、AB を斜辺、
 $\angle ABC$ を θ とする。AB=1 とすると、

$$\sin \theta = \frac{AC}{1} = AC \quad \cos \theta = \frac{BC}{1} = BC$$

定理 1 より、 $1^2 = AC^2 + BC^2$ よって

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

(Q.E.D)

定理 3 (加法定理)

$$(1) \sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

証明 (1)

下図で四角形 ACDF は長方形で、
 $\angle BGD = 90^\circ$ 、 $\angle BDG = b$ 、 $\angle GDF = a_1$ 、
 $\angle BGA = a_2$ とし、いま、BD の長さを 1 とする。

$a_1 + \angle BGD (= 90^\circ) = \angle AGD$ より、

$$a_1 + 90^\circ = \angle BGD (= 90^\circ) + a_2$$

ゆえに、

$$a_1 = a_2$$

よって、 a_1 と a_2 の角は等しい。

$$\sin(a_1 + b) = \frac{BE}{BD} = BE = AF \text{ より、} AF$$

の長さが $\sin(a_1 + b)$ となる。まず、

$$GB = \sin b \text{ より、} \cos a_2 = \frac{AG}{\sin b}$$

ゆえに、

$$AG = \cos a_2 \sin b$$

また、 $DG = \cos b$ より、

$$\sin a_1 = \frac{GF}{\cos b} \text{ ゆえに、}$$

$$GF = \sin a_1 \cos b$$

よって、

$$BE = AG + GF = \cos a_1 \sin b + \sin a_2 \cos b,$$

$a_1 = a_2$ なので、

$$\sin(a_1 + b) = \cos a_1 \sin b + \sin a_1 \cos b$$

(Q.E.D)

証明 (2)

$$\cos(a_1 + b) = \frac{DE}{DB} = DE \text{ より } DE \text{ の長さ}$$

が $\cos(a_1 + b)$ となる。まず、 $DG = \cos b$

$$\text{より、} \cos a_1 = \frac{DF}{\cos b} \text{ ゆえに、}$$

$$DF = \cos a_1 \cos b$$

また、 $BG = \sin b$ より、

$$\sin a_2 = \frac{BA}{\sin b} \text{ ゆえに、}$$

$$DF = \cos a_1 \cos b,$$

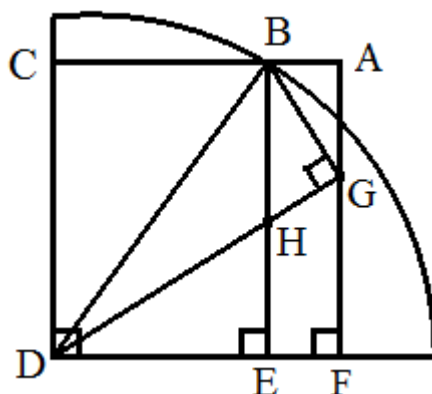
よって、

$$DE = DF - BA = \cos a_1 \cos b + \sin a_1 \sin b$$

つまり、

$$\cos(a_1 + b) = \cos a_1 \cos b + \sin a_1 \sin b$$

(Q.E.D)



■ 偶関数と奇関数

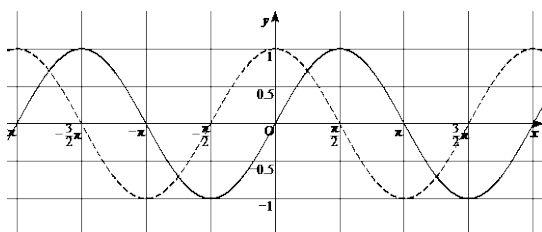
関数 $y = f(x)$ を考える。すべての x に対して $-f(x) = f(x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ を偶関数という。偶関数のグラフは y 軸に関して対称となる。

また、すべての x に対して

$-f(x) = f(-x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ を奇関数という。奇関数のグラフは、原点に関して対称となる。

例えば、 $y = \sin x$ は奇関数、 $y = \cos x$ は偶関数である。(下図)

実線 $\cdots y = \sin x$ 破線 $\cdots y = \cos x$



定理 4

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

証明

定理 2 より、

$$\sin(a-b)$$

$$= \sin\{a + (-b)\}$$

$$= \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$$

ここで、

$$\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$$

より、

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

同様に、

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

(Q.E.D)

定理 5 (二次方程式の解)

x の二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0, a, b, c \in R)$$

の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる。

証明

$ax^2 + bx + c = 0$ を平方完成すると、

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0,$$

よって、

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Q.E.D)

■頂角が 36° の二等辺三角形

下図の直角二等辺三角形 ADC において、

$$\angle DAC = 36^\circ, \angle ADB = \angle BDC$$

とする。

$$\angle ADC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

よって、 $\angle BDC = \angle ADB = 36^\circ$

ゆえに、

$$AB = BD$$

また、 $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 36^\circ$

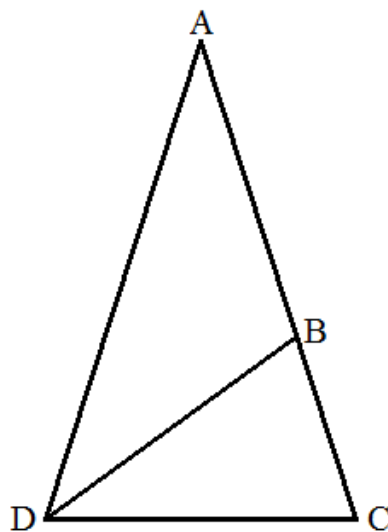
ゆえに、

$$BD = DC$$

したがって、

$$AB = BD = DC$$

が成り立つ。



3.2 正五角形と黄金比

下図で、 $\angle AGF = 90^\circ$ 、直線 HF は、直線 DC に平行である。すると、

$$\angle ABC = \angle AED = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$$

よって、

$$\angle CAB = \angle DAE = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

ゆえに、

$$\angle DAC = 180^\circ - 36^\circ \times 2 = 36^\circ$$

すると、先程の事実から、

$$AF = FD = DC$$

となる。

$\angle DAC = \angle FDC$ であり、

$AF = FD = DC = AH$ より、

$$\triangle DFC \equiv \triangle AHF$$

となる。また、

$\triangle ADC$ の $\triangle AHF$ なので、いま $DC = 1$ 、

$AC = x$ とすると、

$$x:1=1:(x-1)$$

よって、

$$x^2 - x - 1 = 0$$

となる。二次方程式の解の公式を用いると、

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

いま、 $x > 0$ なので、 $AC = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ これは

黄金数 ϕ と同じ値である。これで、

$AC:CD = 1:\phi$ が示された。ちなみに、

$$AF = 1, \quad AG = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ より、}$$

$$GF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

よって、

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

となる。また、点 A から辺 CD へ下ろした垂線の足を I とする。すると、

$$AC = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad IC = \frac{1}{2} \text{ より、}$$

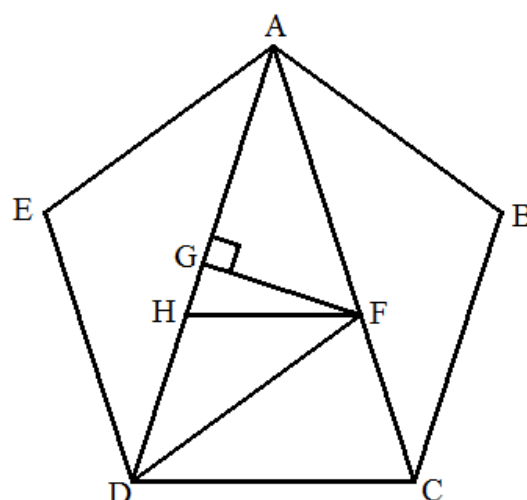
$$\begin{aligned} IA &= \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5} - 1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

なので、

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{1 + \sqrt{5}}, \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}$$

となる。



3.3.1 考察①

ここで、私は、 $\sin 18^\circ, \cos 18^\circ$ の値と

定理 4 を用いて、 $\sin 3^\circ, \cos 3^\circ$ を求めることができないかと考えた。

■ $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ を求める。

左図のような、 $\angle ACB = 30^\circ$ 、

$\angle ABD = 90^\circ, \angle ADB = 15^\circ$ となる、

直角三角形 ADB を考える。

$\angle CAB = 60^\circ, \angle DAB = 75^\circ$ より、

$$\angle DAC = 15^\circ$$

したがって、

$$AC = CD$$

いま、 $AB = 1$ とする。すると $AC = 2$ より

$$CB = \sqrt{3} \text{ ゆえに、} DB = 2 + \sqrt{3}$$

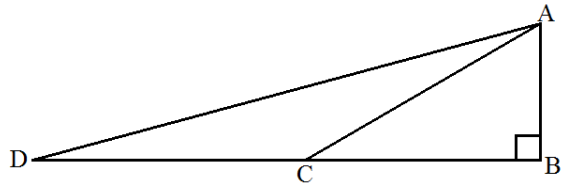
となる。よって、

$$AD = \sqrt{1^2 + (2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

よって、

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}, \cos 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

となる。



■ $\sin 3^\circ, \cos 3^\circ$ を求める。

先程の、 $\sin 18^\circ, \cos 18^\circ, \sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ の値を定理 4 にあてはめると、
 $\sin(18-15)^\circ$

$$\begin{aligned} &= \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \frac{1 \cdot (2 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} - \frac{1 \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}} \\ \cos(18-15)^\circ \\ &= \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}(2 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} + \frac{1}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} \\ &= \frac{2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}} \end{aligned}$$

よって、

$$\sin 3^\circ = \frac{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}} \approx 0.05233595624$$

$$\cos 3^\circ = \frac{2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}} \approx 0.9986295348$$

3.3.2 考察②

さらに、定理 4 を用いて、 $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ を求めることができないかと考えた。

定理 6 (3 倍角の公式)

$$\sin 3a = 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

証明

定理 4 で $b = 2a$ を代入すると、

$$\sin 3a$$

$$= \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a$$

$$\begin{aligned} &= \sin a(\cos a \cos a - \sin a \sin a) \\ &\quad + \cos a(\sin a \cos a + \cos a \sin a) \end{aligned}$$

$$= \sin a \cos^2 a - \sin^3 a + 2\sin a \cos^2 a$$

$$= 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a$$

ここで、定理 2 より、 $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ なので、

$$\sin 3a = 3\sin a(1 - \sin^2 a) - \sin^3 a$$

$$= 3\sin a - 4\sin^3 a \dots \textcircled{1}$$

同様に、

$$\cos 3a$$

$$= \cos a \cos 2a + \sin a \sin 2a$$

$$= \cos a(\cos^2 a - \sin^2 a)$$

$$- \cos a \cdot 2\sin a \cos a$$

$$= \cos^3 a - \cos a(1 - \cos^2 a) - 2\cos a(1 - \cos^2 a)$$

$$= 4\cos^3 a - 3\cos a \dots \textcircled{2}$$

(Q.E.D)

■ $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$

ここで、①、②に $a = 1^\circ$ を代入すると、

$$\sin 3^\circ = 3\sin 1^\circ - 4\sin^3 1^\circ,$$

$$\cos 3^\circ = 4\cos^3 1^\circ - 3\cos 1^\circ$$

しかし、 $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ を求めるためには、上の三次方程式を解かなければならない。そこで、その方程式を関数電卓に計算させた。すると、それぞれ 3 つの解を得た。

$$(\sin 1^\circ, \cos 1^\circ)$$

$$= (-0.8746197071, 0.9998476952)$$

$$(0.8571673007, -0.4848096202)$$

$$(0.01745240644, -0.5150380749)$$

まず、 $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ の値が負になることはありえない。

$$\text{よって、} \cos 1^\circ \approx 0.9998476952$$

になることがわかる。また、 $\sin 1^\circ \approx 0.86$ となる直角三角形を描くと下図のようになり不適だとわかる。

$$\text{よって、} \sin 1^\circ \approx 0.01745240644$$

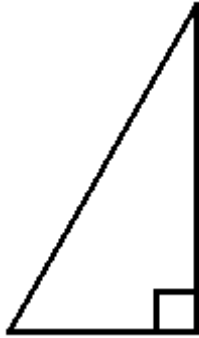
となる。

つまり、

$$\sin 1^\circ \approx 0.01745240644,$$

$$\cos 1^\circ \approx 0.9998476952$$

と求められた。



3.4 正 n 角形の面積

三角比を用いて、正 n 角形の面積を求めることができないかと私は考えた。下図の、正 n 角形を n 個の二等辺三角形に分けたものの1つ分の面積を考える。 $AC = CB = a$

とすると、まず、 $\angle ACD = \frac{360}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180}{n}$

より、 $\sin \frac{180}{n} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{a}$

したがって、 $AD = a \sin \frac{180}{n}$

ゆえに、

$$AB = 2a \sin \frac{180}{n}$$

また、 $\cos \frac{180}{n} = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{a}$

ゆえに、

$$DC = a \cos \frac{180}{n}$$

よって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\begin{aligned} & 2a \sin \frac{180}{n} \cdot a \cos \frac{180}{n} \cdot \frac{1}{2} \\ &= a^2 \sin \frac{180}{n} \cos \frac{180}{n} \end{aligned}$$

定理3を用いて、

$$\begin{aligned} & a^2 \sin \frac{180}{n} \cos \frac{180}{n} \\ &= a^2 \cdot \sin \frac{360}{n} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{360}{n} \end{aligned}$$

よって、正 n 角形の面積は、

$$\frac{1}{2} a^2 n \sin \frac{360}{n}$$

となる。また、 AB の長さを b とすると、

$$AD = \frac{b}{2} \text{ より、 } \tan \frac{180}{n} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{2DC}$$

$$\text{よって、 } DC \tan \frac{180}{n} = \frac{b}{2}$$

ゆえに

$$DC = \frac{b}{2 \tan \frac{180}{n}}$$

よって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$b \cdot \frac{b}{2 \tan \frac{180}{n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{b^2}{4 \tan \frac{180}{n}}$$

よって、正 n 角形の面積は、

$$\frac{b^2 n}{4 \tan \frac{180}{n}}$$

とも表すことができる。

4. 今後の課題

今回、 $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ の値を求めることができた。なので、さらに細かい角度についても求めることや、正 n 角形以外の形でも面積を三角比を用いて表すことができるのが今後の課題である。

5. 参考文献

- [1] 三角形の七不思議 細矢 治夫 講談社
- [2] 図解雑学フーリエ変換 佐藤 敏明 ナツメ社

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さった顧問の川口先生ありがとうございました。また、SSHの先輩方にも、パソコンの使い方など、さまざまなことを教えてくれました。ありがとうございました。

カプレカー変換に関する考察

2年A組 市田 美玲

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班2年生はカプレカー変換について学習している。今回は3, 4桁のカプレカー変換と変換後の各桁の和の一般化について学習した。また、2, 5桁のカプレカー変換に関する考察ができたので紹介する。

キーワード カプレカー変換、カプレカー定数、ソート

2. 研究の背景と目的

私は顧問の先生からカプレカー変換について教えていただき、興味を持った。このカプレカー変換を行続けるとどのような値になるのか疑問に思い、桁数ごとに考察しようと考えた。そこで、3, 4桁のカプレカー変換と n 桁の変換後の各桁の和について先行研究から学習し、2, 5桁のカプレカー変換について考察を行ったので紹介する。

3. 研究内容

3.1 基本事項

■カプレカー変換

自然数において、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作のことをいう。例えば、265を変換すると、 $652 - 256 = 396$ より396となる。以降、これを**変換**と呼ぶ。

ただし、ぞろ目は最初の変換で0になるので、除いて考える。また、 n 桁の変換を考える際に変換により1桁減ってしまったとしても、 n 桁とみなして考える。例えば、99を099とみなして、 $445 \rightarrow 99 \rightarrow 891$ と変換する。

■ソート

各桁の数字を並びかえて、最大の数にする操作をいう。

■カプレカー定数

1回の変換によって、値が変化しない自然数のことをいう。例えば、 495 ($954 - 459 = 495$) などである。

3.2 2桁のカプレカー変換

■2桁のカプレカー定数を求める

命題1

2桁のカプレカー定数は存在しない。

[証明]

2桁の自然数のソート後の値を

$10a + b$ (ただし、 $9 \geq a > b \geq 0$ かつ $a, b \in \mathbb{Z}$)

とおき、これを $\langle ab \rangle$ と表記する。同様に変

換後の値を $\langle pq \rangle$ とおく。 $a > b$ より繰り下がりに注意して変換を筆算で行うと次のようになる。

$$\begin{array}{rcc}
 & a & b \\
 - & b & a \\
 \hline
 & a-b-1 & b-a+10 \\
 & (p) & (q)
 \end{array}$$

筆算 1

$\langle ab \rangle$ がカプレカー定数のとき、 a, b それぞ

れの値が p, q のどちらかと等しくなる。

$a = p$ ならば、筆算 1 より

$p = a - b - 1 = a$ より $b = -1$ となり矛盾。

したがって、 $a = q, b = p$ とすると、

$$\begin{cases} b - a + 10 = a \\ a - b - 1 = b \end{cases}$$

この連立方程式を解くと、

$$a = \frac{19}{3}, b = \frac{8}{3}$$

となり $a, b \in \mathbb{Z}$ に矛盾。

よって、2桁のカプレカー定数は存在しない。(Q.E.D.)

■変換を続けるとどうなるのか

[考察]

2桁のカプレカー定数は存在しないことが示されたが、任意の2桁の数 $\langle ab \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかを考える。

$\langle ab \rangle$ を変換すると筆算 1 より、

$$10(a - b - 1) + b - a + 10 = 9(a - b)$$

となる。ここから、変換後の値は $a - b$ の値によって決まることがわかる。 $a - b$ は自然数 ($a - b \in \mathbb{N}$ かつ $1 \leq a - b \leq 9$) なので、この値によって場合分けし、変換を繰り返すと次のようになる。

$a - b$	変換後の値 のソート後	2回目
---------	----------------	-----

1	90	81
2, 9	81	63
3, 8	72	45
4, 7	63	27
5, 6	54	9

表 1

3回目の変換後の値は、2回目の変換後の値から計算でき、それ以降も同様に計算できる。

よって、表 1 から、すべての2桁の自然数は変換を繰り返すと

$$9 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 9 \rightarrow \dots$$

と循環し、さらにそれは最大2回目の変換でその循環に入ることが示された。

3.3 3桁のカプレカー変換

■3桁のカプレカー定数を求める

命題 2

3桁のカプレカー定数は 495 である。

[証明]

ソート後の値を $\langle abc \rangle$ 、変換後の値を

$\langle pqr \rangle$ とおく。 ($9 \geq a \geq b \geq c \geq 0$,

$a > c$ かつ $a, b, c \in \mathbb{Z}$) 繰り下がりに注意して変換を筆算で行うと次のようになる。

$$\begin{array}{rcc}
 & a & b & c \\
 - & c & b & a \\
 \hline
 & a-c-1 & 9 & c-a+10
 \end{array}$$

筆算 2

$\langle abc \rangle$ がカプレカー定数のとき、 a, b, c それぞれの値が p, q, r のうち、どれかと等しくなる。

$9 \geq a \geq b \geq c$, $a > c$ かつ $q = 9$ より

$$a = q = 9$$

よって、 $r = c - a + 10 = c + 1 \neq c$ より $c \neq r$ したがって、 $c = p$ 、 $b = r$ となり、

$$\langle pqr \rangle = \langle cab \rangle \text{ となる。}$$

$$\text{連立方程式} \begin{cases} a - c - 1 = c \\ a = 9 \\ c - a + 10 = b \end{cases} \text{ を解くと、}$$

$a = 9, b = 5, c = 4$ となる。よって、3桁のカプレカー定数は 495 である。(Q.E.D.)

■変換を続けるとどうなるのか

[考察]

3桁のカプレカー定数は 495 であることが示されたが、任意の3桁の数 $\langle abc \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかについて考える。

$\langle abc \rangle$ を変換すると筆算 2 より

$100(a - c - 1) + 10 \times 9 + c - a + 10 = 99(a - c)$ となる。ここから、変換後の値は $a - c$ の値によって決まることがわかる。 $a - c$ は自然数 ($a - c \in \mathbb{N}$ かつ $1 \leq a - c \leq 9$) なので、この値によって場合分けし、変換を繰り返すと次のようになる。

$a - c$	変換後の値 のソート後	2回目
1	990	891
2, 9	981	792
3, 8	972	693
4, 7	963	594
5, 6	954	495

表 2

よって、表 2 より、すべての3桁の自然数は変換を繰り返すと 495 になる。さらに、それに辿り着くまでに最大で6回の変換が必要であるということが示された。

3.4 4桁のカプレカー変換

■4桁のカプレカー定数を求める。

命題 3

4桁のカプレカー定数は 6174 である。

[証明]

ソート後の値を $\langle abcd \rangle$ 、変換後の値を

$\langle pqrs \rangle$ とおく。 ($9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$,

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \sim d$ のうち1つは必ず異なる) $b = c$ のときと $b > c$ のときで場合分けして、変換を筆算で行うと次のようになる。

[1] $b = c$ のとき

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & b & d \\ - & d & b & b & a \\ \hline a - d - 1 & 9 & 9 & d - a + 10 \end{array}$$

筆算 3

$9 \geq a \geq b = c \geq d$, $a > d$ かつ $q = r = 9$ より、 $a = b = q = r = 9$

したがって、 $d = p$ または $d = s$ となる。

筆算 3 より、 $s = d - a + 10 = d + 1 \neq d$ となり、 $d = p$

$p = a - d - 1 = 8 - d$ より $8 - d = d$ となり、 $d = 4$

このとき、 $c = s = d + 1 = 5$

$b = c$ かつ $b = 9$ より $c = 9$ 矛盾である。

よって、 $b = c$ のときカプレカー定数は存在しない。

[2] $b > c$ のとき

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline a-d & b-c-1 & c-b+9 & d-a+10 \end{array}$$

筆算 4

$a-d \geq b-c$ より、 $p > q$

$p > q$ より $a \neq q, d \neq p$

$b-c-1 \neq b$ より、 $b \neq q$

$9 \geq a$ より $-a+10 \geq 1$

$s = d - a + 10 \geq d + 1 > d$ となり $d \neq s$

$\langle pqrs \rangle$ に当てはまる $\langle abcd \rangle$ は

$\langle acdb \rangle, \langle adbc \rangle, \langle adcb \rangle, \langle bcda \rangle, \langle bdac \rangle, \langle bdca \rangle, \langle cdab \rangle, \langle cdba \rangle$

の 8 通りとなる。それぞれの連立方程式を

解くと、 $\langle pqrs \rangle = \langle bdac \rangle = 6174$ だけが解

として適する。よって、4 桁のカプレカー定数は 6174 である。(Q.E.D.)

■変換を続けるとどうなるのか

[考察]

4 桁のカプレカー定数は 6174 であるこ

とが示されたが、任意の 4 桁の数 $\langle abcd \rangle$ に

ついて、変換を繰り返すとどのような数になるのか考える。

$b = c$ のときも筆算 4 で考えることができるので、全ての場合を筆算 4 で考える。

$\langle abcd \rangle$ を変換すると筆算 4 より、

$999(a-d) + 90(b-c)$ となる。ここから、変換後の値は $a-d$ と $b-c$ の 2 つの値で決まることがわかる。

(ただし、 $9 \geq a-d \geq b-c \geq 0$ かつ $a-d, b-c \in \mathbb{Z}$ かつ $a-d \neq 0$) 変換後の値をソートした値を $a-d$ と $b-c$ の値によって場合分けし、変換を繰り返したものをまとめると次のようになる。

$(a-d, b-c)$	1 回目 ソート後	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目	7 回目
(1, 0)	9990	8991	8082	8532	6174	6174	6174
(1, 1), (9, 1), (9, 9)	9810	9621	8352	6174	6174	6174	6174
(2, 0), (9, 0)	9981	8082	8532	6174	6174	6174	6174
(2, 1), (8, 1)	8820	8532	6174	6174	6174	6174	6174
(2, 2), (8, 2), (8, 8)	8721	7443	3996	6264	4176	6174	6174
(3, 0), (8, 0)	9972	7173	6354	3087	8352	6174	6174
(3, 1), (7, 1)	8730	8352	6174	6174	6174	6174	6174
(3, 2), (7, 2)	7731	6354	3087	8352	6174	6174	6174
(3, 3), (7, 3), (7, 7)	7632	5265	4176	6174	6174	6174	6174
(4, 0), (7, 0)	9963	6264	4176	6174	6174	6174	6174
(4, 1), (6, 1)	8640	8172	7443	3996	6264	4176	6174

(4, 2), (6, 2)	7641	6174	6174	6174	6174	6174	6174
(4, 3), (6, 3)	6642	4176	6174	6174	6174	6174	6174
(4, 4), (6, 4), (6, 6)	6543	3087	8352	6174	6174	6174	6174
(5, 0), (6, 0)	9954	5355	1998	8082	8532	6174	6174
(5, 1)	8550	7992	7173	6354	3087	8352	6174
(5, 2)	7551	5994	5355	1998	8082	8532	6174
(5, 3)	6552	4176	6174	6174	6174	6174	6174
(5, 4)	5553	1998	8082	8532	6174	6174	6174
(5, 5)	5544	1089	9621	8352	6174	6174	6174
(6, 5)	6444	1998	8082	8532	6174	6174	6174
(7, 4), (7, 6)	7533	4176	6174	6174	6174	6174	6174
(7, 5)	7443	3996	6264	4176	6174	6174	6174
(8, 3), (8, 7)	8622	6354	3087	8352	6174	6174	6174
(8, 4), (8, 6)	8532	6174	6174	6174	6174	6174	6174
(8, 5)	8442	5994	5355	1998	8082	8532	6174
(9, 2), (9, 8)	9711	8532	6174	6174	6174	6174	6174
(9, 3), (9, 7)	9621	8352	6174	6174	6174	6174	6174
(9, 4), (9, 6)	9531	8172	7443	3996	6264	4176	6174
(9, 5)	9441	7992	7173	6354	3087	8352	6174

よって、すべての4桁の自然数は変換を繰り返すと6174なる。さらに、それに辿り着くまでに最大で7回の変換が必要であることが示された。

3.5 5桁のカプレカー定数

■ 5桁のカプレカー定数を求める

命題4

5桁のカプレカー定数は存在しない。

[証明]

ソート後の値を $\langle abcde \rangle$ と表記し、変換

後の値を $\langle pqrst \rangle$ とする。

(ただし、 $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0$, $a > e$ かつ

$a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$) 変換を筆算で行うと次のようになる。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccc}
 a & b & c & d & a \\
 - & e & d & c & b \\
 \hline
 a-e & b-d-1 & 9 & d-b+9 & e-a+10
 \end{array}
 \end{array}$$

筆算5

$a \geq b \geq c \geq d \geq e$, $a > e$ かつ $r=9$ より、 $a=9, e \neq r$ とわかる。

$a-e \geq b-d$ より、 $p > q$

$p > q$ より、 $a \neq q, e \neq p$

$b-d-1 \neq b$ より、 $b \neq q$

$-a+10 \geq 1$ より、 $e-a+10 = e+1 \neq e$ となり、 $e \neq t$

$\langle pqrst \rangle$ に当てはまる $\langle abcde \rangle$ は

$\langle acbed \rangle, \langle acdeb \rangle, \langle adbec \rangle, \langle adceb \rangle, \langle aebcd \rangle,$
 $\langle aebdc \rangle, \langle aecbd \rangle, \langle aecdb \rangle, \langle aedbc \rangle, \langle aedcb \rangle,$
 $\langle bcaed \rangle, \langle bcdea \rangle, \langle bdaec \rangle, \langle bdcea \rangle, \langle beacd \rangle,$
 $\langle beadc \rangle, \langle becad \rangle, \langle becda \rangle, \langle bedac \rangle, \langle bedca \rangle,$
 $\langle cdaeb \rangle, \langle cdbea \rangle, \langle ceabd \rangle, \langle ceadb \rangle, \langle cebad \rangle,$
 $\langle cebda \rangle, \langle cedab \rangle, \langle cedba \rangle, \langle deabc \rangle, \langle deacb \rangle,$
 $\langle debac \rangle, \langle debca \rangle, \langle decab \rangle, \langle decba \rangle$

の34通りとなる。これらを解くと、解として適するものがない。

よって、5桁のカプレカ一定数は存在しない。

(Q.E.D.)

■変換を繰り返すとどうなるのか

[考察]

5桁のカプレカ一定数は存在しないことが示されたが、任意の5桁の数 $\langle abcde \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかを考える。

$\langle abcde \rangle$ を変換すると筆算5より、
 $9999(a-e) + 990(b-d)$ となる。変換後の値は $a-e$ と $b-d$ の値で決まることがわかる。
 $(a-e \geq b-d)$ 変換後の値をソートした値を $a-e$ と $b-d$ の値によって場合分けし、変換を繰り返したものをまとめると次のようになる。

$(a-e, b-d)$	1回目 ソート後	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目
(1, 0)	99990	89991	80982	95931	85932	74943
(1, 1), (9, 9), (9, 9)	99810	97911	87912	85932	74943	62964
(2, 0), (9, 0)	99981	80982	95931	85932	74943	62964
(2, 1), (8, 1)	98820	95931	85932	74943	62964	71973
(2, 2), (8, 2), (8, 8)	98721	85932	74943	62964	71973	83952
(3, 0), (8, 0)	99972	71973	83952	74943	62964	71973
(3, 1), (7, 1)	98730	94941	84942	73953	63954	61974
(3, 2), (7, 2)	97731	83952	74943	62964	71973	83952
(3, 3), (7, 3), (7, 7)	97632	73953	63954	61974	82962	75933
(4, 0), (7, 0)	99963	62964	71973	83952	74943	62964
(4, 1), (6, 1)	98640	93951	85932	74943	62964	71973
(4, 2), (6, 2)	97641	82962	75933	63954	61974	82962
(4, 3), (6, 3)	96642	71973	83952	74943	62964	71973
(4, 4), (6, 4), (6, 6)	96543	61974	82962	75933	63954	61974
(5, 0), (6, 0)	99954	53955	59994	53955	59994	53955
(5, 1)	98550	92961	86922	75933	63954	61974
(5, 2)	97551	81972	85932	74943	62964	71973
(5, 3)	96552	70983	94941	84942	73953	63954

(5, 4)	95553	59994	53955	59994	53955	59994
(5, 5)	95544	50985	92961	86922	75933	63954
(6, 5)	96444	51975	81972	85932	74943	62964
(7, 4), (7, 6)	97533	63954	61974	82962	75933	63954
(7, 5)	97443	62964	71973	83952	74943	62964
(8, 3), (8, 7)	98622	75933	63954	61974	82962	75933
(8, 4), (8, 6)	98532	74943	62964	71973	83952	74943
(8, 5)	85442	73953	63954	61974	82962	75933
(9, 2), (9, 8)	99711	87912	85932	74943	62964	71973
(9, 3), (9, 7)	99621	86922	75933	63954	61974	82962
(9, 4), (9, 6)	99531	85932	74943	62964	71973	83952
(9, 5)	99441	84942	75953	63954	61974	82962

よって、全ての5桁の自然数は変換を繰り返すと次の3パターンのいずれかで循環する。

- ① 74943 → 62964 → 71973 → 83952
- ② 75933 → 63954 → 61974 → 82962
- ③ 59994 → 53955

さらに、①, ②は最大で6回の変換を行うと循環に入り、③は最大で2回の変換を行うと循環に入ることが示された。

3.6 変換後の各桁の和の一般化

命題5

n 桁の変換後の各桁の和は9の倍数になる。

[証明]

n 桁の自然数のソート後の値を

$\langle a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \rangle$ とする。(ただし、

$9 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ かつ $a_1 > a_n$ かつ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$)

ここで、変換後の値を $\langle p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \rangle$ とし
て、

$a_k - a_{n+1-k} = b_k$ とおく。($k = 1, \cdots, n$)

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n$ かつ $a_1 > a_n$ より、

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n$ かつ $b_1 > b_n$ であり

$b_k = -b_{n+1-k}$ が成り立つ。変換を筆算で行うと次のようになる。

$$\begin{array}{rcccccc}
 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
 - & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 \hline
 p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n
 \end{array}$$

また、 m が $b_k = 0$ となる最小の k として、各桁の和を S とする。

[1] n が奇数のとき

奇数桁の場合、中央の桁で同じ数を引く

ので、必ず $m \left(2 \leq m \leq \frac{n}{2} \right)$ が存在する。

$b_k = -b_{n+1-k}$ より、 $b_m = -b_{n-m+1} = 0$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n$ かつ $b_1 > b_n$ より、

$m \geq k \geq n - m + 1$ のとき、 $b_k = 0$

また、 m の最小性より、 $k < m$ のとき $b_k > 0$,

$k > n + 1 - m$ のとき $b_k < 0$

したがって、 $k \geq m$ のとき繰り下がりが起こり、逆に $k < m$ のとき繰り下がりが起こ

らない。これを考慮して、 b_k の値から p_k の値を求めると次のようになる。

- ・ $k = n$ のとき、 $p_n = b_n + 10$
- ・ $n > k \geq m$ のとき、 $p_k = b_k + 9$
- ・ $k = m - 1$ のとき、 $p_{m-1} = b_{m-1} - 1$
- ・ $k < m - 1$ のとき、 $p_k = b_k$

したがって、

$$S = \sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n b_k + 10 + 9(n - m) - 1$$

$b_k = -b_{n+1-k}$ より、 b_k をすべてたすと 0 にな

る。つまり、 $\sum_{k=1}^n b_k = 0$

よって、 $S = 9(n - m - 1)$

[2] n が偶数のとき

偶数桁の場合、 m が存在するときと存在しないときがある。 m が存在するときは奇数桁の場合と同様、 $S = 9(n - m - 1)$ となる。

m が存在しない場合、 $k > \frac{n}{2}$ のとき繰り

下がりが起こり、逆に $k \leq \frac{n}{2}$ のとき繰り下がりが起こらない。これを考慮して b_k の値から p_k の値を求めると次のようになる。

- ・ $k = n$ のとき、 $p_n = b_n + 10$
- ・ $n > k > \frac{n}{2}$ のとき、 $p_k = b_k + 9$
- ・ $k = \frac{n}{2}$ のとき、 $p_{\frac{n}{2}} = b_{\frac{n}{2}} - 1$
- ・ $k < \frac{n}{2}$ のとき、 $p_k = b_k$

したがって、

$$S = \sum_{k=1}^n b_k + 10 + 9\left(\frac{n}{2} - 1\right) - 1$$

$$b_k = -b_{n+1-k} \text{ より、} \sum_{k=1}^n b_k = 0$$

$$\text{よって、} S = \frac{9}{2}n$$

以上の結果から偶数でも奇数でも S の値が 9 の倍数になることがわかる。各桁の和が 9 の倍数である数は 9 の倍数であるから、変換後の値は 9 の倍数であることが示された。

(Q.E.D.)

4. 今後の課題

今回、2、5 桁のカプレカー変換について、自ら考察することができた。2、3、4、5 桁を比べるとカプレカー定数が存在する桁と、カプレカー定数が存在せず循環する桁があった。その違いに規則性があるか、どのような数がカプレカー定数になるのかについて疑問をもったので、さらに研究を進めていきたい。桁数が大きくなるにつれて計算量が非常に増えるので、今後はコンピューターを用いて計算することも見据えていきたい。また、今回は十進法の数について考察したが、それ以外の数についても調べていきたい。

5. 参考文献

[1] http://nadamath2012.web.fc2.com/bushi/2011_sigma.pdf、重村卓人

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございます。また、サイエンス研究会の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございます。

素数の並びに規則はあるかⅢ

4 年 A 組 田村 拓也

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 4 年生は素数について学習している。今回も算術級数定理の証明を理解することを目標とし、その理解のためにリーマン予想やラマヌジャン予想、ベルヌーイ数、スターリング数を学習した。

キーワード 素数、ゼータ関数、L 関数、ベルヌーイ数、スターリング数

2. 研究の背景と目的

素数とは 1 と自分自身以外に正の約数を持たない 1 以外の自然数であり、**2,3,5,7,11,...**と続く。この並びは一見規則性がないように見える。しかし、実際はどのようなか未だわかっていない。

私は、「素数の並びに規則はあるのか」という問題に興味をもった。すると、素数の並びの背景には深い代数世界が広がっていることを知った。そこで、基礎的な内容に加えて、L 関数、ディリクレ指標、ベルヌーイ数やスターリング数といった内容について、本稿にまとめておくことにした。

2 年生のときに行った研究ではベルヌーイ数、3 年生では L 関数についての研究を行ったので、4 年生である本年は、その 2 つを関連付けながら算術級数定理の証明の理解を試みた。

3. 研究内容

3.1 基本事項

算術級数定理

初項と公差が互いに素である算術級数には無限に素数があらわれる。

■テイラー展開・マクローリン展開

1 変数関数 $f(x)$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ のまわりでの**テイラー展開**という。特に、 $a=0$ のとき、つまり、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

を関数 $f(x)$ の**マクローリン展開**という。

■群

ある演算について、結合則、単位元の存在、逆元の存在を満たす集合のことを**群**という。

■対称群

$I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ に対し、 I_n から I_n への全単射全体の集合は、写像の合成を積として群になり、これを **n 次対称群**といい、 S_n , $Sym(n)$ などと表す。

X を有限集合とし、 X から X への全単射全体の集合を $Sym(X)$ と置くと、写像の合成を積として $Sym(X)$ は群になる。

■ゼータ関数

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ をゼータ関数という。この関数は、因数分解によって、

$$\prod_{p:\text{prime}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

に式変形できる。

【考察】有限のゼータ関数

リーマンゼータ関数は無限までの総和である。そこで、有限個の総和は因数分解で有限のオイラー積に変形することができるのかについて考察した。

(1) 自然数を用いた和

$${}_1Z_n(s) = \sum_{m=1}^n m^{-s} \text{ を考える。}$$

因数分解できない。

(2) n の素因数を用いた和

$${}_2Z_n(s) = \sum_{p|n} p^{-s} \text{ を考える。}$$

因数分解できない。

(3) n の約数を用いた和

$${}_3Z_n(s) = \sum_{m|n} m^{-s} \text{ を考える。}$$

$$\sum_{m|n} m^{-s} = \prod_{p|n} \frac{1 - p^{-(Df_{p,n}+1)s}}{1 - p^{-s}}$$

と因数分解できる。ただし、 $Df_{p,n}$ は n の

素因数 p の個数とする。

これを無限に拡張しようとしてみたが、できないことがわかった。

■ディリクレ指標 定義

f を自然数とする。写像 $\chi: Z \rightarrow C$ が f を法とするディリクレ指標であるとは、

1, 任意の $a, b \in Z$ に対し、

$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ は乗法的である。

2, 任意の $a, b \in Z$ に対し、

$\chi(a+bf) = \chi(a)$ は乗法的である。

3, $(a, f) = 1$ ならば、 $\chi(a) \neq 0$ かつ、

$(a, f) \neq 1$ ならば、 $\chi(a) = 0$ 。

■L関数

先程のゼータ関数を拡張し、各項の分子である 1 を数列 $a = \{a(n)\}$ に変えた級数

$$L(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

オイラー積に変形できるものもある。

ディリクレの L 関数

$$L(s, \chi) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$$

ラマヌジャンの L 関数

$$L(s, \tau) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11}(p^{-s})^2}$$

■リーマン予想

ゼータ関数の非自明な零点の実部はすべて

$$\frac{1}{2} \text{ である。}$$

■ラマヌジャン予想

ゼータ関数、L 関数のオイラー因子の零点の実部はすべて一定である。

3.2 べき乗和

ガウスの逸話で有名な以下の式

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 99 + 100$$

$$\text{は、} \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = 5050 \text{ と求められる。}$$

$$\text{これを一般化すると} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ という}$$

公式が導かれる。しかし、以下のように各項を2乗したものの和では計算が困難であるように見える。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$$

況してや5乗や100乗ともなれば計算が出来るのかさえ、疑いを思ってしまう。すな

わち、 $\sum_{i=1}^n i^k$ において k や n が (非常に) 大きくなると計算が困難であるということである。

3.3 ベルヌーイ数

ベルヌーイ数とは、

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = n+1$$

定義される数列 B_j のことである。これを用

いれば、前項の $\sum_{i=1}^n i^k$ を簡単に求めることができる。

$$\begin{aligned} S_k(n) &= \sum_{i=1}^n i^k = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \end{aligned}$$

また二項定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ に非常によく似ていることに注意すれば、上の式で多項式環 $Q[b]$ から Q への線形写像

T を $T: T(b^j) = B_j$ で定義しておくと、

$$S_k(n) = \frac{T((n+b)^{k+1} - b^{k+1})}{k+1}$$

と書き換えることができる。例えば、 $k=5$ ならば、つまり n までの5乗の和は

$$\begin{aligned} S_5(n) &= \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} \\ &= \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1) \\ &= \frac{1}{12} 100^2 (100+1)^2 (2 \times 100^2 + 2 \times 100 - 1) \\ &= 171708332500 \end{aligned}$$

と求めることができる。しかし、このベルヌーイ数を求めることが困難ならばあまり意味がない。そこで、ベルヌーイ数を先程の定義式以外から求める方法を次項で紹介する。

■ベルヌーイ数の母関数

B_n をベルヌーイ数とする。

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

証明

$$te^t = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \right) (e^t - 1) \text{ を示せばよい。}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \right) (e^t - 1) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - 1 \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{B_i}{i!(n-1)!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

ここでベルヌーイ数の漸化式

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = n+1 \quad \text{より} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i = n$$

なるので、マクローリン展開の逆を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} = te^t$$

となる。

(Q.E.D.)

3.4 スターリング数

スターリング数は 2 種存在し、それらはどちらも組み合わせに関係する。

■第 1 種スターリング数

$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]$ は m 個のサイクルからなる n 次対

称群の個数(n cycle m)

漸化式 $\left[\begin{matrix} n+1 \\ m \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ m-1 \end{matrix} \right] + n \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]$ と初期値

$\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = 1, \left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 0 \\ m \end{matrix} \right] = 0 \ (n, m \neq 0)$ で定義する。

■第 2 種スターリング数

$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ は n 元集合を m 個の空でない部分

集合に分ける方法の数。

漸化式 $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ m-1 \end{matrix} \right\} + m \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ と、初期

値 $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1, \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ m \end{matrix} \right\} = 0 \ (n, m \neq 0)$ で定義する。

■スターリング数関連の公式

ここでは自身で証明できたもののみ証明を示す。

$$(1) \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} -m \\ -n \end{matrix} \right\}$$

証明

$a_{n,m} = \left\{ \begin{matrix} -m \\ -n \end{matrix} \right\}$ と置く。これが $\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]$ と同じ初

期値、漸化式を満たすことを確かめればよい。初期値については自明。第 2 種スターリング数の漸化式より、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} -m+1 \\ -n \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} -m \\ -n-1 \end{matrix} \right\} - n \left\{ \begin{matrix} -m \\ -n \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} -m+1 \\ -n \end{matrix} \right\} + n \left\{ \begin{matrix} -m \\ -n \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} -m \\ -n-1 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

これは $a_{n,m-1} + na_{n,m} = a_{n+1,m}$ と書け、これ

は第 1 種スターリング数の漸化式に等しい。
(Q.E.D.)

$$(2) x^n = (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] x^m \ (n \geq 0)$$

ただし、 x^m は

$$x^m = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)$$

($m > 0$), $x^m = 1$ とする。

証明

先程と同様に考え、

$$x^n = (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m a_{n,m} x^m \text{ とおいて、} a_{n,m}$$

が第 1 種スターリング数と同じ初期値、漸化式を満たすことを確かめる。初期値は自明。

$$x^m \times x = x^{m+1} + mx^m \text{ より、}$$

$$(-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m a_{n+1,m} x^m = x^{n+1}$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m a_{n,m} x^m (x-n)$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} a_{n,m-1} x^m \times x + \sum_{m=0}^n m a_{n,m} x^m$$

より、 x^m の係数より漸化式を満たす。

(Q.E.D.)

$$(3) x^n = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} x^m \quad (n \geq 0)$$

証明

先程と同様に考え、 $x^n = \sum_{m=0}^n a_{n,m} x^m$ とおい

て、 $a_{n,m}$ が第 2 種スターリング数と同じ初

期値、漸化式を満たすことを確かめる。初期値は自明。

$$x^m \times x = x^{m+1} + mx^m \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n+1} a_{n+1,m} x^m &= x^{n+1} = x^n \times x \\ &= \sum_{m=0}^n a_{n,m} x^m \times x \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} a_{n,m-1} x^m \times x + \sum_{m=0}^n m a_{n,m} x^m \end{aligned}$$

より、 x^m の係数より漸化式を満たす。

(Q. E. D.)

$$(4) \left(x \frac{d}{dx} \right)^n = \sum_{m=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} x^m \left(\frac{d}{dx} \right)^m \quad (n \geq 1)$$

(5.1) $m, n \geq 0$ に対し

$$\sum_{l \geq 0} (-1)^l \left\{ \begin{matrix} n \\ l \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right] = (-1)^m \delta_{m,n}$$

(5.2) $m, n \geq 0$ に対し

$$\sum_{l \geq 0} (-1)^l \left[\begin{matrix} n \\ l \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} = (-1)^m \delta_{m,n}$$

(6) $m, n \geq 0$ に対し

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} l^n$$

証明

同様に

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^m (-1)^l a_{n,m} l^n$$

として考える。初期値は自明。2 項定理の定義域の外を 0 とすると、

$$\begin{aligned} &a_{n,m-1} + m a_{n,m} \\ &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} l^n \\ &\quad + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m-1}{l} l^n \\ &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^m (-1)^l \left\{ \binom{m}{l} - \binom{m-1}{l} \right\} l^n \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} l^{n+1} = a_{n+1,m} \end{aligned}$$

より成り立つ。

(Q. E. D.)

(7)

$$\frac{(e^t - 1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} \quad (m \geq 0)$$

(8)

$$\frac{t^m}{(1-t)(1-2t) \cdots (1-mt)} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} t^n \quad (m \geq 1)$$

3.5 ベルヌーイ数のスターリング数による公式

(1)

$$B_n = (-1)^n \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}}{m+1} \quad (n \geq 0)$$

証明 引用

B_n の母関数を以下のように変形する。

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \frac{t}{1 - e^{-t}} = \frac{-\log\{1 - (1 - e^{-t})\}}{1 - e^{-t}}$$

テイラー展開した式 $-\log(1-t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m}$ に

$t = 1 - e^{-t}$ を代入して変形すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} &= \frac{-\log\{1 - (1 - e^{-t})\}}{1 - e^{-t}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-t})^{m-1}}{m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (e^{-t} - 1)^m}{m+1} \end{aligned}$$

ここで公式(7)

$$\frac{(e^t - 1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} \quad (m \geq 0)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{(-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}}{m+1} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

両辺の $\frac{t^n}{n!}$ の係数を比べれば公式が導かれる。

(Q.E.D.)

また、公式(6)、すなわち $m, n \geq 0$ に対し、

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} l^n$$

を用いると、先程の公式は

$$B_n = (-1)^n \sum_{m=0}^n \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} l^n \quad \text{と書け}$$

るわけであるが、計算が困難である。

(2)

$$B_n = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\}}{m+1} \quad (n \geq 0)$$

証明 引用

先程の公式(8)を用いて証明する。第2種スターリング数の漸化式より

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} + (m+1) \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\}$$

であるので

$$B_n = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! \left(\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} + (m+1) \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} \right)}{m+1}$$

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ 1 \end{matrix} \right] = m! \text{ なので、公式(5.1) より}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! (m+1) \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\}}{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ 1 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \delta_{1,n} \end{aligned}$$

ゆえに命題の右辺は

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! (m+1) \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\}}{m+1} + \delta_{1,n} \\ &= (-1)^n B_n + \delta_{1,n} \end{aligned}$$

となる。

(Q.E.D.)

これは次のようにパスカルの三角形に似た方法で求められるということも示す。

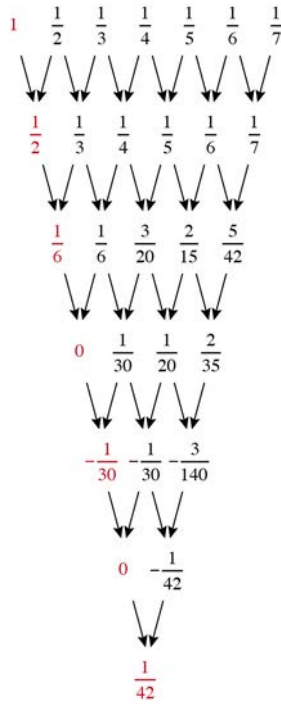


図 1 ベルヌーイ数を求める

証明 引用

$a_{n,m} = (m+1)(a_{n-1,m} - a_{n-1,m+1})$ で定められ

るような数列において、

$$a_{n,0} = \sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m}$$

であればよい。

$$g_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} t^m$$

とおく。 $a_{n,m}$ の漸化式より $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(a_{n-1,m} - a_{n-1,m+1}) t^m \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1,m} t^{m+1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1,m+1} t^{m+1} \right) \\ &= \frac{d}{dt} (t g_{n-1}(t)) - \frac{d}{dt} (g_{n-1}(t) - a_{n-1,0}) \\ &= g_{n-1}(t) + (t-1) \frac{d}{dt} (g_{n-1}(t)) \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} ((t-1)g_{n-1}(t))$$

よって、 $(t-1)g_{n-1}(t) = h_n(t)$ とおくと、

$$h_n(t) = (t-1) \frac{d}{dt} (h_{n-1}(t)) \quad (n \geq 1)$$

これより、

$$h_n(t) = \left((t-1) \frac{d}{dt} \right)^n (h_0(t))$$

ここで公式(4)を用いると、

$$h_n(t) = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} (t-1)^m \left(\frac{d}{dt} \right)^m h_0(t)$$

両辺 $t=0$ において

$$\begin{aligned} -a_{n,0} &= \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^m m! (a_{n,m-1} - a_{0,m}) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} (-1)^{m+1} (m+1)! a_{0,m} \\ &\quad - \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^m m! a_{0,m} \\ &= - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m} \end{aligned}$$

これで求める式が得られた。

(Q.E.D.)

3.6 一般ベルヌーイ数

法 f で定義された指標 χ に対して、一般ベ

ルヌーイ数は $B_{n,\chi}$ は、母関数を用いて、

$$\sum_{a=1}^f \frac{\chi(a) t e^{at}}{e^{ft} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!}$$

で定義される。また、テイラー展開によって展開されていくので、一般ベルヌーイ数は、以下のように計算していくことができる。

$$B_{0,\chi} = 0$$

$$B_{1,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \chi(a)a$$

$$B_{2,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \chi(a)a^2 - \sum_{a=1}^f \chi(a)a$$

$$B_{2,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \chi(a)a^3 - \frac{3}{2} \sum_{a=1}^f \chi(a)a^2 + \frac{f}{2} \sum_{a=1}^f \chi(a)a$$

これを一般にはベルヌーイ数 B_n を用いて、

$$B_{n,\chi} = f^{n-1} \sum_{a=1}^f \chi(a)B_n(a/f)$$

と表すことができる。

4. 今後の課題

今回、スターリング数の証明について、自ら考察することができた。しかし、算術級数定理の証明を完全には理解することができなかった。また、今回は新しい概念を膨大に学習したので、まだ理解が不十分なものも多い。そのため、さらに考察を深めるとともに、理論の大きな流れと微細な論理をしっかりと見極めながら学習と研究を進めたい。

5. 参考文献

- [1]「素数からゼータへそしてカオスへ」、小山信也，日本評論社
- [2]「ベルヌーイ数とゼータ関数」，荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信，牧野書店

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございました。

猿沢池のアオコの発生を考える

4年C組 狩田 帆乃夏

4年C組 赤木 美穂

指導教員 矢野 幸洋

1. 要約

猿沢池(奈良市)のアオコの発生について水質調査および環境データの測定、プランクトンの観察を行った。その結果、猿沢池では藍藻類が恒常的に多く、5月～6月にかけて発生したアオコは藍藻類の増加によるものと確認できた。

キーワード プランクトン、アオコ、COD

2. 研究の背景と目的

猿沢池には古くからの言い伝えである「澄まず、濁らず、出ず、入らず、蛙はわかず、藻は生えず、魚が七分に水三分」という七不思議があり、それを科学的に解明しようと、池の水質を調べることにした。調査を進める中で、春～夏にアオコが発生することがあり、それについて詳しく調べることにした。植物プランクトンの量を数値化するために、クロロフィルの抽出実験を行い、クロロフィル量を求めることにした。また、猿沢池で確認したプランクトンを整理するために、図鑑を作成することにした。

3. 仮説

アオコは春から夏にかけての気温、水温の上昇に伴って発生すると考えられる。

また、アオコを引き起こす原因となる藍藻類が猿沢池には恒常的に多く、それらが急速に増えることによって引き起こされるのではないかと考えられる。

4. 研究内容

実験方法

(1) 環境データの収集とプランクトンの採集・観察

①水の採集

プランクトンネットを使用し、あらかじめ決めた場所で採水ビン1本分の水を採集した。

②環境データの測定

採集した直後に、気温、水温、pH、COD、DO、濁度の値を調べ、記録した。なお、気温、水温、pHの測定はデジタルpH計を、CODはパックテストを、濁度は濁度計を用いて、計測した。

③遠心分離

持ち帰った水を、30ml 遠心分離管に入れ、遠心分離した。遠心分離管の底に沈殿したプランクトンをピペットで吸い上げ、スライドガラスに1滴ドロップし、プレパラートを作成した。

④観察

作成したプレパラートを顕微鏡で観察した。植物プランクトンにおいては、個体数が少ないものはカウントし、多いものはどの種が特に多かったのかを記録した。また、動物プランクトンにおいては、形が残っているもののみカウントし、すべての種について数を数えた。

(2) クロロフィル抽出実験

採水に行った日に同時にクロロフィルの抽出実験を行った。

①プランクトンのろ過

I・(1)と同じ方法で採集した 200ml の水を、ろ過装置でろ過をする。

②90%のアセトンの作製

アセトン 54ml、蒸留水 6ml を混ぜ、濃度 90%のアセトンを 60ml 作製する。

③クロロフィルの抽出

ビーカーに 90%アセトンを入れ、そこに、①のろ紙を下向きになるように入れ、超音波洗浄機で 30℃で 30 秒間洗浄する。

④吸光度の測定

2本のセルに、③の上澄み液と 90%アセトンを 2/3 ほどずつ入れ、分光光度計で、それぞれ 750nm、663nm、645nm、630nm で吸光度を測定する。

⑤クロロフィル値の計算

上澄み液の測定値からアセトンの測

定値を引き(引いたものをそれぞれの波長の測定値とする)、以下の式に数をあてはめて、クロロフィル a、クロロフィル b、クロロフィル c の値を計算する。※参考文献(1)より

Chl.a	$(11.64A - 2.16B + 0.1C)a \div VL$
Chl.b	$(20.97B - 3.94A - 3.66C)a \div VL$
Chl.c	$(54.22C - 14.81B - 5.53A)a \div VL$

- A=663nm の測定値-750nm の測定値
- V=ろ過量=0.2(L)
- B=645nm の測定値-750nm の測定値
- L=セルの長さ=5(cm)
- C=630nm の測定値-750nm の測定値
- a=溶液の量=50(ml)

3. 実験結果

(1) また水質調査および環境データの結果を表 1 に示す。猿沢池で見られたプランクトンを表 2 にまとめた。

	天気	気温	水温	pH	COD
2012/10/20(土)①	晴れ	19.2	19.4	8.58	20
2012/12/19(水)①	曇り	9.5	9.3	8.1	13
2013/01/19(土)①	晴れ	5.8	5.4	8.48	5
2013/02/26(火)①	曇り	4.2	11.6	7.6	5
2013/04/11(木)①	曇り	16.2	15.4	8.6	13
2013/04/27(土)①	晴れ	18.9	18	7.88	20
2013/05/18(土)①	晴れ	27.2	29.2	9.8	30
2013/06/01(土)①	晴れ	27.6	26	10.13	35
2013/06/15(土)①	曇り	31.9	30.4	9.03	25
2013/06/29(土)①	晴れ	29.5	31	8.72	20
2013/07/13(土)①	曇り	31	29.5	8.2	25
2013/07/25(木)①	晴れ	34.4	32.6	9.06	90
2013/08/09(金)①	快晴	32.8	32.7	9.37	25
2013/08/28(水)①	晴れ	32.2	30	9.88	30
2013/09/14(土)①	晴れ	29.5	29.3	9.38	20

表 1 環境データの結果

	藍藻								珪藻		緑藻														
	アナベナ・マクロスポーラ	アナベナ・フロスカクアエ	アナベナ・スピロイデスクラビサ	M・ペーゼンベルギー	M・ノバセツキ	M・ビリデイス	M・エルギノーザ	M・イクチオブラーベ	アウラコセイラ・アンビグア	A・アンビグア（変種）	ハリケイソウ	ホシガタケイソウ	コエラストルム・ミクロポルム	スタウラストルム・セバルデム	スタウラストルム・ドルシデンティフェルム	セネデスムス・オポリエンシス	ユードリナ	テトラスポラ・ラクストリス	ヒビミドロ	コスマリウム・ラルフス	テトラエドロン	キルクネリエラ	サメハダクンシヨウモ	ヒトヅノクンシヨウモ（変種）	フタヅノクンシヨウモ（変種）
2011/2/24(木)①										○	●	○													
2011/5/12(木)①	○	○	●	○	○			○										△							
2011/9/24(木)①	○			●	●			●	●	●	○		○		△		○	△	△					△	
2011/10/8(土)①				●	○				○																
2011/11/5(土)①	○			○																					
2012/3/13(火)①				○	○																				
2012/4/21(土)①				●	●				●	○	○			△											
2012/5/17(木)①	○	○		●	○				●																
2012/6/28(木)①	●			●	○				●	●				●	△		●			△	△				
2012/7/7(土)①	●			●					●	●	○		○	●											
2012/7/17(火)①	●			●	○				●	●	○			○	△		○					△			△
2012/10/9(火)①				○	○				●	●	○			△	△		○						△		
2012/10/20(土)①				●	●				●	●	●			△	△		△	△							△
2013/1/19(土)①				○																					
2013/2/26(火)①				●	○				○	●					△										
2013/4/27(土)①	○	○		○					○	○	○	○	○	○		△									
2013/5/18(土)①	●	●		○	○				○		○	○	○	○											
2013/6/1(土)①	●	●	●	○	○				○	○			○	○											
2013/6/15(土)①	●	●		●	○																				
2013/7/25(木)①	○	○		●	○				●	●	○	○	○	○	○	○					△	△		○	
2013/8/28(水)①				●	○				●	●		○	○	○											
2013/9/14(土)①				●	○				●	●		○		○	○										

表2 猿沢池で観察された植物プランクトン

●：多く確認される ○：複数確認される

△：確認される 空欄：確認されず

(2) クロロフィル抽出実験

クロロフィル a、b、c の抽出結果を表 3 と図 1 にまとめた。また、クロロフィル値と水温 COD の関係を図 2、クロロフィル a と pH の関係を図 3 にまとめた。

表 4 は、それぞれの植物プランクトンがどのクロロフィルを保有しているのかを表したものである。○は保有していることを表す。

※参考文献(1)より

表 4 より、クロロフィル a の量が最も大きいとわかるが、実験では、そのような結果にならなかった場合もあった。

	Chi.a	Chl.b	Chl.c
2013.02.26	6.23	1.52	7.31
2013.03.13	9.59	3.47	9.73
2013.04.11	6.2	1.84	5.54
2013.04.27	5.48	1.42	4.35
2013.05.18	6.44	1.32	3.46
2013.06.01	23.6	0.75	2.76
2013.06.15	103.9	3.371	0.955
2013.06.29	32.58	1.769	2.536
2013.07.13	15.3	1.229	1.602
2013.07.25	13.45	2.089	6.156
2013.08.09	25.76	4.101	8.334
2013.08.28	8.771	1.532	3.112
2013.09.14	0.203	-1.64	-5.3

表 3 クロロフィル a, b, c (mg/m³)

	藍藻	緑藻	珪藻
クロロフィルa	○	○	○
クロロフィルb		○	
クロロフィルc			○

表 4 プランクトンが含むクロロフィルの種類

結果を次にまとめる。

- ・猿沢池の水質はアルカリ性で、夏ごろ、プランクトンの個体数、水温、COD、chl.a の値が増加し、冬になると、減少する傾向にある。
- ・藍藻類や珪藻類は、特定の 2～4 種が大量に見られるが、それに比べ、緑藻類は、確認できた種類数は多いものの、個体数は少なかった。主なプランクトンは「7. 追補—猿沢池で観察できたプランクトン類—」に掲載している。
- ・気温が高くなり chl.a の量が増えている時期、猿沢池は濁り、緑色が濃くなる。その時、ミクロキスティスやアナベナの仲間など藍藻類が増殖した。
- ・顕微鏡観察により、藍藻類であるミクロキスティスやアナベナの仲間は、プレパレート全体を覆うことがあり、大量発生することが観察できた（下図）。
- ・緑藻類のクロロフィル b 量は、変化が小さくその量も少ない。また、目視でも圧倒的に緑藻類が少なかった。
- ・緑藻類と珪藻類のクロロフィル量による差はあまりなかった。
- ・表 2 には無いが、アオコ発生の前の採集時に普段は見られないはずのミドリムシが確認された。これは今年だけでなく去年にも同じことが確認できている。



アナベナの大量発生

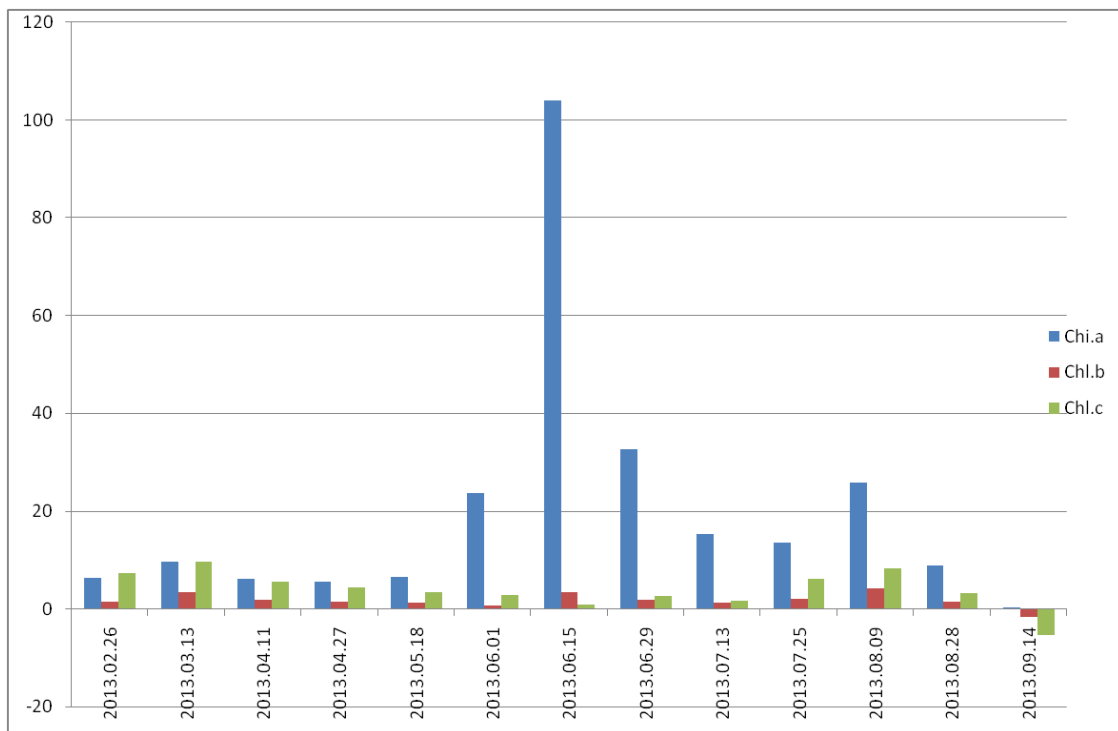


図1 クロロフィル a, b, c (mg/m³)

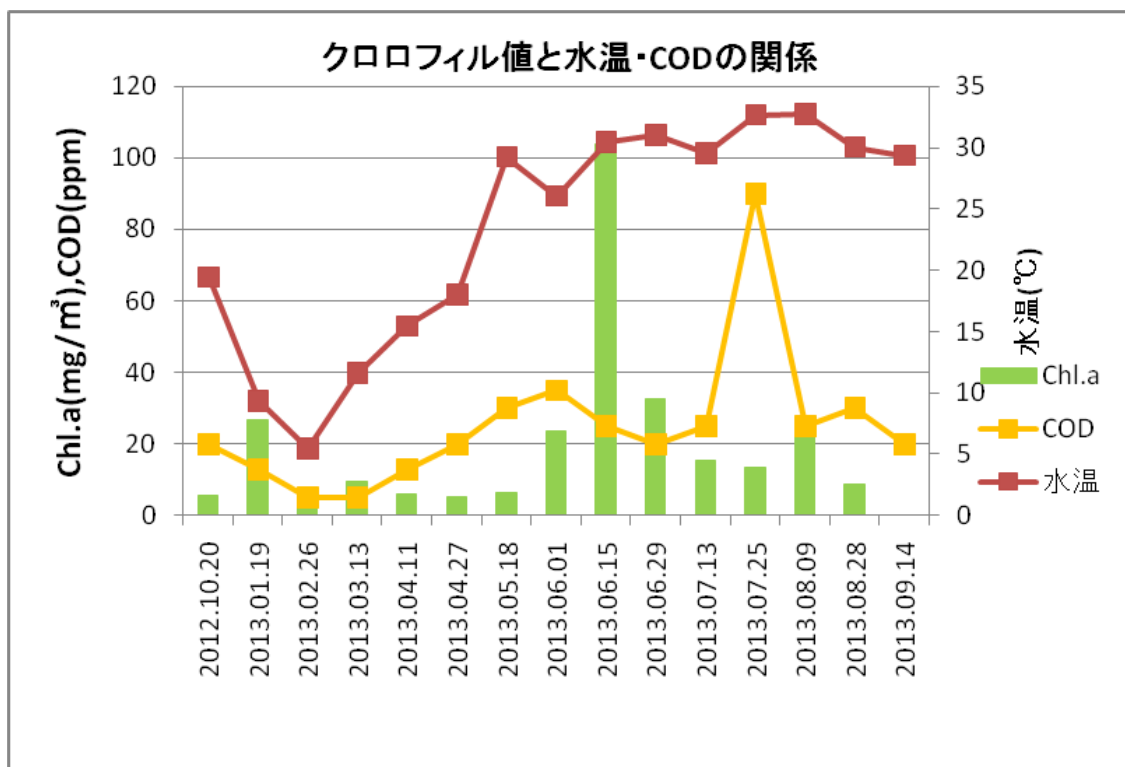


図2 クロロフィル値と水温・COD の関係

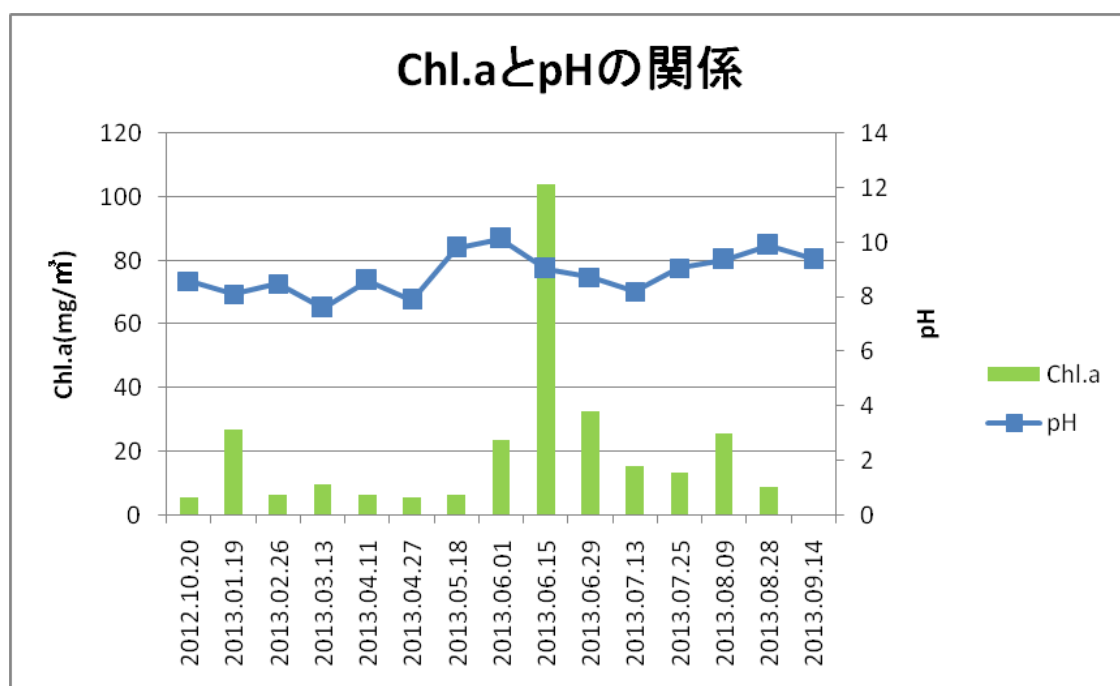


図3 Chl.a と pH の関係

4. 考察

- ・猿沢池の水が年間を通してアルカリ性だった。これは、猿沢池には排水溝が一箇所あり、アルカリ性の家庭排水が流れこんでいることによるためだと思われる。図2からもわかるように、この水質はpHの値が変化しても、プランクトンの増減にはとくに変化が無かったことから、水質はプランクトンの増減にはあまり影響を与えないと思われる。
- ・藍藻類や珪藻類は、特定の2～4種が大量に見られるが、それに比べ、緑藻類は、確認できた種類数は多いものの、個体数は少ない。それは、猿沢池の水が藍藻類や珪藻類が増殖しやすい水質であるのだと考えられる。また、表2より藍藻類と珪藻類は年間を通してよく見られるが、緑藻類は観察できた時期に限られる。

よって、藍藻類や珪藻類の方が繁殖力が強い可能性があると考えられる。

- ・図2より気温が上昇し、クロロフィルaの値が急激に増加しているが、そのとき、猿沢池は濁り、緑色が濃くなった。これはアオコの発生だと考えられる。

アオコは5月の半ばから発生し始め6月中旬にピークをむかえた。このときクロロフィルbとクロロフィルcの値はあまり変化していない。これは、クロロフィルaはすべての植物プランクトンが保有しているのに対し、クロロフィルbとcはそれぞれ緑藻類、珪藻類が保有していることから、藍藻類が多く増えていることがわかる。(表4参照)藍藻類の中でもミクロキスティスとアナベナが多く増殖しており、ミクロキスティスには他のプランクトンには無い繁殖に有利な垂直運動ができる

といわれており、光合成をより有利に行い、よく増加したと思われる。

- ・図2より、水温の上昇から少し遅れて Chl.a の値が増加し、また少し遅れて COD の値が増加している。これは、水温の上昇に伴って藍藻類が大量に増殖し、その後死骸となって水中の有機物が増えたためだと考えられる。また、気温が上がるにつれ、水温も上昇し、chl.a の値が増加したのは、日が出る時間が長くなり植物プランクトンの光合成が活発になることによって増殖したのだと思われる。また、気温が上がると動物プランクトンも増えることから、植物プランクトンを食べる動物プランクトンも増殖したと考えられる。しかし、クロロフィル a の量は増える前とあまり変わらず、藍藻類などは食べられずに残っていると考えられる。
- ・図1より、緑藻類のクロロフィル量について、目視では圧倒的に緑藻類が少ないが、グラフにしてみると、珪藻類との差があまりなかった。これは緑藻類の1個体が他の類に比べて大きいものが多いので、全体におけるクロロフィル量が予想以上に多かったためだと考えられる。珪藻類全体のクロロフィル量は変化が小さく、急に増加することがある。
- ・図3より、Chl.a 量の変化と pH の変化については特に関係はないと思われる。
- ・表2には無いがアオコ発生の前の採集時に普段は見られないはずのミドリムシが確認された。これは今年だけでな

く去年にも同じことが起きた。このことからミドリムシが出現することが、アオコの発生の前兆となるのではないかと考えられる。

5. 今後の課題

- ・データを集めるだけでなく、そのプランクトンに合った水質を知るため、培養実験などを行っていきたい。
- ・植物プランクトンの増減と動物プランクトンの増減には関係があるのかを調べたい
- ・他の池にも採水に行き、データを比較することで、猿沢池の特徴、またプランクトンの性質を調べたい。

6. 参考文献

- (1) 西條八束, 三田村緒佐武(1995)新編湖沼調査法. 講談社サイエンティフィク
- (2) 一瀬諭, 若林徹哉(2005)やさしい日本の淡水プランクトン図解ハンドブック. 合同出版株式会社
- (3) 田中正明(2002)日本淡水産動植物プランクトン図鑑. 名古屋大学出版会
- (4) 月井雄二(2010)淡水微生物図鑑原生生物ビジュアルガイドブック. 誠文堂新光社

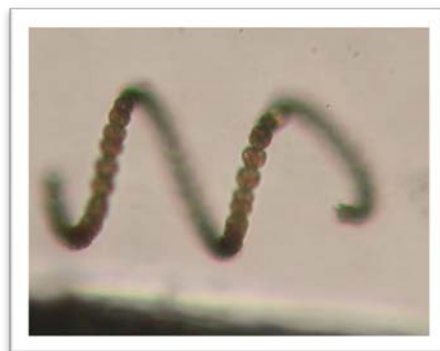
7. 謝辞

今回の研究にあたり、指導してくださいました矢野先生、適宜アドバイスをいただいた櫻井先生に深く感謝申し上げます。

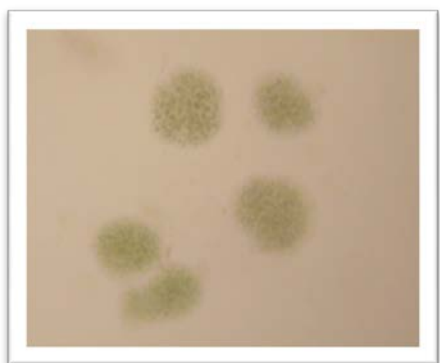
補足：猿沢池の主なプランクトン



ミクロキスティス・ノバセッキ



アナベナ sp.



ミクロキスティス・ベーゼンベルギー



アウラコセイラ sp.



アナベナ sp.



ケンミジンコ

植物の成長と音楽との関係

4年B組 米田 英里奈

指導教員 矢野 幸洋

1. 要約

植物の成長と音および音楽との関係について調査した。その結果、植物に音および音楽を聴かせると何も聞かせない植物よりもよく成長した。また、クラシック音楽が最も植物に良い影響を与えることがわかった。

キーワード マカラスムギ、音波、音楽、成長

2. 研究の背景と目的

パン生地や植物、胎児には私たち人間や、動物のように耳はついていないが、音楽を聴くことができ、植物は音楽を聴くことで、生育が促進される場合もあると言われる。

つまり、音の周波数、強さ、音を与えた時間が植物の生育に影響を与え、音楽が植物の成長を促進させることもあるといわれている。正確に言うと、「音楽を聴いている」というよりは、「音を感じている」といえる。また、音楽を聴かせなくても女性が植物に向かって話しかけると育ちがよくなると言われている。

音楽と植物の関係性はまだわかっていないことも多いので実際に研究し、その関係性を見つけないかと思った。

3. 実験方法

次の方法で実験を行った。

(1)マカラスムギの種まき、発芽

種の皮を剥いたほうが発芽するまでの期間が短いので剥いた。トレイの中にぬれた雑巾を敷き、その上に剥いた種を 50 粒～150 粒程度まいた。そして水の蒸発を防ぐために水に濡らした紙をかぶせた。それを恒温室(23℃で湿度も一定)の中に置いた。

4日後、2～3cm 程度発芽したマカラスムギの茎の先端 0.5cm 程をカッターの刃で取り除き(成長点を取り除くため)、1cm を正確に切り取る。その部分を実験に使用する。



図1 実験に使用したマカラスムギ

(2)実験

これまでに実験は3回行った。いずれの時も対照実験のために何も聞かせないという容器(音なし)も作った。

プラスチック容器に蒸留水を 100ml 注ぎ、その中にマカラスムギの茎を 10 本×2つの容器を用意し、音ありも音なしもそれぞれ計 20 本ずつ使用した。それを容器ごと発砲スチロールの中に入れ、音漏れや外部の音を防いだ。また、あまり誰も出入りしない地学準備室に置いた。そして何 cm 伸びたかを測定し、観察した。

<予備実験>

- ・音波 2000Hz と音なし
- ・音源を用いて行ったが音源が実験途中で切れた。

<第 1 実験>

- ・音波 7000Hz、ラジオ、音なし
- ・新しい音源を用いて行った。

<第 2 実験>

- ・音波 1000Hz、クラシック音楽、音なし
- ・新しい音源を用いて行った。

4. 実験結果

(1)予備実験の実験結果

音源が切れたため実験失敗したが、実験開始から 5 日後の茎の成長した長さを表 1 に示す。

五日後	2000Hz(cm)	音なし(cm)
	0.6	0.0
	0.2	0.4
	0.6	0.2
	0.2	0.2
	0.1	0.2
	0.4	0.3
合計	2.1	1.3
平均	0.35	0.22

表 1

(2) 第 1 実験の実験結果

表 2 は実験開始から 2 日後の茎の成長した長さを示し、表 3 は実験開始から 4 日後の茎の成長した長さを示す。また、表 4 は実験開始から 9 日後の茎の成長した長さを示す。

二日後	7000Hz(cm)	ラジオ(cm)	音なし(cm)
	0.3	0.5	0.4
	0.3	0.4	0.3
	0.3	0.3	0.1
	0.4	0.2	0.2
	0.2	0.3	0.3
	0.3	0.3	0.1
	0.6	0.3	0.4
	0.4	0.3	0.3
	0.2	0.3	0.4
	0.3	0.3	0.2
	0.4	0.4	0.4
	0.4	0.3	0.4
	0.4	0.2	0.4
	0.4	0.5	0.2
	0.3	0.2	0.1
	0.5	0.1	0.3
	0.3	0.4	0.4
	0.3	0.4	0.3
	0.3	0.4	0.3
	0.5	0.3	0.1
合計	7.1	6.4	5.6
平均	0.355	0.32	0.28

表 2

四日後	7000Hz(cm)	ラジオ(cm)	音なし(cm)
	0.3	0.2	0.4
	0.2	0.2	0.3
	0.5	0.5	0.5
	0.2	0.3	0.3
	0.3	0.2	0.3
	0.2	0.3	0.5
	0.5	0.2	0.3
	0.2	0.3	0.4
	0.2	0.2	0.2
	0.2	0.3	0.2
	0.2	0.3	0.5
	0.3	0.2	0.4
	0.3	0	0.5
	0.3	0.3	0.2
	0.2	0.4	0.2
	0.2	0.3	0.3
	0.2	0	0.6
	0.3	0.3	0.2
	0.4	0.3	0.4
	0.4	0.5	0.2
合計	5.6	5.3	6.9
平均	0.28	0.265	0.345

表 3

九日後	7000Hz(cm)	ラジオ(cm)	音なし(cm)
	0.3	0.2	0.3
	0.4	0.3	0.5
	0.2	0.2	0.1
	0.2	0.4	0.1
	0.2	0.3	0.6
	0.3	0.4	0.4
	0.5	0.5	0.1
	0.3	0.2	0.3
	0.3	0.1	0.5
	0.3	0.1	0.2
	0.3	0.1	0.5
	0.2	0.3	0.4
	0.2	0.3	0.4
	0.2	0.3	0.4
	0.3	0.3	0.2
	0.2	0.3	0.2
	0.4	0.3	0.2
	0.2	0.4	0.2
	0.5	0.3	0.2
	0.2	0.3	0.3
合計	5.7	5.6	6.5
平均	0.285	0.28	0.325

表 4

図 2 は実験 1 の結果をグラフにしたものである。

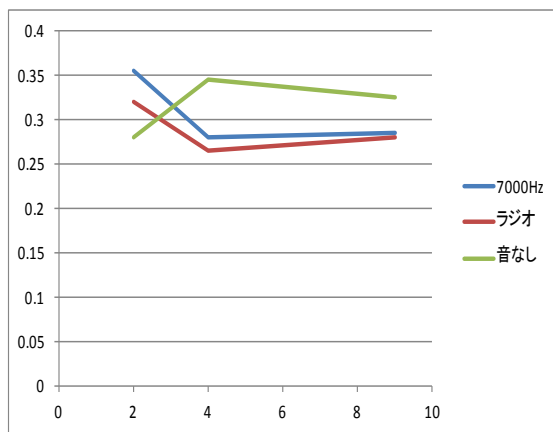


図 2

このとき縦軸は成長した茎の長さ(cm)、横軸は日数(日)である。

以下は、このグラフより得られた結果である。

- ① 2 日目にはあまり成長していなかった音なしの茎がその 2 日後には飛躍

的に成長している。

- ② ①に対し、音波やラジオを聴かせた茎は 2 日後に比べ 4 日後は成長が衰退している。つまり、茎が縮んだということである。

- ③ 音波とラジオを聴かせた茎は同じようなグラフをしていることから、植物に与える影響が類似していることだと考えられる。

- ④ 音を与えた時間が植物の生育に影響を与え、音楽が植物の成長を促進させているとは考えにくい。

いずれの結果も科学的な理由の解析までには至らなかった。

(3) 第 2 実験の実験結果

クラシック音楽はモーツァルトの第一楽章アレグロモデラート交響曲第 29 番イ長調 K,201(186a)を使った。

四日後	1000Hz(cm)	クラシック(cm)	音なし(cm)
	0.4	0.1	0.4
	0.5	0.4	0.2
	0.1	0.5	0.2
	0.2	0.3	0.5
	0.2	0.2	0.5
	0.3	0.2	0.2
	0.3	0.4	0.2
	0.2	0.7	0.2
	0.2	0.2	0.1
	0.3	0.4	0.3
	0.3	0.3	0.2
	0.4	0.3	0.2
	0.4	0.3	0.3
	0.2	0.5	0.2
	0.1	0.3	0.3
	0.3	0.3	0.5
	0.3	0.3	0.5
	0.3	0.3	0.3
	0.1	0.3	0.2
	0.3	0.4	0.3
合計	5.4	6.7	5.8
平均	0.27	0.335	0.29

表 5

実験開始から4日後の茎の成長した長さを表5に示す。それをグラフにしたものが図3である。

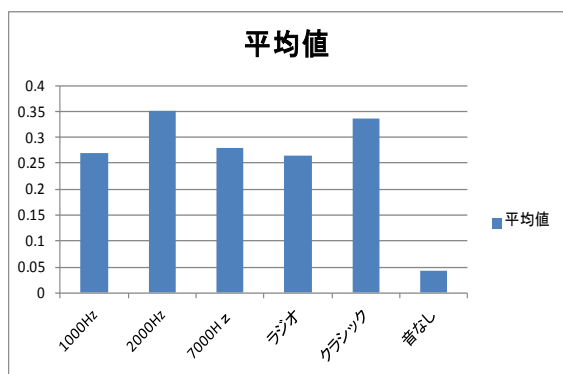


図3

(*実験開始から4日後、5日後の結果)

以下は、このグラフより得られた結果である。

- ① 2000Hz、クラシック、7000Hz、1000Hz、ラジオ 音なしの順で良く成長することがわかる。しかし、2000Hzの結果が得られた予備実験は音源が切れたため失敗と思われる。よって、2000Hzの曖昧な結果を除くと植物の成長に一番影響を与えるのはクラシックである。
- ② ラジオの周波数は1000kHz程度 周波数が高過ぎると植物の成長に影響が少ないとわかった。
- ③ クラシックの周波数は500Hz程度である。よって植物に影響を与える周波数は、500Hz～7000Hzだと推測できる。
- ④ 音なしは植物の成長に一番影響を与えない。つまり、音なしよりも音波や

音楽を聴かせたほうが植物の成長を促進させた。

- ⑤ 音楽を聴かせなくても女性が植物に向かって話しかけると育ちがよくなると言われているが、表4のラジオの結果より、女性が植物に向かって話しかけると育ちがよくなるとは考えにくい。

5. 考察

実験開始から4日後、5日後の結果を表す図3から、植物に音や音楽を聴かせると何も聞かせない植物よりもよく成長した。つまり、植物の成長に音や音楽は親密な関係があり、音や音楽は植物に良い影響を与えと考えられる。

また、クラシック音楽が最も植物に良い影響を与えることが考えられる。

6. 今後の課題

今回は実験回数も少なく、また結果が表れにくい研究だったため、実験結果からわかったことや科学的な根拠、理由を得られなかった。そのため、今年度は少し目線を変え、違う形でこの分野の研究を進めていきたい。そして、科学的な根拠、理由などをつきとめていきたい。

そのために、文献や先生からご指導を受け、これからの研究を考えたいと思う。

7. 謝辞

今回の研究にあたり、指導してくださいました矢野先生に、深く感謝申し上げます。

黄金比と植物

2年A組 出水明日香
2年A組 富永 夕鼓
2年C組 山田 莉彩
2年C組 古川 紗帆
指導教員 櫻井 昭

1. 要約

黄金比と植物との関係性を調べようと、2種類の植物について検証実験をすることにした。1つ目はキク科の植物とフィボナッチ数列との関係性を調べる実験である。この実験では花の並びとフィボナッチ数列の関連性が確認できた。2つ目の実験ではセイタカアワダチソウと黄金角の関係について調べた。この実験よりセイタカアワダチソウの葉と葉の間の角度が黄金角に近似していることが確認できた。これらの2つの実験により黄金比と植物に幾つかの関連性があることが分かった。

キーワード 頭状花序、キク科、フィボナッチ数列、黄金比、黄金角、
セイタカアワダチソウ

2. 研究背景

私たちは、黄金比やフィボナッチ数列という値が、植物に利用されているということを本で読んで知り、興味を抱いた。そこで、植物に対して実際にどのように利用されているのか、自分たちの手で確認することとした。

黄金比とは、 $1 : (1 + \sqrt{5}) / 2$ という比のことである($1 : \phi$ とも表すことがある)。この黄金比は自然界に多く使われ、人類が最も美しいと感じる比率であるとされている。例として、パルテノン神殿や、様々な絵画などの長方形の比率に使われている。黄金角は、 360° を黄金比で分割した時の「1」に当たる部分のことを指し、約 137.5° である(図1)。

また黄金比に関連性の深いフィボナッチ

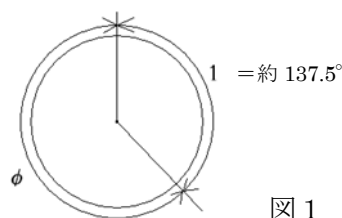


図1

数列という数列があり、それは次のような数列のことである。

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

この数列には、数列上のある数の直前の2つを足すとその数になるという規則性がある。この数列のある項を1つ前の項で割ると、次のようになる。

$$1/1 = 1$$

$$2/1 = 2$$

$$3/2 = 1.5$$

$$5/3 = 1.6666...$$

$$8/5 = 1.6$$

$$13/8 = 1.625$$

$$21/13 = 1.6153846...$$

$$233/144 = 1.618055...$$

$$\text{黄金比 } (1+\sqrt{5})/2 = 1.6180339887...$$

上記のように数が大きくなるにつれて黄金比の値にだんだん近づいてくるという性質がある。

フィボナッチ数列を満たしているかどうか調べる(図2)。

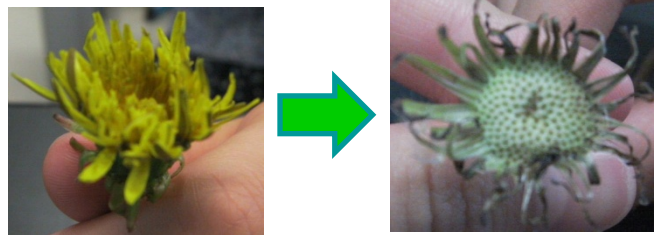


図2

3. 研究内容

3.1 花の並びとフィボナッチ数列

3.1.1 実験目的

美しい生物の形状は、数学に関係することが多い。私たちは頭状花序であるヒマワリが、フィボナッチ数列を用いた螺旋を描いていることを知った。そこで、生物がどのようにその数学を応用して生きているのか、なぜそれを使っているのかということを解明するため、まずは身近な数列といえるフィボナッチ数列と、頭状花序の植物の関連性を調べることにした。

頭状花序とは、キク科などに見られる、複数の花が集まって、1つの花に見えるつくりのことである。

3.1.2 実験仮説

頭状花序の植物は、ひとつひとつの花がフィボナッチ数列に関係して並んでいる。

3.1.3 実験方法

材料

①シロツメクサ、②ヒメジョオン、③カントウタンポポ、④セイヨウタンポポ、⑤ドクダミ

方法

頭状花序の植物と、そうでない植物をそれぞれ採取する。そして、一つずつの花を抜いて、花の付け根を観察し、花の並びが

フィボナッチ数列を満たしているという定義は、花の付け根の並びが右回りと左回りの螺旋状に並んでいて、どちらの螺旋の本数もフィボナッチ数列に出現する数になっていることである(図3)。

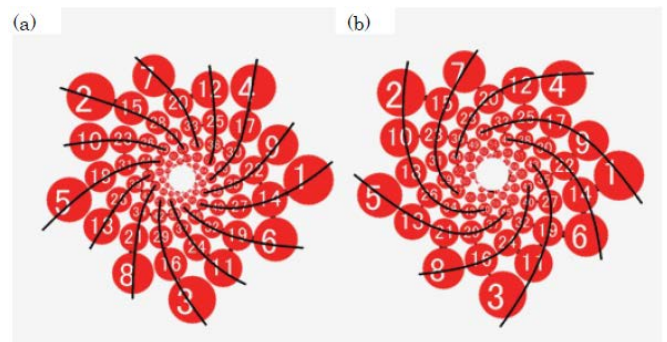


図3 (a)の図が、右回りの螺旋を示し、(b)の図が、左回りの螺旋を示している。(a)は螺旋が13本、(b)は8本見られる。どちらも、フィボナッチ数列に出現する値である。

3.1.4 実験結果

①シロツメクサ

関係はなさそうだった。

花の付け根が螺旋状に並んでいなかった。ランダムに並んでいるようであり規則性がなかった。

②ヒメジョオン

花の毛らしきものを抜くとつるつるになり、双眼実体顕微鏡で見ると無数の点が集まっていた。その点の並びは螺旋状であった。よって、数列の並びに関係がありそうだと推測できる。

③カントウタンポポ

花の付け根が大きいので、並びをきれいに肉眼で見ることができた。ひとつひとつの点や、螺旋がはっきりと見えただけ、数えることも可能であった(図4)。



図4

④セイヨウタンポポ

花の付け根が小さい。これも、花の付け根が螺旋状だった。

⑤ドクダミ

頭状花序ではなく、花弁が4枚しかなかったため、フィボナッチ数列を満たしているとは言えなかった。

3.1.5 実験考察

結果より、頭状花序のものでキク科のものは、花のつき方がフィボナッチ数列の螺旋のようだと考えられる。フィボナッチ数列を満たしていると、少ない面積により多く花をつけることができるのではないだろうか。その結果、子孫を残す確率を高められ、フィボナッチ数列を用いた螺旋を使ったものが、進化の過程でも生き残ってきたのではないかと考えられる。

3.2 黄金角とセイタカアワダチソウの葉のつき方

3.2.1 実験目的

黄金角と植物の葉のつき方について調べた。

3.2.2 実験仮説

セイタカアワダチソウの葉のつき方は、黄金角に従っている。

3.2.3 実験方法

材料

セイタカアワダチソウ

方法

セイタカアワダチソウを採取し、葉の付け根を残して葉を切る。その後、1つ目と2つ目の付け根に、針を葉の中心に沿うように刺す。次に、茎の真上から写真撮影を行う。以上の操作を、全ての葉の付け根に対して繰り返す(図5)。撮影した写真を使って、葉と葉の間の角を計測する。

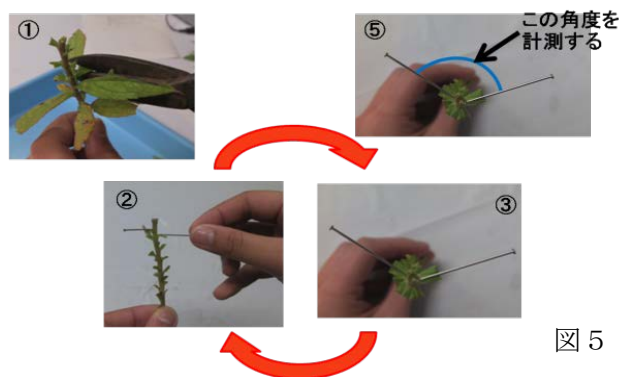


図5

第1回	166	153	143	143	142	150	150				
	136	93	160	118	129	134	135	146	137		
第2回	127	151	135	167	131	134	112				
	127	119	166	117	133	144	140	142	137		
	137	119	158	94	130	175	113				
第3回	139	121	149	146	145	167	143	130	137	133	134
	143	138	134	126	134	157	143	136	157	144	120
	131	132	139	148	143	123	120	144	130	114	144
	124	142	131	113	143	143	157	111	165	145	149
	146	135	124	133	134	146	132	122	121	120	112
	113	140	137	156	147	143	170	126	117	130	122
	135	142	137	136	124	131	154	98	138	133	138

表1 数値は、角度(°)を表している。それぞれの平均値は、第1回 139.7°、第2回 135.1°、第3回 138.5°、全体平均は、136.2°であった。

3.2.4 実験結果

結果は、表1のようになった。

第1、2回は、採集場所が本校テニスコート横と、柵に近い場所だった。そのため、柵の影響を受けて数値にばらつきが生じてしまった。第3回は、採集場所を平城宮跡に移した。そのため数値のばらつきが小さくなった。平均値としては、ほとんど変化が表れなかった。しかし、第3回の方が、第1、2回よりも、全体的に黄金角の近似値である 137.5° に近づいているといえる。

3.2.4 実験考察

結果より全体的に葉と葉の間の角度は黄金角に近いと言えた。よって、セイタカアワダチソウの葉のつき方に、黄金角を見つけることができた。今回採集したセイタカアワダチソウは、生息していたもののなかでも、よく成長したものを選んだ。従って、よく成長しているセイタカアワダチソウには黄金角が見られることが分かった。枯れかけていたものや、あまり成長できていないものについては調べられていないが、よく成長しているものにのみ利用されているのであれば、セイタカアワダチソウの中でも黄金角をうまく利用したものだけが、生き残っているのではないかと考えられる。

4. 考察

キク科の植物は頭状花序であり、花の並び方はフィボナッチ数列を用いた螺旋を描いており、その理由としてより多くの花を効率よく並べ、子孫をより多く残すためだと考えられる。



図6

セイタカアワダチソウの葉のつき方は黄金角に従っており、その理由として日光をより効率よく受けるため(図6)だと考えられる。

5. 今後の課題

セイタカアワダチソウの研究がまだ途中段階であるため、セイタカアワダチソウの葉の並び方について成長良好なものと成長不良なもので比べ、調べなおす必要がある。また、これまでの研究ではキク科の植物、セイタカアワダチソウに限ったものしか標本として用いていない。よって今後の研究ではさらに様々な植物について黄金比が用いられているのか検証していきたい。

6. 参考文献

「黄金比 自然と芸術にひそむもつとも不思議な数の話」,スコット・オルセン 著 藤田優里子 訳,創元社, 2009

「不思議な数列 フィボナッチの秘密」,アルフレッド・S・ポザマンティエ,イングルマル・レーマン 著 松浦俊輔 訳,日経PB社, 2010

7. 謝辞

これまで私達を指導してくださった櫻井先生、数学的な面において相談にのってくださった河合先生に、感謝の意を示します。

ニホントカゲの生態について

2 年 A 組 西村 咲野

2 年 B 組 高畑菜々子

2 年 B 組 津村 卯乃

指導教員 櫻井 昭

1. 要約

私たちの学校でよく見かけるニホントカゲが、生活の中でどれだけこの「学習」という行動を使っているのか、調べてみることにした。調べるにあたって、ニホントカゲを捕獲し、育て、実験条件が同じになるような個体を準備してから、学習行動実験を行う計画を立てた。ここでは、育てる過程で発見した、ニホントカゲの生態について紹介する。

キーワード ニホントカゲ ミールワーム

2. 研究の背景と目的

ヒトやサルなどの哺乳類を始め、鳥類、爬虫類などのセキツイ動物、節足動物の中でも昆虫類、そして環形動物の一部にも学習行動が見られるとされている。そこで、私たちの学校でよく見かけるニホントカゲが、生活の中でどれだけこの「学習」という行動を使っているのか、調べてみることにした。調べるにあたって、ニホントカゲを捕獲し、育て、実験条件が同じになるような個体を準備してから、学習行動実験を行う計画を立てた。そのため、飼育を通した爬虫類の生態調査も、本研究の目的とした。

3. 研究内容

3-1 実験材料の捕獲

捕獲方法記入

5 月中旬、上記の方法で、ニホントカゲの

幼体を 3 体と、成体 1 体を捕獲した。

3-2 飼育と観察

腐葉土を敷きつめた水槽を 2 つ用意し、幼体と成体を分けて飼育を開始した。餌はミールワームを与えた。

観察記録

6/21 成体が 10 個の卵を産卵

6/27 5 個の卵を成体のそばに残し、他の 5 個の卵は、別容器に移し転卵せずに孵化するか観察を続ける。

7/1 別容器に移した卵が乾燥によりへこむ。霧吹きで水をやると、5 個中 4 個はもとに戻る。成体のそばの卵に変化はなし。

7/16 卵が孵化した。別容器に移した 4 個と、成体のそばに置いておいた 5 個から、合計 9 体の幼体がでてきた。体長は、約 1.5cm。

< 夏休み中に 9 体中 7 体が死亡 >

9 月 1/2~1/4 に切った、ミールアームを食することができるようになる。

ビタミン剤(液体)を与えると、よく舐めた。

舌をペロペロする行動がよく見られた。

9/30 1 個体が脱走し、2 日後脱水により死亡しているのが発見される。

10/11 ピンセットですっと餌(ミールアーム)をあげていたが、ピンセットを見せるだけで、口をあけてくるようになった。

10/17 20℃の恒温室へ水槽を移動。

日光不足を補うため、爬虫類専用ライトを設置。

10/18 動きが鈍くなった。周りの動くものに対して、威嚇するような反応を頻繁に見せるようになった。

10/19 のた打ち回るような行動をしては、静止するといった行動を繰り返した。腹が少し青くなっていた。

10/20 自らの尾と右後足を自切して死亡しているのが、確認された。

5 月中旬に捕獲し、卵から返した全ての個体が死んでしまったため、学習行動の実験はできなかった。

4. 考察

ニホントカゲの産卵、孵化、生育過程を観察することで、いくつかの発見があった。

一つ目は、ニホントカゲの卵は転卵しても孵化することが分かったことである。別容器に移し、転卵させない卵と、親トカゲのそばに置き、常に親が卵を転がしている状況を作ったが、どちらも孵化させることができた。当たり前のことであるが、卵を転がすよりも、水分が十分に足りているこ

とのほうが、孵化には必要な条件である。

二つ目は、幼体のほうが、成体に比べて、周囲の環境への適応能力に優れていることである。人がほとんど通らない場所で飼育しても、野生のものは飼育全体を通して、あまり人に慣れることがなく、動くものにはすぐに反応し続けた。しかし、人がいる環境で生まれた幼トカゲは、人が近づいてもそれほど逃げることは無かった。孵化したときから、人がいる環境という野生とは異なる環境だったこともあるが、幼トカゲのほうが環境への順応性があると考えられる。また、これが「慣れ」という行動にも関わっているのか、次回行動実験で調べてみたい。

三つ目は、餌をつかんでいないピンセットにも、餌を与えられた時と同じ行動をトカゲが見せることである。この行動は、トカゲの学習行動を調べるための実験系に、応用することができるのではないかと考えている。

5. 今後の課題

今回、半年にかけてニホントカゲの飼育を試みたが、全ての個体を死亡させてしまう結果となった。今後は、この死因を解明し、安定的にニホントカゲが飼育できるようにしたい。また、ニホントカゲの学習行動について実験を行っていきたい。

6. 謝辞

この論文を書くにあたり、櫻井先生に多大なるご協力をいただきました。感謝しています。

繊毛虫 ブレファリズマの巨大化についての研究

2 年 A 組 竹中 友理

2 年 B 組 塩見真里菜

2 年 C 組 山根 里奈

指導教員 櫻井 昭

1. 要約

昨年から今年にかけて、ブレファリズマが巨大化する条件についての検証を行った。これは、ブレファリズマの巨大化に必要な外的要因が何であるか、どんな環境においてブレファリズマが巨大化するかについての実験である。期待していたような明確な結果は出なかったが、この実験の内容と成果について考察する。

キーワード ディプレッションスライド、ガラスビーズ(0.05 mm、0.2 mm)、SMB(繊毛虫類用生理食塩水)、大腸菌、シスト

2. 研究の背景と目的

ブレファリズマは飢餓状態におかれると、巨大化することが分かっている。この巨大化したブレファリズマをジャイアントブレファリズマと呼ぶことにする。このジャイアントブレファリズマの特徴は、体長が通常のブレファリズマの 2~3 倍になり、体内に赤い大きな食胞が(共食いしたためと考えられる)見られることである。このジャイアントブレファリズマは、普通サイズのブレファリズマ同士が共食いをした時に現れるとされるが、なぜ大きくなるのか等、細かいことは分かっていない。

ブレファリズマは単細胞生物なので、共食いしても、食べた相手の細胞を自分の体の一部にすることはできない。つまり、細胞融合はできないと考えられる。よって、何がブレファリズマの細胞サイズを巨大化させる直接的な要因になるのか、調べることにした。

3. 研究内容

3.1 実験目的

今回の実験の目的は、ブレファリズマの巨大化に栄養が必要なのか、ブレファリズマのみが持つ何かも重ねて必要なのか、それとも、なにも必要でなく、ブレファリズマの口に何かブレファリズマのサイズ(0.2mm 程度)のものが触れることで巨大化するのかについて確かめ、考察することである。なお、ブレファリズマの体が巨大化しているのであって、喰われたブレファリズマの体積が加算されている一時的なものではないという証明も兼ねている。

3.2 実験仮説

この実験にあたり、私達は 2 つの仮説をたてた。

1. 養分等は一切関係無く、大きいものを食べた事により細胞が反応して巨大化した。
2. 養分(と共にブレファリズマだけが持つ何か)を吸収した為巨大化した。

3.3 実験方法

5つのディプレッションスライドにAからEの記号をつけ、それぞれ次のものをいれる。

A SMB500 μ ml (ディプレッションスライドには3つのくぼみがあるため、この条件のサンプルが3つあることになる。)

B SMB500 μ ml 0.2mmのビーズ530個(3サンプル)

C SMB500 μ ml 0.05 mmのビーズ(3サンプル)

D 大腸菌を培養した培養液 500 μ ml(3サンプル)

E ブレファリズマを培養した培養液 500 μ ml(3サンプル)

それぞれにブレファリズマを 6cell ずつ入れ、15℃のインキュベーターで保存し、日間培養。日おきに光学顕微鏡で観察した。

3.4 実験結果

Aのディプレッションスライド

シスト状態のブレファリズマが見られるのが比較的早かった。変形したもの(細くねじれた形をしたもの)が多く見られた。細胞数は多少揺らぎながらも、緩やかに減少してい、最終的にはブレファリズマの赤い色素の色がうすくなり、ほぼ透明になった。大きさは、通常サイズのブレファリズマの半分になっていた。3つあるサンプルにはそれぞれ 6cell のブレファリズマが入っていたのだが、2つは半数(3cell)しか残らず、1つは 1cell しか残らなかった。

Bのディプレッションスライド

始めは元気に動き回っていたものの、次第に元気がなくなっていった。シストやジ

ャイアントブレファリズマは、出現しなかった。ブレファリズマの色素が抜け、透明化し、数も減少した。

Cのディプレッションスライド

栄養を与えていないにもかかわらず、少し不健康そうだが分裂がおこっていた(分裂がおこったサンプルでは入れてあったビーズがなくなっていた)。しかしそれは始めだけで、最後には減少した(それほど減らなかった)。

Dのディプレッションスライド

始め均一的で健康そうだった。二日目からシストが出現した。最終的には増えた。

Eのディプレッションスライド

1日目に観察した時は、大小の違いがあり、シストが合計 5cell いた。2日目になると、大小の差が激しくなり、シストは確認されず、ジャイアントブレファリズマが 4cell 確認された。しかし最終的にはジャイアントブレファリズマがいなくなり、細胞の大きさも小さくなった。また、シストが 5～6cell 確認された。

まとめると、A、B、Cつまり栄養を与えなかったディプレッションスライドでは、ジャイアントブレファリズマは出現せず、次第に元気が無くなり数が減少した。D,Eつまり栄養を与えたディプレッションスライドでは、個体数が増えたり、ジャイアントブレファリズマが確認されたりした。BとCを比較すると最終的にはどちらも数が減少した。

4. 考察

Eでしかジャイアントブレファリズマが観察されなかったことより、ブレファリズマは食べたものの大きさに影響されるのでは

なく、食べた物の栄養量とブレファリズマ特有の何かによって巨大化することが明らかとなった。(つまり仮説 2 が正しかった)。C のディスプレイスションスライドのブレファリズマが、栄養もないのに分裂していたのが予想外だった。分裂して共食いすることで栄養を得ようとしたのだろうか。分裂がおこったサンプルでは、入れてあったガラスビーズが極端に少なくなっていたので、ビーズを餌と勘違いして分裂したとも考えられる。

0.2mm のビーズのはいていた B のディスプレイスションスライドでも、実験開始から数日は、ブレファリズマが他のサンプルよりも健康そうだったことから、物質を細胞口に入れることで、餌を食べたと勘違いし一時的に健康さを取り戻すのかも知れない。

5. 今後の課題

この実験で仮説 2 が正しいと証明されたため、今後はブレファリズマの巨大化に関係があると思われる、ブレファリズマ特有の何かが、何であるかを特定したいと考えている。

また私たちは、ブレファリズマは真核生物なので核をもっているが、これがブレファリズマを巨大化させる原因物質ではないかという観点から、それを証明するような実験も行っていきたいと考えている。

6. 謝辞

この論文を書くにあたり、櫻井先生に多大なるご協力をいただきました。感謝しています。

カツオブシ菌の最適な培養条件について

3 年 C 組 飯野さくら

3 年 C 組 太田香梅

指導教員 矢野幸洋

1. 要約

世界一硬い食品である鰹節を作るために用いられるカツオブシ菌は、鰹内に含まれるほとんどの水分を吸収し、脂肪分を分解する。私たちはその性質にとっても興味を持ち、カツオブシ菌の最適な培養条件を探した。

キーワード カツオブシ菌、培養

2. 研究の背景と目的

私たちは今、カツオブシ菌を培養するにあたってカツオブシ菌にとって最適な環境をみつけだすために実験を行っている。最終的な目標としては、以前カツオブシ菌を研究されていた先輩の実験内容を引き継ぎ、カツオブシ菌の特徴を深く調べることであるが、大学の研究室が所有している機器を使うなど高度な内容だったため、現時点での実現は不可能と判断した。そこで、よく知られているカツオブシ菌そのものがもつ特徴(下記の研究内容<カツオブシ菌とは>に示した)を身近なことに応用できないかと考え、実験に使用するためのカツオブシ菌を効率良く培養するための条件を探すことにした。

3. 研究内容

<カツオブシ菌とは>

鰹節のカビづけに使われる麹菌。リパーゼ(油脂分解酵素) 活性が強いのが特徴であり、鰹に含まれていた多量の油脂は

カツオブシ菌のリパーゼにより殆ど分解される。カツオブシ菌自らが持つプロテアーゼ(蛋白質分解酵素)が鰹の酵素と一緒に働くことにより、各種アミノ酸やイノシン酸などの旨味を作り出す。又、生育に多量の水を必要とするため、カビづけを行うことによって鰹の水分を吸い尽くし、極度に乾燥した保存性の良い鰹節ができあがる。

<実験 1>

カツオブシ菌を培養する最適条件を調べるために、次の 2 つの方法を行った。

① 寒天培地の成分で比較する。

培地 A と培地 B の 2 種類を使って培養した。(表 1 参照)

② 培養する温度で比較する。

先輩がおっしゃったカツオブシ菌を培養する最適な温度が 32℃だったため、今までは 32℃で設定したインキュベーターで培養してきた。しかし、その温度の根拠に疑問を持ったため 28℃・32℃・36℃の 3 種類のインキュベーターを使って培養した。

[結果]

結果を表2・表3に示す。まとめると以下ようになる。

・8日間培養すると36℃で培養した2枚の培地と32℃で培養した培地Bは良く繁殖したが、他の3枚ではほとんど繁殖していなかった。

・20日間培養すると6種類の培地に差はほとんどなくなった。ただし、32℃で20日間培養したものは、機器の不具合で3日間水に浸かったため参考資料として扱うこととする。

[考察]

28℃で培養することはカツオブシ菌には適していないことがわかった。

また、この実験の記録を取り終えた後もそのまま培養を続けたが、シャーレ内の培地の水分量に変化がなかった。そのため、培養していたものは本当にカツオブシ菌だったのかという疑問を持ち次の実験2を行うことにした。

<実験2>

今まで使っていたカツオブシ菌がコンタミしていた可能性があるため、鯉節を新たに購入し次の手順で培養した。

- ① 枯節の表面を滅菌されたカミソリを使って0.15g削り取る。
- ② 40mlの蒸留水を加えよく攪拌する。
- ③ ②の水溶液を培地A、培地Bにそれぞれ2mlずつ撒き、35℃のインキュベーターで培養する。

{結果}

結果を表4に示す。

培地Aでは菌がよく繁殖し、8週間後には培地が縮んだ。

培地Bでは菌が繁殖した様子は見られなく、培地にも変化はなかった。

[考察]

培地Aが縮んだ(乾燥した)ため、カツオブシ菌が繁殖したと考えられる。

培地Bでは変化がなかったので、カツオブシ菌は繁殖しなかったと考えられる。

4.まとめ

実験1で使ったカツオブシ菌が、実験2の結果からコンタミしていたことがわかった。これからは実験2で培養した菌を実験に使用し、さらに最適な培養条件について調べていきたい。

5. 謝辞

この研究を進めるにあたり、多忙にもかかわらず、日々の活動をサポートして頂いた矢野先生。また、以前顧問として指導して頂いた櫻井先生。誠にありがとうございました。

最後になりましたが、私達の研究をサポートして下さった皆様、そしてこの論文を読んで下さった皆様に深く感謝いたします。

	培地 A	培地 B
培地の成分とその量	粉末酵母エキス 8g グラニュー糖 8g 寒天 8g ペプトン Y 4g 蒸留水 500ml	ブドウ糖ペプトン培地 14.3g 寒天 8g 蒸留水 500ml

表 1 培地組成

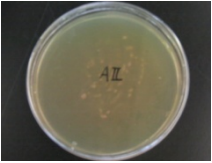
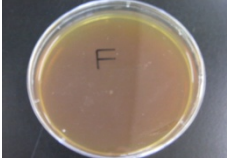
培養期間	8 日間		
培養温度	28℃	32℃	36℃
培地 A			
培地 B			

表 2 実験 1 の 8 日間の培養結果

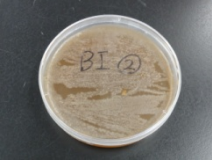
培養期間	20 日間		
培養温度	28℃	32℃	36℃
培地 A			
培地 B			

表 3 実験 1 の 20 日間の培養結果

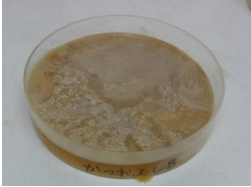
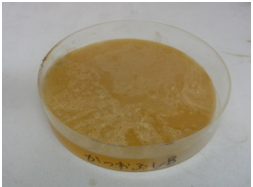
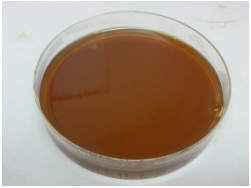
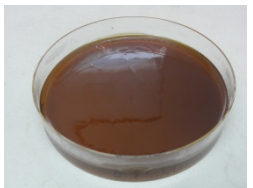
培養期間	4週間	8週間
培地 A		
培地 B		

表 4 実験 2 の培養結果

ワイヤレス電力給電について

5年C組 岩崎 暖
指導教員 藤野 智美

1. 要約

サイエンス研究会地学班は電気と波長に関する研究活動を行っている。今回はワイヤレス電力給電実験キットを用いて、配線を使わずに非接触に電力を供給出来る範囲と、その時のコイルの巻き数、バリアブルコンデンサ(以下バリコン)の羽の枚数との関係を調べた。

キーワード ワイヤレス給電、共鳴方式、電磁界、給電コイル、受電コイル、バリコン

2. 研究の背景と目的

「給電」という言葉を身近なものに置き換えると、まずは「充電」という言葉が出てくるだろう。その形態は製品と電源をコードで繋ぐといったものが主流だが、最近ではコードを使わなくても携帯電話や電気自動車が充電出来るようになってきている。



図1：電気自動車ワイヤレス充電の様子

エネルギーに関する研究を行う中で、離れていても電気を正確に供給できることに興味を持ち、今回はその仕組みの理解と、元々苦手である電気分野をより近くに感じingことを目的とし、本研究を始めた。

3. 研究内容

3.1 基礎知識

①今回の実験について

ワイヤレス給電技術には以下の2方式がある。

- ・E型フェライトコアを使用したコイルによる磁界方式(写真右のコイル)
- ・E型フェライトコアを使用しない空芯コイルの共鳴方式(写真左のコイル)



図2：使用したコイル

今回は後者を利用した実験を行った。

②実験の原理

今回の実験に用いた共鳴方式は給電コイルを振動させて発生した電磁波を受電コイルが受け取り、エネルギーの受け渡しを行

っているという仕組みである。

電磁誘導方式では磁界を使った通信のため距離が離れるにつれエネルギーも授受出来なくなる、コイルを一直線上に置かないと通信は途絶えてしまうといった欠点がある。それに対して共鳴方式では電磁波が給電コイルから四方八方に出るため、電磁波が伝わる範囲ではエネルギーの授受が可能であり、コイル同士をずらしても通信出来るといった違いがある。

実験ではコイルの発する固有振動数が重要であり、次式で表される。

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

L [H] ...コイルの自己インダクタンス

C [F] ...コンデンサの電気容量

今回はL=一定であるので、Cをバリコンの羽の枚数で調整する。これは給電コイル、受電コイルそれぞれの固有振動数を制御するという意味になる。

3.2 実験内容

電力授受に必要な受電コイル・給電コイルの2種類を用意する。それぞれ紙パイプにコイルを巻きつけたものである。給電コイルには出力用のコイル、受電コイルには駆動用のコイルをそれぞれ3回巻いた。またそれに追加してより強く共鳴させる為の共振用コイルをそれぞれに巻いた。巻き数は実験に応じて調整した。この巻き数によって、コイルの自己インダクタンスLが決まることになる。

これらの給電コイル、受電コイルをそれぞれ電子基板に接続し制御する。給電出来ているか否かは受電基板についている赤色発

光ダイオード(以下LED)の点灯、光の強弱により判定した。図1は回路図である。

回路図

EScadなんて名前のソフトは見つけました

図4：

②測定方法について

(i) 給電距離の測定

給電基板と給電コイルを左側に固定し、受電コイル及び受電基板を動かして両者の距離を少しずつ離れた。コイルを動かす際には紙パイプ部分を持つよう細心の注意を払い、また、給電コイルと受電コイルが正面に向き合ったまま動かせるよう、図5のように、2本の物差しを固定して受電コイルをスライドさせた。距離の測定は、この物差しの目盛を読んで行った。

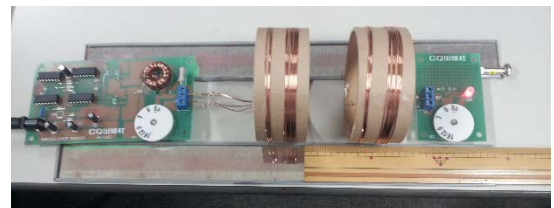


図5：実際の実験の様子

(ii) LEDの点灯の判定

LEDを真上から見た時に完全に光が確認出来なくなった場合を消灯とし、その地点までを給電可能な最長距離とみなした。

[実験1]

半径5.45cmの紙パイプに出力用・駆動用コイルを3回、共振用コイルを9回、それぞれに巻いた。これら2つの給電・受電コイルを使い、給電基板と受電基板にある

バリコンの羽の枚数を変えながら LED の点灯距離を測定した。

羽の枚数が 5,6,7,9,12,16 枚であるのは、元々基板のダイヤルについていた数字のみを使って実験したからである。

[実験 1 の結果]

羽の枚数(枚)		LEDの点灯距離(cm)
給電側	受電側	
5	5	×
	6	1.00～3.75
	7	×
	9	×
	12	×
6	16	×
	5	×
	6	1.00～8.50
	7	×
	9	×
7	12	×
	16	×
	5	×
	6	0～6.30
	7	×
9	9	×
	12	×
	16	×
	5	×
	6	×
12	7	×
	9	×
	12	×
	16	×
	5	×
16	6	0～4.00
	7	×
	9	×
	12	×
	16	×
16	5	×
	6	×
	7	×
	9	×
	12	×
16	16	×

×...LED は点灯しなかった

ほとんどの場合において LED は点灯しなかったが、受電側のバリコンの羽を 6 枚にすることで給電側のバリコンの羽が 9 枚と 16 枚である時以外は短距離から中距離給電できることが分かった。

[実験 2]

紙パイプの半径を 8.50 c m に変え、実験 1 と同じ実験を行った。

[実験 2 の結果]

羽の枚数(枚)		LEDの点灯距離(cm)
給電側	受電側	
5	5	0～1.25
	6	0～1.17
	7	0～1.00
	9	0～0.90
	12	0～0.60
6	16	0～0.85
	5	0～1.10
	6	0～0.90
	7	0～0.35
	9	0～0.30
7	12	0～0.30
	16	0～0.30
	5	0～0.60
	6	0～0.70
	7	0～1.60
9	9	0～2.20
	12	0～1.75
	16	×
	5	0～0.67
	6	0～0.60
12	7	×
	9	0～3.00
	12	0～1.67
	16	0～1.75
	5	0～0.70
16	6	0～0.80
	7	0～0.50
	9	0～1.15
	12	0～6.93
	16	0～1.65
16	5	0～0.75
	6	0～0.55
	7	0～0.50
	9	0～1.14
	12	0～0.95
16	16	×

実験 1 と違って LED が点灯しなかった場面は 3 回しか見られなかった。半径が大きくなったことにより LED の点灯距離もより長くなると予想していたが、実際はほとんどが実験 1 よりも短距離になってしまった。

[実験 3]

実験 1、実験 2 を通して受電側のバリコンの羽の枚数を 7 枚から 9 枚に変える間に LED が最も強い光を発していることに気付いた為、受電側の羽の枚数を 8 枚に固定し、給電側の羽の枚数を変えながら LED の点灯距離を測定した。紙パイプの半径は 8.50cm のものを使用した。

[実験 3 の結果]

羽の枚数 (枚)		点灯距離 (cm)
給電側	受電側	
5	8	0~1.97
6	8	0~3.90
7	8	0~8.23
9	8	0~14.65
12	8	0~10.10
16	8	0~9.30

実験 1、2 に比べ点灯距離を延ばすことに成功した。

[実験 4]

更に点灯距離の底上げの為、実験 2、3 と同じ半径 8.50 c m の紙パイプに出力用・駆動用コイルを 3 回、共振用コイルは巻き数を 3 回増やして 12 回巻いた。

今回は受電側バリコンの羽の枚数が 5 枚の時に LED が 1 番明るく光っていたため、その枚数を固定して実験 3 と同様に実験した。

[実験 4 の結果]

羽の枚数 (枚)		点灯距離 (cm)
給電側	受電側	
5	5	0~19.51
6	5	0~8.48
7	5	0~6.43
9	5	0~5.34
12	5	0~4.42
16	5	0~3.94

3.3 実験結果の分析

4. 今後の課題

データの測定方法を更に精度の良いものへと改良する必要がある。

ある距離で 1 度 LED が消えた後、少し進んだ場所で再度点くという現象について、給電コイルから発される電波を波の面から詳しく検討していきたい。

5. 参考文献

6. 謝辞

平成25年度
スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会研究論文集

平成26年(2014年) 3月1日 発行

国立大学法人 奈良女子大学附属中等教育学校
〒630-8305 奈良市東紀寺町1丁目60-1

TEL. 0742-26-2571

FAX 0742-20-3660

<http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/>