

猿沢池のアオコの発生とプランクトン

2年A組 藤延 孟子

2年A組 吉田 創

2年B組 瀬川 暖也

指導教員 矢野 幸洋

1. 要約

猿沢池(奈良市)のアオコの発生について水質調査およびプランクトンの観察を行った。その結果、猿沢池では藍藻類が恒常的に多く、5月～6月にかけて発生したアオコは藍藻類の増加によるものだと確認できた。他の池ではどうなるか調べるために今年は、猿沢池のデータを集めることにした。

キーワード プランクトン、アオコ、COD

2. 研究の背景と目的

今までに集められた植物プランクトンの量を数値化したクロロフィル量のデータや、猿沢池で確認したプランクトンを整理するための図鑑を活用して猿沢池とは違う条件の池や川を調べ、多くの池を比べる事で、どの条件でどんな生物が発生するのか関連づけ、猿沢池の特徴を見つけようと考えた。これにより、アオコが発生する原因である藍藻がどんな環境のもとで発生しやすいかも分かり、アオコの効率的な予防方法を見つける事ができるかもしれない。これまで詳しく調べたものは植物プランクトンが中心で、ワムシなどの動物プランクトンはあまり詳しく調べられていなかった。そこで、他の川や池と比べる前に、猿沢池のより多くのデータを集めることにした。

3. 研究内容

実験方法

(1) 環境データの収集とプランクトンの採集・観察

①水の採集

プランクトンネットを使用し、あらかじめ決めた場所で採水ビン1本分の水を採集した。

②環境データの測定

採集した直後に、気温、水温、pH、COD、 NH_4^+ 、DOの値を調べ、記録した。なお、気温、水温、pHの測定はデジタルpH計を、CODはパックテストを用いた。

③遠心分離

持ち帰った水を、30ml遠心分離管に入れ、遠心分離した。遠心分離管の底に沈殿したプランクトンをピペットで吸い上げ、スライドガラスに1滴ドロップし、プレパラートを作

成した。

④観察

作成したプレパラートを顕微鏡で観察した。植物プランクトンは、どの種が多かったのかを記録した。動物プランクトンは、形の残っているもののみカウントし、すべての種について数を数えた。

(2) クロロフィル抽出実験

採水と同時にクロロフィルの抽出実験も行った。この結果と考察は、本紙掲載の「猿沢池のクロロフィル量とプランクトン」の論文を参照のこと。

4. 実験結果

水質調査および環境データの結果を表1に示す。猿沢池で見られたプランクトンを表2、3にまとめた。

	天気	気温	水温	pH	COD	NH4
2012/10/20(土)	晴れ	19.2	19.4	8.58	20	なし
2012/12/19(水)	曇り	9.5	9.3	8.10	13	なし
2013/01/19(土)	晴れ	5.8	5.4	8.48	5	なし
2013/02/26(火)	曇り	4.2	11.6	7.60	5	なし
2013/04/11(木)	曇り	16.2	15.4	8.60	13	なし
2013/04/27(土)	晴れ	18.9	18.0	7.88	20	なし
2013/05/18(土)	晴れ	27.2	29.2	9.80	30	なし
2013/06/01(土)	晴れ	27.6	26.0	10.13	35	なし
2013/06/15(土)	曇り	31.9	30.4	9.03	25	なし
2013/06/29(土)	晴れ	29.5	31.0	8.72	20	なし
2013/07/13(土)	曇り	31.0	29.5	8.20	25	なし
2013/07/25(木)	晴れ	34.4	32.6	9.06	35	なし
2013/08/09(金)	快晴	32.8	32.7	9.37	25	なし
2013/08/28(水)	晴れ	32.2	30.0	9.88	30	なし
2013/09/14(土)	晴れ	29.5	29.3	9.38	20	なし
2013/10/21(月)	晴れ	20.4	20.2	9.83	30	なし
2013/11/07(木)	晴れ	19.3	19.1	9.38	15	なし
2013/11/23(土)	快晴	12.5	11.3	7.90	9	なし
2013/12/20(金)	雪	5.6	4.8	8.03	12	なし
2014/01/11(土)	晴れ	7.5	6.7	7.30	10	なし
2014/02/01(土)	晴れ	14.0	10.5	7.60	10	なし
2014/04/14(月)	晴れ	20.9	19.1	6.85	15	なし
2014/04/26(土)	快晴	25.7	24.0	7.20	20	なし
2014/05/17(土)	晴れ	23.6	22.7	8.71	25	なし
2014/05/30(金)	晴れ	31.5	29.8	9.02	20	なし
2014/07/04(金)	曇り	27.9	27.9	10.07	20	なし
2014/07/18(金)	晴れ	29.5	29.2	9.63	19	なし
2014/08/05(火)	晴れ	34.8	32.0	9.49	19	なし
2014/08/18(月)	晴れ	34.2	32.4	9.84	11	なし
2014/09/02(火)	晴れ	29.4	29.9	9.95	15	なし
2014/09/26(金)	曇り	26.4	26.3	10.03	18	なし
2014/10/18(土)	快晴	19.1	18.7	9.70	20	なし
2015/04/09(木)	曇り	15.2	13.5	8.61	12	なし
2016/05/14(土)						
2016/06/04(土)						
2016/07/22(金)						
2016/10/22(土)	晴れ	22.8	21.3	9.89	20	0.3
2016/11/19(土)	雨	18.2	15.5	8.85	17	0.4
2016/12/10(土)	晴れ	13.1	11.9	8.73	17	0.3
2016/12/21(水)	晴れ	15.1	10.7	8.15	20	0.5

表1 環境データ

5. 考察

・春から夏にかけてワムシやミジンコなどの動物プランクトンの個体数が増加する。そのほとんどをしめるのがゾウミジンコとケンミジンコである。夏に入る頃にはゾウミジンコは少なくなり、ケンミジンコは秋になると減少し、冬になるとあまり見られなくなった。だがゾウミジンコは、2011年の2月に6匹現れたことがあり、ケンミジンコに比べると耐寒性がある可能性がある。

・ワムシの仲間はケンミジンコの多かった春にはあまり見られないが、夏の後半から秋にかけて増加する。その後、冬になってもほとんど減らずに生息していたので暑さには弱く寒さには強いといえる。猿沢池ではツボワムシとカメノコウワムシが多く、長い期間見ることが出来た。この2種類は他のワムシに比べて繁殖力が強いのか、または、猿沢池がこの2種類のワムシには適した環境であると予想する。

・今年も、藍藻類や珪藻類は、特定の2~4種が大量に見られ、年間を通してよく見られた。それに比べ、緑藻類は、確認できた種類数は多いものの、個体数は少なく、見ることができた時期も短い。この事より、猿沢池の環境が藍藻類や珪藻類が増殖するのに適していると考えられる。また、藍藻類や珪藻類の方が繁殖力が強い可能性があると考えられる。

	藍藻				緑藻											珪藻			鞭毛											
	アナベナ・マクロスポーラ	アナベナ・フロスアクアエ	アナベナ・スピロイテスウラエサ	M・ペーゼンベルギー	M・ノバセツキ	M・イクチオゾラーベ	コエラストルム・ミクロボルム	スタウラストルム・セバルデュム	スタウラストルム・ドルシデンティフェルム	スタウラストルム・アイクテスコン	セネデスマス・オボリエンス	ユードリア	テトラスポラ・ラクストリス	ヒビドロ	コスマリウム・ラルフス	クルキゲニア	ディクチスフェリウム	テトラエドロン	ミカツキモ	キルクネリエラ	サヌハダウジンシヨウモ	ヒトジノウジンシヨウモ(変種)	フタジノウジンシヨウモ(変種)	アウラコセイラ・マンビダア	A・マンビダア(変種)	ハリケインウ	ホシガタケインウ	ケラチウム・ヒレンギトネラ	ミドリムシ	デムノゾリオン・シリンドリウム
2010/07/13(火)	●	●		○				○																●	●	○	○	3		
2010/07/21(水)	●			○	○			○															1	●	●	○	○	3		
2010/08/05(木)	●	○		●	○			○																	○	○	○			
2010/10/21(木)	○			●	○																				○	○	○			
2010/10/28(木)				○	○																				○	○	○			
2010/11/04(木)				●	○																				○	○	○	1		
2010/11/25(木)				●	●																				○	○	○			
2011/02/24(木)																									○	○	○			
2011/05/12(木)	○	○	●	○	○							1																		
2011/06/09(木)																														
2011/09/24(木)	○			●	●	○				1		○	1	1											○	○	○	1		
2011/10/08(土)				●	○																				○	○	○			
2011/11/05(土)	○			○	○																									
2012/03/13(火)				○	○																									●
2012/04/21(土)				●	●			4																	○	○	○	12		
2012/05/17(木)	○	○		●	○																				○	○	○	2		
2012/06/28(木)	●			○	○			●	1	1		●				1	3							○	○	○	○	3		
2012/07/07(土)	◎			●	○		○	●									1	3						○	○	○	○	2		
2012/07/17(火)	●			◎	○					8		○											1		○	○	○	1		
2012/10/09(火)				◎	○			3		2		○											1		○	○	○	4		
2012/10/20(土)				●	●			3		2		2	1										1		○	○	○	○		
2012/12/19(水)																														
2013/01/19(土)				○																										
2013/02/26(火)				●	○																				○	○	○			
2013/04/11(木)	○			○				○																	○	○	○			
2013/04/27(土)	○	○		○				○			2														○	○	○	3		
2013/05/18(土)	◎	◎		○	○			○																	○	○	○			
2013/06/01(土)	◎	◎	●	○	○			○																	○	○	○	2	3	
2013/06/15(土)	●	◎	◎	◎	○			○																	○	○	○			
2013/06/29(土)	●	●	◎	◎	○			○																	○	○	○	3		
2013/07/13(土)	○	○		◎	○			○																	○	○	○	3		
2013/07/25(木)	○	○		◎	○			○		○							1	2				○		○	○	○	○	1		
2013/08/09(金)		○		◎	○			○																○	○	○	○			
2013/08/28(水)				●	○			○																○	◎	○	○			
2013/09/14(土)				●	○			○																○	◎	○	○			
2013/10/21(月)	○			○	○			○																	○	○	○	2		
2013/11/07(木)				●	○			○			2														○	○	○	○		
2013/11/23(土)				○	○			○						1										○	○	○	○	1		
2013/12/20(金)				○	○			○																	○	○	○			
2014/01/11(土)				○																					○	○	○			
2014/02/01(土)				○																					○	○	○			
2014/04/14(月)				○	○																									
2014/04/26(土)				○	○			○																						
2014/05/17(土)				○	○			○																	○	○	○	○		
2014/05/30(金)	○			○	○			○																	○	○	○	2		
2014/07/04(金)			●	○	○			○																	○	○	○			
2014/07/18(金)				○	○			○																	○	○	○	2		
2014/08/05(火)				○	○			○																	○	○	○			
2014/08/18(月)				○	○			○																	○	○	○			
2014/09/02(火)		○		○	○			○																	○	○	○			
2014/09/26(金)	○			○	○			○																	○	○	○			
2014/10/18(土)	○			○	○			○																	○	○	○	1		
2016/05/14(土)			●	○	○																									
2016/06/04(土)				○	○			○		1															○	○	○	4		
2016/07/22(金)		○		○	○	1		○					1											○	○	○	○	1		
2016/10/22(土)		○		○	○																				○	○	○			
2016/11/19(土)		○		○	○																				○	○	○			
2016/12/10(土)				○	○																					○	○			
2016/12/22(水)		○	○	○							1														○	○				

表2 猿沢池で観察された植物プランクトン

◎ : アオコ発生 ● : 多く確認される
○ : 複数確認される 空欄 : 確認されず

	原生生物										ワムシ										節足動物														
	アクチノスフェリウム	カンパネラ	スパシデム	ゾウリムシ	ブレフマリス	チンチデム	ナベカムリ	タイヨウチュウ	ヒステオバランチュム	特定不可	ウシロツノツボワムシ	カメノコワムシ	ツボワムシ	ツメナガネズミワムシ	テマリワムシ	ネズミワムシ	ハネウデワムシ	ハナビワムシ	ヒゲナガワムシ	フムリニアター・ミナリス	ミドリゾウリムシ	フクロワムシ	ヨツウデワムシ	チビワムシ	不明	アミネコゼミジンコ	ケンミジンコ	ゾウミジンコ	ゾウミジンコモドキ	ノロ(卵?)	ノロ	ヒゲナガケンミジンコ	ヒゲナガミジンコ		
2010/07/13(火)																																			
2010/07/21(水)																																			
2010/08/05(木)																																			
2010/10/21(木)																																			
2010/10/28(木)																																			
2010/11/04(木)																																			
2010/11/25(木)																																			
2011/02/24(木)																											1	6							
2011/05/12(木)																																			
2011/06/09(木)																																			
2011/09/24(木)					1																			●											
2011/10/08(土)																																			
2011/11/05(土)																																			
2012/03/13(火)													1											5	10										
2012/04/21(土)			1																																
2012/05/17(木)																																		●	
2012/06/28(木)																											○								
2012/07/07(土)							1																												
2012/07/17(火)							3														1														
2012/10/09(火)				1																											1				
2012/10/20(土)																								●	1										7
2012/12/19(水)																																			
2013/01/19(土)																											○								
2013/02/26(火)			1					○																●		●									
2013/04/11(木)																																			
2013/04/27(土)																																			
2013/05/18(土)																																1			
2013/06/01(土)												1															5	1							2
2013/06/15(土)																											5	1							
2013/06/29(土)																																			
2013/07/13(土)																																			
2013/07/25(木)																											3	1							
2013/08/09(金)																																			
2013/08/28(水)																																			
2013/09/14(土)												●	●																				○	●	
2013/10/21(月)																																			
2013/11/07(木)																																			○
2013/11/23(土)																																			
2013/12/20(金)																								○		2	●								
2014/01/11(土)																										○									
2014/02/01(土)																										○									
2016/05/14(土)																										2	●	●							
2016/06/04(土)																										○									
2016/07/22(金)										○									1				1			●									
2016/10/22(土)				1						1										1						●									
2016/11/19(土)										●														3		○		1						○	
2016/12/10(水)										○	○																●								
2016/12/22(水)								1		○	○						1				1		1				3								

表3 猿沢池で観察された動物プランクトン

6. 今後の課題

- ・名前が分からない微生物たくさんいたので、種類の同定が正確に出来るようにする。
- ・採取の回数を増やして、より詳細で正確なデータをとれるようにする。

7. 参考文献

- [1] 西條八束, 三田村緒佐武(1995)「新編湖沼調査法」講談社サイエンティフィック
- [2] 一瀬諭, 若林徹哉(2005)「やさしい日本の淡水プランクトン図解ハンドブック」合同出版株式会社
- [3] 田中正明(2002)「日本淡水産動植物プランクトン図鑑」名古屋大学出版会
- [4] 月井雄二(2010)「淡水微生物図鑑原生生物ビジュアルガイドブック」誠文堂新光社

8. 謝辞

今回の研究にあたり、指導してくださいました矢野先生、適宜アドバイスをいただいた櫻井先生に深く感謝申し上げます。今回、一部のデータが欠けてしまったことに関してお詫びを申し上げます。

ハムスターの学習能力

3年A組 小早川 なの

3年A組 島本 花菜

3年B組 對馬 風紗

指導教諭 矢野 幸洋

1. 要約

私たちはハムスターに学習能力があるのかということについて研究をしている。ハムスターに迷路を何度か走らせ、かかる時間を比較し、ハムスターの学習能力の有無を調べた。

キーワード ハムスター、迷路、におい、天敵、学習

2. 研究の背景と目的

私たちは一般家庭で飼われているハムスターにどの程度の学習能力があるのかということについて研究をしている。

今回の実験では、生後10か月(人間でいうと27歳程度)のオスのジャンガリアンハムスターを使用

した。(右図)

また、平成27年度の論文において以下のような課題点が挙げられている。



- ・嗅覚と学習能力に関連性があるのか
- ・たまたまゴールまでの経路を通っただけではないのか
- ・迷路が複雑なため条件ごとで比較しづらい、分かりにくい

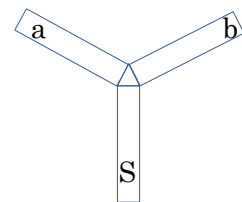
このような問題を解決するため、今年度は以下のような実験を行った。

3. 仮説

ハムスターが迷路の空間を認識していれば、一度通ったことのある間違えた経路は通らないだろうという仮説を立てた。

4. 研究内容

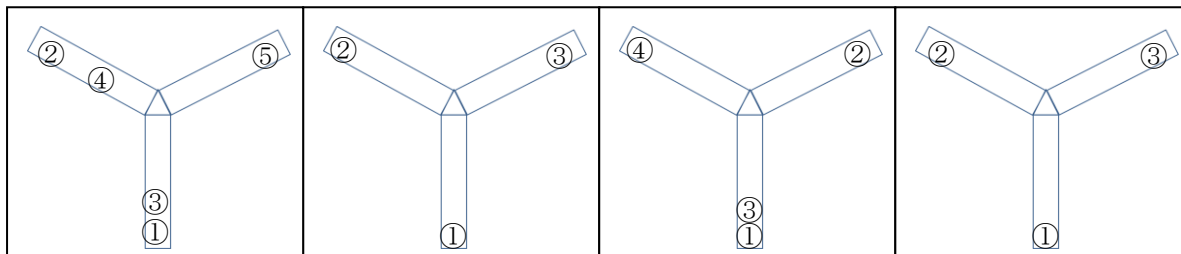
Y字型の迷路を作り、スタート地点をS、左側の行き止まりをa、右側をbとおく。Sからスタートし、最初にaに行き、引き返してbに行けば成功、同様に最初にbに行き、引き返してaに行けば成功とし、時間を計測した。Sからスタートし、最初にaに行き、引き返してまたSに戻れば失敗、同様に最初にbに行き、引き返してSに戻れば失敗とする。また、今回は実験と実験の間は5分間休憩をはさんだ。



5. 実験結果

結果は以下の通りになった。①～⑦は移動した順番を示す。

7月2日

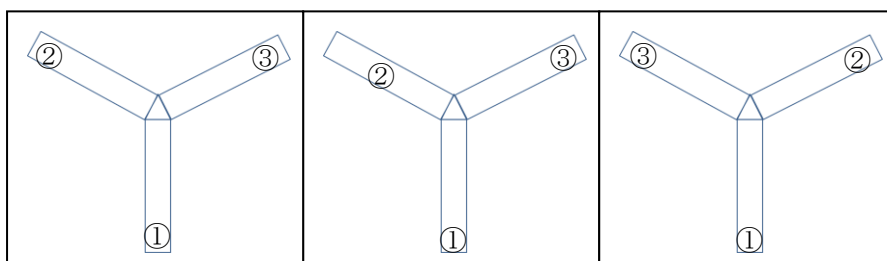


21 秒

11 秒

16 秒

7 秒

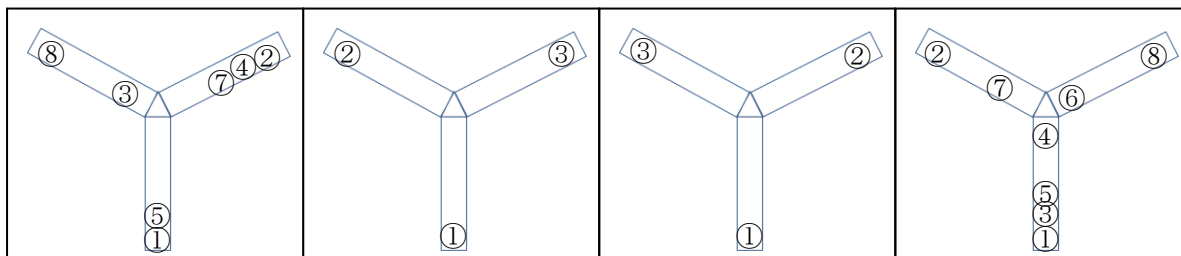


15 秒

21 秒

13 秒

7月8日

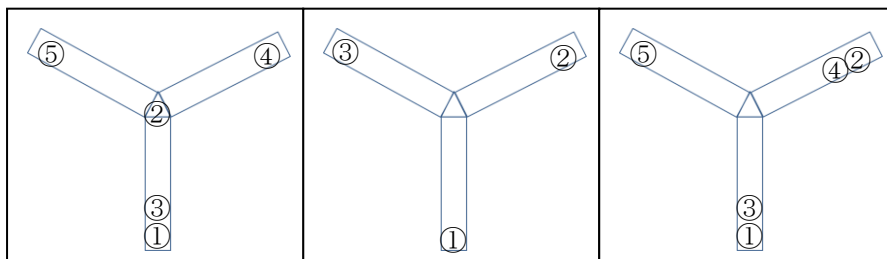


1 分 2 秒

8 秒

8 秒

1 分 52 秒

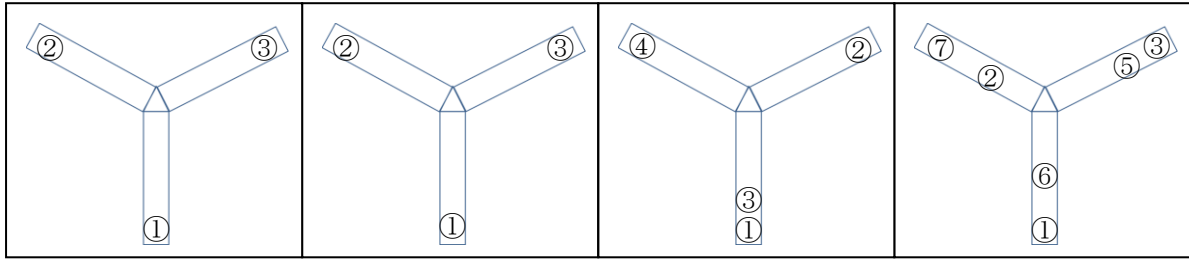


1 分 23 秒

49 秒

49 秒

10月22日

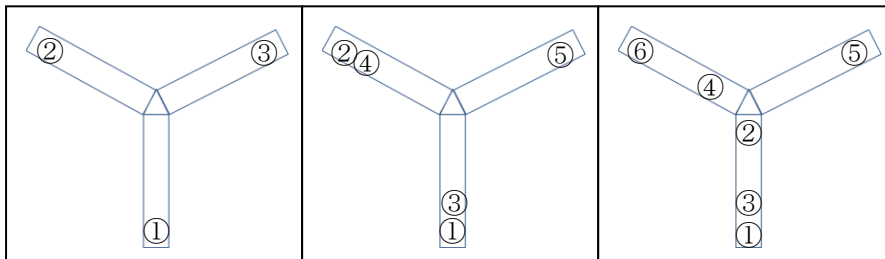


7秒

7秒

28秒

56秒

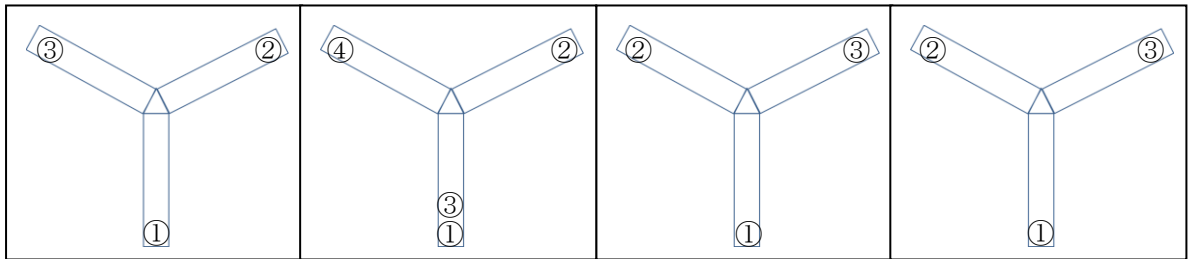


11秒

22秒

23秒

11月19日

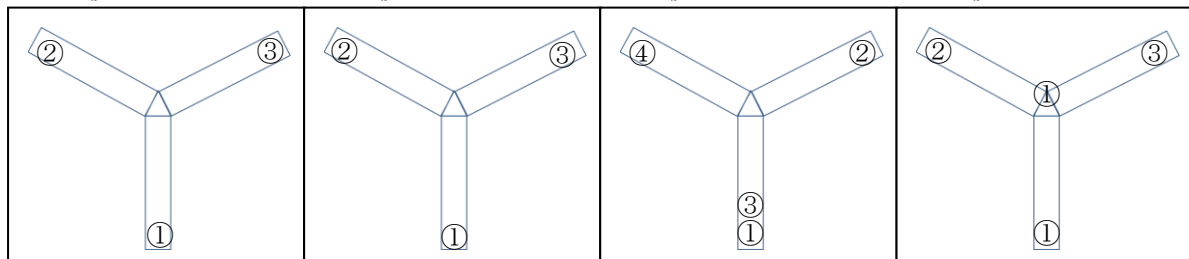


10秒

14秒

6秒

5秒

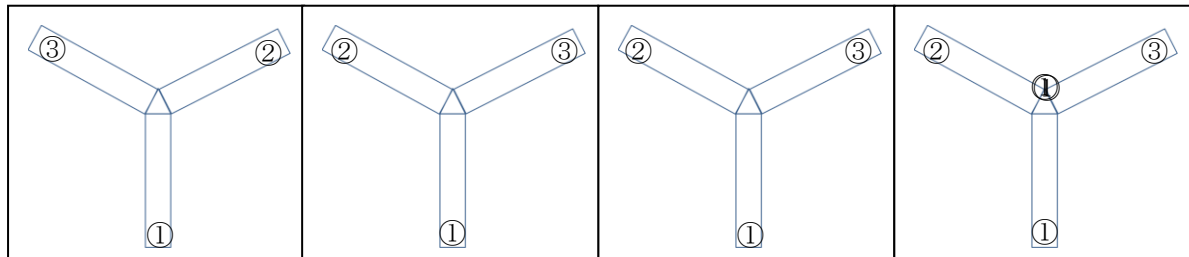


4秒

4秒

5秒

4秒



11秒

6秒

7秒

10秒

6. 今後の課題

実験結果より、以下の事が分かった。

(1) 成功率

※小数第三位を四捨五入して 100 分率に換算。

7月2日	71%	(7回中5回)
7月8日	43%	(7回中3回)
10月22日	43%	(7回中3回)
11月19日	83%	(12回中10回)

(2) 各回の成功タイムの平均

※小数第二位を四捨五入。

7月2日	13.4秒
7月8日	21.7秒
10月22日	17.7秒
11月19日	12.1秒

(3) 各回の失敗タイムの平均

※少数第二位を四捨五入。

7月2日	18.5秒
7月8日	1分16.5秒
10月22日	32.3秒
11月19日	9.5秒

(1)~(3)より、7月2日の実験結果よりも11月19日の実験結果のほうが成功率があがり、成功、失敗タイムともに早くなった。このことからこういった行動をとれば迷路から抜け出せるということを学習したといえる。つまり、記憶対象物の優先順位はあるが、ある程度の学習能力があることがわかった。

7. 今後の課題

今回の実験ではハムスターには平面での学習能力はあることが分かった。よって、今度は野生のハムスターの巣のような立体の迷路を作り、立体空間での学習能力はあるのかどうかということを調べたいと考えている。また、別のげっ歯類を使った対照実験や、このようなY字の迷路を用いてダンゴムシの交換性転換反応のような特徴的な逃避行動がみられるかどうかということも調べたいと考えている。

8. 参考文献

[1]鈴木孝仁監修(2013)フォトサイエンス生物図録. 学習. pp.180-181. 数研出版

[2]NHK for school

<http://www.nhk.or.jp/school/>(アクセス2016.12.20)

9. 謝辞

今回の研究にあたり、指導、アドバイスをいただいた矢野先生に深く感謝申し上げます。

粘菌の新培養法と迷路・今後の展開

4年B組 天野 桃花

4年B組 松本 純子

指導教員 櫻井 昭

1. 要約

私たちの班は以前、真性粘菌キイロモジホコリを培養していたが失敗してしまった。そこで新しい方法で真性粘菌イタモジホコリを培養したところ成功した。また、培養した粘菌を使って迷路実験を行ったところ失敗してしまったため、改善を行い再実験することを計画している。さらに、今後新たな実験も予定している。

キーワード 真性粘菌、変形体、イタモジホコリ、植え継ぎ、粘菌迷路、pH、カルシウム、ナトリウム、カリウム

2. 研究背景

粘菌とは、アメーボゾア門コノーサ綱変形菌亜綱に属する単細胞生物で、真性粘菌と細胞性粘菌の2種類がある。一般的に暗くてじめじめしたところを好み、森や藪、花壇などに生息している。そして、環境に合わせて、孢子、細胞、変形体、子実体と様々な形態になる(図1)。

粘菌は自由自在にからだを伸ばしたり、縮めたりできる。また好き嫌いがあり、オートミールなどの好物には近づき、光などの嫌いなものからは遠ざかる。オートミールは別名えん麦とも言い、シリアルなどに入れて食べる穀物であり、粘菌のエサになる。

さらに、粘菌にはタマゴルリホコリやシロウツボホコリなどの様々な種類がある。私たちが培養しているのは真性粘菌イタモジホコリ(学名 *Physarum rigidum*)の変形体(図2)である。

イタモジホコリは、植え継ぎという操作

でふやすことができる。植え継ぎとは、粘菌を殖やすための操作である。

私たちは、粘菌の生態を知るために、まずイタモジホコリの変形体の安定的な培養を試みた。次に、粘菌の生態の内の1つを知るための粘菌迷路実験を行った。さらに、粘菌の別の生態を知るべく研究計画を立てた。

3. 研究内容①新しい植え継ぎ方法

3.1 研究の目的

以下、「イタモジホコリの変形体」を「粘菌」と表記する。

私たちは以前、キイロモジホコリという真性粘菌の変形体を培養していたが、カビに侵され全滅させてしまった。その当時行っていたキイロモジホコリの植え継ぎの方法を以下に示す。

①大型シャーレ、ピンセット、ろ紙数枚、こまごめピペットのガラス部分、小型のビーカーに入れたひとつまみのオートミール

(図3)を100℃で2時間乾熱滅菌して無菌状態にする。

②クリーンベンチ内でシャーレにピンセットでろ紙を敷きつめ、こまごめピペットを使って蒸留水(滅菌していない)で湿らせる。

③その上にピンセットでオートミールをシャーレ全体にまんべんなく撒き、キイロモジホコリの変形体の一部を移植し、シャーレに蓋をする。

④クリーンベンチの外でシャーレにビニールテープを一周巻いて密閉し、22℃の暗所(ガムテープで密閉したダンボール箱の中)で保存する。

⑤1週間ほど経ったら、①～④を再び繰り返す。

このようにキイロモジホコリを培養していたのだが、クロカビなどのカビにたびたび侵食され、最終的には全滅してしまった。そこで、新しくイタモジホコリの変形体を譲り受ける際に、粘菌の新たな育て方を教えて頂くことができたので、実践しようと考えた。

3.2 仮説

粘菌は、次の「3.3 実験方法」で示す方法で植え継ぎすると、殖やすことが出来る。

3.3 実験方法

①タッパー3個とシャーレ8個それぞれにペーパータオルを敷き、水で湿らせる。(ウェットティッシュくらいの水分)

②送られてきた変形菌(寒天培地の上にいる)の一部をメスで切り、ペーパータオルに乗せる。

③オートミールの粒を一つまみほどペーパータオルの上に置く。(図4, 図5)

④蓋で密閉し、20℃のインキュベータの中に入れて保管する。(ミネラルウォーターと

オートミールも一緒に保管しておく)

⑤1～2日置いて、インキュベータからシャーレ、タッパー、ミネラルウォーター、オートミールを取り出す。

⑥蓋を開け、エサの周りに広がった粘菌の一部をペーパータオルごとメスで切り取り、小さめのシャーレの中にそれぞれ移す。

⑦粘菌を保管していたタッパーとシャーレを中性洗剤でよく洗い、ペーパータオルで水滴が残らないように拭く。

この①～⑦の作業を繰り返す。また、長い時間同じペーパータオルで飼っているとカビが生えたりするので、毎回新しいものと交換する。

3.4 実験結果

粘菌を、カビ等に侵されることなく殖やすことができた。

3.5 実験考察

以前の方法から大きく変更した点は、粘菌を植え継ぎする頻度を、一週間に一度から1、2日に一度にしたことである。今回の方法できちんと育てられるようになったという事は、植え継ぎは頻繁に行う方が良いという事が分かった。

4. 研究内容②粘菌迷路実験

4.1 研究の目的

「4.1 研究の目的」においてのみ、全種類の粘菌の総称を「粘菌」と表記する。

粘菌には、餌があると自身と餌の最短ルートを通り餌までたどり着くという習性がある。粘菌のその習性を確かめる為に粘菌迷路実験を行った。

粘菌迷路実験とは、粘菌の変形体が全体に広がった迷路のスタートとゴールに餌を置くと、粘菌はどのような行動をとるのか

を見るという実験である。

4.2 仮説

粘菌が通路の全体に広がった迷路を用意し、スタートとゴールにオートミールを置くと、粘菌が迷路のスタートとゴールを結ぶ。

4.3 実験方法

- ①水に寒天を1.8%加えオートクレーブにかけ、ろ紙をひいた9 cm径シャーレ8枚に分注してから固める。
- ②迷路の通路となる部分の寒天をくり抜く。
- ③迷路のスタートに粘菌を置き(図6)、1日放置して迷路の通路全体に粘菌を広げる。
- ④迷路のゴールにオートミールを置き、1日放置して粘菌の様子を観察する。

4.4 実験結果

手順③で粘菌を迷路に置いて一日放置したところ、8枚のシャーレ全てで迷路の通路の外に粘菌が出てしまった(図7)。

4.5 実験考察

粘菌がきちんと迷路の通路のみを通るようにコントロールする必要があった。迷路の通路以外の部分に粘菌が嫌いな物質(例えばクエン酸など)を付着させればそれが可能ではないかと考えている。

5. 考察

粘菌の新しい方法での植え継ぎからは、粘菌を頻繁に植え継ぐことで粘菌をカビ等から守りながら殖やすことができるとわかった。以前の植え継ぎ方法では、一度植え継ぎの操作を行ってから一週間放置することで、放置している間にろ紙にカビが繁殖してしまっており、そのためにキイロモジホコリの変形体がカビに侵されてしまっていたのだと考えられる。

粘菌迷路実験からは、粘菌は自身の嫌いな物質がない場合、高低差(12 mmほど)を乗り越えることがわかった。

6. 今後の課題・予定

6.1 今後の課題

まず、粘菌迷路実験を、粘菌が迷路の通路を無視することがないようにコントロールした上で再度行いたい。「4.5 実験考察」で述べたように、迷路の通路以外の部分に粘菌が嫌いな物質を付着させ再度粘菌迷路実験を行う予定である。

さらに、以下「6.2 今後の予定」に述べる実験を予定している。

6.2 今後の予定

私たちは以下の実験を計画している。

6.2-1 実験の目的

変形菌を育てている中で、私たちは、変形菌に様々な物質を与えると、どのような動きをするのか、という疑問を持った。そこで、今後以下の様な実験を行おうと思う。

6.2-2 実験仮説

粘菌は好まない物質を与えられると、それを避けるように動く。また、粘菌が避けるように動く(またはその逆)物質のpHは近くなる。

6.2-3 実験方法

- ①シャーレに寒天培地を作る。
- ②育てておいた変形菌の一部を、培地内に置く。(培地内には変形菌が動くことのできるスペースを残しておく)
- ③オートミールと、さまざまなpHの化学物質、さらにカルシウム・ナトリウム・カリウム等を、培地内の、粘菌に直接かける。
- ④1日インキュベータ内で放置する。

6.2-4 実験結果の予想

この実験では、粘菌が引き寄せられるように移動した物質と避けるように移動した物質それぞれで、pH に共通点が見つかるのではないかと予想している。また、カルシウム・ナトリウム・カリウムは粘菌の細胞をとかずと言われているため、粘菌の細胞がとけると予想している。

7. 参考文献

粘菌の疑問を解決しよう！～粘菌の足跡に発生した白い物質の正体を調べる～ 天野桃花・杉山絢・松本純子

8. 謝辞

この研究を進めるにあたり、日本変形菌研究会の今村知世子さん、顧問の櫻井先生、岡田絢さんを始め様々な方にご協力いただきました。この場を借りて深く感謝申し上げます。



図2 イタモジホコリの変形体
(黄色いものがイタモジホコリの変形体。白っぽいものはオートミール)



図3 オートミール

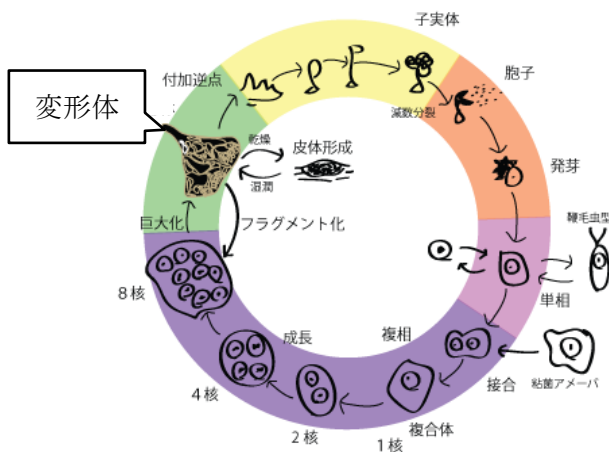


図1 粘菌の一生



図4 新しい植え継ぎ(タッパー)



図5 新しい植え継ぎ
(15 cm径シャーレ)

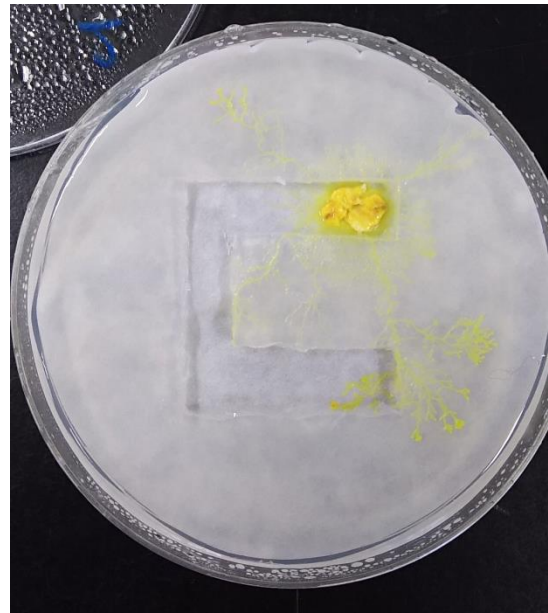


図7 粘菌迷路
(粘菌配置後約1日が経過)

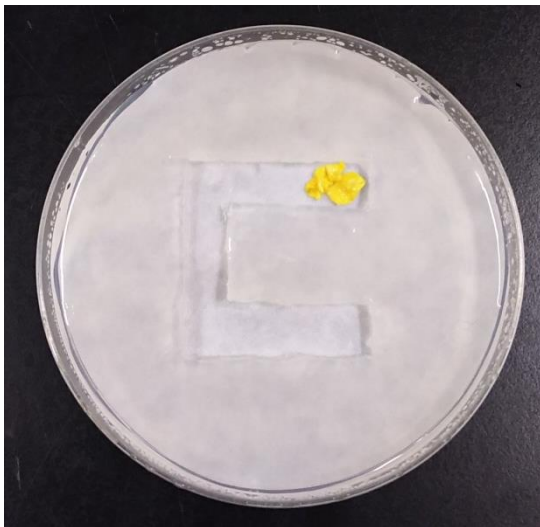


図6 粘菌迷路
(粘菌配置直後)

猿沢池のクロロフィル量とプランクトン

5年B組 高畑 菜々子

5年C組 西村 咲野

指導教諭 矢野 幸洋

1. 要約

今年度は昨年度から継続して調査を行ったが、特定の現象を対象とした実験を行っていない。そのため、昨年度の論文の考察を肯定するデータを集積した。また、例年通り各データの相関関係にも注目し、グラフを作成し、例年との比較を行った。

キーワード クロロフィル量、プランクトン、アオコ

2. 研究の背景と目的

猿沢池班は、2008年からデータを蓄積しており生物班の中でも歴史がある研究班である。その活動を引き継いでデータを蓄積し年間の傾向をより正確に知ることが目的とした。例年の調査で毎年6~8月にアオコが発生することがわかっており、植物プランクトンの量の指標であるクロロフィル抽出やCOD値の計測を継続し行ってきた。また、基本的な水質の指標であるpH、気温、水温、 NH_4^+ 濃度の計測も行った。

3. 研究内容

実験方法

(1) データの収集とプランクトンの観察

① 水の採取

プランクトンネットを使用し、あらかじめ決めた場所で採集瓶一本分の水を採取する。

② 環境データの測定

水を採取すると同時に、水温・気温・

pHをデジタルpH計で、COD、 NH_4^+ をパックテストで測定し、天気を目視で確認し記録する。

③ 遠心分離

持ち帰った水を遠心分離管で遠心分離する。遠心分離管の底にたまったプランクトンをスポイトでスライドガラスにとり、プレパラートを作成した。

④ 観察

作成したプレパラートを顕微鏡で観察した。原生生物は低倍率で、藍藻類などは高倍率で観察した。少ないものは個体数をカウントしたが、多いものはカウントしなかった。

(2) クロロフィル抽出の実験

① プランクトンのろ過

採取した水200mlをろ過装置でろ過する(ろ過を促進するためアスピレーターを用いた)。また、プランクトンの量が多い時などろ過に時間がかかることがあり、そういった場合には、ろ過量

200ml 未満でろ過を中止した。(ろ過量は記録した。)

ろ過後、ろ紙は冷凍庫にて保存した。

② 90%アセトンの作成

メスシリンダーでアセトン 54ml, 蒸留水 6ml をはかり、混ぜる。

③ クロロフィルの抽出

冷凍庫で保存していたろ紙を取り出し、ビーカーにいれた②のアセトンにつける 30°Cで 30 秒間、超音波洗浄機でビーカーごと洗浄する。

④ 分光光度計での測定

アセトンと③で抽出した液の上澄みをそれぞれ 2/3 ずつセルにうつし、分光光度計で、それぞれ 750nm、663nm、645nm、630nm で吸光率を測定する。

⑤ クロロフィル値の計算

上澄み液の測定値からアセトンの測定値を引き(引いたものをそれぞれの波長の測定値とする)、以下の式に数をあてはめて、クロロフィル a、クロロフィル b、クロロフィル c の値を計算する。

- A=663nm の測定値 - 750nm の測定値
- V=ろ過量=0.2(L)
- B=645nm の測定値 - 750nm の測定値
- L=セルの長さ=5(cm)
- C=630nm の測定値 - 750nm の測定値
- a=溶液の量=50(ml)

Chl.a	$(11.64A - 2.16B + 0.10C) a / (VL)$
Chl.b	$(20.97B - 3.94A - 3.66C) a / (VL)$
Chl.c	$(54.22C - 14.81B - 5.53A) a / (VL)$

4. 実験結果

実験結果を表 1、2 および図 1、2 に示す。

	天気	気温	水温	pH	COD
2015/4/18(土)	晴れ	16.8	17	7.87	20
2015/5/9(土)	雨	20.9	21.6	10.1	35
2015/5/21(木)	晴れ	25.2	27.1	10.63	40
2016/6/8(月)	曇り	23.7	22.5	7.9	20
2015/6/20(土)	晴れ	26.3	24.9	10.16	20
2015/7/9(金)	晴れ	34.8	30.8	9.6	70
2015/7/23(木)	晴れ	28.2	27.8	9.82	50
2015/8/17(月)	曇り	31.4	29.4	9.84	50
2015/9/12(土)	晴れ	26.7	25.1	9.73	20
2015/10/14(木)	晴れ	24	22	9.81	20
2015/11/21(土)	不明	18.5	17.8	8.79	13
2015/12/19(土)	曇り	10.3	9.1	8.53	10
2016/3/12(土)	晴れ	11.4	11	8.76	13
2016/3/28(月)	晴れ	14.6	15.9	9.2	20
2016/4/16(土)	晴れ	18.7	16.5	8.56	20
2016/4/23(土)	晴れ	22.8	22.2	9.66	20
2016/4/30(土)	快晴	19.4	20.5	10.6	20
2016/5/7(土)	曇り	20.6	20.7	10.47	30
2016/5/14(土)	晴れ	25.1	25.9	9.88	40
2016/6/4(土)	曇り	24.3	23.5	8.09	30
2016/7/8(金)	曇り	30.4	31.4	10.17	30
2016/7/22(金)	晴れ	30.6	30.3	10.02	20

表 1 環境データ

5. 考察

・ 猿沢池は pH が高い傾向(pH=8~10)にある。このことは奈良市内の複数の池(鴻池・荒池など)において pH は 7~10 程度と季節により多少変動があるものの、概ねアルカリ性を示すため、土壌が水質に影響していると考えられる。一年を通じて、猿沢池では藍藻類が他のプランクトンよりも多く見られた。藍藻類の繁殖力が他のプランクトンよりも強いためだと考えられる。

藍藻類は季節に関係なく多く見られ、特に A.スピロイデスクラッサ、M.ノバセッキ・ベーゼンベルギーが顕著に多かった。これは、ミクロキスティスが他のプランクトンにはできない繁殖に有利な垂直運動ができるためだと考えられる。

・ 2年前までは、アオコの前兆としてミドリムシが観察されていたが 2015、2016 年は見られなかった。

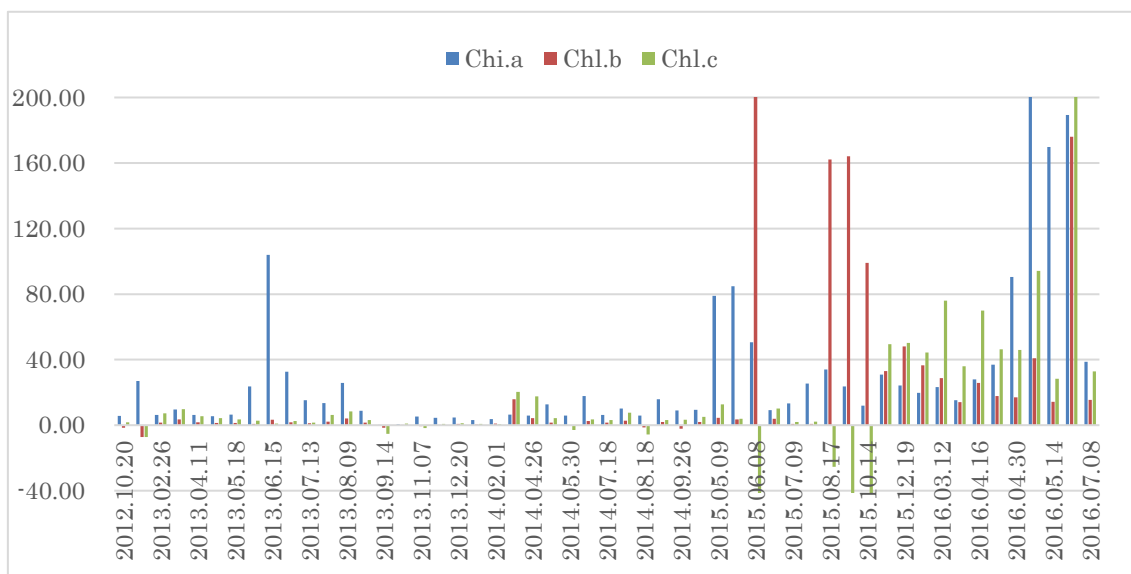


図1 クロロフィル a,b,c(mg/m³)

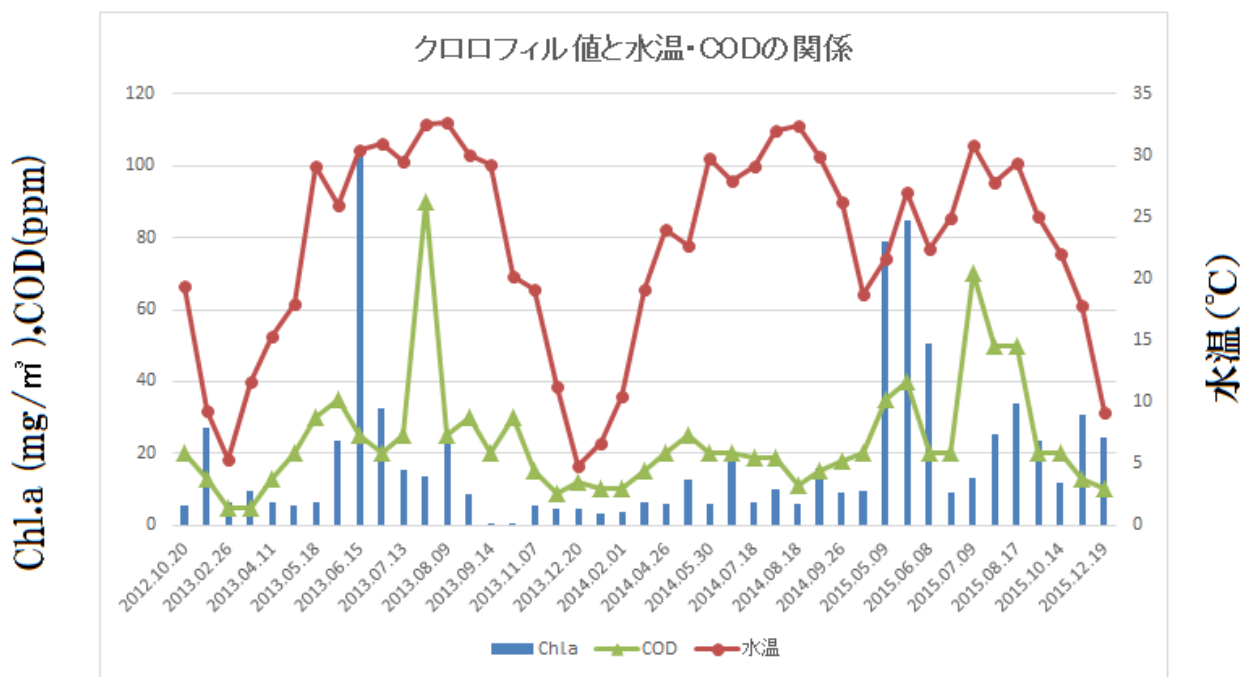


図2 クロロフィル a と水温・COD の関係

	藍藻				緑藻										珪藻			鞭毛		原生													
	アナベナ・マクロスポーラ	アナベナ・フロスアクアエ	アナベナ・スピロイデスクラベサ	M・ペーゼンベルギー	M・イクチオブラーベ	M・ノバセッキ	スタウラストルム・ドルシデンティフェルム	スタウラストルム・セバルデム	コエラストルム・ミクロポルム	セネデスムス・オポリエンシス	スタウラストルム・アークチスコン	ユードリナ	テトラスポラ・ラクストリス	ヒビミドロ	コスマリウム・ラルフス	クルキゲニア	デイクチスフェリウム	テトラエドロン	ミカヅキモ	キルクネリエラ	サメハダクンシヨウモ	ヒトツノクンシヨウモ(変種)	フタツノクンシヨウモ(変種)	アウラコセイラ・アンビゲア	A・アンビゲア(変種)	ハリケイソウ	ホシガタケイソウ	ケラチウム・ヒルンデムネラ	ミドリムシ	デムノブリオン・シリンドリウム	ゾウミジンコ/ケンミジンコ	ワムシ	ツリガネムシ
2010/07/13(火)	●	●	○				○																	●	●	○	3			—	—	—	—
2010/07/21(水)	●		○	○			○															1		●	●	○	3			—	—	—	—
2010/08/05(木)	●	○	●	○			○				○													○	●	○				—	—	—	—
2010/10/21(木)	○		●	○			○				○													○	○	○				—	—	—	—
2010/10/28(木)			○	○																				○	●					—	—	—	—
2010/11/04(木)			●	○																				●	●	○	1			—	—	—	—
2010/11/25(木)			●	●																				○	●					—	—	—	—
2011/02/24(木)																								○	●	○				—	—	—	—
2011/05/12(木)	○	○	●	○	○	○						1																		—	—	—	—
2011/06/09(木)																														—	—	—	—
2011/09/24(木)	○		●	●	●	○			1	○	1	1									1		●	●	○	1			—	—	—	—	
2011/10/08(土)			●	○																				○						—	—	—	—
2011/11/05(土)	○		○																											—	—	—	—
2012/03/13(火)			○	○																								●		—	—	—	—
2012/04/21(土)			●	●			4																	●	○	○	12			—	—	—	—
2012/05/17(木)	○	○	●	○																				●			2			—	—	—	—
2012/06/28(木)	●		●	○			●	1	1	●					1	3								●	●	○	3			—	—	—	—
2012/07/07(土)	◎		●			○	●																	●	●	○	2			—	—	—	—
2012/07/17(火)	●		◎	○			○	6	○						1		1						●	●	○	1			—	—	—	—	
2012/10/09(火)			◎	○			3	2	○						1								●	●	○	4			—	—	—	—	
2012/10/20(土)			●	●			3	2	2	1						1							●	●	●	●			—	—	—	—	
2012/12/19(水)																													—	—	—	—	
2013/01/19(土)			○																										—	—	—	—	
2013/02/26(火)			●	○					1															○	●				—	—	—	—	
2013/04/11(木)	○		○				○																	○	●	○			—	—	—	—	
2013/04/27(土)	○	○	○		○	○			2															○	○	○	3			—	—	—	—
2013/05/18(土)	◎	◎	○	○	○	○																		○	○				—	—	—	—	
2013/06/01(土)	◎	◎	●	○	○	○	○																	○	○		2	3	—	—	—	—	
2013/06/15(土)	●	◎	◎	○																									—	—	—	—	
2013/06/29(土)	●	●	◎	○	○	○	○																	○	○	○	3			—	—	—	—
2013/07/13(土)	○	○	◎	○	○	○	○																	○	○	○	3			—	—	—	—
2013/07/25(木)	○	○	◎	○	○	○	○								1	2	○						●	●	○	1			—	—	—	—	
2013/08/09(金)		○	◎	○	○	○																		●	●	○			—	—	—	—	
2013/08/28(水)			●	○	○	○	○																	●	◎				—	—	—	—	
2013/09/14(土)			●	○	○	○	○																	●	◎				—	—	—	—	
2013/10/21(月)	○		●	○	○	○	○	○																○	○	○	2			—	—	—	—
2013/11/07(木)			●	○	○				2			1												○	○	○			—	—	—	—	
2013/11/23(土)			○	○	○	○	○					○										1		○	○	○	1			—	—	—	—
2013/12/20(金)			○	○			○					○												○	○				—	—	—	—	
2014/01/11(土)			○																					○					—	—	—	—	
2014/02/01(土)																													—	—	—	—	
2014/04/14(月)			○	○																									—	—	—	—	
2014/04/26(土)			○	○			○		○														○						—	—	—	—	
2014/05/17(土)			●	○	●	●	●	●				○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○			—	—	—	—		
2014/05/30(金)	○		●	○	●	○	●	○				○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	2			—	—	—	—	
2014/07/04(金)		●	○	○	○	○	○									○	○							●	○				—	—	—	—	
2014/07/18(金)			○	○	○	○	○	○								○								●	○	○	2			—	—	—	—
2014/08/05(火)			○	●			○								○		○							○	○	○			—	—	—	—	
2014/08/18(月)			○	●	○																			○	○				—	—	—	—	
2014/09/02(火)		○	○	○	○						○					○	○							●	●				—	—	—	—	
2014/09/26(金)	○		○	○	○																			○	○	○			—	—	—	—	
2014/10/18(土)	○		○	○	○																			●			1		—	—	—	—	

	藍藻				緑藻														珪藻		鞭毛		原生										
	アナベナ・マクロスポーラ	アナベナ・フロスアカアエ	M・ペーゼンベルギー	M・ノバセツキ	コエラストルム・ミクロポルム	スタウラストルム・セバルデム	スタウラストルム・ドルシデンティフェル	スタウラストルム・アークチスコン	セネデスムス・オポリエンシス	ユードリナ	テトラスポラ・ラクストリス	ヒビミドロ	コスマリウム・ラルフス	クルクゲニア	デイクチスフェリウム	テトラエドロン	ミカヅキモ	キルクネリエラ	サメハダクンシヨウモ	ヒトツノクンシヨウモ(変種)	フタツノクンシヨウモ(変種)	アウラコセイラ・アンビゲア	A・アンビゲア(変種)	ハリケイソウ	ホシガタケイソウ	ケラチウム・ヒルンデムネラ	ミドリムシ	デムノブリオン・シリンドリウム	ゾウミジンコ/ケンミジンコ	ワムシ	ツリガネムシ	カヤツリソウ	
2015/4/9(木)																						●		●	●					—	—	—	—
2015/4/18(土)	○	○	●	△																						●							
2015/5/9(土)	●	Ex	○	●	○																○			○				Ex					
2015/5/21(木)	Ex	○	●	●																									●				
2015/6/8(月)		○	●																										●				●
2015/6/20(土)		○	●	●																	○							○					
2015/7/9(木)			●	○	○																						○						
2015/7/23(木)	●	●	●	●																			1	○			●						
2015/8/17(月)			●	●	●																								●				
2015/9/12(土)	●	○	○																				●		○				○				
2015/10/14(水)			○	○																		●	●										
2015/11/21(土)			○	○																		●	○							1			
2015/12/19(土)			○	○																		○							1	3			
2016/3/12(土)			●	○																								Ex	○				
2016/3/28(月)	●	○	●	●																		●				○	○	○					
2016/4/16(土)		○	●	1																		8		3	○			12	4			●	
2016/4/23(土)			●	○	1																							8					5
2016/4/30(土)	2	Ex		9	5																	3						Ex	1				
2016/5/7(土)	1		●	●	2	3																1						Ex					
2016/7/8(土)	○	○	●	●																	○	Ex			●			Ex	1				

◎：かなり多い(2010-2014) ●：多 ○：少 Ex：30以上(数えられない)※(2015-2016)
 —：データなし

表2 2010年から6年間で確認されたプランクトン

6. 今後の課題

(1) クロロフィル量を算出するのに用いる数式の再検討

クロロフィル c においてマイナスの値が出た。また、2015-2016 のデータにおいては、例年通りケイソウ等の褐色藻の量は少ないにも関わらず、クロロフィル c の値がクロロフィル a、クロロフィル b を凌ぎ突出していた。

(2) 定量的な測定・観察の方法の検討

作成した表を見てもわかるように、私たちは主観に基づく多い・少ないという判断をしている。また、表にある 1 や 2 などの数字も個体数を示してはいるものの、私たちが観察できた個体数であり、一定量の採集した水に確認できた個体数ではない。

解決策としては、マイクロピペットで観

察する水をはかりとることが考えられる。

7. 参考文献

- [1]西條八東、三田村緒佐武(1995)「新編湖沼調査法」 講談社
- [2]奈良教育大学(1994年3月)「奈良公園の自然」 伊達統 久良美幸 上岡岳
- [3]京都大学(2002年11月)「琵琶湖におけるアオコを形成するラン藻類の動態」 石川可奈子

8. 謝辞

今回の研究にあたり、指導して下さった矢野先生に深く感謝を申し上げます。

マツタケの人工培養を目指して

5年B組 結崎 祈
指導教員 櫻井 昭

1. 要約

私は未だ安定した手法が確立されていないマツタケの人工培養法について研究している。昨年度に引き続きマツタケ菌糸の成長速度を向上させる研究を行い、今年度は培地の寒天濃度を変更する実験を行った。その結果、培地の寒天濃度を下げると菌糸の質感に変化が見られた。

キーワード マツタケ、菌糸の立体化、培地の寒天濃度、菌糸の質感

2. 研究の背景と目的

安定したマツタケの人工培養の成功例は未だ報告されていない。私は、なぜマツタケの人工培養は困難であるのかに興味をもち、マツタケの人工培養を目指して研究を始めた。マツタケの人工培養が困難である理由の一つに、菌糸の成長速度の遅さがある。私はそれを解決するために、培地の寒天濃度を変更し、一連の実験を行った。

3. 実験内容

3.1 事前準備

実験を行う場をビニールカーテンで区切り、その中でプラズマクラスターを約24時間つけ放しにすることで、できるだけ菌の少ない状態を作る。また、マツタケ菌を扱うときは、クリーンベンチ内で行う。以下の全ての実験において、この無菌操作は共通で行う。

・マツタケ培地

IFO-7培地と浜田培地の2種類の培地を採用している(2014, 結崎 祈)。

3.2 1/3培地の作成

3.2.1 実験目的

マツタケ菌糸は培地に浅く菌糸を張りながら培地上に広がり、成長する。通常の実験で用いる寒天培地が菌糸にとって固いので菌糸を張るのに時間がかかり、成長速度が遅いのではないかと考え、通常培地よりも寒天濃度が低い培地であれば培地が柔らかくなり菌糸を張りやすく、菌糸の成長速度が向上するという仮説をたて、実験を行った。

3.2.2 実験仮説

寒天濃度の低い培地を用いれば、菌糸の成長速度が向上する。

3.2.3 実験方法

通常培地の組成から寒天量を減らし、寒天が元の1/3倍量の培地を作成し、植え継ぎを行った。比較対象として通常培地(1倍量)も作成し、同様に植え継ぎを行ったあと、両方の培地を28度のインキュベーターで保管し、76日間培養を行った。

培地の組成は以下の通りである。

IFO-7 培地(寒天濃度 1 倍)

乾燥酵母	0.75g
グルコース	3.0g
寒天	2.7g
蒸留水	Σ150ml

IFO-7 培地(寒天濃度 1/3 倍)

乾燥酵母	0.75g
グルコース	3.0g
寒天	0.81g
蒸留水	Σ150ml

浜田培地(寒天濃度 1 倍)

乾燥酵母	0.75g
グルコース	3.0g
寒天	3.0g
燐酸カリウム	0.3g
硫酸マグネシウム	0.15g
蒸留水	Σ150ml

浜田培地(寒天濃度 1/3 倍)

乾燥酵母	0.75g
グルコース	3.0g
寒天	0.9g
燐酸カリウム	0.3g
硫酸マグネシウム	0.15g
蒸留水	Σ150ml

3.2.4 実験結果



図 1 : 1/3 倍培地



図 2 : 1 倍培地

どちらの寒天濃度の培地もほぼ同じ範囲にしか菌糸が広がらず、菌糸の成長速度に違いは見られなかった。成長した菌糸のコロニーの質感に違いが見られた。寒天量が 1 倍の培地では白くふわふわとした菌糸のコロニーが形成されたが、1/3 培地ではヨーグルトのような見かけの菌糸のコロニーが形成された。

3.2.5 実験考察

培地の寒天濃度を変更しても菌糸の成長速度に変化は見られなかった。よって仮説は証明されなかった。

3.3 1/5 培地の作成

3.3.1 実験目的

3.2 の結果から培地の寒天濃度を下げると菌糸の質感が変化した。さらに寒天濃度を下げると菌糸の質感はどう変化するかを検証した。

3.3.2 実験仮説

培地の寒天濃度を下げれば菌糸のコロニーの質感に変化が見られる。

3.3.3 実験方法

寒天濃度が 1/5 倍量の培地を作成し、植え継ぎを行ったあと、28 度のインキュベーターで保管し、63 日間培養を行った。培地

らの菌糸でも、1 倍培地に植え継げば、白くふわふわとした菌糸のコロニーが形成され、1/5 倍培地に植え継げば、ヨーグルトのような見かけの菌糸のコロニーが形成された。このことからマツタケ菌糸は培地に合わせて形態変化を行っていると考えられる。

4. 考察

①の培地で形成された菌糸のコロニーと、③の培地で形成された菌糸のコロニーの間に違いが見られなかったことから、マツタケ菌糸は元の培地上での形態にかかわらず、植え継がれた培地の寒天濃度に合わせてコロニーの形態を変化させていることが分かった。同様に④の培地で形成された菌糸のコロニーと②の培地で形成された菌糸のコロニーの間にも違いは見られなかった。いずれの場合でも菌糸の成長速度に変化は見られなかったため、培地の寒天濃度と菌糸の成長速度の間に因果関係はないと言える。

5. 今後の課題

今回の実験で培地の寒天濃度により菌糸のコロニーの形態が変化することが分かったが、なぜ変化したのかが分からなかった。また、植え継ぎの際、ヨーグルトのような見かけの菌糸のコロニーは白くふわふわとした菌糸のコロニーに比べて菌糸の強度が高く感じられたが、その原因もわからなかった。今後は顕微鏡等を使用して両者の違いを詳しく調べたい。土壌でマツタケ菌が形成する、シロと呼ばれるコロニーは白くふわふわとした菌糸のコロニーに近いので、ヨーグルトのような見かけの菌糸よりも白くふわふわとした菌糸の方が人工培養の研

究に適していると考えられる。寒天濃度の変更により菌糸の成長速度は変化しなかったため、引き続き菌糸の成長速度の向上を目指し、新たな実験、例えば菌の養分であるグルコースをピルビン酸など他の物質に変更する実験等を現在検討中である。

6. 謝辞

本研究活動において、顧問の櫻井先生に、多大なご指導を受け賜りました。この場をかりて、深く感謝申し上げます。

植物の葉序の規則性

5年B組 山田莉彩

指導教諭 櫻井昭

1. 要約

これまで私は植物の形態にみられる数学的な規則性について研究してきた。特に私は植物の葉序、つまり葉のつき方の規則性について興味を持った。これまでの研究で、植物の葉序の回転角は黄金角なのではないかと考えたが、前回までの研究で黄金角であると断定するには至らなかった。そこで本研究では葉の発生の仕組みから葉序がどのようなパターンを描くのかを求めするため、植物の葉序の数理モデリングを行った。オーキシンが葉の原基に与える影響から、原基が等速直線運動および等加速度直線運動で動くモデルをそれぞれ考案し、**Mathematica** というソフトを用いて葉序のパターンを表現し、パラメータを変化させシミュレーションを行った。結果、パラメータの値によって植物の成長戦略を読み取ることができるということが示唆された。

キーワード 葉、茎頂分裂組織、シュート、原基、オーキシン

2. 研究の背景と目的

植物には美しい幾何学的な形態を持つものがある。ヒマワリやアロエ、ロマネスコといったものがその代表例である。特に私は植物の葉序、つまり葉のつき方の規則性について興味を持った。そこで私は葉序の規則性はどのようなものに由来するのか、規則性を持つことで植物に一体どのようなメリットがあるのか、ということについて調べることにした。

まず私は、黄金角が植物の葉序に関係するのではないかと考え、葉と葉の間の角度を直接測ることで角度の分布を調べたり、植物の切片から維管束という組織の本数を数えることによって回転角を算出したりした。しかし、どちらのアプローチも失敗に終わり、黄金角であると断定するには至らなかった。

そこで、直接測って回転角を求めるのではなく、葉の発生の仕方を理論的に説明できれば、葉序の規則性が何に由来するのか分かるのではないかと考え、植物の葉序を数学的にモデリングすることにした。

3 研究内容

3.1 モデルの前提条件

3.1.1 植物の葉の発生

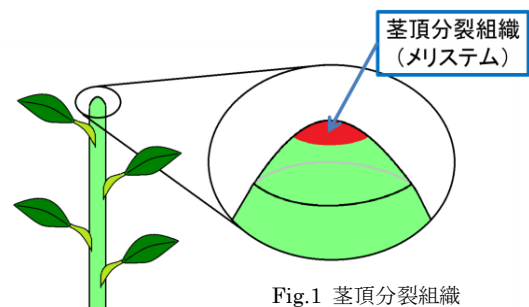
数理モデルを考案するにあたって、私は植物の葉が発生するシステムに着目した。植物体の先端部分である、シュートと呼ばれる部分には、茎頂分裂組織という分裂組織が存在する。茎頂分裂組織では植物の体細胞が発生しそれが繰り返されることにより植物体は成長してゆく。茎頂分裂組織には植物体を構成する体細胞だけでなく、成長して葉となる葉原基とよばれる細胞の塊

も発生する。ここで生み出された原基は、様々な要因によってその位置が決定され、一定の間隔で発生する。植物のシュートでは、特にオーキシシンと呼ばれる植物ホルモンが作用すると考えられている。このオーキシシンは原基から放出され、新しい原基の発生を阻害するという作用を持つ。このため、古い原基のまわりに新しい原基が発生しにくくなる。つまり、オーキシシンの濃度勾配によって新しい原基が発生すると考えられている。

3.1.2 仮定

葉の発生をモデル化するため、3.1.1 で示した葉が発生する仕組みの生物学的知見に基づき葉の発生する仕組みを単純化した。その際に以下の4つの条件が葉の発生に関与すると仮定した。

- ① 葉の原基(葉になる前段階のもの)は、シュートにある茎頂分裂組織の細胞分裂によって発生する(Fig.1)。



- ② 茎頂分裂組織では、新たな原基が発生するときにオーキシシン(植物ホルモン)が作用する。
- ③ オーキシシンは新しくできた原基から放出される。
- ④ オーキシシンには次の原基の形成を阻害する効果がある。

つまり、オーキシシンが次に作られる原基、即ち次に出る葉の位置を決定していると仮定

して、その仮定をもとに葉序の数理モデルを考案した。

3.1.3 設定

3.1.2の葉の発生に関する4つの条件から、葉序の数理モデルを考案する上で5つの設定を設けた。

- ① シュートを上から見て、極座標平面と考える。
- ② 茎頂分裂組織を円、原基を点とみなし、その円周上の任意の地点から新しい原基(点)が発生する。
- ③ 原基はできた地点からその地点の円の接線と垂直に(法線方向に)円から離れていくように移動する。
- ④ 既に発生している原基に対して、他の原基からの影響が最も小さい位置(他のどの原基からも遠い位置)に新しい原基は発生する(Fig.2)。他の原基からの影響が小さい最も位置とは、他のすべての原基からの距離の逆数の和が最小になる位置と定義した。

例えば Fig.2 の場合、 X_3 の位置を決定するのに各点から引かれた3本の直線のそれぞれの距離の逆数を求め、その和が最小になるときに X_3 の位置が決定されるとする。

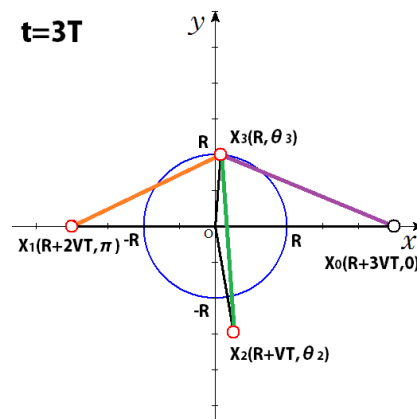


Fig.2 他の原基からの影響が小さい位置

⑤ パラメータを設定する。

以下、この 5 つの設定を満たすように原基(点)は動き、葉序のパターンを形成すると考えた(Fig.3)。

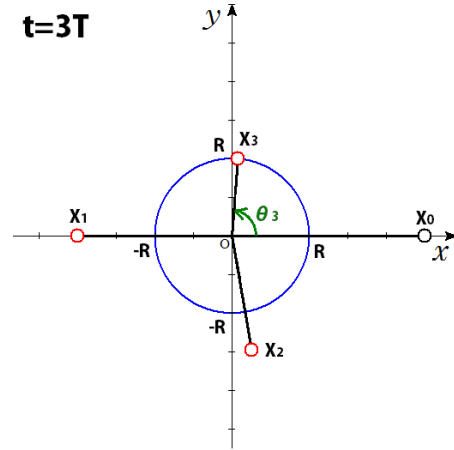
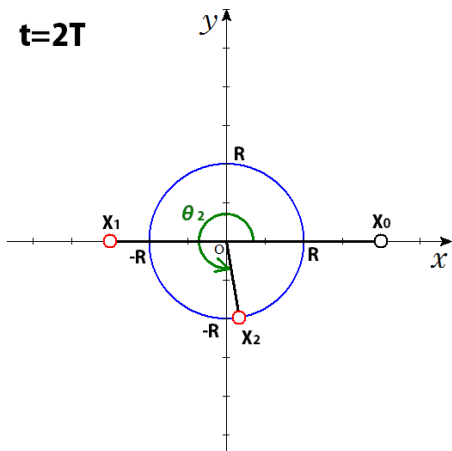
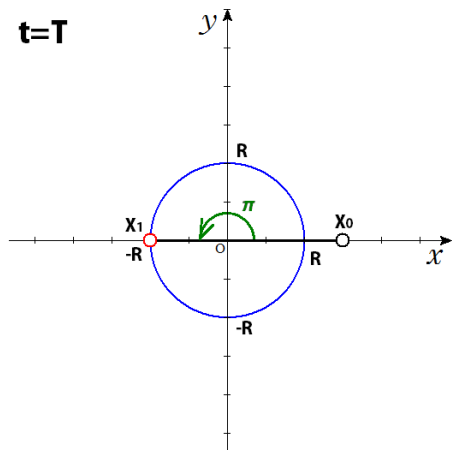
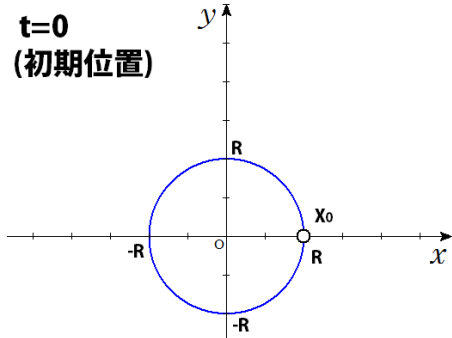


Fig.3 原基の動きのモデル化 (t=0 から t=3T まで)

この設定を用いて原基の動きを表したものが Fig.3 である(等速直線運動の場合)。具体的に原基がどのように発生し動いていくのかを、原基が 3 つ発生するまでの動きで座標を使って説明する。

t=0(初期位置)のとき、原基は座標中の茎頂分裂組織の円上に 1 つあるとする。原基は一定の周期で発生するので、t=T で新しい原基が発生しその間古い原基は円から離れるように法線方向に移動する。新しい原基はオーキシンの効果によって既にある原基から最も遠い位置に発生するため、このときはちょうど反対側、つまり π 回転した位置の円周上に新しい原基は発生する。t=2T のとき、すでにある 2 つの原基は茎頂分裂組織から遠ざかる。初めからある原基は t=T のときに発生した原基よりも茎頂分裂組織から離れているので、t=2T で発生する原基はオーキシンの影響の少ない、つまりより遠い方である X0 に近づく。このように、新しい原基の位置は既にある 2 つの原基の位置関係によって決定される。同様に、t=3T のときも既が発生している 3 つの原基の位置関係によって新しく発生する原基の位置が決定される。

以後、このような設定で点は動き、葉序のパターンを形成してゆくと考えた。

3.2 考案したモデル

3.2.1 モデル 1: 等速直線運動

3.1.3 設定③の、原基の移動する運動を等速直線運動とみなした。これは、等速直線運動がモデル化の際に最もシンプルな運動だと考えたためである。

設定⑤のパラメータ設定では

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \{R + (n-k)VT\}^2 - 2R\{R + (n-k)VT\} \cos(\theta_n - \theta_k)}}$$

が最小の値をとるときの角 θ_n を求めることによって決定する。

3.2.2 モデル 2: 等加速度直線運動

モデル 1 で仮定した「原基が発生し運動をし始めるとき、初速を持たないものが急に等速で運動を行う」ということは現実的に起こりにくい。そこで、3.1.3 設定③の、原基の移動する運動を等加速度直線運動とみなし、原基の動きは速度が一定の等速直線運動ではなく加速度を持った等加速度直線運動と設定し数理モデル化を行った。

設定⑤のパラメータ設定では

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R^2 + [R + \frac{1}{2}a\{(n-k)T\}^2]^2 - 2R[R + \frac{1}{2}a\{(n-k)T\}^2] \cos(\theta_n - \theta_k)}}$$

が最小の値をとるときの角 θ_n を求めることによって決定する。

3.2.3 モデル 3: 影響する原基を制限

モデル 1、2 では新しい原基形成にすべての原基が関わると考えてシミュレーションを行った。一方、オーキシンには下から上には作用しないという極性がある(Fig.4)。

V : 原基の移動する速度

T : 原基が発生する周期

R : 茎頂分裂組織の半径

と設定した。

このモデルでの原基の座標は、時刻 $t=nT$ で k 番目に発生した原基の座標を極座標平面で表すと

$$X_k(R + (n - k)VT, \theta_k)$$

と表される。原基の回転角 θ_n の決定法は

a : 原基の移動する加速度

T : 原基が発生する周期

R : 茎頂分裂組織の半径

と設定した。

このモデルでの原基の座標は、時刻 $t=nT$ で k 番目に発生した原基の座標を極座標平面で表すと

$$X_k\left(R + \frac{1}{2}a\{(n-k)T\}^2, \theta_k\right)$$

となり、

原基の回転角 θ_n の決定法は

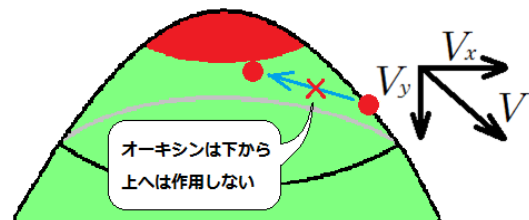


Fig.4 オーキシンの極性

そのため、ある程度原基が茎頂分裂組織から下方に遠ざかってしまうと古い原基が放出するオーキシンは新しい原基に対して作用せず、新しい原基の形成には影響しない。言い換えると、鉛直方向の成長速度 V_y が速いとき、新しい原基の発生に関与する原基の数は少なくなるということが言える。そこで新しい原基の発生に関与する原基の数を制限しモデル化を行った(Fig.5)。

パラメータ設定ではモデル 1 の等速直線運動モデルと同様に
 V : 原基の移動する速度
 T : 原基が発生する周期
 R : 茎頂分裂組織の半径
 x : 原基の発生に関与する原基の数

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{k=n-x}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \{R + (n-k)VT\}^2 - 2R\{R + (n-k)VT\} \cos(\theta_n - \theta_k)}}$$

が最小の値をとるときに角 θ_n を求めることによって決定する。

3.3 シミュレーション

3.3.1 解析方法

3.1.3 の設定から、原基の運動を仮定し数式化することで上から見た葉のつき方(葉序のパターン)と、何のパラメータがパターンの形成に依存しているのかを求めた。設定④で、「最も遠い位置」を「他のすべての原基からの距離の逆数の和が最小になる位置」と定義したため、原基(点)の位置を決定するのに関数が最小値になる角を求める作業が必要であった。このような関数から最小値になるときの角度を求める計算は手計算では困難であり、大変な労力を要するため、Mathematica というソフトを用いて実際に考案したモデルのシミュレーションを行った。実際には一つ点をプロットしパタ

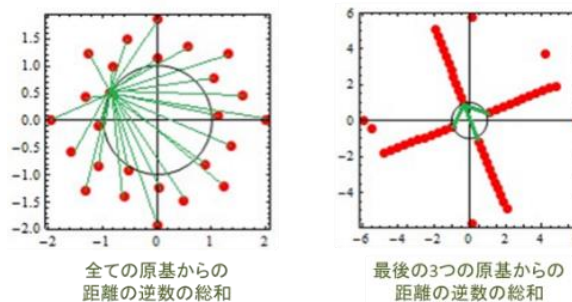


Fig.5 原基の数の制限

と設定した。
このモデルでの原基の座標は、時刻 $t=nT$ で k 番目に発生した原基の座標を極座標平面で表すと

$$X_k(R + (n - k)VT, \theta_k)$$

と表される。原基の回転角の決定法は

ーンを得るたびにその状態の関数が最小値になる角をグラフから求め、極座標平面にプロットするという操作を行っている (Fig.6)。

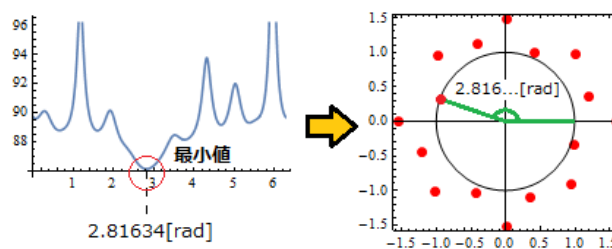


Fig.6 Mathematica によるシミュレーション

3.3.2 目的と方法

目的：モデル 1 の葉序のパターンは何に依存しているのかを調べる。
方法：原基の出現する数(点の数) n を固定し、パラメータの値をそれぞれ変化させる。

3.3.3 モデル 1: 等速直線運動

仮説: ある時刻 $t=nT$ のときの葉序のパターンはパラメータ VT/R (1 周期に原基が移動する距離と茎頂分裂組織の半径の比)に依存する。

方法:

- i) n と VT を固定し V と T を変化させる。
- ii) n を固定し VT/R の値を変化させる。

結果:

葉序のパターンは VT を固定すると V や T を変化させても変化しなかったが、 VT/R の値によって変化した。 VT/R の値が小さくなるほど点が円上に近づいて円の周りを敷き詰めるように並び、大きくなると一直線上に並んだ。

3.3.4 モデル 2: 等加速度直線運動

仮説: ある時刻 $t=nT$ のときの葉序のパターンはパラメータ $aT^2/2R$ (1 周期に原基が移動する距離と茎頂分裂組織の半径の比)に依存する。

方法:

- i) n と $aT^2/2R$ を固定し a と T を変化させた。
- ii) n を固定し $aT^2/2R$ の値を変化させた。

結果: 葉序のパターンは $aT^2/2R$ を固定すると a や T を変化させても変化しなかったが、 $aT^2/2R$ の値によって変化した。 $aT^2/2R$ の値が小さくなると点が散らばって配置され、大きくなると一直線上に並んだ。等速直線運動のモデル 1 の結果と比較する。モデル 1 では、葉序パターンを決定するパラメータ VT/R が小さくなったときに点が円の周りに配置された。しかし、モデル 2 では葉序パターンを決定するパラメータ $aT^2/2R$ が小さくなったときに点は円に近づくほど

密集しているが、円から遠ざかってもある程度重ならない形で配置されていることが分かった。

3.3.5 モデル 3: 影響する原基を制限

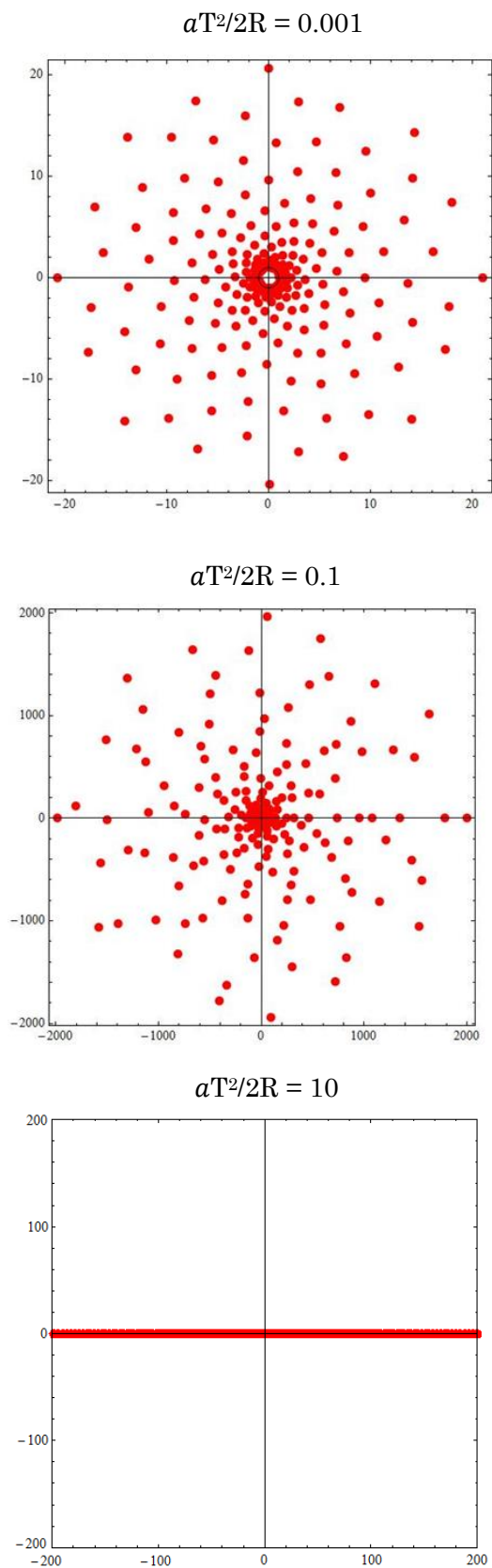
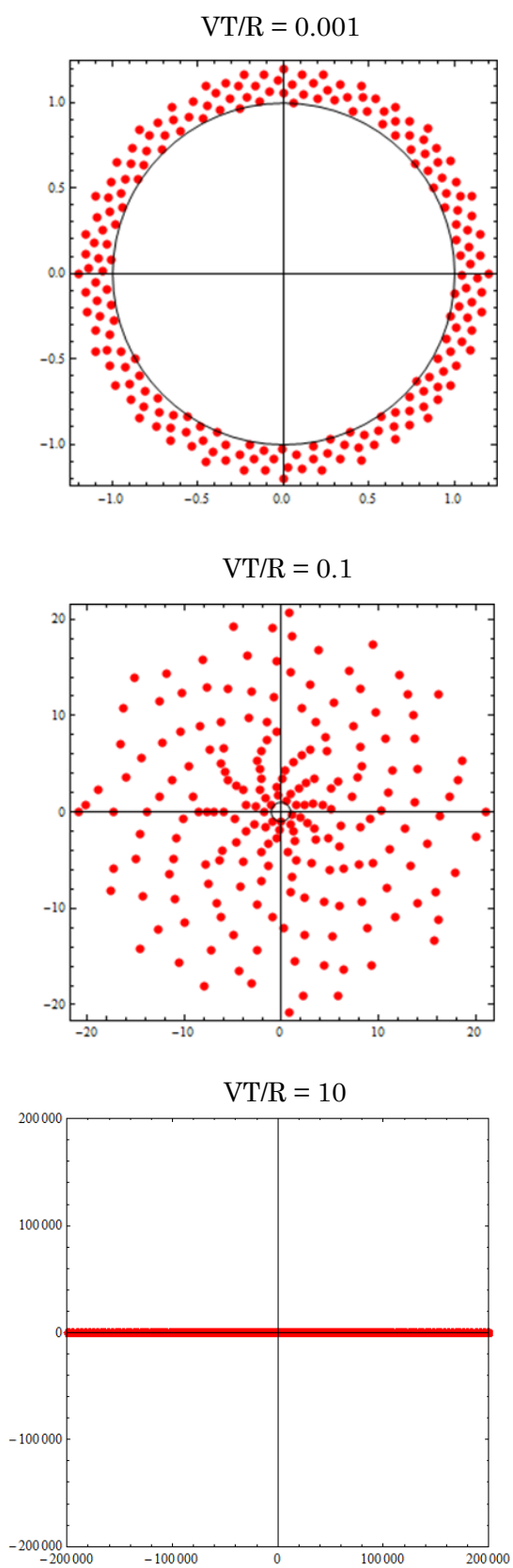
仮説: ある時刻 $t=nT$ のときの葉序のパターンはパラメータ VT/R (1 周期に原基が移動する距離と茎頂分裂組織の半径の比)を固定すると、 x (原基の発生に関与する原基の数)に依存する。

方法:

- i) n と VT を固定し V と T を変化させた。
- ii) n を固定し VT/R の値を変化させた。
- iii) n 、 VT/R を固定し x を変化させた。

結果: 原基形成に影響する原基を制限することによって螺旋状の線が見える配列が確認でき、 x の値を大きくするほど、つまり影響を与える原基の数を多くするほど螺旋の数は増えた。

x の値を小さくするという事は新しい原基を作るのに関与する原基の数が少ないということであるから、これは鉛直方向の成長速度 V_y が速いということと同じであるといえる。また、同じ線もしくは螺旋上にある点は原基が葉になった時に重なりやすくなってしまうので、螺旋の数が増えるほど原基は重なりにくくなると考えられる。次ページに示す図は、 $[n, V(a), T]=[200, V(a), 1]$ として各モデルでパラメータの値を変化させたものである(Fig.7,8,9)。



VT/R = 0.1 のとき

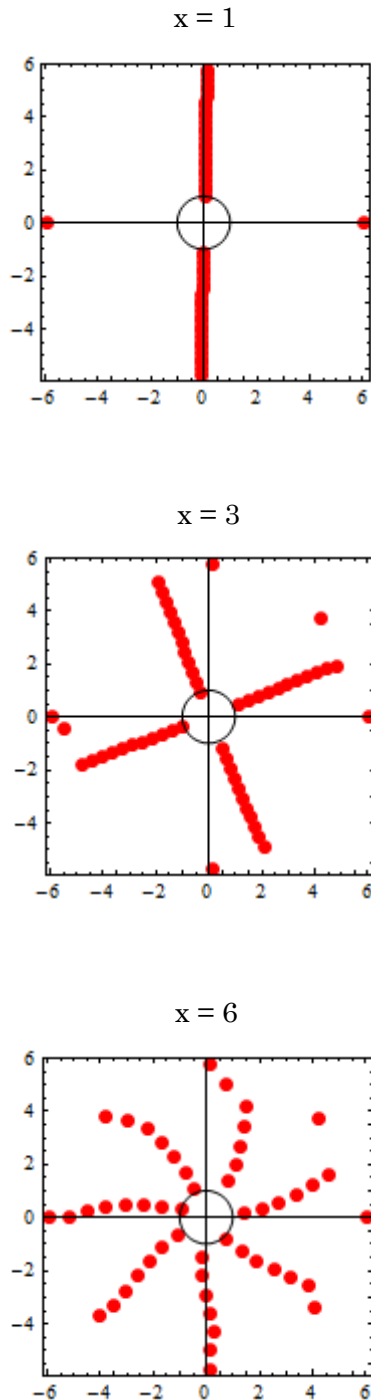


Fig9 モデル 3 : 影響する原基を制限

4. 考察

モデル 1 とモデル 2 では、葉序の回転角はそれぞれのモデルで VT/R 、 $a^2T/2R$ というパラメータによって決定されることが分かった。これは原基が一周期に進む距離と茎頂分裂組織の半径の比である。また、モデル 3 では、 VT/R を R と T を固定することによって V に集約すると、水平方向の成長速度 V_x だけでなく、鉛直方向の成長速度 V_y によっても葉序のパターンが変化することがわかった。以上から、私は成長速度の変化によって葉序のパターンを表すことができる「オーキシンによる葉序の数理モデル」という新たなモデルを考案することができた。

また、モデル 1 ではパラメータの値が小さくなるほど茎頂分裂組織の近くに密集して原基が配置され、茎頂分裂組織は非常に小さな組織であるためあまり現実的でないパターンとなってしまったが、モデル 2 ではパラメータの値が小さくなくても茎頂分裂組織の周り原基が密集して配置されるものの茎頂分裂組織から遠い位置にある原基はある程度散らばって原基が配置されたため、モデル 2 の加速度モデルの方が実際の原基の動きにより近く、適したモデルであると考察された。

また私は、シミュレーションを通して 1 つ推論を得ることができた。それは、一周期に進む距離の違いによって植物の成長戦略が読み取れるというものである。

一周期に進む距離が比較的長いとき、植物の葉はほぼ一直線上に配列したため、その植物は葉の配列よりも成長を優先させているということが出来る。その主な代表例として挙げられるのがイネである。イネは

一般的に田植え後から収穫までの夏の短期間の間に上に(鉛直方向に)高く急激に伸びることが知られている。このような植物は早く、高く成長することによって葉は重なりやすいものの高さによって日光を得ているのではないかと考えられる(Fig.10)。

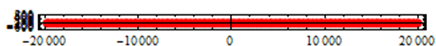


Fig.10 イネと成長速度が速い葉序パターン

対照的に、一周期に進む距離が比較的に短いとき、植物の葉は同一直線状にある程度重なりにくい配置となったため、その植物は成長よりも葉の配列を優先させているといえる。その主な代表例として挙げられるのがアロエである。アロエは葉肉植物の一種であり植物体の維持に水をあまり必要としない。そのため背丈は低く、ゆっくりとしか成長しない。このような植物は、成長速度は遅く背は低いものの、葉を無駄なく敷き詰めることによって効率よく日光を得ているのではないかと考えられる(Fig.11)。

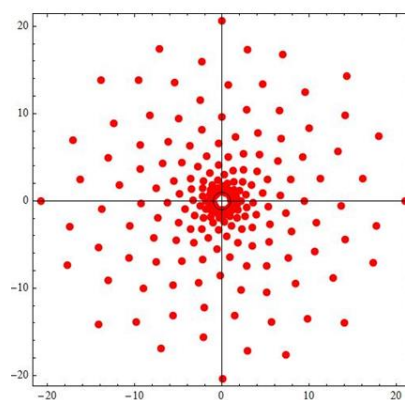


Fig.11 アロエと成長速度が遅い葉序パターン

つまり、植物は茎頂分裂組織の半径と比べた原基が一周期に進む距離(葉序のパターンを変化させたパラメータ VT/R や $\alpha T^2/2R$)、つまり成長速度によって日光を効率よく受け取るための方法を変えていると考えられた。

5. 今後の展望

今回の研究では、等速直線運動と等加速度直線運動、さらに鉛直方向の運動も考慮したモデルを考案し、葉の原基の発生をより生物学的根拠に基づいた条件で疑似的に表現した。しかし、葉の位置を決定しているのはオーキシンの作用のみによるものではなくほかにも様々な要因がより複雑に関与している。ゆえに、どのようなモデルがより植物の葉が発生する条件に近いのか吟味し

その条件に近づくようにさらにモデルの改良を重ねていきたい。また、植物は何によって V (速度)や a (加速度)といったパラメータを変化させ、成長戦略を変えているのか分析していきたい。さらに、自然界には葉が交互についていく互生葉序だけでなく、1つの節から葉が2枚出る対生葉序や、3枚以上出る輪生葉序、葉の出る方向が不規則なコクサギ型葉序などの葉序も存在する。そのような他の葉序のモデルや、葉が立体的に付いていく三次元のモデルについても考察していきたいと考えている。

まとめると、

- モデルの妥当性の吟味・改良
- パラメータを変える要因の分析
- その他の葉序のモデリング
(対生葉序、輪生葉序、コクサギ型葉序)
- 三次元への拡張

以上4つが今後の主な課題である。

6. 参考文献

[1]S.Douady, Y.Couder, (1996) Phyllotaxis as a Physical Self Organizing Growth Process Part I : The Spiral Modes Resulting from Time-Periodic Iterations. *J.Theor.Biol.* 178:255=274

[2]「波紋と螺旋とフィボナッチ: 数理の眼鏡でみえてくる生命の形の神秘」 近藤 滋 著 学研メディカル秀潤社, 2013

[3] こんどうしげるの生命科学の明日はどっちだ 第14回:全ての植物をフィボナッチの呪いから救い出す

<http://www.fbs.osaka-u.ac.jp/labs/skondo/saibokogaku/fibonacci.html>

7. 謝辞

奈良女子大学の吉田信也先生にはモデルの作成や数式などで本研究に協力いただきました。またこれまで私を指導していただき生物学・数学的知見からモデルの妥当性を検討していただいた櫻井先生、川口先生などその他本校の理数科の先生方にはたくさんの方のアドバイスをいただきました。私の研究に協力して下さった皆様に深く感謝の意を表します。

中等教育低学年における数学の興味・関心の喚起について

—「サイエンス・ミーティング」実施を通して—

4年B組 林 建吾

指導教員 川口 慎二

1. 要約

数学を学習する前の生徒に、どのように興味・関心を持たせるか。中等教育低学年、とりわけ1年生は、まだ数学を習い始めて間もないため、数学の知識を必要とする説明を行っても不十分である。それゆえ中等教育低学年における興味・関心の喚起には特別な難しさが伴う。本稿では1年生を対象に実施した、「サイエンス・ミーティング」を通して私が挑戦した興味・関心の喚起を振り返る。

キーワード サイエンス・ミーティング、自発的な「なぜ」

2. 研究の背景と目的

サイエンス研究会数学班の魅力を伝える—2016年の春、私は「サイエンス・ミーティング」をやってみないかと誘われた。実施は2回、5月と6月の1回ずつだという。しかし、この時期の1年生といえば「正負の数」を習い終えるかどうかといったところ。諸概念の抽象化はもとより、文字式も扱えないという制約があった。

そもそも中等教育低学年というのは、初等教育において身につけた算数から離れ、右も左もわからないまま数学に向き合い始めたばかりの段階である。私は、彼らに数学を用いた探求活動を体験してもらい、数学班の魅力を伝えようと考えた。

「サイエンス・ミーティング」とは、本校のサイエンス研究会の活動の一環として今年度実施された、1年生を対象としたサイエンス研究会体験講座の通称である。サイエンス研究会所属の1年生を2つのグループに分割し、数学(私が担当)と化学の2講座を交互に受講する形式をとった。

実施日時は2016年5月17日(火)、6月14日(火)のいずれも放課後16:30~17:30の60分であった。

3.1.2 なぜ数学を学ぶのか

「数学は将来なんの役にもたない」といった、数学を学ぶこと自体を否定する声は世間には流布している。では、なぜ数学を学ぶのであろうか。

「ピタゴラスの定理」で知られる哲学者・数学者のピタゴラス(B.C.580頃~B.C.500頃)は「すべての物は数でできている」と宣言した。彼は現実世界を解き明かす鍵は数

3. 研究内容

3. 1 本研究における前提

3.1.1 「サイエンス・ミーティング」とは何か

学であると考えた最初の人であるといわれる。また、古代ギリシャの哲学者、プラトン(B.C.427 頃～B.C.347 頃)が創設した学園「アカデメイア」の扉には「数学の知識なきもの、入るべからず」と刻まれていたことは有名である。彼もまた、数学や自然科学(物理学)が自然界を理解するための鍵であると考えていた。

このように、数学は世界を構成する、いわば根本であると言えるだろうし、数学を学ぶことが世界を解き明かす鍵となるということを、本研究において前提に据えている。

無論、数学は他にもさまざまな側面を持ち合わせている。論理的思考の訓練、特定の事象の抽象化などが挙げられるが、これらの側面は文字式をはじめとした1年生の未習範囲と隣り合わせであるため、今回は重点を置かないことにした。

3.1.3 本当の「学び」とは何か

経済学者の内田義彦(1913～1989)が「トンボ釣りの好きな少年」という話をしている。三度の飯よりトンボ釣りが好きな少年がいて、暇さえあればトンボ釣りに出かけるとする。しかし、この少年のトンボ釣りを止めさせるのは簡単なことである。それはただ1つ、「トンボを釣ってこい」と毎日毎日命令すればよいのである。つまり、トンボ釣りを仕事にして、やらなければならない義務にしまえばよい。人は本来楽しみとしていたものでも、いったんやらなければならない義務になると、それは苦痛以外の何物でもなくなる、という話である。

「期日までに課題をこなす」という日常の学習、あるいは勉強というのは、まさに

「トンボ釣りを義務にってしまう」ことに重なる。これが「学び」の本来あるべき姿ではないと私は考える。

儒家の始祖として知られる中国・春秋時代の思想家、孔子(B.C.551～B.C.479)は『論語』で「学而時習之、不亦説乎。(学んでしかるべきときに復習する、なんとうれしいことではないか。)」と発言している。「学び」とは本来、各個人が興味の赴くままに行う、「喜ばしい」ものであったのではないか。しかし現代の学びはこれとは対照的である。激化する競争社会の中で、「強制された」学びに子どもたちは疲弊している。勉強は強制的にさせられるもの、という認識が蔓延していると言わざるを得ない。これでは興味・関心の持てる学習からは程遠いだろう。

3.1.4 自発的な「なぜ」の探求

強制的な学習は興味・関心を生み出さない。本来の「喜ばしい」学びの姿に近づけるためには自発的な学びを促さなければならないと考えている。そこで今回の「サイエンス・ミーティング」では、まず参加している1年生に「なぜ」と疑問を抱くような題材を提供する。そこで生まれた「なぜ」は自発的なものであり、これを探求する中で学ぶ楽しさを感じることができる。探求の際、数学という手法を用いるのが今回の特徴であり、「仕掛け」である。

しかしここにも注意点がある。それは「なぜ」を抱くことを強制していないか、という問題だ。今回は「なぜ」を「促す」よう努めるところにとどまっており、追究できていない。今後「サイエンス・ミーティング」を担当する人には、この問題について

さらに追求してほしい。

3. 2 講座内容

今回の「サイエンス・ミーティング」は以下の前半と後半の 2 部構成で実施した。タイトルは『“数学” を使ってナゾを解明せよ』とした。

【前半】マジックのタネを説明する

私は「①カードに書かれた 14 品から選んだ品物をあてるマジック」と「②引いたトランプをあてるマジック」を演示するのだが、いずれも数学を用いてタネを説明できるマジックである。その後、タネ明かしを行う。

【後半】ボードゲームの勝敗を予測する

1 年生の中から 2 人を選出し、ボードゲームを行う。他の 1 年生には 2 人のうちどちらが勝利するか予測するよう指示し、勝敗がついた後に、実は勝敗はゲームの開始前から決まっていたことを説明する。

3. 2. 1 題材の選定

今回の題材選定にあたっては、「百聞は一見に如かず」を念頭に置いている。サイエンス・ミーティング参加者はサイエンス研究会の会員ではあるものの、数学から生物・地学まで興味の対象は人それぞれである。それゆえ数学にはあまり興味・関心がないという人でも内容が印象に残るよう、体験型学習を取り入れた。

【前半】マジックのタネを説明する

見て「なぜ」と感じるものを考えたとき、まず思いついたのがマジックだった。マジ

ックは一見起こり得ないはずの出来事を起こして見せ、観客を驚かせるものだが、ここで観客が驚く理由は、「なぜ」の気持ちが生じたからに他ならない。これらより、マジックが自発的な「なぜ」を促すのに最適な題材であると考えた。また、マジックはパーティーなど身近な場面で見かけることが多く、1 年生の興味の対象に関わらず題材に親しみやすいのも魅力である。

【後半】ボードゲームの勝敗を予測する

自身の勝ち負けというものに、人間は躍起になるのは言うまでもない。数学には確率論という分野があるが、これはフランスの貴族、シュヴァリエ・ド・メレ(1601～1684)が賭博で破産しそうなり、数学者パスカル(1623～1662)に「使い続ければ場の運に関係なく勝ちを保証してくれる法則に従って、賭博の賭け金を調節する方法」を問うたのが起源であることが知られている。勝敗に人間が躍起になり、その真相、つまり勝敗を分ける原因を探ろうとしたエピソードだといえよう。

3. 2. 2 講座の組み立て

【前半】マジックのタネを説明する

「私が演示する 2 つのマジックのうち、数学でタネを説明できるものを当てよ」と指示する。単にマジックのタネを考えさせるのではなく、「数学で説明できる」事にこだわったのは、1 年生にマジックと数学の関係について特に意識して欲しかったからである。また、1 年生にはできるだけ至近距離から観察、自発的に思考して欲しかったので、教卓の周辺に集合するよう指示した。

①カードに書かれた 14 品から選んだ品物をあてるマジック

1 年生の代表 1 人にスライド(資料 1)の中から、好きな食べ物を選ぶよう指示する。

次に、スライドの食べ物の絵が描かれた 4 枚のカード(資料 3)を、代表者が選んだ食べ物が「描かれているカード」と「描かれていないカード」に分けて裏返すよう指示する。裏面(資料 2)は一見どれも同じ模様に見えるが、実は各カードに違いがあり、私はこれを基にカードを判別する。また各カードに番号がついており、この番号の和がスライドの食べ物の番号と一致するので、私は 1 年生の代表が選んだ食べ物をあてることができる。

その後 1 年生に 4 枚のカードを渡し、各カードの違いが実際に見つかるようにした。

②引いたトランプをあてるマジック

私がジョーカーを除いた 52 枚のトランプの束の上から 9 枚を裏返して 1 列に並べる。1 年生の代表 1 人にこの 9 枚から 1 枚選ぶよう指示し、私は選ばれた 1 枚が一番上になるように 9 枚を重ねて、トランプの束の下に戻す。

次に私は、トランプの束の一番上から「10, 9, 8, …」と掛け声に合わせて 1 枚ずつトランプを引き、表向きにトランプを積み上げて山を作る。私の掛け声とトランプの数字が一致すれば引くのをやめ、積み上げた山の一番上のトランプの数字の分だけ束の一番上からトランプを取り除く(掛け声とトランプの数字が一致しなければもう一度山を手元の束に戻して一致するまで行う)。この作業を 4 回繰り返すと、私の手元の束の一番上のカードが必ず 1 年生の代表の引い

たカードになるので、私はこれを表向けて、1 年生の代表の引いたトランプをあてる。

その後 1 年生とともに、黒板を使って私が行った一連の流れを整理し、私がトランプをあてられた理由を説明した。

【後半】ボードゲームの勝敗を予測する

黒板に縦×横が 5×8 のマス目を描き、色付きのマグネット 4 枚を貼って資料 4 のようなボードを再現する。このゲームではハートマークと顔マークを 1 ターンずつ交互に動かし、ハートマークが顔マークを追いかけるのだが、それぞれ 1 回のターンでは上下左右に 1 マスしか動くことができない、つまり斜めに移動することができない。1 年生の代表 2 人にハートマークに相当するマグネットを割り当て、私は顔マークを担当する。

代表 2 人のうち先に顔マークを捕まえた方を勝ちとして、ほかの 1 年生には 2 人のうちどちらがどちらの顔マークをとって勝つか予想するよう指示した。直感では近くの顔マークの方が捕まえやすいと思うが、実際は遠くにある顔マークしか捕まえられない。

勝敗がついた後、スライド(資料 5)を用いて遠くにある顔マークしか捕まえられない理由を説明した。

3.2.3 題材の仕掛け

題材についてそれぞれ数学的手法を用いて説明することができる。今回は 1 年生にこれらの説明を紹介した。

【前半】マジックのタネを説明する

①カードに書かれた 14 品から選んだ品物

をあてるマジック

4枚のカードはそれぞれ2進数の $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ の位を表しており、これらを10進数に変換し足し合わせるとスライドの番号と一致するようになっている。とはいえ1年生はまだ n 進法を知らないので、3年生で学習する(本校では数学A「整数の性質」を3年生で学習する)と前置きした上で「0~15までの数は $2^0 \sim 2^3$ の和で表せる」と紹介した。なお、カードを「選ぶ」「選ばない」の2通りで区別して何種類もの食べ物を表せるのは2進数ならではの性質だ。この2進数の性質は数学のみならずコンピュータをはじめとした日常のさまざまな場面で用いられており、このマジックからさらに他の話題に広げることができる。

②引いたトランプをあてるマジック

このマジックでは私の手元にあるトランプの束の枚数に注目すると、最後は必ず9枚になり1年生の代表が選んだカードが一番上にくることが分かる。数学オリンピックなどのいわゆる「ゲーム問題」と呼ばれる分野では、複雑な操作の中である1か所の数の流れに注目すると解答へのカギが得られることがよくあるので、今回はその一例として紹介した。これは「論理的な思考」の一例でもある。

【後半】ボードゲームの勝敗を予測する

マス目を資料5のように2色で塗り分けると、同じタイミングに赤、青のマークが存在できるマスが一目で区別できる。これには「上下左右にしか動けない」というルールが関わっている。当日は私が前で何度か操作を行いこの塗り分けができることを

確認した。塗り分けは上述と同じく、数学オリンピックなどの問題で解答を導くための手法として用いられる。今回はその一例として紹介した。これも「論理的な思考」の一例である。

4. 今後の展望

先にも述べた通り、今回は1年生による自発的な「なぜ」を引き出すよう努めたが、最終的に私が「問い」「答え」を説明する形から脱却することはできなかった。1年生によってこれらの「問い」「答え」が導き出されれば、本当の「学び」の姿により近づけるだろうが、一方で時間的、能力的な制限もある。今後「サイエンス・ミーティング」を担当する人は、これらの課題をどれだけ追求できるかに挑戦してほしい。

5. 参考文献

- [1]「知の歴史—ビジュアル版哲学入門—」、Bryan Magee 著、中川純男日本語版監修、BL出版(1999)
- [2]「図説世界を変えた50の哲学」、Jeremy Stangroom 著、田口美和訳、原書房(2014)
- [3]「百万人の数学[下]」、Lancelot Hogben 著、久村典子訳、日本評論社(2015)

6. 謝辞

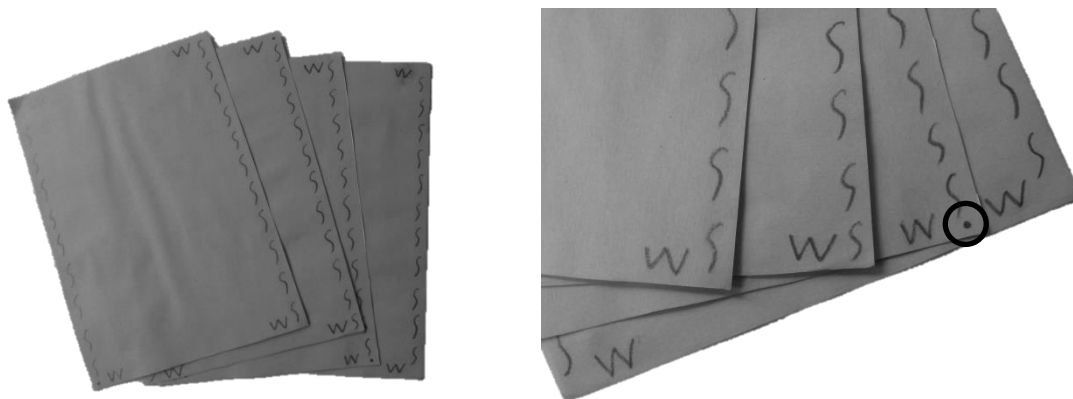
本研究にあたり、本校数学科でサイエンス研究会数学班顧問の川口慎二先生には多大なる助言と支援を賜りました。また、「サイエンス・ミーティング」実施においては、本校理科の藤野先生、守本先生にもご協力いただきました。この場をお借りして深く感謝の意を表します。

【資料1】 1つ目のマジックで使用したスライド

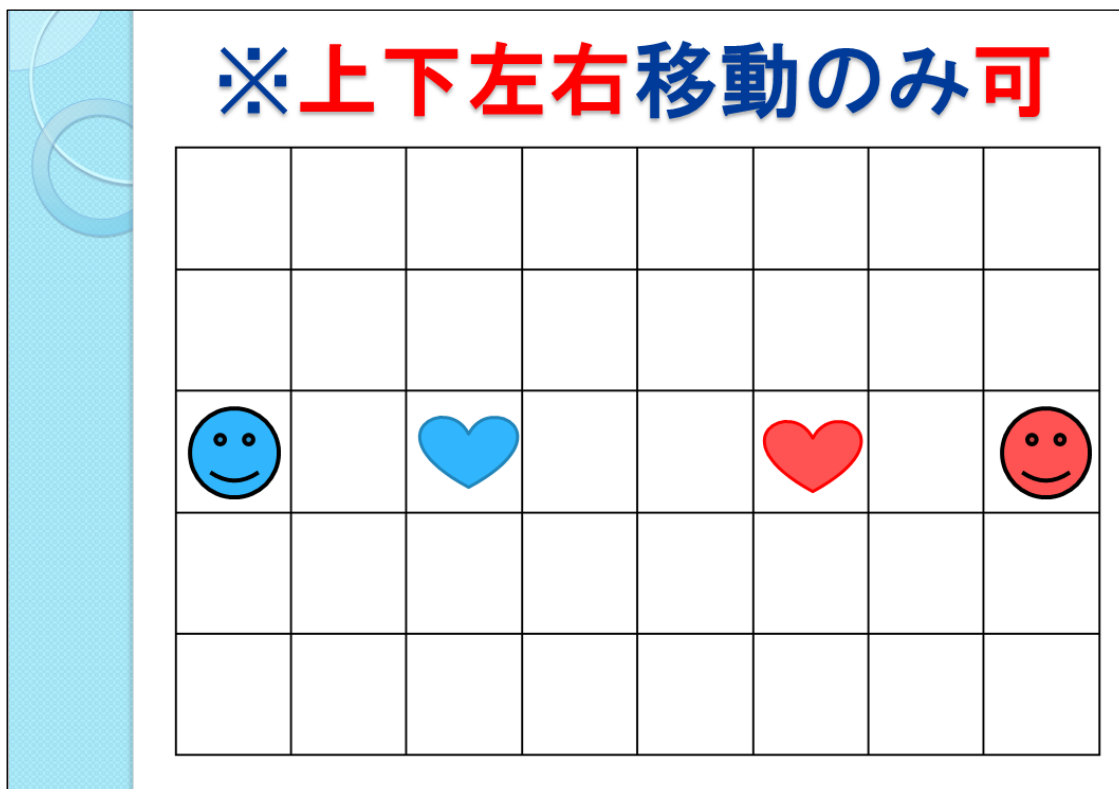


【資料2】 1つ目のマジックで使用したカードの裏面

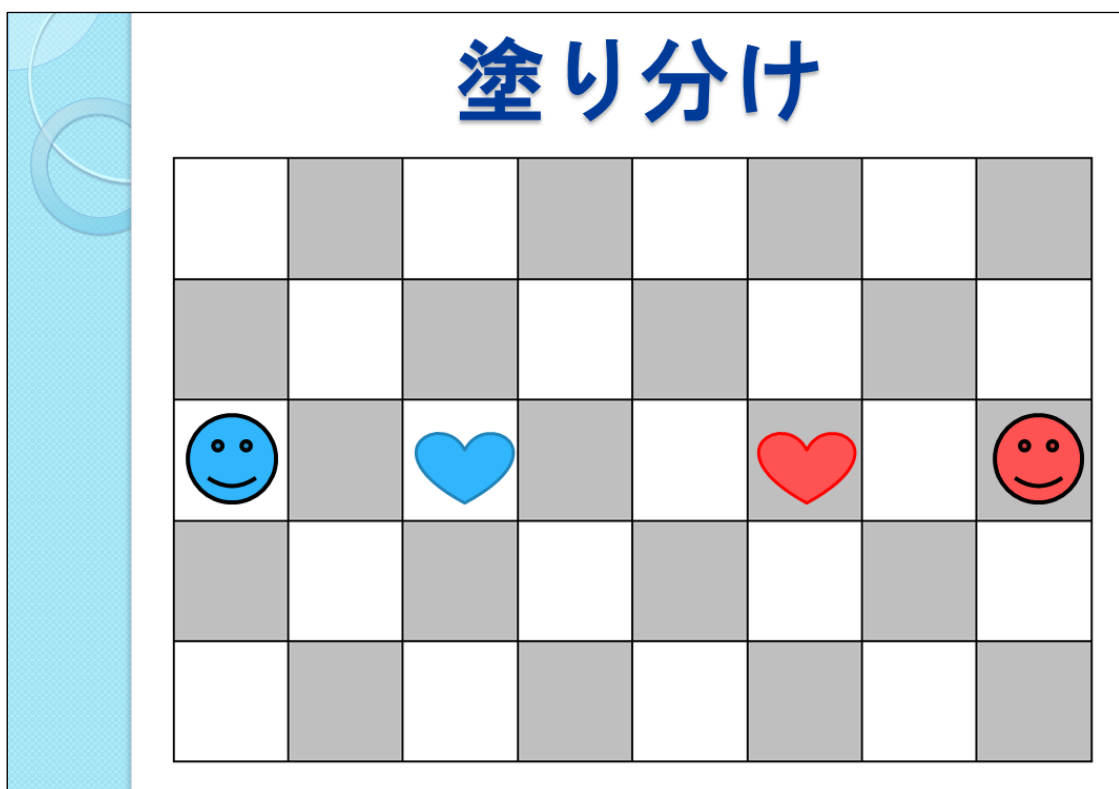
4枚のカードそれぞれの異なる四隅に黒い印がついている。この印の箇所の違いでカードの番号を見分ける。



【資料 4】 ボードゲームのルール説明で使したスライド



【資料 5】 ボードゲームの勝敗決定の説明で使したスライド



グラフ理論に関する諸定理の証明

4年B組 松川 賢太郎
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班4年生はグラフ理論について研究している。今回はグラフ理論に関する様々な定理の証明を行うことを目標とした。

キーワード グラフ理論、ラムゼーの定理、握手の定理、五色定理

2. 研究の背景と目的

昨年から、私は組合せや確率について研究している。グラフ理論は組合せ問題を簡潔に見やすくしてくれる道具の1つである。そのため、今回グラフ理論についての研究を行った。

完全グラフ」と「頂点数 B の青い完全グラフ」が必ず存在する。

ここで、定理1の条件を満たす最小の頂点数 n のことをラムゼー数といい、 $R(A, B)$ と表す。

3. 研究内容

はじめに、グラフとは幾つかの点と、2点をつなぐ線分からなる図形を意味する。各点のことを頂点、2点を結んだ線分のことを辺と呼ぶ。また、頂点 v に接続する辺の数を頂点の次数 (degree) といい、 $d(v)$ とかく。

例題 1

6人の人物がいる場合、互いに知り合いである3人組か、互いに知らない3人組が必ず存在することを証明せよ。

(証明)

この問題の状況をグラフ化すると図1のようになる。

3. 1 ラムゼーの定理

すべての頂点の間に辺が存在するグラフのことを完全グラフという。完全グラフについては、次の定理が知られている。

定理 1 (ラムゼーの定理)

A, B は任意の定数とする。頂点の数が n の完全グラフの辺を赤と青に塗り分けるとき、 n が十分大きければ「頂点数 A の赤い

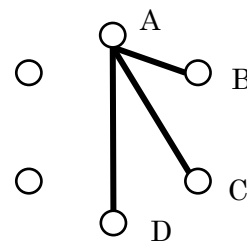


図 1

互いに知り合いである人同士を実線で、互いに知らない人を点線で結ぶ。つまり実

線の三角形か、点線の三角形かどちらかができればいい。まず1点に注目する。

今回の場合はAとする。Aからは5本の辺が出ることになる。実線と点線で分けるためどちらかが必ず3本以上である。いま、AB, AC, ADが実線であるとする、A, B, C, Dを頂点とする三角形が考えられる。

- ① BCが実線のとき
△ABCが実線の三角形である。
- ② CDが実線のとき
△ACDが実線の三角形である。
- ③ BDが実線のとき
△ABDが実線の三角形である。
- ④ ①～③以外
BC, CD, BDはすべて点線なので、
△BCDが点線の三角形である。

いずれにせよ、実線の三角形か、点線の三角形かどちらかができる。(Q. E. D.)

例題2

8人の人物がいる場合、互いに知り合いである3人組か、互いに知らない3人組が必ず存在することを証明せよ。

証明

この問題をグラフ化すると図2のようになる。

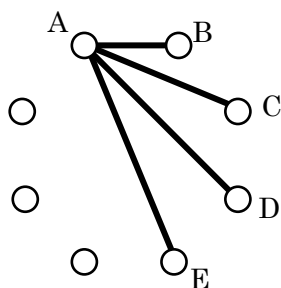


図2

例題1と同様に考えて、実線の三角形か、点線の三角形のどちらかができればよい。

まず1点Aに注目する。Aからは7本の辺が出ることになる。実線と点線で分けるため、どちらかが必ず3本以上である。いま、AB, AC, AD, AEが実線であるとする。

このとき、A, B, C, D, Eを頂点とする三角形が考えられる。

- ① BCが実線のとき
△ABCが実線の三角形である。
- ② CDが実線のとき
△ACDが実線の三角形である。
- ③ DEが実線のとき
△ADEが実線の三角形である。
- ④ BDが実線のとき
△ABDが実線の三角形である。
- ⑤ BEが実線のとき
△ABEが実線の三角形である。
- ⑥ CEが実線のとき
△ACEが実線の三角形である。
- ⑦ BC, CD, BDが点線のとき
△BCDが点線の三角形である。
- ⑧ BC, CE, BEが点線のとき
△BCEが点線の三角形である。
- ⑨ CD, DE, CEが点線のとき
△CDEが点線の三角形である。
- ⑩ BD, DE, BEが点線のとき
△BDEが点線の三角形である。

いずれにせよ、実線の三角形か、点線の三角形かどちらかができる。(Q. E. D.)

3.2 握手の定理

グラフの次数について、次の定理が知られている。

定理 2 (握手の定理)

任意のグラフにおいて、各頂点の次数の総和は辺の本数の 2 倍に等しい。

この定理を証明する前に接続行列について説明しておく。

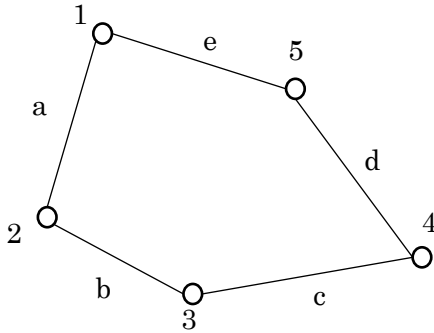


図3

図3のようなグラフ G について考える。頂点 n 個、辺 m 本のグラフに対する接続行列は $n \times m$ 行列である。各行は頂点、各列は辺に対応している。 p 番目の頂点と q 番目の辺が接続しているとき、接続行列の (p, q) 成分は 1 であり、接続していないとき、 (p, q) 成分は 0 である。下の行列は図3のグラフ G に対する接続行列である。

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

(証明 1)

頂点 u と v をつないだとき、 u の次数は +1 されて、 v の次数も +1 される。つまり、辺 1 本につき次数は +2 になる。グラフの辺の本数を k 本とすると、全頂点の次数の

合計は $2k$ となる。 (Q. E. D.)

(証明 2)

接続行列の各列の総数はその辺と接続している頂点の次数の総数である。よって接続行列の 1 の総数は全頂点の次数の和である。各列の次数の和は必ず 2 なので、グラフの辺の本数を k 本とすると全頂点の次数の合計は $2k$ となる。 (Q. E. D.)

3. 3 五色定理

グラフ理論の応用として、地図の塗り分け問題が挙げられる。地図の塗り分けについては、次の「五色定理」がある。

定理 3 (五色定理)

どのような地図でも五色あれば塗り分けることができる。

この五色定理を、グラフ理論を用いて証明しよう。まず、次の補題を準備する。 n 色を用意すれば、グラフのどの辺の両端点も異なる色になるように頂点を塗ることができるとき、このグラフは n 彩色可能であるという。

命題

平面グラフは 5 彩色可能である。

(証明)

数学的帰納法で示す。平面グラフ G の頂点の数、辺の数、面の数をそれぞれ、 V, E, F とする。

$V = 1$ のときは自明である。 $V = k$ のとき 5 彩色可能であると仮定し、 $V = k + 1$ のとき、 G が 5 彩色可能であることを証明する。

まず、次の補題から証明する。

補題

平面グラフには、次数 5 以下の頂点が必ず存在する。

(補題の証明 1)

平面グラフのすべての頂点の次数が 6 以上であると仮定する。またグラフは連結していると仮定する。それぞれの頂点に辺が 6 本以上連結しているので、

$$6V \leq 2E \quad \dots \textcircled{1} \text{ となる。}$$

$E=1$ のときは自明である。以下は辺の数が 2 以上のものだとする。それぞれの面は 3 本以上の辺を境界としてもち、1 本の辺は 2 つの面の境界になり得るため、

$$3F \leq 2E \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、 } V - E + F \leq \frac{1}{3}E - E + \frac{2}{3}E = 0$$

となるが、オイラーの多面体定理より、(左辺)=2 であり矛盾する。よって背理法より、補題は証明された。 (Q. E. D.)

(補題の証明 2)

上述の補題の証明 1 より、 $3F \leq 2E \dots$ (*) は成り立つ。また、オイラーの多面体定理より、 $V + F = E + 2 \dots$ (†)

(*), (†) から

$$3V \geq E + 6 \quad \dots \textcircled{\ddagger}$$

が得られる。また、各頂点の次数の総和を D と置くと、握手の定理(定理 2)より、 $D = 2E$

を(†)に代入して、 $\frac{D}{2} + 6 \leq 3V$

となるので、 $\frac{D}{V} \leq 6 - \frac{12}{V} < 6$.

これより、次数の平均が 6 未満であるこ

とがわかる。平均以下の次数は必ず存在し、次数は整数であることから、平面グラフには次数 5 以下の頂点が必ず存在する。

(Q. E. D.)

(定理 3 の証明)

頂点数 5 以下の平面グラフについて命題が成り立つことは自明である。頂点数 k 以下のすべての平面グラフに対して五色定理が成り立っていると仮定する。 $k+1$ 個の頂点をもつ任意の平面グラフを G として、 G が 5 彩色可能であることを示す。

G には、補題より次数 5 以下の頂点が存在する。 G の最小次数の頂点を v とする。このとき、 $d(v) \leq 5$ となる。 G から v とそれに接続する辺を除いたグラフを G' とする。 G' は頂点数 k の平面グラフなので、仮定より G' は 5 彩色可能である。

$d(v) \leq 4$ のとき、 v と接続している頂点を塗り分ける色の数は 4 以下なので v は残った色で塗ることができる。

$d(v) = 5$ のとき、 v に接続している頂点を塗り分けている色の数が 4 以下なら v は残った色で塗ることができる。

$d(v) = 5$ であり、 v に接続している頂点を塗り分けている色が 5 色であるの場合(図 4 参照)を考える。

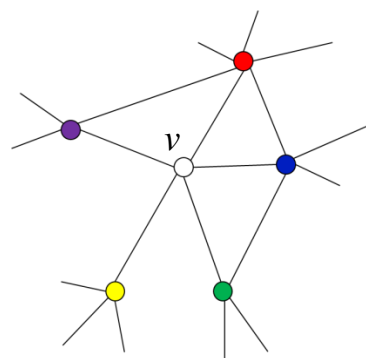


図 4

このとき、2 パターンの場合が考えられる。5 つの頂点を v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 とおく。また、 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 の各頂のそれぞれに、 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 の色を塗るとする。さらに、 v_1 から c_1 と c_3 を交互に塗っていた頂点の集合を \tilde{V} とする。

[パターン 1]

v_3 が \tilde{V} に含まれていない場合

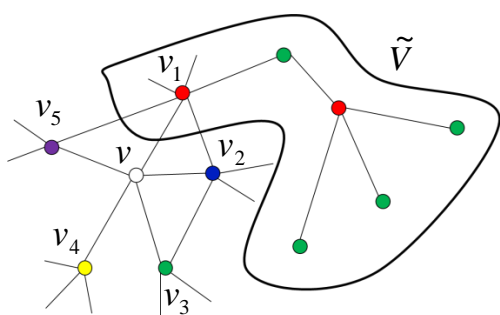


図 5

この場合、 \tilde{V} 中の c_1 と c_3 の色を交換すれば条件を変えずに v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 を 4 色で塗り分けることができる。よって、残った色 c_1 で v を塗ることができる。

[パターン 2]

v_3 が \tilde{V} に含まれている場合

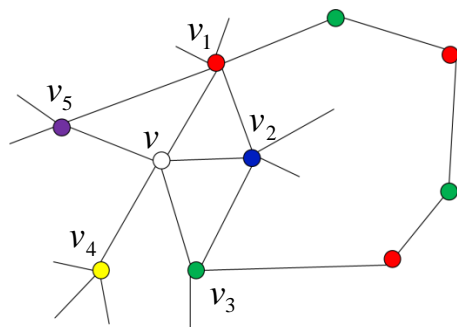


図 6

v_1 と v_3 を結ぶ辺と頂点の集合は存在する。一方、グラフ G は平面グラフなので、 v_2 と v_4 を結ぶ辺と頂点の集合は存在しない。この場合は [パターン 1] と同様に考える。ここで v_2 から c_2 と c_4 を交互に頂点を塗っていった頂点の集合を \hat{V} とする。

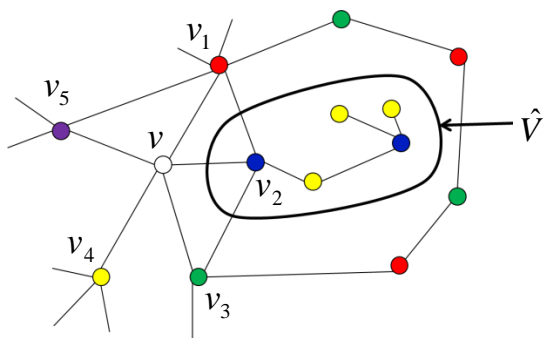


図 7

このとき、 \hat{V} 中の c_2 と c_4 の色を交換すれば条件を変えずに v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 を 4 色で塗り分けることができる。よって、残った色 c_2 を v に塗ることができる。

これらより平面グラフは 5 彩色可能とわかる。 (Q. E. D.)

3. 4 道色分け問題

グラフ理論の応用例として、「道色分け問題」という以下の問題がある。

「道色分け問題」とは、例えば図 8 のような黄色がゴール地点とする地図があるとす。このとき、スタート地点がどの場所であっても青-赤-赤-青-赤-赤という順に進めば必ず黄色のゴール地点に到着できることを示せ(ただし、途中でゴールに到着してもよい)という問題である。

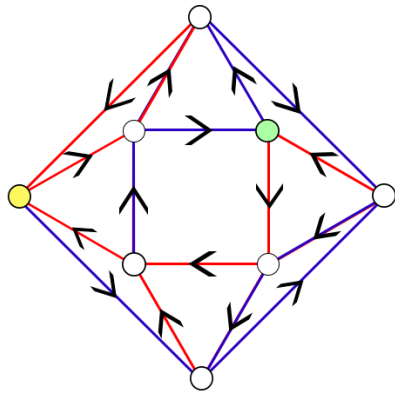


図8

いくつかの例を試してみる。まず、このグラフの頂点を下図のようにする。

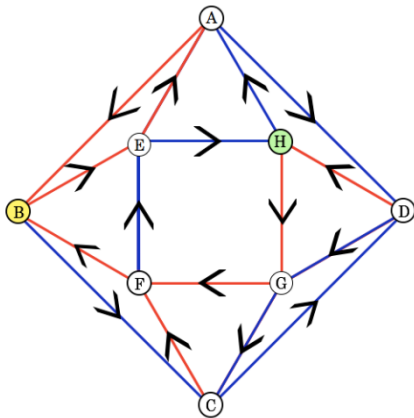


図9

今回のゴール地点を B として、スタート地点によって場合分けをする。

① A の場合

A-D-H-G-C-F-B
(青-赤-赤-青-赤-赤)

② C の場合

C-D-H-G-C-F-B
(青-赤-赤-青-赤-赤)

③ D の場合

D-G-F-B (青-赤-赤)

④ E の場合

E-H-G-F-E-A-B
(青-赤-赤-青-赤-赤)

⑤ F の場合

F-E-A-B (青-赤-赤)

⑥ G の場合

G-C-F-B (青-赤-赤)

⑦ H の場合

H-A-B (青-赤)

以上のように、ゴール地点を B にしたとき、どこをスタート地点にしても青-赤-赤の順に進めばゴール地点に到着することがわかる。

4. 今後の展望

今回の研究でグラフ理論を利用することで彩色問題のような問題を今までとは違った方向から考えられることがわかった。今回、五彩色問題の証明を行ったので次回はグラフ理論を利用して四色問題を考えてみようと思う。このとき「平面グラフには次数4以下の頂点が必ず存在する」ということを証明すればよい。そしてすべての頂点の次数が5以上のグラフを発見できるのかについても探究してみたい。また、道色分け問題の証明にも再挑戦しようと思う。

5. 参考文献

- [1] 「グラフ理論入門—基本とアルゴリズム」、宮崎修一、森山出版(2015)
- [2] 「高校数学の美しい物語」
<http://mathtrain.jp>
- [3] 「Wolfram Math World」
<http://mathworld.wolfram.com/RoadColoringProblem.html>

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。

多数の集合を表示するベン図について

4年A組 多賀 眞
4年B組 岡田 尚樹
4年C組 大野 華子
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会4年生は様々な研究を行っている。私たちは多数の集合のベン図について研究しており、今回は4個から6個の集合についてどちらも2種類ずつのベン図を考察し、一般化を目指した。

キーワード 虹型ベン図、星型ベン図、部分集合

2. 研究の背景と目的

私たちは、授業で4個の集合のベン図を扱ったのをきっかけに多数の集合のベン図に興味を持ち、研究テーマとした。

6個以上の集合のベン図についてはまだ明らかになっていない部分もあり、今回は、5個までの集合についてまとめた後、6個以上についても考察した。

■部分集合

一般的に集合Aと集合Bの共通部分を「 $A \cap B$ 」と表記するが、今回は単純化して「AB」と表すことにする。また3個以上の集合、例えば集合A、集合B、集合Cについて、「AB」は $(A \cap B) \cap \bar{C}$ 、つまりAとBのみが重なっている部分を表すものとする。

3. 研究内容

3. 1 基本事項

■虹型ベン図・星型ベン図

先行研究などから、多数の集合のベン図の形は大きく分けて、2種類に分けられる。よってその形から一つを「虹型ベン図」、他方を「星型ベン図」と呼ぶことにした。本研究では星型ベン図において、各々の集合を表す形が合同であり、他の集合との交わり方が同じ集合は、同じ形で表すことを原則とした。

3. 2 4個の集合

■虹型ベン図

虹型ベン図は、3個の集合のベン図(図1)に馬蹄形の4つ目の集合を付け加えたものである(図2)。

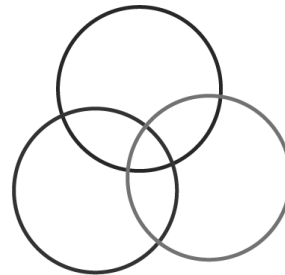


図1

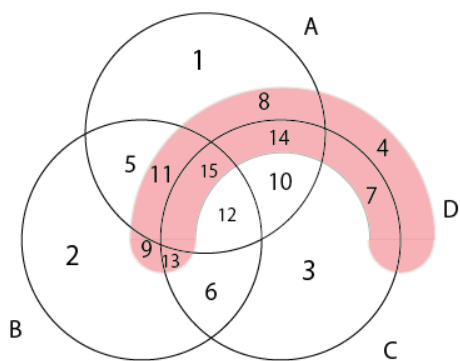


図 2

1	A	2	B	3	C
4	D	5	AB	6	BC
7	CD	8	AD	9	BD
10	AC	11	ABD	12	ABC
13	BCD	14	ACD	15	ABCD

■星形ベン図

正円では平面上を 16 の領域に分けることはできないので楕円を用いてベン図を作成する。楕円を用いた 4 個の集合のベン図としては、図 3 が一般的だが、3.1 の原則に基づいて、図 3 のベン図は今回の研究において対象とはせず、図 4 および図 5 を考案した。



図 3

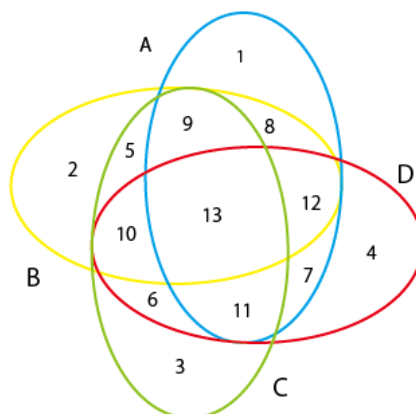


図 4

1	A	2	B	3	C
4	D	5	BC	6	CD
7	AD	8	AB	9	ABC
10	BCD	11	ACD	12	ABD
13	ABCD		AC		BD

図 4 では、AC と BD を表せない。そこで、修正を図り、図 5 を考案した。

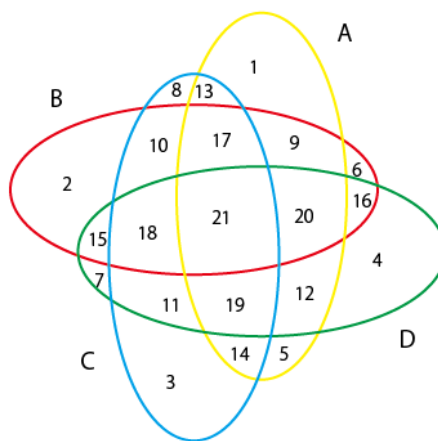


図 5

この図 5 ではすべての部分集合を表すことができるが、下表の色をついたの部分集合が重複している。これは、望ましくない

と考えたが、これ以上に適したベン図を考案することができなかつたので、先に5個以上の集合について考えることにした。図5の各部分集合は以下ようになる。

1	A	2	B	3	C
4	D	5	A	6	B
7	D	8	C	9	AB
10	BC	11	CD	12	AD
13	AC	14	AC	15	BD
16	BD	17	ABC	18	BCD
19	ACD	20	ABD	21	ABCD

3. 3 5個の集合

■虹型ベン図

5個のベン図についても部分集合を正確に表すことができるかを検証した。その結果を図6に示す。

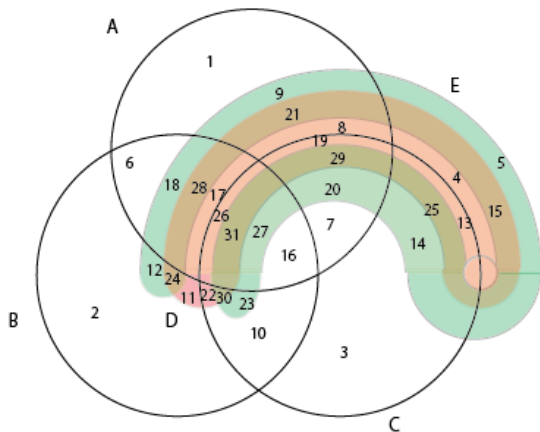


図6

1	A	2	B	3	C
4	D	5	E	6	AB
7	AC	8	AD	9	AE
10	BC	11	BD	12	BE
13	CD	14	CE	15	DE
16	ABC	17	ABD	18	ABE

19	ACD	20	ACE	21	ADE
22	BCD	23	BCE	24	BDE
25	CDE	26	ABCD	27	ABCE
28	ABDE	29	ACDE	30	BCDE
31	ABCDE				

■星形ベン図

4個の場合と同じく、3. 1節で説明した原則を踏まえ、ベン図を考えた(図7)。

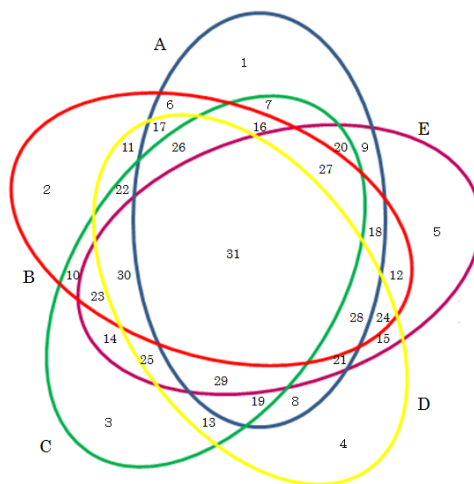


図7

1	A	2	B	3	C
4	D	5	E	6	AB
7	AC	8	AD	9	AE
10	BC	11	BD	12	BE
13	CD	14	CE	15	DE
16	ABC	17	ABD	18	ABE
19	ACD	20	ACE	21	ADE
22	BCD	23	BCE	24	BDE
25	CDE	26	ABCD	27	ABCE
28	ABDE	29	ACDE	30	BCDE
31	ABCDE				

集合の個数が5個の場合、どちらのベン図も成立する。

3. 4 6個の集合

■虹型ベン図

6個の集合のベン図についても考えた。その結果を次頁の図8に示す。図8において数字と部分集合の対応は以下の通りである。

1	A	2	B	3	C
4	D	5	E	6	F
7	AB	8	AC	9	AD
10	AE	11	AF	12	BC
13	BD	14	BE	15	BF
16	CD	17	CE	18	CF
19	DE	20	DF	21	EF
22	ABC	23	ABD	24	ABE
25	ABF	26	ACD	27	ACE
28	ACF	29	ADE	30	ADF
31	AEF	32	BCD	33	BCE
34	BCF	35	BDE	36	BDF
37	BEF	38	CDE	39	CDF
40	CEF	41	DEF	42	ABCD
43	ABCE	44	ABCF	45	ABDE
46	ABDF	47	ABEF	48	ACDE
49	ACDF	50	ACEF	51	ADEF
52	BCDE	53	BCDF	54	BCEF
55	BDEF	56	CDEF		
57	ABCDE				
58	ABCDF				
59	ABCEF				
60	ABDEF				
61	ACDEF				
62	BCDEF				
63	ABCDEF				

よって、このベン図は正しい。

■星型ベン図

6個の星型ベン図を考案した。しかし、3.1節の原則を満たしたベン図を見つけることができなかったので、途中経過として、現在判明している最適の状態のものを次頁の図9に示す。図9において数字と部分集合の対応は以下の通りである。

1	A	2	B	3	C
4	D	5	E	6	F
7	AB	8	AC	9	AD
10	AD	11	AE	12	AF
13	BC	14	BD	15	BE
16	BE	17	BF	18	CD
19	CE	20	CF	21	CF
22	DE	23	DF	24	EF
25	ABC	26	ABD	27	ABE
28	ABF	29	ACD	30	ACF
31	ADE	32	ADF	33	AEF
34	BCD	35	BCE	36	BCF
37	BDE	38	BEF	39	CDE
40	CDF	41	CEF	42	DEF
43	ABCD	44	ABCF	45	ABEF
46	ADEF	47	BCDE	48	CDEF
49	ABCDE				
50	ABCDF				
51	ABCEF				
52	ABDEF				
53	ACDEF				
54	BCDEF				
55	ABCDEF				

この表において、色のついた部分集合が重複していて、ACE, BDF, ABCE, ABDE, ABDF, ACDE, ACDF, BCDF, BCEF,

BDEF の部分集合が表せていない。

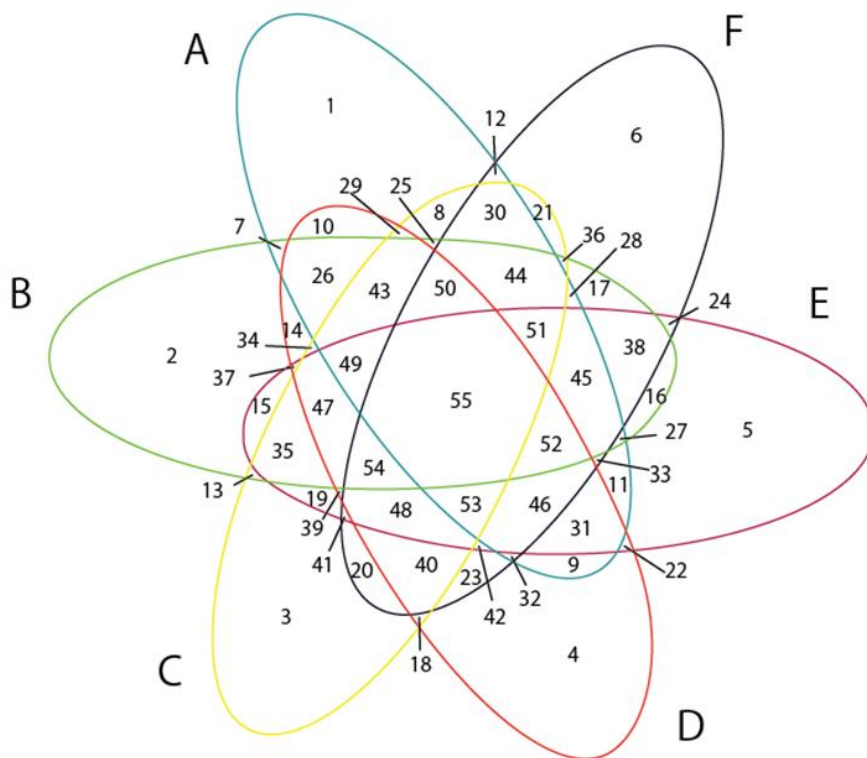


図 8

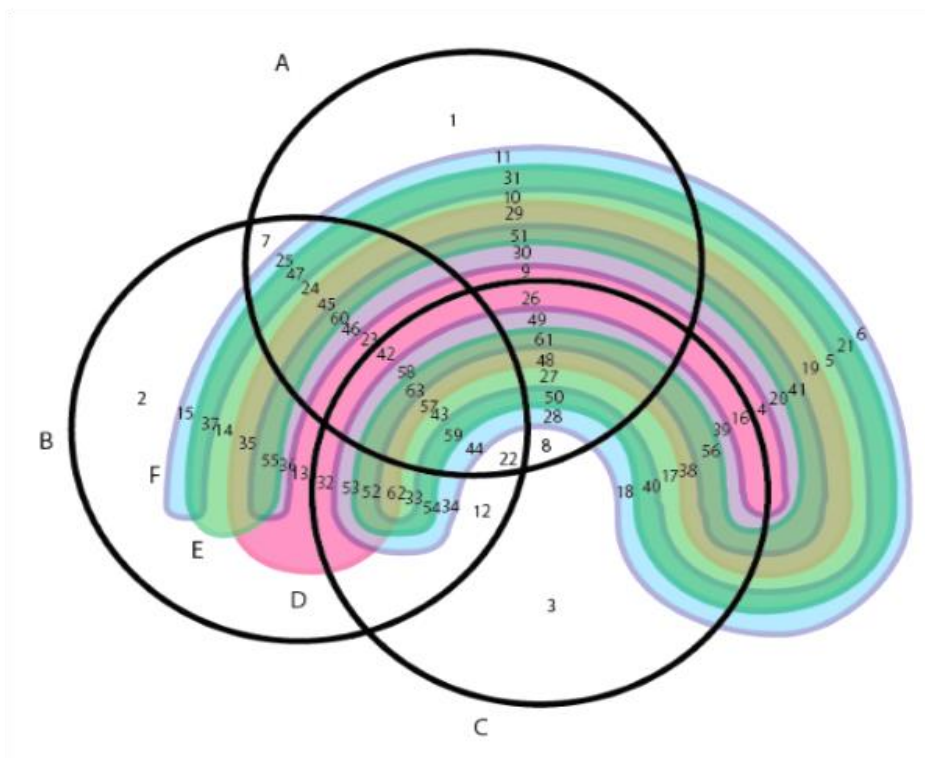


図 9

4. 考察

4. 1 虹型ベン図について

今回、4個から6個の場合について、虹型では部分集合を正確に表せるベン図を考案することができた。そこで、次の仮説を考えた。

仮説 1

虹型ベン図はどのような個数の集合でもその関係を正確に表すことができる。

4. 2 星型ベン図について

星型の4個の集合と6個の集合の場合において、適切なベン図を考案することができなかった。ただ、4個と6個の星型ベン図で表せなかった部分集合を見てみると、対称の位置にある集合が組み合わさるものが多かった。例えば、4個の場合のACやBD、6個の場合のACEやABDEなどである。また、正対称にある集合が存在しない5個の集合については適切なベン図を考案することができたことから、以下の仮説を考えた。

仮説 2

3.1節の原則を満たす星型ベン図は奇数個の集合のときのみ成立する。

5. 今後の展望

本研究の最終目標は、多数の集合のベン図を一般化させることである。まず、上述の仮説1と仮説2の証明を試みたい。

また本稿では、星型ベン図に3.1節のような制約をつけたが、この制約をどこまで緩めると、適切なベン図を考案できるのかを考えたい。加えて、ベン図を平面上では

なく、立体でも考えていきたい。

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださった顧問の川口先生、作図について助言をくださいました長谷先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会のみなさんにもご協力いただきました。この場を借りて御礼申し上げます。

数学オリンピック模擬問題の作成

4年A組 古宮 昌典
4年B組 小椋 晃一
4年B組 林 建吾
4年B組 松川 賢太郎
4年C組 今中 翔哉
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班4年生は、合同で数学の問題作成について研究している。今回は、数学オリンピックの問題を模範として、それに類似した問題を作成することを目標とした。

キーワード 数学オリンピック、模擬問題、作問、問題の構造

2. 研究の背景と目的

普段、数学の問題に触れるとき、それは「数学の問題を解く」という形が多いが、ただ問題を解き、答えを導くだけでは、問題の本質やそれに基づいた新たな数学的発見が見えてこない。そこで、逆に「数学の問題を作成する」という新たな視点の導入により、数学の問題の構造をひもとくことにした。

するか。

$$x^6 + y^5 + x^4 + y^3 + x^2 + y = (z^3 + 1)^3 + 1$$

解答

問の式を満たす x, y, z は存在しないことを示す。以下、7を法として考える。 $x \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のそれぞれについて、整数 x^2, x^4, x^6 を7で割った余りを以下の表に示す。

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^4	0	1	2	4	4	2	1
x^6	0	1	1	1	1	1	1

3. 研究内容

3-1. 数論

数学オリンピックの数論の問題は、合同式を用いることで解決できる場合が多い。そこで、7を法とする剰余を考えることで、次の問題を作成することができた。

この表から、 $x^6 + x^4 + x^2$ を7で割った余りとしてあり得るのは、0か3である。同様に、 $y + y^3 + y^5$ を7で割った余り

問題1

次の方程式を満たす整数 x, y, z は存在

としてありうるのは0か3か4である。

y	0	1	2	3	4	5	6
y^3	0	1	1	6	1	6	6
y^5	0	1	4	5	2	3	6

ゆえに、問題の式の左辺を7で割った余りとしてありうる値は0か3か4か6である。また、 y に関する剰余の表から、整数 z について、 z^3 を7で割った余りは0, 1, 6のいずれかであるから、 $(z^3 + 1)^3 + 1$ を7で割った余りとしてとりうる値は2のみである。以上から、任意の整数 x, y, z において、左辺と右辺をそれぞれ7で割った余りは異なるので、方程式を満たす x, y, z は存在しないことが示された。 (終)

この問題において重要となる「7を法とする」ということは問題文中に記されているわけではないので、この7という数字は解答する側が自ら発見しなければならない。このように、問題文中に示されていないが、解答にたどり着くうえで重要となる鍵を探すのが難しい問題が、数学オリンピックなどでよく見受けられる。しかし、問題の中にヒントが隠されている場合も多い。この問題では、「左辺が6次式である」あるいは「右辺が3次式の組み合わせである」ということから、フェルマーの小定理や、3乗数を7で割った余りとして考えられるのは0か1か6であるという事実を知っていれば、「法を7に設定するとうまくいきそうだ」という発想ができる。

次の問題は、合同式の性質と周期性を利用して作成したものである。

問題2

正の整数 n について、 2^{2^n} の下2桁としてありうる値をすべて求めよ。

解答

まず、正の整数 m に対して、 2^m の下2桁を考える。このとき、100の剰余で考えた数列と同値であるため、以下のような周期性が確認できる。

02→04→08→16→32→64→28→56→12
→24→48→96→92→84→68→36→72
→44→88→76→52→04→08→…

つまり、 $m \geq 2$ において、周期20の数列になっていることがわかる。ゆえに、問の下2桁は、 2^n を20で割った余りから決定できるので、 2^n を20で割った余りとしてありうる値を調べる。20の剰余で考えた数列と同値であるため、以下のような周期性が確認できる。

02→04→08→16→12→04→08→…

以上から下2桁としてありうる値は、上の循環の中の2番目、4番目、8番目、12番目、16番目をみて、04, 16, 36, 56, 96である。 (終)

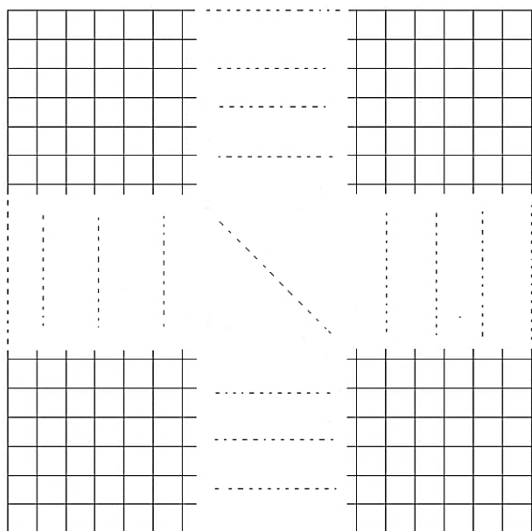
この問題は、2の累乗の下2桁に関するものだが、2以外の2の累乗は4の倍数であるから、2の累乗の下2桁としてありうる値はたかだか26個であるとわかる。よって、2の累乗の下2桁にはそれほど長くない周期があり、そこから解答に近づくことができる。また、この解法は、低い位が高い位に支配的であるほど適用しやすい。

3-2. 組合せ

数学オリンピックの組合せ問題において、数論、幾何問題ほどは解答の道筋を見出す斬新な発想が要求されない場合が多い。とりわけ、平易な組合せ問題においては、与えられた複雑な情報を的確に組み立て、ひとつずつ忠実に数え上げる処理能力が求められている。そこで、以下の問題を作成した。

問題 3

一辺の長さが 1 の正方形のタイルが下図のように正方形形状に並べられている。そして、各タイルの頂点を格子点と呼ぶ。すると、この正方形全体の中にある 2 つの格子点を結んだ線分であって、長さが 3 より小さいものが 4218 本存在するという。このとき、この正方形全体の中にある 2 つの格子点を結んだ線分であって、長さが 2 より大きく、3 より小さいものはいくつあるか。



解答

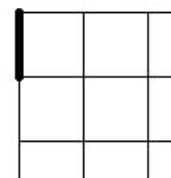
2 つの格子点を結んだ線分であって、長さが 3 より小さいものは、長さが 1, $\sqrt{2}$, 2,

$\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$ の 5 種類ある。

タイルが一辺 k 枚ずつ並んでいるとする。このとき、各線分の本数 k を用いて表す。

① 長さが 1 である線分

求める本数は、 $k \times k$ の正方形における右図の太線のような線分の本数に等しい。よって、



$$k(k+1) \times 2 = 2k^2 + 2k \text{ (本).}$$

② 長さが $\sqrt{2}$ である線分

求める本数は、正方形全体の中にあるタイルの対角線の本数に等しい。正方形全体の中にあるタイルは、正方形全体の一辺に k 枚ずつ並んでいるので k^2 (枚) がある。各タイルに対角線は 2 本ずつあるから、求める本数は $2k^2$ (本) である。

③ 長さが 2 である線分

求める本数は、①と同様に考えると、隣り合う 2 枚のタイルからなる長方形の長辺の本数に等しい。よって、

$$\begin{aligned} (k-1)(k+1) \times 2 &= 2(k^2 - 1) \\ &= 2k^2 - 2 \text{ (本).} \end{aligned}$$

④ 長さが $\sqrt{5}$ である線分

求める本数は、隣り合う 2 枚のタイルからなる長方形の対角線の本数と等しい。まず、正方形全体の中にある隣り合うタイルは、一辺に k 枚ずつ並んでいるので $k(k-1)$ (枚) がある。したがって、

$$k(k-1) \times 2 \times 2 = 4k(k-1) = 4k^2 - 4k \text{ (本).}$$

⑤ 長さが $2\sqrt{2}$ である線分

求める本数は、

$$\begin{aligned} (k-1)^2 \times 2 &= 2(k^2 - 2k + 1) \\ &= 2k^2 - 4k + 2 \text{ (本)} \end{aligned}$$

①~⑤より、2 つの格子点を結んだ線分であって、長さが 3 より小さいものは、

$$(2k^2 + 2k) + 2k^2 + (2k^2 - 2) \\ + (4k^2 - 4k) + (2k^2 - 4k + 2) \\ = 12k^2 - 6k \quad (\text{本})と$$

表せる。これが 4218 本であるから、

$$12k^2 - 6k = 4218. \quad \text{両辺を 6 で割って}$$

$$2k^2 - k = 703, \quad k(2k - 1) = 19 \cdot 37$$

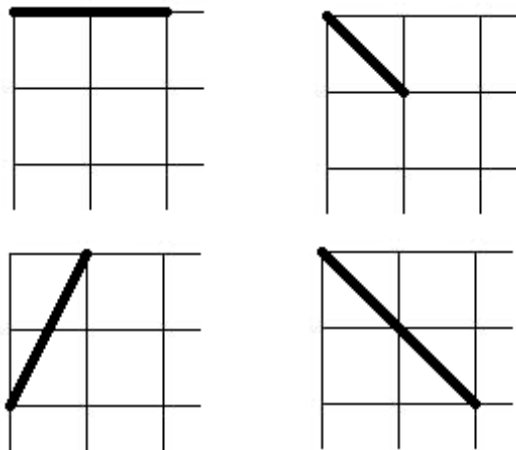
$k > 0$ より $k < 2k - 1$ であるから、 $k = 19$.

長さが 2 より大きく 3 より小さい線分は、

長さが $\sqrt{5}, 2\sqrt{2}$ のものの 2 種類。

ゆえに、求める本数は長さが $\sqrt{5}, 2\sqrt{2}$ の線分の本数の和であるから、

$$(4k^2 - 4k) + (2k^2 - 4k + 2) \\ = 6k^2 - 8k + 2 = 6 \cdot 19^2 - 8 \cdot 19 + 2 \\ = 2016 \quad (\text{本})$$



次に、色を塗り分ける問題を考える。

色を塗り分ける場合の数を求める問題は、平面を扱ったものが多いが、立体を用いたものは少ない。そこで、以下の問題を作成した。

3-3. 幾何

まず、参考文献[1]に記載されていた以下の問題について、考察を行った。

例題 1

正三角形 ABC の内部に点 P があり、 $PA = 3, PB = 4, PC = 5$ が成り立つ。このとき、三角形 ABC の面積を求めよ。

そして、この問題のアイデアを用いて、以下の問題を作成した。

問題 4

正六角形 ABCDEF が描かれており、 $PA = 6, PB = 4, PC = 2\sqrt{3}$ を満たす点 P を正六角形内部に取れることがわかっている。あなたはいま、「定規」、「コンパス」、「8 コンパス」、「 $4\sqrt{3}$ コンパス」をもっているが、それぞれ 1 回ずつしか使用することはできない。このとき、点 P を作図せよ。

ただし、「8 コンパス」、「 $4\sqrt{3}$ コンパス」とは、それぞれ半径が 8, $4\sqrt{3}$ の円しかかけないコンパスである。

解答

この問題は難問である。宝物を見つけるには、まず、探検のための準備をする必要がある。そして、森の中を探検する。途中で少し休憩をはさむ。さらに森を進んでいき、最後に、対称性を使ってワープすると、宝物のある場所へとたどり着くことができる。

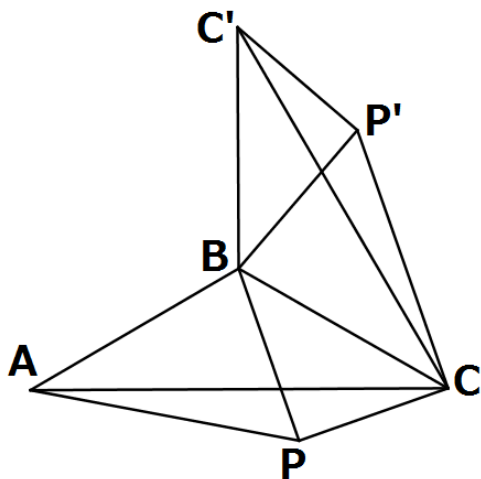
【探検の準備】

ここでは、条件を満たす正六角形の 1 辺の長さを求める。そのために、次の命題を証明する。

[命題 1] $\angle APC = 150^\circ$ である。

(証明)

次図のように、四角形 BACP を、点 B を中心に 120° 回転させた図形を考える。このとき、 $\angle ABC = 120^\circ$ であるから、A が移動した先の点は C である。また、C が移動した先の点を C' 、P が移動した先の点を P' とする。



いま、 $BP = BP'$ 、 $\angle P'BP = 120^\circ$ であるから、 $PP' = 4\sqrt{3}$ がすぐにわかる。ゆえに、 $\triangle PCP'$ において、 $(4\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2$ が成り立つので、 $\angle PCP' = 90^\circ$ である。よって、

$\angle ACP + \angle C'CP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ なので、 $\angle ACP + \angle PAC = 30^\circ$ を得る。したがって、 $\angle APC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ である。
(Q. E. D.)

命題 1 と余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 6^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cos 150^\circ \\ &= 84 \end{aligned}$$

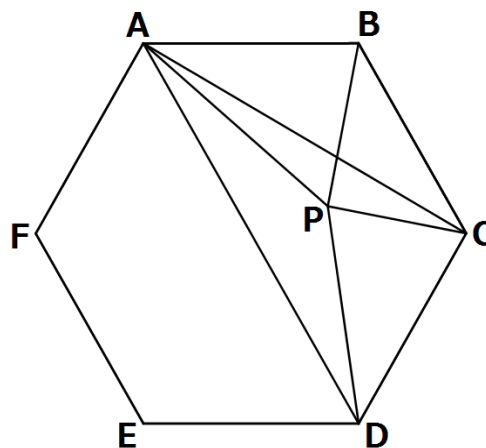
より、 $AC = 2\sqrt{21}$ である。ここで、 $\triangle ABC$ は $AB = BC$ 、 $\angle BCA = 30^\circ$ の二等辺三角形なので、 $AB = BC = 2\sqrt{7}$ が得られる。

【探検 1】

次に、PD の長さを調べよう。求め方は 2 通りある。

[求め方 1]

$\triangle BCP$ において $BC^2 = BP^2 + CP^2$ が成り立つので、 $\angle BPC = 90^\circ$ である。ゆえに、 $\angle APB = 60^\circ$ であるから、点 P は $\triangle ACD$ の内部に存在することがわかる。



いま、 $\angle APC = 150^\circ$ 、 $\angle CAD = 30^\circ$ であるから、

$\angle PAC + \angle PCA = 30^\circ = \angle DAP + \angle PAC$ より、 $\angle PCA = \angle DAP$ を得る。ここで、 $AC = 2\sqrt{21}$ であるから、余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle PCA &= \frac{(2\sqrt{21})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 6^2}{2 \cdot 2\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt{7}} \end{aligned}$$

が得られる。そして、 $AD = 2 \times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$ なので、

$$\begin{aligned} PD^2 &= (4\sqrt{7})^2 + 6^2 - 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 6 \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} \\ &= 28 \end{aligned}$$

したがって、 $PD=2\sqrt{7}$ を得る。

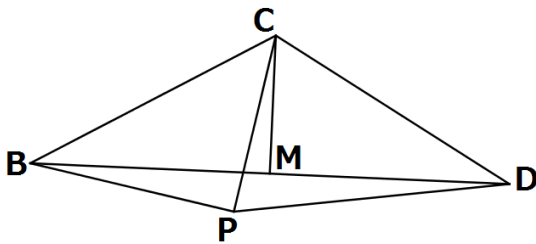
[求め方 2]

$\triangle BCP$ において $BC^2 = BP^2 + CP^2$ が成り立つので、 $\angle BPC=90^\circ$ である。いま、 C から線分 BD へ降ろした垂線の足を M とする。 $\triangle BCD$ は二等辺三角形であるから、 M は線分 BD の中点である。

ここで、余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle BCP &= \frac{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 4^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{21}} > \frac{3}{6} = \cos 60^\circ\end{aligned}$$

であるから、 $\angle BCP < 60^\circ$ が成り立つ。



よって、点 P は $\triangle BCD$ の外部にあるので、4点 B, P, M, C はこの順に同一円周上にある。ゆえに、トレミーの定理より、

$$BC \cdot PM + BP \cdot CM = BM \cdot CP$$

が成り立つ。いま、 $BC=2\sqrt{7}$ より、 $CM=\sqrt{7}$ 、 $BM=\sqrt{21}$ であるから、 $PM=1$ を得る。 $\triangle BPD$ において、線分 PM は中線であるから、中線定理より、

$$DP^2 + BP^2 = 2BM^2 + 2PM^2$$

が成り立つので、 $DP=2\sqrt{7}$ が得られる。

【休憩】

ここでは、問題の解答に直結するわけではないが、【探検 1】から得られる点 P の作図方法を 2 つ紹介する。

さきほどの探検から、 $DP=2\sqrt{7}$ が得られた。ここで、正六角形 $ABCDEF$ の外接円の中心を O とすると、 $\triangle ADP$ において、線分 OP は中線であるから、中線定理より、

$$2OP^2 + 2OA^2 = PA^2 + PD^2$$

$$2OP^2 + 2 \cdot (2\sqrt{7})^2 = 6^2 + (2\sqrt{7})^2$$

であるから、 $OP=2$ を得る。よって、 P は O を中心とした半径 2 の円周上に存在する。

また、 $DC=DP=DE=2\sqrt{7}$ が成り立つので、 P は D を中心とし、半径が $DC (= 2\sqrt{7})$

の円周上に存在する。ここで、もし、半径が 2 の円しかかけない「2 コンパス」と半径が $2\sqrt{7}$ の円しかかけない「 $2\sqrt{7}$ コンパス」なるものがあれば、以下の手順で P を作図できる。

(作図法 1)

- ① A と D を結ぶ直線をかく。
- ② D を中心とし、半径を DC とした円をかく。
- ③ ①と②の交点をとる。
- ④ ③の点を中心とし、半径 2 の円をかく。
- ⑤ ②と④の BC 側の交点が P である。

実際、この手順で得られた点 P が条件を満たすことは容易に確かめられる。

また、 $\angle APB=60^\circ$ であるから、 $\angle AOB=60^\circ$ とあわせて、点 P は $\triangle AOB$ の外接円上に存在する。よって、以下のように、定規とコンパスだけで作図可能である。

(作図法 2)

- ① AC と BF の交点を G とする。
- ② G を中心とし、半径が GA の円をかく。
- ③ D を中心とし、半径が DC の円をかく。
- ④ ②と③の BC 側の交点が P である。

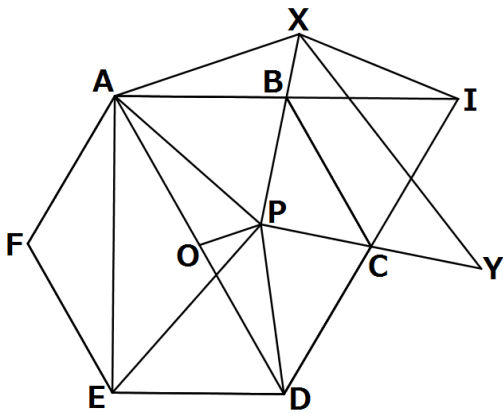
【探検 2】

【探検 1】より、 $DC=DP=DE=2\sqrt{7}$ が成り立つので、 $\triangle CPE$ の外心は D である。 $\angle CDE=120^\circ$ であるから、 $\angle CPE=120^\circ$ を得る。よって、

$$\angle APE=360^\circ-150^\circ-120^\circ=90^\circ$$

がわかる。ゆえに、 $\angle APE=\angle CPB=90^\circ$ である。ここで、【探検 1】の [求め方 1] において用いた $\angle PAD=\angle PCA$ より、 $\angle PAE=\angle PCB$ が得られるので、 $\triangle CPB$ の $\triangle APE$ であることがわかる。

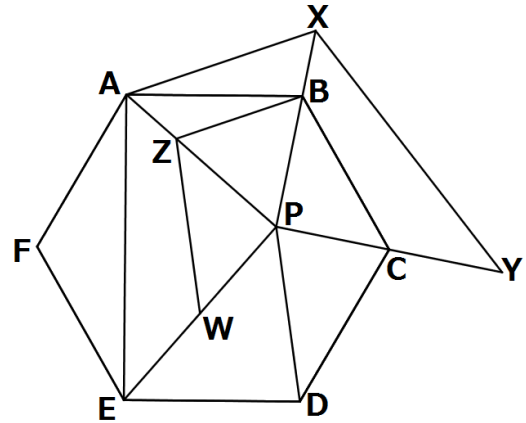
よって、 $4:PE=2\sqrt{3}:6$ より、 $PE=4\sqrt{3}$ を得る。ここで、 $\angle APB=60^\circ$ であるから、直線 PB 上に点 X を、 $\triangle APX$ が正三角形となるようにとることができる。このとき、 $PX=PA$ である。また、 $\angle APE=\angle CPB$ であるから、直線 PC 上に点 Y を、 $\triangle XPY\equiv\triangle APE$ となるようにとることができる。特に、直線 PX に関して A と反対側にある方に Y をとる。すると、 $PB:PY=PC:PX$ ゆえ、 $PB\cdot PX=PC\cdot PY$ が成り立つので、方べきの定理の逆より、四角形 $BCYX$ は円に内接する。



いま、直線 AB と DC の交点を I とすると、 $IB=IC=2\sqrt{7}$ が成り立つ。また、 $\triangle XAI$ と $\triangle PAD$ において、 $AI=AD=4\sqrt{7}$, $AX=AP$, $\angle XAI=60^\circ-\angle PAB=\angle PAD$ が成り

立つので、 $\triangle XAI\equiv\triangle PAD$ である。さらに、点 B, O はそれぞれ線分 AI, AD の中点であるから、 $IB=DO=2\sqrt{7}$ を得る。したがって、 I は $\triangle XBC$ の外心であるから、 I は四角形 $BCYX$ の外心であり、外接円の半径は $2\sqrt{7}$ である。

【宝物にたどりつく】



線分 AP 上に点 Z を、 $PZ=4$ となるようにとり、線分 EP 上に点 W を、 $PW=2\sqrt{3}$ をみたすようにとる。このとき、 $\triangle PZW\equiv\triangle PBC$ が成り立つので、四角形 $ZWEA$ と四角形 $BCYX$ は合同である。このとき、【探検 2】より、四角形 $ZWEA$ の外接円の半径は $2\sqrt{7}$ に等しい。いま、四角形 $ZWEA$ の外心を T とすると、 T は線分 AE の垂直二等分線上にあり、 $TA=TE=2\sqrt{7}$ をみたす。ゆえに、 $T=F$ であるから、 Z は F を中心とし、半径が $FA(=2\sqrt{7})$ の円周上にある。また、 $PZ=4$, $PE=4\sqrt{3}$, $\angle APE=90^\circ$ より、 $EZ=8$ を得る。さらに、 P が D を中心とし、半径が DC の円周上にあることと合わせて、以下の順に作図すればよい。

(作図法 3)

- ① F を中心とし、半径 FA の円をかく。

- ② E を中心とし、半径 8 の円をかく。
- ③ ①と②の交点のうち、正六角形の内部にある方を Z とする。
- ④ Z と A を通る直線をひく。
- ⑤ 点 E を中心とし、半径 $4\sqrt{3}$ の円をかく。
- ⑥ ④と⑤の接点が P である。

実際、この手順で得られた点 P が条件を満たすことは容易に確かめられる。

この問題は、求められる辺の長さ、角度の大きさなどをできるだけ多く計算し、そこから解答に結びつきそうな情報を取り出して、うまく処理していく必要がある。

さて、森の全体像が見えたところで、他にも作図法がないか考えてみよう。以下に、定規、コンパスなどの道具の使用回数が少ない作図法を紹介する。証明は探検で得られたアイテムを用いれば容易である。

(作図法 4)

- ① D を中心とし、半径が DC の円をかく。
- ② CF と AE の交点を Q とする。
- ③ Q を中心とし、半径が QA の円をかく。
- ④ ①と③の交点のうち、E でないほうが P である。

(作図法 5)

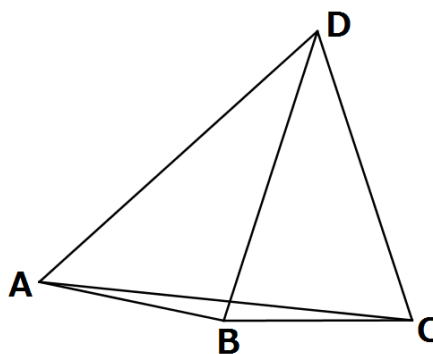
- ① F を中心とし、半径が FA の円をかく。
- ② A を中心とし、半径 2 の円をかく。
- ③ ①と②の交点のうち、正六角形の内部にある方を Z とする。
- ④ Z と A を通る直線をひく。
- ⑤ D を中心とし、半径が DC の円をかく。
- ⑥ ④と⑤の交点のうち、正六角形の内部にある方が P である。 (終)

次に、角度の問題について考察した。角度を求める問題は、主に算数オリンピック

などでよく出題される。以下の問題を参考にして、問を作成した。

例題 2

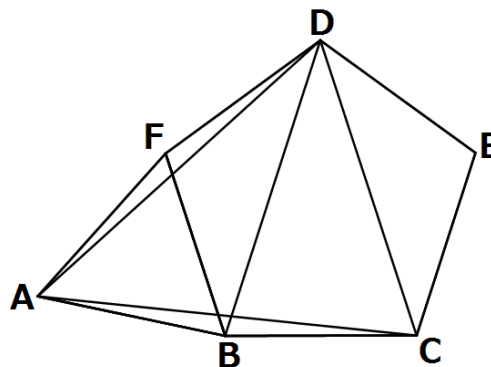
以下の図において、 $AC=AD$, $DB=DC$, $\angle BDC=36^\circ$, $\angle ADB=30^\circ$, $\angle BCA=6^\circ$ をみたすとき、 $\angle BAC$ の大きさを求めよ。



解答

次の図は、正五角形と正三角形をつなげたものである。このとき、 $AC=AD$, $DB=DC$, $\angle BDC=36^\circ$, $\angle ADB=30^\circ$, $\angle BCA=6^\circ$ をみたしている。逆に、問の条件から、四角形 ABCD は 1 つに決まるので、以下の図において $\angle BAC$ の大きさを求められればよく、 $AB=BC$ より、 $\angle BAC=6^\circ$ を得る。

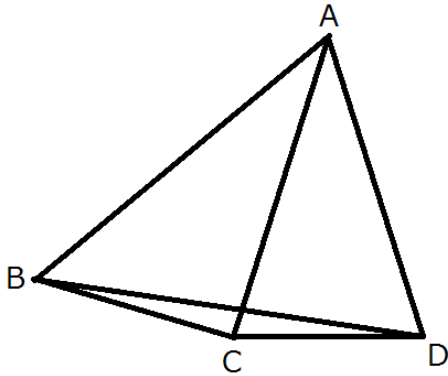
(終)



次の問題は、例題 2 とよく似ているが、解法は上に挙げたものと異なる。

問題 5

以下の図において、 $AC=AD$, $BA=BD$, $\angle BAC=30^\circ$, $\angle BCA=\angle BDA+30^\circ$ を満たす。このとき、 $CB=CD$ を証明せよ。



解答

下の図のように、 $\triangle BED$ が正三角形となるように点 E をとり、 $\triangle ABC \equiv \triangle AFD$ となるように点 F をとる。

$\angle BCA = \angle FDA$, $\angle BCA = \angle BDA + 30^\circ$ であるから、 $\angle FDA = \angle BDA + 30^\circ$ 。ゆえに、 $\angle FDB = 30^\circ$ である。一方、 $\triangle EBD$ は正三角形であるから、 $BA = BD = BE$ 。よって、点 B は $\triangle DAE$ の外心である。

円周角の定理より、 $\angle DAE = 30^\circ$ 。ここで、 $\angle DAF = 30^\circ$ であることから、点 F は線分 AE 上に存在する。また、 $\angle BDF = 30^\circ$ より、直線 DF は線分 BE の垂直二等分線であるから、 $\angle EBF = \angle BEF$ 。 $\angle BAF = x$ とおく。 $\triangle BAE$ は二等辺三角形であるから、 $\angle BEF = \angle BEA = x$ 。 $\angle EBF = \angle BEF$ より、 $\angle EBF = x$ 。 ゆえに、 $\angle BFA = 2x$ 。

一方、 $\triangle ABF$ は二等辺三角形であるから、 $\angle BFA = \frac{180^\circ - x}{2}$ 。したがって、

$$2x = \frac{180^\circ - x}{2} \text{ より、 } 5x = 180^\circ \text{ なので、}$$

$$x = 36^\circ.$$

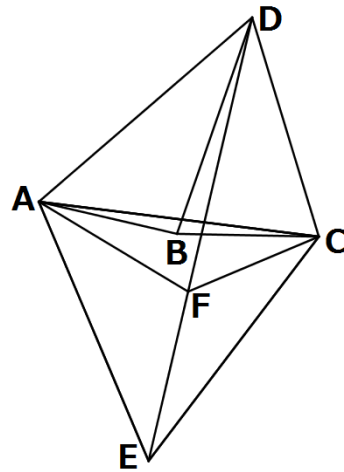
$\angle BAF = 30^\circ + \angle CAF = \angle CAD$ であるから、 $\angle CAD = 36^\circ$, $\angle BDA = \angle BAD = 30^\circ + 36^\circ = 66^\circ$. $\angle CDA = (180^\circ - 36^\circ) \div 2 = 72^\circ$ より、 $\angle CDB = 6^\circ$.

一方、 $\angle ABD = 180^\circ - 66^\circ \times 2 = 48^\circ$ であるので、円周角の定理より、 $\angle AED = 48^\circ \div 2 = 24^\circ$. $\angle EDF = 30^\circ$ より、

$$\angle ABC = \angle AFD = 24^\circ + 30^\circ = 54^\circ.$$

ゆえに、 $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 54^\circ - 48^\circ = 6^\circ$. したがって、 $\angle CBD = \angle CDB = 6^\circ$ であるから、 $CB = CD$ が成り立つ。

(Q. E. D.)



ちなみに、この補助線を例題 2 に適応すると、例題 2 の解を得ることができる。この解答の発想も、例題 1 とよく似ている。幾何の問題は、どこでどの定理を使うかが鍵となるため、問題を解くときは、手当たり次第に使えそうな定理を探したり、条件から分かる角度や辺の長さを片っ端から計算したりするのも有効である。

4. 今後の課題

今回、数論、組合せ、幾何の3分野における考察を行ったが、特に組合せの、突飛な発想を必要とする問題はあまり考察できなかった。組合せの分野に長けた人間がないことが最大の原因だが、これからは、算数オリンピックなど、小学生の知識だけで解けるようなパズル要素の強い問題についても考えていきたい。

5. 参考文献

- [1] 平面幾何パーフェクトマスター めざせ、数学オリンピック、鈴木晋一、日本評論社
- [2] 広中杯 ハイレベル中学数学に挑戦ーこれが中学数学の最高峰、算数オリンピック委員会 監修、青木亮二 解説、講談社

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。

約数の総和について II

4年B組 小椋 晃一
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 4年生は約数の総和について学習している。今回は極限を用いた過剰数の評価を目的とした。その過程において、約数の総和に関する考察を行うことができたので紹介する。

キーワード 過剰数、原始過剰数、メルセンヌ素数、素数

2. 研究の背景と目的

約数の総和によって、自然数は3種類に分類できる。しかし、異なる自然数の間にも関連があり、その関連を倍数として捉えることができた。今回は、ただ3種類に分類するだけでなく、その分類の基準となる値の評価を重視し、昨年の論文[3]を加筆・修正した。

であるという。例えば、12は過剰数である。

$2^n - 1$ の形で表される素数をメルセンヌ素数という。例えば、3, 7, 31, ...などがある。

自然数 n が $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ と素因数分解されるとき、指数の合計

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$$

を n の高さということにする。

3. 研究内容

3. 1 定義

ここでは、本稿に用いる諸定義をまとめた。

約数とはその数自身を含めた正の約数のことを指す。また、自然数 n の**約数の総和**を $\sigma(n)$ と表す。例えば、12 の約数の総和は

$$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

より28となる。

また、自然数 n は、

- $\sigma(n) > 2n$ となるとき**過剰数**
- $\sigma(n) = 2n$ となるとき**完全数**
- $\sigma(n) < 2n$ となるとき**不足数**

3. 2 基本的な命題

この節では、いくつかの基本的な命題を証明する。

命題 1

p を素数とすると、 p^α は不足数である。

(証明)

p^α の約数の総和を計算すると、

$$\begin{aligned} \sigma(p^\alpha) &= p^0 + p^1 + p^2 + \cdots + p^\alpha \\ &= \frac{(p^\alpha - 1)}{p - 1} + p^\alpha \end{aligned}$$

$$\leq (p^\alpha - 1) + p^\alpha < 2p^\alpha$$

より、 p^α は不足数である。 (Q. E. D.)

命題 2

メルセンヌ素数でない素数は無数に存在する。

(証明)

背理法を用いる。いま、3 を法として議論する。メルセンヌ素数は、

$$2^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0 \quad \text{または} \quad 1$$

より、3 を法として 2 と合同な素数を考えればよい。 $p \equiv 2$ かつ $p \neq 2$ となる素数を有限個しかないと仮定して、順に

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, p_k$$

とする。このとき、

$$3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2$$

は 3 を法として 2 と合同であり、 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, p_k$ のいずれでも割り切れないので、合成数である。よって、素数 q_1, q_2, \dots, q_n を用いて、

$$3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2 = q_1 q_2 \cdots q_n$$

と表すことができる。ある $1 \leq i \leq n$ に対して $q_i \equiv 0$ となるとき、必然的に $q_i = 3$ となるが、 $3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2$ は 3 の倍数ではない。

また、ある l ($1 \leq l \leq n$) に対して $q_l \equiv 2$ となるとき、 $q_l \neq 2$ より、 $1 \leq m \leq k$ となる整数 m を用いて、 $q_l = p_m$ となる。条件より、 q_l で $3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2$ を割り切れるが、 p_m で割り切れないので矛盾する。

よって、すべての $1 \leq j \leq k$ について、 $q_j \equiv 1$ とかける。すると、

$$3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2 \equiv 2$$

に対して、 $q_1 q_2 \cdots q_n \equiv 1^n = 1$ となり、矛

盾している。

したがって、メルセンヌ素数でない素数は無数に存在する。 (Q. E. D.)

命題 3

自然数 n が $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ と素因数分解されるとき、

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \\ &\quad \times \frac{p_3^{\alpha_3+1} - 1}{p_3 - 1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \end{aligned}$$

(証明)

一般に、 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ の約数は次の式を展開したときの各項に現れる。

$$\begin{aligned} &(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \\ &\quad \times (1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \\ &\quad \times \cdots \times (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k}) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \\ &\quad \times \frac{p_3^{\alpha_3+1} - 1}{p_3 - 1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \end{aligned}$$

という式が得られる。 (Q. E. D.)

なお、自然数 m で表される p_m の指数が 1 のとき、その項は $p_m + 1$ となる。

命題 4

m, n を互いに素な自然数とするとき、

$$\sigma(nm) = \sigma(m)\sigma(n).$$

(Q. E. D.)

(証明)

m, n がそれぞれ

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} q_3^{\beta_3} \cdots q_l^{\beta_l}$$

と素因数分解できるとする。

m, n は互いに素であるから、 p_i, q_j はすべて相異なるため、命題 3 を用いると、

$$\sigma(mn) =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \right) \\ & \times \left(\frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \frac{q_2^{\beta_2+1} - 1}{q_2 - 1} \cdots \frac{q_l^{\beta_l+1} - 1}{q_l - 1} \right) \\ & = \sigma(m)\sigma(n). \quad (\text{Q. E. D.}) \end{aligned}$$

この命題 4 は自然数の個数を増やしても同様のことがいえる。

命題 5

- (1) 完全数の倍数は過剰数である。
- (2) 過剰数の倍数は過剰数である。

(証明)

(1) 完全数を n とおき、その約数を昇順で $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{m-1}, n_m$ と表す。そして、完全数の倍数を kn とする。このとき、

$$\sigma(n) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{m-1} + n_m.$$

kn の約数に 1 が含まれているのは自明であるから、 $k \neq 1$ より、

$$\begin{aligned} \sigma(kn) & \geq 1 + kn_1 + kn_2 + \cdots + kn_m \\ & > k\sigma(n) \end{aligned}$$

なので、 $\sigma(kn) > k\sigma(n) = 2kn$.

- (2) も同様の手段で示すことができる。

命題 6

不足数の約数は不足数である。

(証明)

不足数の約数に完全数があるとすると、不足数は完全数の倍数となるが、命題 5 に反する。過剰数についても同様のことがいえる。そのため、不足数の約数は完全数でも過剰数でもない。つまり、不足数である。

(Q. E. D.)

3. 3 偶数の原始過剰数

ここで命題 5 から、他の過剰数の倍数でなく、他の完全数の倍数でもない過剰数を考えようと思い至った。そのような数を**原始過剰数**と定義する。例えば、20, 70, 88, ... などが相当する。過剰数は、原始過剰数と完全数の倍数のみから構成される。このとき、以下の定理が得られた。

補題

自然数 n が $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ と素

因数分解されるとき、 n が過剰数であり、すべての $1 \leq i \leq k$ について

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i-1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

が不足数ならば、 n は原始過剰数である。

(証明)

「他の過剰数の倍数でなく、他の完全数の倍数でもない」とは、「自身を除く約数はすべて過剰数でも完全数でもない」ということであり、過剰数でも完全数でもない数は

不足数なので、「自身を除く約数はすべて不足数である」と言い換えられる。これを満たす過剰数が、原始過剰数である。

命題 6 より、「自身を除く n のすべての約数が、ある $1 \leq i \leq k$ に対して、

$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i-1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ の約数である」
 $\cdots(*)$ が示されればよい。

ここで、 n の高さを $x+1$ とする。「高さ 1 の約数」は「高さ 2 の約数のいずれか」の約数である。同様に、すべての $1 \leq j \leq x$ について、「高さ $j-1$ の約数」は「高さ j の約数のいずれか」の約数である。

n の約数の約数もまた、 n の約数ということも併せて考えると、「高さ j の約数は高さ x の約数のいずれかの約数」 $\cdots(+)$ である。

「高さ j の約数」は、「自身を除く約数」の任意の 1 つであり、「高さ x の約数」とは、

$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i-1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ($1 \leq i \leq k$) のい

ずれかのことであるから、 $(+)$ より、「自身を除くすべての n の約数は、ある $1 \leq i \leq k$ に

ついて、 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i-1} p_k^{\alpha_k}$ の約数」で

あり、 $(*)$ が示されたため、題意は示された。

(Q. E. D.)

命題 7-1 から命題 7-3 では、この補題に沿った証明を行う。

命題 7-1

偶数の原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

p を素数として、 $2^n p$ の形に素因数分解できる数を考える。

このとき、 $2^n < p < 2^{n+1} - 1$ を満たすよ

うに素数 p をとると、

$$p = 2^{n+1} - m = 2^n + k$$

(m, k は自然数であり、 $m > 1, k > 0$)

と表せる。ここで、命題 3 を用いて

$$\begin{aligned} \sigma(2^n p) &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{p^2 - 1}{p - 1} \\ &= (2^{n+1} - 1) \frac{(p+1)(p-1)}{p-1} \\ &= (2^{n+1} - 1)(p+1) \\ &= 2^{n+1} p + 2^{n+1} - p - 1 \\ &= 2^{n+1} p + 2^{n+1} - (2^{n+1} - m) - 1 \\ &= 2(2^n p) + (m-1) > 2(2^n p) \end{aligned}$$

より、 $2^n p$ が過剰数であることがわかる。

補題より、次の 2 つを満たすことを調べる。

① $2^{n-1} p$ が不足数 ② 2^n が不足数

②は命題 1 から示せるため、①について考える。

$$\begin{aligned} \sigma(2^{n-1} p) &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \times \frac{p^2 - 1}{p - 1} \\ &= (2^n - 1)(p+1) \\ &= 2^n p + 2^n - p - 1 \\ &= 2^n p + 2^n - (2^n + k) - 1 \\ &= 2(2^{n-1} p) - (k+1) < 2(2^{n-1} p) \end{aligned}$$

より、 $2^{n-1} p$ は不足数となる。

したがって、 $2^n p$ は原始過剰数である。

なお、 p が $p = 2^{n+1} - 1$ とかけるメルセンヌ素数であるとき、 $2^n p$ は完全数になるが、命題 2 より、 p として当てはまる数は無数に存在するため、 $2^n p$ と表せる数は無数に存在する。よって偶数の原始過剰数は無数に存在する。(Q. E. D.)

(Q. E. D.)

また、合成数は素数の倍数なので、命題 5 とあわせると次の命題が自明に成り立つ。

命題 7-2

奇数の不足数 D において、 $2^n D$ が過剰数となる n が存在する。

命題 7-3

異なる 2 つの素数 p, q について、

$$2^{n+1} < q < p < 2^{n+2}$$

が成り立つとき、 $2^n pq$ は原始過剰数である。

(証明)

条件より、

$$2^{n+1} + 3 \leq p \leq 2^{n+2} - 1$$

$$2^{n+1} + 1 \leq q \leq 2^{n+2} - 3$$

となる。命題 3 より

$$\begin{aligned} \sigma(2^n pq) &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{p^2 - 1}{p - 1} \times \frac{q^2 - 1}{q - 1} \\ &= (2^{n+1} - 1)(p + 1)(q + 1) \\ &= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1 + p + q) \\ &\quad - (p + 1)(q + 1) \\ &= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1 + p + q) \\ &\quad - \frac{p + 1}{2} \times (2q + 2) \\ &\geq 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1 + q + 2 + q) \\ &\quad - \frac{p + 1}{2} \times (2q + 2) \\ &= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(2q + 3) \\ &\quad - \frac{p + 1}{2} \times (2q + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq 2(2^n pq) + 2^{n+1}(2q + 3) \\ &\quad - 2^{n+1}(2q + 2) \end{aligned}$$

$$> 2(2^n pq).$$

よって、 $2^n pq$ は過剰数であるとわかる。次に、以下のすべてを満たすことを調べる。

① $2^{n-1} pq$ が不足数

② $2^n p$ が不足数

③ $2^n q$ が不足数

②と③は命題 7-1 の証明における後半の議論から示せるので、①について考える。

$$\begin{aligned} \sigma(2^{n-1} pq) &= (2^n - 1)(p + 1)(q + 1) \\ &= 2(2^{n-1} pq) + 2^n(1 + q + p) \\ &\quad - (q + 1)(p + 1) \\ &\leq 2(2^{n-1} pq) + 2^n(1 + q + p) \\ &\quad - (2^{n+1} + 2)(p + 1) \\ &= 2(2^{n-1} pq) + 2^n q - 2^n(p + 1) - 2(p + 1) \\ &= 2(2^{n-1} pq) - 2^n(p + 1 - q) - 2(p + 1) \\ &< 2(2^{n-1} pq) \end{aligned}$$

より、 $2^{n-1} pq$ は不足数となる。

よって、 $2^n pq$ は原始過剰数である。

(Q. E. D.)

なお、異なる 3 つの素数 p, q, r について、

$$2^{n+2} < q < p < r < 2^{n+3}$$

としたときの $2^n pq$ には、不足数が存在した。

補題と類似のものとして、以下のことがいえる。

命題 8

自然数 n が $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ と表せる素数を用いて $p_1 p_2 \dots p_k$ と素因数分解されるとき、 n が過剰数であり、 $p_1 p_2 \dots p_{k-1}$ が不足数ならば、 n は原始過剰数である。

(証明)

$p_1 p_2 \dots p_{k-1}$ が不足数なので、

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma(p_1 p_2 \dots p_{k-1})}{p_1 p_2 \dots p_{k-1}} \\ &= \frac{(p_1 + 1)}{p_1} \times \frac{(p_2 + 1)}{p_2} \times \dots \times \frac{(p_{k-1} + 1)}{p_{k-1}} < 2 \end{aligned}$$

となる。また、すべての $1 \leq i \leq k - 1$ について、

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k)}{p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k} \\ &= \frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} \times \frac{p_k + 1}{p_k} \times \frac{p_i}{p_i + 1} \\ &= \frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} \times \frac{p_i p_k + p_i}{p_i p_k + p_k} < 2 \end{aligned}$$

が成り立つので、高さ $k-1$ の約数がすべて不足数となり、補題から示された。

(Q. E. D.)

3. 5 奇数の原始過剰数

奇数の原始過剰数を議論するために、3つの補題を用意する。

補題 1 ([1])

素数の逆数和は正の無限大に発散する。

一般に、この補題 1 が成り立つ事実が知られており、命題 8 の証明に用いる。

補題 2

どの 2 つも互いに素な奇数の過剰数が無数に存在するとき、奇数の完全数と原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

どの 2 つも互いに素な奇数の過剰数を順に n_1, n_2, n_3, \dots とする。

原始過剰数の定義から、過剰数の約数には原始過剰数または完全数が少なくとも 1 つ存在することがわかる。

ここで、自然数 m に対して、 n_m の約数である原始過剰数または完全数のうちの 1 つを n'_m とする。すると完全数と原始過剰数から成る列 n'_1, n'_2, n'_3, \dots を得る。

n_1, n_2, n_3, \dots は互いに素であるから、それぞれを素因数分解したときに現れる素因数はすべて相異なる。

ゆえに、 n'_1, n'_2, n'_3, \dots もすべて互いに素である。よって、 n'_1, n'_2, n'_3, \dots は相異なる完全数あるいは原始過剰数といえる。

さらに、奇数の約数は奇数に限られるため、 n'_1, n'_2, n'_3, \dots は奇数の完全数あるいは原始過剰数ともいえる。よって、奇数の完全数あるいは原始過剰数は無数に存在する。

(Q. E. D.)

補題 3

素因数分解したとき、同じ種類の素数が 1 つしかない奇数は、完全数でない。

(証明)

異なる奇素数 p_1, p_2, \dots, p_m について

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_m)}{p_1 p_2 \cdots p_m} \\ &= \frac{p_1 + 1}{p_1} \times \frac{p_2 + 1}{p_2} \times \cdots \times \frac{p_m + 1}{p_m}. \end{aligned}$$

p_1, p_2, \dots, p_m は奇素数なので、分母は奇数となるが、分子は偶数の因子が少なくとも m 個存在する。よって、 $p_1 p_2 \cdots p_m$ は完全数でない。(Q. E. D.)

命題 8

奇数の原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

素数を順に p_1, p_2, p_3, \dots としたとき、補題 1 より、任意の k について

$$\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1$$

を満たす m が存在する。

$p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_m$ と素因数分解できる自然数を n とする。つまり、

$$n = p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_m.$$

このとき、 $k \leq i \leq m$ を満たす i について

$\frac{n}{p_i}$ は n の約数であり、約数の総和は約数の

部分和より大きいから、

$$\sigma(n)$$

$$\begin{aligned} &\geq n + \frac{n}{p_k} + \frac{n}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{n}{p_m} + 1 \\ &= n + n \left(\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right) + 1 \\ &\geq n + n + 1 > 2n \end{aligned}$$

より、 n は過剰数である。

ここで、奇数の n について考えるため、

$k_1 = 2$ とし、 $p_{k_1} p_{k_1+1} p_{k_1+2} \cdots p_{m_1}$ と素因数分解できる自然数を n_1 とする。また、

$k_2 = m_1 + 1$ とし、 $p_{k_2} p_{k_2+1} p_{k_2+2} \cdots p_{m_2}$ と素因数分解できる自然数を n_2 とする。また、

$k_3 = m_2 + 1$ とし、 $p_{k_3} p_{k_3+1} p_{k_3+2} \cdots p_{m_3}$ と素

因数分解できる自然数を n_3 とする。この操作を繰り返して、 n_1, n_2, n_3, \dots を定義していく。すると n_1, n_2, n_3, \dots は相異なる素因数をもつため、互いに素であり、奇数の過剰数である。

よって、補題 2 から奇数の完全数と原始過剰数は無数にあるといえる。しかし、補題 3 より、その中に完全数は含まれないため、奇数の原始過剰数は無数に存在する。

(Q. E. D.)

また、この証明の前半における議論から次がいえる。

命題 9

$\frac{\sigma(n)}{n}$ の値に上限はない。

命題 10

異なる素数 p, q を用いて $p^\alpha q^\beta$ とかける奇数の過剰数は存在しない。

(証明)

$3 \leq p, q$ として、命題 3 から、

$$\begin{aligned} \sigma(p^\alpha q^\beta) &= \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \times \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1} \\ &< \frac{p}{p-1} \times \frac{q}{q-1} \times p^\alpha q^\beta \\ &\leq \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times p^\alpha q^\beta \\ &= \frac{15}{8} p^\alpha q^\beta < 2p^\alpha q^\beta \end{aligned}$$

より、 $p^\alpha q^\beta$ は不足数となる。(Q. E. D.)

命題 11

相異なる素数 p, q, r, s を用いて $pqrs$ とかける奇数は不足数である。

(証明)

$p < q < r < s$ としても一般性を失わない。このとき、条件を式でまとめると

$$3 \leq p, 5 \leq q, 7 \leq r, 11 \leq s$$

となる。 $n = pqrs$ として、 n に対する約数の割合を求めると、

$$\sigma(n)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{n}{1} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} + \frac{n}{7} + \frac{n}{11} + \frac{n}{15} + \frac{n}{21} + \frac{n}{33} \\ &\quad + \frac{n}{35} + \frac{n}{55} + \frac{n}{77} + \frac{n}{105} + \frac{n}{165} \end{aligned}$$

$$+\frac{n}{231} + \frac{n}{385} + \frac{n}{n}$$

$$< 1.994n + 1.$$

もし n が不足数でないならば、

$\sigma(n) \geq 2n$ なので、 $1.994n + 1 > 2n$ が成り立つ。 $0.006n < 1$ より、 $n < 167$ とならねばならない。

一方、条件から $n \geq 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$ となるため、奇数の $pqrs$ は不足数である。

(Q. E. D.)

なお、素因子が 3 つ以下のとき、 $pqrs$ の約数といえるので不足数であり、素因子が 5 つの場合は原始過剰数が存在し、

$$15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

が最少のものである。

3. 4 極限を用いた評価

命題 12

素数 p と自然数 α について、

$$\frac{p+1}{p} \leq \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{p}{p-1}$$

が成り立つ。

(証明)

すべての自然数 α について、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} &= \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p-1)} \\ &< \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p-1)} \times \frac{p^{\alpha+2} - 1}{p^{\alpha+2} - p} \\ &= \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p-1)} \times \frac{p^{\alpha+2} - 1}{p(p^{\alpha+1} - 1)} \\ &= \frac{p^{\alpha+2} - 1}{p^{\alpha+1}(p-1)} = \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{p^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

より、 $\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{p^{\alpha+1}}$ が成り立つ。

そのため、 $\alpha=1$ のときが $\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}$ の最小

値であり、 $\frac{\sigma(p^1)}{p^1} = \frac{p+1}{p}$...①

$$\text{また、} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p-1)} = \frac{p}{p-1}$$

より、 $\frac{p+1}{p} \leq \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{p}{p-1}$. (Q. E. D.)

また、このことから、 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sigma(2^\alpha)}{2^\alpha} = 2$ が成り立つことがわかる。

命題 13

自然数 n について、 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ は収束する。

これは、命題 12 と命題 4 から示される。

命題 14

$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ が整数値のとき、収束値は 2 または 3 である。

(証明)

自然数 n が $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ となる素数を用いて $n = p_1 p_2 \dots p_k$ と素因数分解されたとする。なぜならば、同じ種類の素数の素因数を 2 個以上含んだとしても、極限をとった後は同一視できるためである。

すると、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha} = \frac{p_1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2}{p_2 - 1} \times \dots \times \frac{p_k}{p_k - 1}$$

命題 8 の補題 3 における同様の議論から、奇素数のみであると仮定すると、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha} \text{ の分母から } 2 \text{ の素因子を除いて、} \frac{(p_1-1)}{2} \times \frac{(p_2-1)}{2} \times \dots \times \frac{(p_k-1)}{2} \text{ となる}$$

が、分子の $p_1 p_2 \dots p_k$ より大きいいため、整数値とならない。

よって n に 2 の素因子が含まれる。しかし、分子にある 2 の素因子は 1 つのみなので n の高さは高々 2 である。

このとき、 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ が整数値となる n は $n=2$ または $n=2 \cdot 3$

つまり、 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ の値は 2 または 3 である。 (Q. E. D.)

命題 15

p を素数として、 $2^n p$ の形に素因数分解できる数を考える。 $2^n < p < p' < 2^{n+1} - 1$ のとき、 $\frac{\sigma(2^n p)}{2^n p} > \frac{\sigma(2^n p')}{2^n p'} > 2$ である。

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(2^n p)}{2^n p} &= \frac{(2^{n+1}-1)(p+1)}{2^n p} \\ &= \frac{(2^{n+1}-1)(pp'+p')}{2^n pp'} \\ &> \frac{(2^{n+1}-1)(pp'+p)}{2^n pp'} \\ &= \frac{(2^{n+1}-1)(p'+1)}{2^n p'} = \frac{\sigma(2^n p')}{2^n p'} \end{aligned}$$

$$\text{より、} \frac{\sigma(2^n p)}{2^n p} > \frac{\sigma(2^n p')}{2^n p'} \dots \textcircled{1}$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(2^n p')}{2^n p'} &= \frac{(2^{n+1}-1)(p'+1)}{2^n p'} \\ &= \frac{2(2^n p') + 2^{n+1} - p' - 1}{2^n p'} \\ &= 2 + \frac{(2^{n+1}-1) - p'}{2^n p'} > 2 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より、命題は示された。 (Q. E. D.)

なお、 n の値によっては p を順に大きくしても $\frac{\sigma(2^n p)}{2^n p}$ が減少しない場合がある

が、自然数 a を用いて

$$2^n < p = 2^{n+1} - a < p' = 2^{n+2} - a$$

と表されるとき、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(2^n p)}{2^n p} - \frac{\sigma(2^{n+1} p')}{2^{n+1} p'} &= \frac{(2^{n+1}-1)(p+1)}{2^n p} - \frac{(2^{n+2}-1)(p'+1)}{2^{n+1} p'} \\ &= \frac{(2^{n+2}-2)(pp'+p') - (2^{n+2}-1)(pp'+p)}{2^{n+1} pp'} \\ &= \frac{-(pp'+p') + (2^{n+2}-1)(p'-p)}{2^{n+1} pp'} \\ &= \frac{-(pp'+p') + (2^{n+2}-1)2^{n+1}}{2^{n+1} pp'} \\ &= \frac{2^{n+1}2^{n+2} - (p+1)p' - 2^{n+1}}{2^{n+1} pp'} \\ &\geq \frac{2^{n+1}2^{n+2} - 2^{n+1}(2^{n+2}-1) - 2^{n+1}}{2^{n+1} pp'} \\ &= \frac{2^{n+1}(2^{n+2} - 2^{n+2} + 1 - 1)}{2^{n+1} pp'} = 0 \end{aligned}$$

より、 $\frac{\sigma(2^n p)}{2^n p} > \frac{\sigma(2^{n+1} p')}{2^{n+1} p'}$ が成り立つ。

3. 5 実際の値

原始過剰数は偶数であるものが多く、奇数であるものうち、最小のものは 945 とな

る。奇数では5の倍数が多く一の位が1, 3, 7, 9で最小のものは順に81081、153153、207207、189189である。1001の倍数でないものもあり、例として223839が挙げられる。また、100万以下での原始過剰数の個数は1733個であり、最大のもは、999999である。

次頁に、5000以下の原始過剰数と30000以下の奇数の原始過剰数を掲載する。

4. 今後の課題

今回行わなかった、自然数全体に対しての過剰数の割合の評価を、完全数の倍数や、原始過剰数の倍数として表現できるのではないかと考えている。

5. 参考文献

[1] 「数論の精選104問」、Titu

Andreescu Dorin, Andrica, Zuming Feng 著、小林一章、鈴木晋一監 訳、清水俊宏、西本将樹 訳、朝倉書店

[2] 「直感を裏切る数学 『思い込み』にだまされない数学的思考法」、神永正博、講談社

[3] 「約数の総和について」、小椋晃一、奈良女子大学附属中等教育学校平成27年度SSH生徒研究論文集、p.36

-42

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、その他にもサイエンス研究会をはじめとした多くの方々に協力や助言をいただきました。ありがとうございました。

表 1 5000 以下の原始過剰数

$20=2^2 \cdot 5$	$945=3^3 \cdot 5 \cdot 7$	$2205=3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$	$4030=2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$
$70=2 \cdot 5 \cdot 7$	$1184=2^5 \cdot 37$	$2210=2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$	$4070=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 37$
$88=2^3 \cdot 11$	$1312=2^5 \cdot 41$	$2470=2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$	$4095=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
$104=2^3 \cdot 13$	$1376=2^5 \cdot 43$	$2530=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$	$4216=2^3 \cdot 17 \cdot 31$
$272=2^4 \cdot 17$	$1430=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$	$2584=2^3 \cdot 17 \cdot 19$	$4288=2^6 \cdot 67$
$304=2^4 \cdot 19$	$1504=2^5 \cdot 47$	$2990=2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23$	$4510=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 41$
$368=2^4 \cdot 23$	$1575=3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$	$3128=2^3 \cdot 17 \cdot 23$	$4544=2^6 \cdot 71$
$464=2^4 \cdot 29$	$1696=2^5 \cdot 53$	$3190=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29$	$4672=2^6 \cdot 73$
$550=2^4 \cdot 31$	$1870=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$	$3230=2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$	$4712=2^3 \cdot 19 \cdot 31$
$572=2^2 \cdot 11 \cdot 13$	$1888=2^5 \cdot 59$	$3410=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$	$4730=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 43$
$650=2 \cdot 5^2 \cdot 13$	$1952=2^5 \cdot 61$	$3496=2^3 \cdot 19 \cdot 23$	
$748=2^2 \cdot 11 \cdot 17$	$2002=2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	$3770=2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29$	※太字は $2^n p$ の形
$836=2^2 \cdot 11 \cdot 19$	$2090=2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$	$3944=2^3 \cdot 17 \cdot 29$	

表 2 30000 以下の奇数の原始過剰数

$945=3^3 \cdot 5 \cdot 7$	$8415=3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$	$16695=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53$	$24885=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 79$
$1575=3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$	$8925=3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$	$18585=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 59$	25935
$2205=3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$	$9135=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$	$19215=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 61$	$=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$
$3465=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$9555=3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$	19635	$26145=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 83$
$4095=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	$9765=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$	$=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$	26565
$5355=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$	$11655=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 37$	$21105=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 67$	$=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$5775=3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	$12705=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2$	21945	$28035=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 89$
$5985=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$	$12915=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41$	$=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	28215
$6435=3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$	$13545=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 43$	$22365=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$	$=3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$
$6825=3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$	$14805=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47$	$22995=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 73$	29835
$7245=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$	15015	23205	$=3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$
$7425=3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$	$=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	$=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$	
$8085=3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$			

4 次方陣の性質に関する研究

4 年 C 組 今中 翔哉
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 4 年生は魔方陣について学習している。今回の研究では、4 次魔方陣における特有の性質について、交換様式という角度から考察をおこなった。

キーワード 4 次魔方陣、交換様式、完全方陣

2. 研究の背景と目的

前回の研究([1])では、魔方陣の作り方における自分なりの見解や考察を行うことができた。今回は、魔方陣の性質を中心に調べることにした。その中でも、性質の種類が多く知られている 4 次魔方陣に焦点を絞って研究を行った。今回の研究の目的は、4 次魔方陣の性質を交換様式など、魔方陣特有の性質を用いて考察を行うことである。今回は、その結果を紹介したい。

3. 研究内容

3. 1 定義

魔方陣とは、1 から始まる連続した自然数を、各行、各行、及び対角線の数の和(4 次方陣では 34)をすべて相等しくなるように、碁盤の目状に並べたものをいう。一般に、1 辺が n マスの魔方陣を n 次魔方陣という。また、 n 次魔方陣を単に「 n 次方陣」ということが多い。

n 次魔方陣に対して、魔方陣の定和性を満たし続ける操作のことを交換様式という。今回は 4 次方陣に対する交換様式を中心に考察する。

3. 2 4 次方陣の性質

次のような 4 次方陣を考える。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図 1 4 次方陣

命題 次の性質 1 から性質 4 が成立する。

性質 1 $a + d + m + p = 34$

$$b + c + n + o = 34$$

$$e + i + h + l = 34$$

$$f + g + j + k = 34$$

性質 2 $b + c = m + p$

$$d + p = e + i$$

$$a + d = n + o$$

$$a + m = h + l$$

性質 3 $a + p = g + j$

$$d + m = f + k$$

性質 4 $f + g = i + l$

$$e + h = j + k$$

$$b + n = g + k$$

$$c + o = f + j$$

(証明)

4次魔方陣の性質から、各行、各列、両対角線の和(定和)は34であるため、

$$a+b+c+d=34 \cdots \textcircled{1}$$

$$e+f+g+h=34 \cdots \textcircled{2}$$

$$i+j+k+l=34 \cdots \textcircled{3}$$

$$m+n+o+p=34 \cdots \textcircled{4}$$

$$a+e+i+m=34 \cdots \textcircled{5}$$

$$b+f+j+n=34 \cdots \textcircled{6}$$

$$c+g+k+o=34 \cdots \textcircled{7}$$

$$d+h+l+p=34 \cdots \textcircled{8}$$

$$a+f+k+p=34 \cdots \textcircled{9}$$

$$d+g+j+m=34 \cdots \textcircled{10}$$

性質1について、

①+④から、

$$(a+d+m+p) + (b+c+n+o) = 34 \times 2 \cdots \textcircled{11}$$

⑤+⑧から、

$$(a+d+m+p) + (e+h+i+l) = 34 \times 2 \cdots \textcircled{12}$$

⑨+⑩から、

$$(a+d+m+p) + (f+g+j+k) = 34 \times 2 \cdots \textcircled{13}$$

②+③から、

$$(e+h+i+l) + (f+g+j+k) = 34 \times 2 \cdots \textcircled{14}$$

⑬-⑭より、

$$a+d+m+p = e+h+i+l$$

よって、⑫から、

$$a+d+m+p = 34 \cdots \textcircled{15}$$

$$e+h+i+l = 34 \cdots \textcircled{16}$$

また、⑪、⑭より、

$$b+c+n+o = 34 \cdots \textcircled{17}$$

$$f+g+j+k = 34 \cdots \textcircled{18}$$

性質2について、

$$\textcircled{1} \text{と} \textcircled{17} \text{から } a+d=n+o$$

$$\textcircled{5} \text{と} \textcircled{15} \text{から } d+p=e+i$$

$$\textcircled{5} \text{と} \textcircled{16} \text{から } a+m=h+l$$

$$\textcircled{4} \text{と} \textcircled{17} \text{から } b+c=m+p$$

性質3について

$$\textcircled{9} \text{と} \textcircled{15} \text{から } d+m=f+k$$

$$\textcircled{10} \text{と} \textcircled{15} \text{から } a+p=g+j$$

性質4について

$$\textcircled{3} \text{と} \textcircled{18} \text{から } f+g=i+l$$

$$\textcircled{2} \text{と} \textcircled{18} \text{から } e+h=j+k$$

$$\textcircled{6} \text{と} \textcircled{18} \text{から } b+n=g+k$$

$$\textcircled{7} \text{と} \textcircled{18} \text{から } c+o=f+j \quad (\text{Q. E. D.})$$

3.3 4次方阵の分類

4次方阵の種類は、1の配置場所によって3つの場合に、また16の位置に注目して以下の21の型に分けることができる。

図1の*m*の位置に1を入れた場合をA型、*i*の位置に1を入れた場合をB型、*j*の位置に1を入れた場合をC型とする。

(1) A型を16の位置により、以下の6つの型に分類する(図2参照)。

a = 16のとき、(A-1)型

e = 16のとき、(A-2)型

i = 16のとき、(A-3)型

j = 16のとき、(A-4)型

g = 16のとき、(A-5)型

d = 16のとき、(A-6)型

A-1			A-6
A-2		A-5	
A-3	A-4		
1			

図2 A型の4次方阵

(2) B型を16の位置により、以下の9つの型に分類する(図3参照)。

- $a=16$ のとき、(B-1)型
- $e=16$ のとき、(B-2)型
- $m=16$ のとき、(B-3)型
- $j=16$ のとき、(B-4)型
- $n=16$ のとき、(B-5)型
- $c=16$ のとき、(B-6)型
- $k=16$ のとき、(B-7)型
- $h=16$ のとき、(B-8)型
- $l=16$ のとき、(B-9)型

B-1		B-6	
B-2			B-8
1	B-4	B-7	B-9
B-3	B-5		

図3 B型の4次方陣

(3) C型を16の位置により、以下の6つの型に分類する(図4参照)。

- $i=16$ のとき、(C-1)型
- $m=16$ のとき、(C-2)型
- $b=16$ のとき、(C-3)型
- $f=16$ のとき、(C-4)型
- $g=16$ のとき、(C-5)型
- $d=16$ のとき、(C-6)型

	C-3		C-6
	C-4	C-5	
C-1	1		
C-2			

図4 C型の4次方陣

これらの型の分類については、参考文献[2] p.66を参考にした。

3.4 4次方陣の交換様式

4次方陣の交換様式は6種類あることが知られている。そのうち、今回は以下の3種類を使用する。

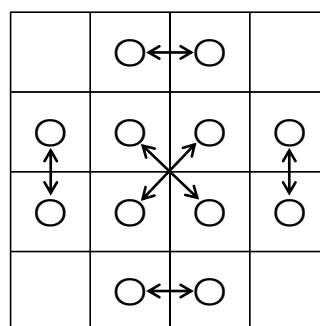


図5 交換様式1

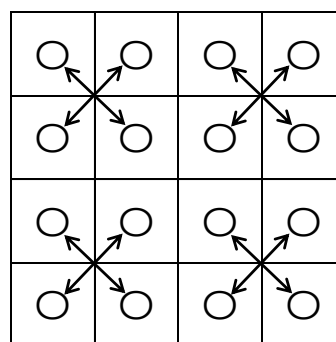


図6 交換様式2

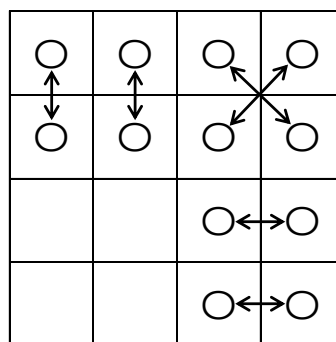


図7 交換様式3

但し、交換様式 3 は $b+e+l+o=34$ の場合に限る。

以下に、交換様式 1 と 3 が定和を変えないことについて、簡単な証明を記しておく。

(交換様式 1 の定和保存性の証明)

操作を加える前の任意の 4 次方陣を図 8 とする。すると、交換様式 1 を施した魔方陣は図 9 のようになる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

→

a	c	b	d
i	k	j	l
e	g	f	h
m	o	n	p

図 8

図 9

図 9 において、各行、各列、対角線の和は、図 8 と比較すると、各和の構成要素が変わっていないので、

$$\begin{aligned}
 a+c+b+d &= 34, & i+k+j+l &= 34 \\
 e+g+f+h &= 34, & m+o+n+p &= 34 \\
 a+i+e+m &= 34, & c+k+g+o &= 34 \\
 b+j+f+n &= 34, & d+l+h+p &= 34 \\
 a+k+f+p &= 34, & d+j+g+o &= 34
 \end{aligned}$$

(Q. E. D.)

ここで、交換様式 1 を施しても、第 1 行、第 4 行、第 1 列、第 4 列に含まれる数は(順序の入れ替えのみであり)変わらないことがわかる。

(交換様式 3 の定和保存性の証明)

交換様式 3 を施す前の任意の 4 次方陣を図 10 とする。すると、交換様式 3 を施した魔方陣は図 11 のようになる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

→

e	f	h	g
a	b	d	c
i	j	l	k
m	n	p	o

図 10

図 11

図 3 において、 $e+b+l+o=34$ であることに注意する。図 11 において、各行、各列、両対角線の和は、図 10 より

$$\begin{aligned}
 e+f+h+g &= 34, & a+b+d+c &= 34 \\
 i+j+l+k &= 34, & m+n+p+o &= 34 \\
 e+a+i+m &= 34, & f+b+j+n &= 34 \\
 h+d+l+p &= 34, & g+c+k+o &= 34 \\
 \underline{e+b+l+o} &= 34, & g+d+j+m &= 34
 \end{aligned}$$

(Q. E. D.)

また、この交換様式 3 を施すことができる方陣(つまり、 $e+b+l+o=34$ を満たす方陣)としては、**完全方陣**や**対称魔方陣**(中心に関して対称の位置にある数の和が 17 になる方陣)が挙げられる。

以上から、交換様式 1 と交換様式 3 の場合について証明できたが、交換様式 2 の場合についても、同様に証明をすることができる。

3. 5 交換様式と 4 次方陣の分類

4 次方陣の交換様式を用いて、方陣の型の間、次のような関係があることがわかった。

8	2	13	11
15	9	6	4
10	16	3	5
1	7	12	14

→
①

8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4
1	12	7	14

(A-4)型

(A-5)型

図 12 (A-4)型と(A-5)型の対応

図 12 のように、(A-4)型に交換様式 1 を施すと(A-5)型の方陣になる。つまり、(A-4)型と(A-5)型の方陣の間には、交換様式 1 を施すと互いに写りあう対応関係があり、それぞれ 1 対 1 に対応する。

また、交換様式 1 の関係は、(A-2)型と(A-3)型、(B-4)型と(B-7)型、(B-5)型と(B-6)型との間にもそれぞれ成り立つことがわかった。残りの(B-2)型、(B-8)型、(B-9)型、(C-4)型、(C-5)型については、交換様式 1 を施すと同じの型の方陣になる。例えば、図 13 のように、(B-2)型の方陣は(B-2)型に対応する。

3	10	15	6
16	7	2	9
1	12	13	8
14	5	4	11

①

3	15	10	6
1	13	12	8
16	2	7	9
14	4	5	11

(B-2)型 (B-2)型

図 13 (B-2)型の対応

図 13 で得られた(B-2)型の方陣を和が等しくなるようにしたままで、わかりやすく変形すると図 14 のようになる。このように、1 が移動した場合は、方陣を反転させてから型に分類する必要がある。

3	15	10	6
1	13	12	8
16	2	7	9
14	4	5	11

⇒

14	4	5	11
16	2	7	9
1	13	12	8
3	15	10	6

図 14

次に、(A-1)型に交換様式 2 を施すと図 15 のように(C-4)型になることがわかった。

16	3	10	5
6	4	15	9
11	13	2	8
1	14	7	12

②

4	6	9	15
3	16	5	10
14	1	12	7
3	11	8	2

(A-1)型 (C-4)型

図 15 (A-1)型と(C-4)型の対応

また、(A-2)型と(C-3)型、(A-3)型と(C-1)型、(A-4)型と(C-2)型、(A-5)型と(C-6)型、(A-6)型と(C-5)型との間にもそれぞれ成り立つ関係である。このことから、A 型と C 型の方陣は 1 対 1 に対応し、それぞれの個数は等しいことがわかる。

B 型については、それぞれの型に交換様式 2 を施すことにより、(B-1)型は(B-7)型、(B-2)型は(B-9)型、(B-3)型は(B-4)型にそれぞれ対応している。

また、(B-5)型、(B-6)型、(B-8)型に関しては交換様式 2 を施すとそれら自身の方陣になることがわかった。

8	3	10	13
14	9	4	7
1	6	15	12
11	16	5	2

②

9	14	7	4
3	8	13	10
16	11	2	5
6	1	12	15

(B-5)型 (B-5)型

図 16 (B-5)型の対応

図 16 で得られた(B-5)型を和が等しくなるようにしたままで、わかりやすく変形すると図 17 のようになる。

9	14	7	4
3	8	13	10
16	11	2	5
6	1	12	15

⇒

15	5	10	4
12	2	13	7
1	11	8	14
6	16	3	9

図 17

3. 6 4次完全方陣

3-6-1 シフト変換

右図の方陣の**主対角線**($a-f-k-p$)と**副対角線**($d-g-j-m$)と、それらの平行な位置にある n 個の要素からなる分

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

離した対角線をまとめて**汎対角線**という。また、行、列、および両対角線の数の和が一定になるだけでなく、**汎対角線上**の数の和も、すべて等しくなるような方陣を**完全方陣**という。つまり、4次の完全方陣においては一般の4次方陣の性質に加えて、次が成り立つ。

命題 完全方陣の汎対角線和は一定である。

$$a+h+k+n=34, b+e+l+o=34$$

$$c+f+i+p=34, d+e+i+o=34$$

$$c+h+i+n=34, b+g+l+m=34$$

そして、完全方陣はすべての汎対角線で定和をもつために、次のような完全方陣特有の変換が考えられる。 n 次**完全方陣**に対して、

S_1 : 最下行を最上行の上側に移動させる

S_2 : 最右列を最左列の左側に移動させる

のどちらを行っても、つねに、 n 次完全方陣が得られる。上の S_1, S_2 の変換を**シフト変換**という。以下に、シフト変換によって、完全方陣が完全方陣に対応することを示す。

(シフト変換による完全方陣の対応)

シフト変換を施す前の4次方陣を図18とする(但し、この方陣は**完全方陣**であるとする)。シフト変換 S_1 の場合、変換後の方陣が完全方陣であることを示す。

図18の方陣にシフト変換を施して得られた方陣を図19とすると、次のようになる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

 $\xrightarrow{S_1}$

m	n	o	p
a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

図18

図19

ここで、図18において完全方陣の定義より、以下が成り立つ。

$$a+n+k+h=34, e+b+o+l=34$$

$$i+f+c+p=34, d+e+j+o=34$$

$$c+h+i+n=34, b+g+l+m=34$$

また、図19において、上の式と4次魔方陣の性質から各行、各列、両対角線、汎対角線の和はすべて34となることがわかる。よって、得られた魔方陣(図19)は4次完全方陣である。 (Q. E. D.)

また、これはシフト変換 S_2 についても同様に示すことができる。そして、このシフト変換によって1つの4次完全方陣から16個(=4²個)の4次完全方陣が得られるということがわかる。

3-6-2 完全方陣の性質

完全方陣の性質を満たす方陣を図20とすると、

$$b+g+l+m=34$$

$$d+g+j+m=34$$

より、 $d+j=b+l \dots \textcircled{a}$

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図20

また、完全方陣に対しては交換様式3を適用することができる。

交換様式3を施す前4次完全方陣を上を図20とする。そして、この図20に交換様式3を施して得られた方陣を図21とすると、次のようになる。

e	f	h	g
a	b	d	c
i	j	l	k
m	n	p	o

図 21

図 21 において、4 次方陣の性質から、

$$b+d+l+j=34 \quad \cdots \textcircled{b}$$

①と⑥より、 $d+j=b+l=17 \quad \cdots \textcircled{c}$

そして、完全方陣にはシフト変換を適用することができるため、残りの 3×3 マスの偶の数についても、同様にして

$$d+j=b+l=17, \quad c+i=a+k=17$$

$$h+n=f+p=17, \quad g+m=e+o=17$$

が成り立つ。つまり、4 次完全方陣におけるすべての 3×3 マスの偶の数の和は 4 次方陣の定和 34 に等しいことがわかる。

また、図 20 の 4 次方陣の性質から

$$f+g+j+k=34$$

である。図 20 は完全方陣でもあるため、シフト変換を用いるとすべての 2×2 マスの偶の数についても同様に、

$$a+b+f+e=34, \quad b+c+g+f=34$$

$$c+d+h+g=34, \quad e+f+j+i=34$$

$$f+g+k+j=34, \quad g+h+l+k=34$$

$$i+j+n+m=34, \quad j+k+o+n=34$$

$$k+l+p+o=34, \quad f+g+k+j=34$$

が成り立つ。

さらに、4 次方陣には一般に 21 種類の型が存在する。その中でも、(A-5)型、(B-6)型、(C-6)型はこの小正方形 3×3 マスの偶の和の 1 と 16 の位置関係に注目すると完全方陣の性質を満たすことがわかる。つまり、(A-5)型、(B-6)型、(C-6)型の 4 次方陣は完全方陣であるということがわかるのである。

8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4
1	12	7	14

(A-5)型

10	3	16	5
15	6	9	4
1	12	7	14
8	13	2	11

(B-6)型

5	10	3	16
4	15	6	9
14	1	12	7
11	8	13	2

(C-6)型

しかし、これらの 4 次方陣はシフト変換の視点で見ると、本質的には同じ完全方陣と捉えることができる。

4. 今後の展望

今回の研究では、4 次方陣固有の交換様式や変換を用いて 4 次方陣や 4 次完全方陣の性質について考察を行うことができた。今後は、4 次方陣のみならず、さまざまな魔方陣を対象を広げ、発展させていきたい。また、完全方陣の分類についても考えていきたい。

5. 参考文献

- [1] 「魔方陣を作る」、今中翔哉、奈良女子大学附属中等教育学校 平成 27 年度 SSH サイエンス研究会生徒研究論文集、p.28-35
- [2] 「魔方陣の世界」、大森清美、日本評論社(2013)

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生 ありがとうございます。

三角形の収束

4年A組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班4年生は図形の性質について研究している。今回は、自ら発見した図形の性質を証明することを目標とし、参考文献[1]を用いて数列の収束や極限について学習した。

キーワード 円、三角形、収束

2. 研究の背景と目的

円に内接する三角形において、その3辺の垂直二等分線をかき、それらと円の交点をとる。そうしてできた3点を新たな頂点とする三角形についても同様の操作を行う。この操作を繰り返していくとどうなるかということをおもいつき、実際に操作を行ってみると面白い事実がわかった。本稿ではその事実を紹介し、考察する。

3. 研究内容

3-1. 中心角の変化

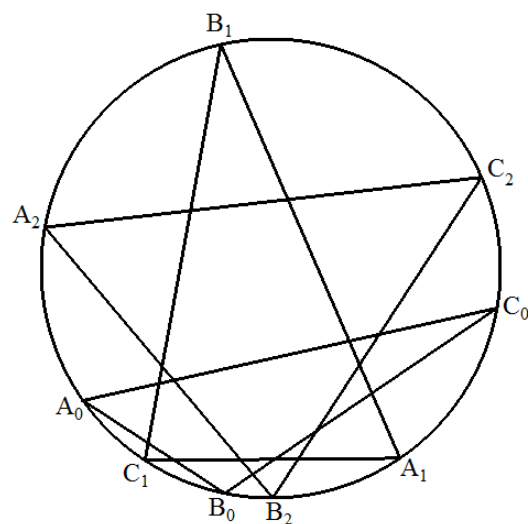
上述の操作について考える。

定理1

点Oを中心とする円に内接する $\triangle A_0B_0C_0$ について、辺 A_0B_0 の垂直二等分線と円との交点のうち、直線 A_0B_0 に関して点 C_0 側でない方の点を C_1 、辺 B_0C_0 の垂直二等分線と円との交点のうち直線 B_0C_0 に関して点 A_0 側でない方の点を A_1 、辺 C_0A_0 の垂直二等分線と円との交点のうち、直線 C_0A_0 に関して点 B_0 側でない方の点を B_1

とする。

この操作によって得られる $\triangle A_1B_1C_1$ においても同様の操作を繰り返すということを無限に繰り返すと、得られる三角形は限りなく正三角形に近づく。



(証明)

1回の操作で中心角がどのように変化するのかを考える(上図の $\triangle A_0B_0C_0$ のような鈍角三角形のとき、弦 A_0C_0 に対する中心角は、 $\angle A_0OC_0$ (180° より大きい方)を指す)。n回目の操作により得られる $\triangle A_nB_nC_n$ において、 $\angle B_nOC_n = a_n$, $\angle C_nOA_n = b_n$, \angle

$A_nOB_n = c_n$ とおく。このとき、対称性より $a_n \leq b_n \leq c_n$ としても一般性を失わない。

図より、1回の操作で中心角はそれぞれ以下のように変化する。

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2} = \frac{360^\circ - a_n}{2} = 180 - \frac{a_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2} = \frac{360^\circ - b_n}{2} = 180 - \frac{b_n}{2},$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{360^\circ - c_n}{2} = 180 - \frac{c_n}{2}.$$

また、 $a_n \leq b_n \leq c_n$ より、

$$a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq c_{n+1}$$

が成り立つ。 $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ に操作を行うと、上の漸化式より、中心角は次のように変化する。

$$a_{n+2} = 180 - \frac{a_{n+1}}{2} = 90 + \frac{a_n}{4},$$

$$b_{n+2} = 180 - \frac{b_{n+1}}{2} = 90 + \frac{b_n}{4},$$

$$c_{n+2} = 180 - \frac{c_{n+1}}{2} = 90 + \frac{c_n}{4}$$

$a_n \leq b_n \leq c_n$ より、 $a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq c_{n+2}$ が成り立つ。ここで、 $c_n \geq 120^\circ$ となる。なぜならば、 $c_n < 120^\circ$ と仮定すると、3つの中心角の和が 360° よりも小さくなってしまふからである。また、 $c_{n+2} \leq c_n$ も成り立つ。もし、 $c_{n+2} < c_n$ となる n が存在すると仮定すると、 $c_{n+2} = 90 + \frac{c_n}{4} < c_n$ より $90 < \frac{3}{4}c_n$ 、 $120 < c_n$ となり、仮定に矛盾するからである。ゆえに、数列 c_0, c_2, c_4, \dots は単調減少列である。さらに、任意の自然数 i に対して、 $c_i \geq 120^\circ$ なので、この数列 $\{c_n\}$ はある値に収束する。その値が 120° であることを証明すればよい。そこで、漸化式

$$d_0 = c_0, \quad d_{n+1} = 90 + \frac{d_n}{4}$$

を考える。これは、操作を2回続けて行うことを1つの操作とみなしたときの中心角の変化を表している。ここで、 d_n と 120° の差を考えると、

$$d_n - 120^\circ = 90^\circ + \frac{d_{n-1}}{4} - 120^\circ = \frac{d_{n-1}}{4} - 30^\circ$$

$$= \frac{1}{4}(d_{n-1} - 120^\circ)$$

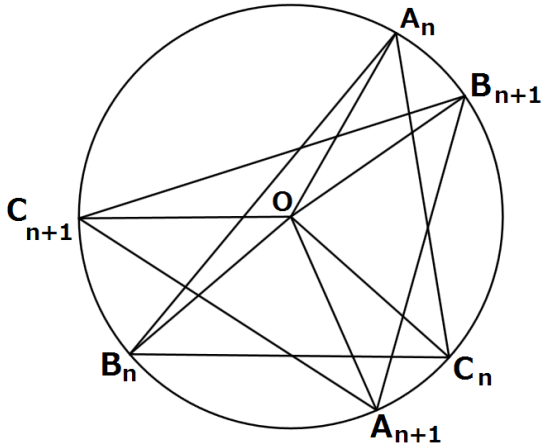
より、1回につき、 d_n と 120° の差は $\frac{1}{4}$ 倍となる。これは、 120° に収束することを意味している。よって題意は示された。

(Q. E. D.)

円に内接する三角形の辺の垂直二等分線を引くということは、その辺に対する中心角の二等分線を引くことと同値である。そこで、次に中心角の分割について考える。

定理 2

円 O に内接する $\triangle A_0B_0C_0$ について、下図のように、 $\angle A_0OB_0$ を $p:q$ に分ける直線と円の交点のうち、直線 A_0B_0 に関して点 C_0 側でない方の点を C_1 、 $\angle B_0OC_0$ を $p:q$ に分ける直線と円との交点のうち直線 B_0C_0 に関して点 A_0 側でない方の点を A_1 、 $\angle C_0OA_0$ を $p:q$ に分ける直線と円との交点のうち、直線 C_0A_0 に関して点 B_0 側でない方の点を B_1 とする。この操作によって得られる $\triangle A_1B_1C_1$ においても同様の操作を繰り返すということを無限に繰り返すと、得られる三角形は、限りなく正三角形に近づく。



(証明)

定理 1 と同様、1 回の操作における中心角の変化を考える。\$n\$ 回目の操作で得られる \$\triangle A_n B_n C_n\$ において、\$\angle B_n O C_n = a_n\$, \$\angle C_n O A_n = b_n\$, \$\angle A_n O B_n = c_n\$ とおく。このとき、対称性より \$a_n \leq b_n \leq c_n\$ としても一般性を失わない。そして、図より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \angle B_{n+1} O A_n + \angle A_n O C_{n+1} \\ &= \frac{p}{p+q} b_n + \frac{q}{p+q} c_n = \frac{p b_n + q c_n}{p+q} \end{aligned}$$

を得る。同様にして、

$$b_{n+1} = \frac{p c_n + q a_n}{p+q}, \quad c_{n+1} = \frac{p a_n + q b_n}{p+q}$$

が成り立つ。ここで、\$a_n \leq b_n \leq c_n\$ より、以下を得る。

$$a_{n+1} = \frac{p b_n + q c_n}{p+q} \leq \frac{p c_n + q c_n}{p+q} = c_n,$$

$$b_{n+1} = \frac{p c_n + q a_n}{p+q} \leq \frac{p c_n + q c_n}{p+q} = c_n,$$

$$c_{n+1} = \frac{p a_n + q b_n}{p+q} \leq \frac{p c_n + q c_n}{p+q} = c_n.$$

ゆえに、一般に以下が成り立つ。

$$a_{k+1} \leq \max(a_k, b_k, c_k),$$

$$b_{k+1} \leq \max(a_k, b_k, c_k),$$

$$c_{k+1} \leq \max(a_k, b_k, c_k).$$

よって、

$$\begin{aligned} \max(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}) &\leq \max(a_k, b_k, c_k) \\ \text{を得る。そこで、} &a_0 \leq b_0 \leq c_0 \text{ とおくと、} \\ c_0 &\geq \max(a_1, b_1, c_1) \geq \max(a_2, b_2, c_2) \\ &\geq \max(a_3, b_3, c_3) \geq \dots \geq 120^\circ \end{aligned}$$

が成り立つ。同様にして、

$$a_{k+1} \geq \min(a_k, b_k, c_k),$$

$$b_{k+1} \geq \min(a_k, b_k, c_k),$$

$$c_{k+1} \geq \min(a_k, b_k, c_k)$$

を示すことができるので、

$$\begin{aligned} a_0 &\leq \min(a_1, b_1, c_1) \leq \min(a_2, b_2, c_2) \\ &\leq \min(a_3, b_3, c_3) \leq \dots \leq 120^\circ \end{aligned}$$

を得る。ここで、以下の補題を用いる。証明は参考文献[1]を参照されたい。

補題 有界な単調数列は収束する。

詳しく言うと、上に有界な単調増加列と下に有界な単調減少列は、それぞれ上限と下限に収束する。

先程の議論から、数列 \$\{\max(a_t, b_t, c_t)\}\$ と \$\{\min(a_t, b_t, c_t)\}\$ はそれぞれ有界な単調数列であるから、これらはそれぞれある値に収束する。そこで、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max(a_t, b_t, c_t) = M,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \min(a_t, b_t, c_t) = m$$

とおく。このとき、\$a_t, b_t, c_t\$ の中で 2 番目に大きい値を \$\text{mid}(a_t, b_t, c_t)\$ と表すことにすると、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mid}(a_t, b_t, c_t) = 360^\circ - M - m$$

となるので、数列 \$\{\text{mid}(a_t, b_t, c_t)\}\$ も収束する。また、その収束値を \$K\$ とおく。このと

き、次のいずれかが成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad \frac{pK + qm}{p + q} = M$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{pK + qm}{p + q} = K$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{pK + qm}{p + q} = m$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{pm + qK}{p + q} = M$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{pm + qK}{p + q} = K$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{pm + qK}{p + q} = m$$

①のとき、

$$m \leq \frac{pK + qm}{p + q} = M \leq K \leq M$$

より、 $K = M$ なので、 $\frac{pM + qm}{p + q} = M$ ゆ

えに、 $m = K = M$ が成り立つので、正三角形に収束する。

②のとき、

$$\frac{pK + qm}{p + q} = K \text{ より、} \frac{pm + qM}{p + q} \text{ がとり得}$$

る値は m または M なので、 $m = M$ が成り立つ。つまり、 $m = K = M$ が成り立つので、正三角形に収束することがわかる。

③について

$$\frac{pK + qm}{p + q} = m \text{ のとき } m = K \text{ が成り立つ。}$$

また、 $\frac{pM + qK}{p + q}$ の値としてあり得るのは、

K または M だが、どちらの場合においても、 $m = K = M$ が成り立つので、正三角形に収束する。

④、⑤、⑥の場合でも同様に、正三角形に収束することが確認できる。以上より、

どの場合についても、正三角形に収束する。

(Q. E. D.)

4. 今後の課題

今回は、三角形について、操作による形の変化を考察した。しかし、一般の多角形について図をかいて調べてみると、正多角形に収束することが確認できたので、その証明を完成させることが課題となる。

5. 参考文献

[1] 「イプシロン-デルタ」(数学ワンポイント双書 20), 田島一郎, 共立出版

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。

数学オリンピックの問題に関する研究

4年A組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

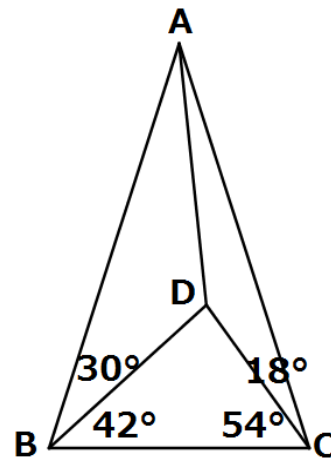
1. 要約

サイエンス研究会数学班4年生は数学オリンピックの問題について研究している。今回は、数学オリンピックの問題に関して、一般化および考察を行うことを目標とした。

キーワード 数学オリンピック、問題の一般化

2. 研究の背景と目的

数学オリンピックの問題は、難解であるとともに、数学的な美しさも併せ持っている。しかし、数学オリンピックの予選問題などは、答えだけを求めるものであり、数学的な広がりを持っていない場合が多い。そこで、今回は、過去に数学オリンピックで出題された幾何と数論の問題において、その一般化および考察を行った。



3. 研究内容

3.1 幾何

3.1.1 角度の問題

以下の問題は角度に関する問題である。

例題1

$\triangle ABC$ の内部に点 D があり、 $\angle DBA = 30^\circ$ 、 $\angle DBC = 42^\circ$ 、 $\angle DCB = 54^\circ$ 、 $\angle DCA = 18^\circ$ を満たすとき、 $\angle BAD$ の大きさを求めよ。 [第4回広中杯ファイナル問題]

この問題は以下のように解くことができる。

解答

図1は、正五角形 $EFGHI$ の内部に点 J を、 $\triangle EFJ$ が正三角形となるようにとったものである。

このとき、

$$\angle EGJ = 30^\circ, \angle JGH = 42^\circ,$$

$$\angle GHJ = 54^\circ, \angle EHJ = 18^\circ$$

であることは容易にわかる。また、 $\triangle EGH$ と $\triangle ABC$ は相似であるから、点 D と点 J はこの相似変換において対応する。ゆえに、 $\angle GEJ = \angle BAD$ であり、 $\angle GEJ = 24^\circ$ であるから、 $\angle BAD = 24^\circ$ を得る。 (終)

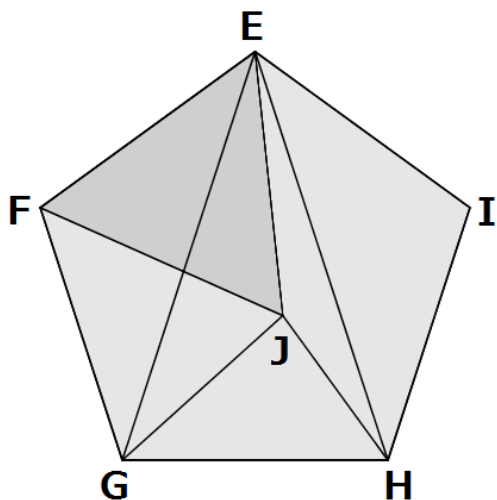


図 1

このような角度の問題は、上記のように特殊な解法である場合がほとんどであるため、初等幾何的に一般化することは難しい。しかし、三角関数を用いることで、この問題は以下のように一般化することができた。

定理 1

△ABC とその内部にある点 D において、
 $\angle DBA = \theta_1$, $\angle DBC = \theta_2$, $\angle DCB = \theta_3$,

$\angle DCA = \theta_4$, $\angle BAC = \theta_5$, $\angle BAD = x$ と

するとき、

$$\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan \theta_5} = \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_4}{\sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5}$$

が成り立つ。

(証明)

図 2 のように、点 D から辺 BC へ降ろした垂線の足を H とする。また、 $CD = a$ とおく。すると、 $DH = a \sin \theta_3$ より、

$$\sin \theta_2 = \frac{DH}{DB} = \frac{a \sin \theta_3}{DB} \text{ ゆえ、}$$

$$DB = \frac{a \sin \theta_3}{\sin \theta_2} \dots \text{①}$$

ここで、△ABD と △ACD において、正弦定理より、

$$\frac{\sin \theta_1}{AD} = \frac{\sin x}{DB} \dots \text{②}$$

$$\frac{\sin \theta_4}{AD} = \frac{\sin(\theta_5 - x)}{a} \dots \text{③}$$

を得る。②に①を代入して、

$$\frac{\sin \theta_1}{AD} = \frac{\sin x \sin \theta_2}{a \sin \theta_3} \dots \text{④}$$

③, ④をそれぞれ $\frac{1}{AD}$ について解くことで、

$$\frac{\sin(\theta_5 - x)}{a \sin \theta_4} = \frac{\sin x \sin \theta_2}{a \sin \theta_1 \sin \theta_3} \text{ から、}$$

$$\frac{\sin(\theta_5 - x)}{\sin x} = \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_4}{\sin \theta_1 \sin \theta_3} .$$

加法定理より、

$$\frac{\sin \theta_5 \cos x - \cos \theta_5 \sin x}{\sin x} = \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_4}{\sin \theta_1 \sin \theta_3} ,$$

$$\frac{\sin \theta_5}{\tan x} - \cos \theta_5 = \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_4}{\sin \theta_1 \sin \theta_3}$$

これを両辺 $\sin \theta_5$ で割ることで、求める式が得られる。 (Q. E. D.)

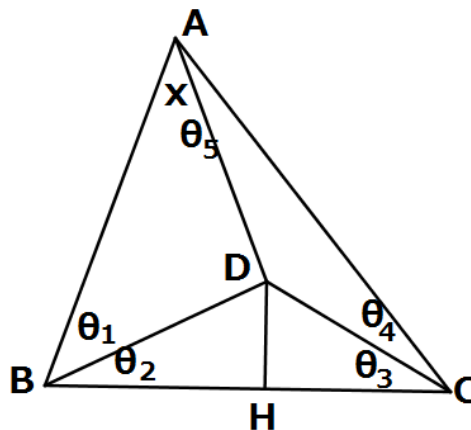


図 2

ちなみに、先程の例題 1 の角度を定理 1 に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan 36^\circ} &= \frac{\sin 42^\circ \sin 18^\circ}{\sin 30^\circ \sin 54^\circ \sin 36^\circ}, \\
 \frac{1}{\tan x} &= \frac{2 \sin 42^\circ \sin 18^\circ}{\cos 36^\circ \sin 36^\circ} + \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{4 \sin 42^\circ \sin 18^\circ}{\sin 72^\circ} + \frac{\cos 36^\circ}{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ} \\
 &= \frac{8 \sin 42^\circ \sin^2 18^\circ + \cos 36^\circ}{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ} = \frac{8 \sin 18^\circ \left\{ -\frac{1}{2} (\cos 60^\circ - \cos 24^\circ) \right\} + \cos 36^\circ}{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ} \\
 &= \frac{4 \sin 18^\circ \cos 24^\circ - 2 \sin 18^\circ + \sin 54^\circ}{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ} \\
 &= \frac{4 \sin 18^\circ \cos 24^\circ - \sin 18^\circ + 2 \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ} = \frac{4 \cos 24^\circ - 1 + 2 \cos 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} \\
 &= \frac{2 \cos 24^\circ \sin 24^\circ - \frac{1}{2} \sin 24^\circ + \cos 36^\circ \sin 24^\circ}{\cos 18^\circ \sin 24^\circ}
 \end{aligned}$$

ここで、分子は、

$$\begin{aligned}
 &2 \cos 24^\circ \sin 24^\circ - \frac{1}{2} \sin 24^\circ + \cos 36^\circ \sin 24^\circ \\
 &= \sin 48^\circ - \frac{1}{2} \sin 24^\circ + \frac{1}{2} \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \sin 12^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cos 42^\circ + \frac{1}{2} (\sin 48^\circ - \sin 12^\circ) + \frac{1}{2} (\sin 60^\circ - \sin 24^\circ) \\
 &= \frac{1}{2} \cos 42^\circ + \cos 42^\circ \sin 18^\circ + \cos 30^\circ \sin 18^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cos 42^\circ + (\cos 42^\circ + \cos 30^\circ) \sin 18^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cos 42^\circ + 2 \cos 36^\circ \cos 6^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{2} \cos 42^\circ + 2 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cos 6^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cos 42^\circ + \frac{1}{2} \cos 6^\circ = \cos \frac{42^\circ - 6^\circ}{2} \cos \frac{42^\circ + 6^\circ}{2} = \cos 18^\circ \cos 24^\circ
 \end{aligned}$$

となるので、 $\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos 24^\circ}{\sin 24^\circ}$ より、 $x = 24^\circ$ を得る。

しかし、上の計算のように、実際に角度を求めようとすると複雑になり、問題を解く際はあまり実用的ではない。

3.1.2 面積

次に、面積を求める問題について考える。

例題 2

$\triangle ABC$ の重心を G とする。 $GA = 2\sqrt{3}$ 、 $GB = 2\sqrt{2}$ 、 $GC = 2$ であるとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。 [日本数学オリンピック 1991]

解答

図 3 のように、 AG の延長上に点 P を、 $AG = GP$ をみたすようにとる。 AP と BC の交点を D とすると、 D は辺 BC の中点なので、 $GD = DP = \frac{1}{2}AG$ が成り立つ。したがって、四角形 $BGCP$ は平行四辺形であり、 $BP = GC = 2$ である。

さらに、 $GB^2 + BP^2 = 12 = GP^2$ より、 $\angle GBP = 90^\circ$ だから、四角形 $BGCP$ は長方形である。よって、

$$\triangle BGC = \frac{1}{2} \times BG \times GC = 2\sqrt{2}.$$

ゆえに、 $\triangle ABC = 3\triangle BGC = 6\sqrt{2}$ と求められた。 (終)

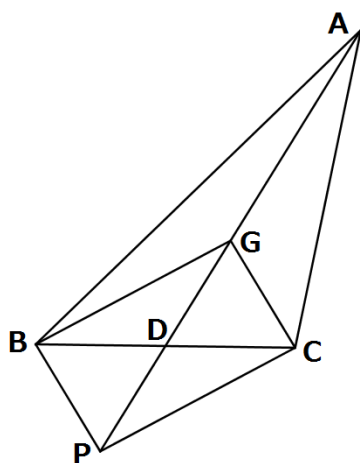


図 3

この問題は、 $\angle GBP = 90^\circ$ を導くことで、面積が求めやすくなっている。また、この問題について G から各頂点までの距離を文字でおくことにより、以下の結果が得られた。

定理 2

面積が S である $\triangle ABC$ の重心を G とし、 $GA = a$ 、 $GB = b$ 、 $GC = c$ とする。

このとき、

$$S = \frac{3}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

が成り立つ。

(証明)

直線 AG と辺 BC の交点を M とする。このとき、 M は辺 BC の中点である。また、重心の性質から、 $AG : GM = 2 : 1$ であるから、 $GM = \frac{a}{2}$ とかける。ここで、 $\triangle GBC$ に

おいて、中線定理より、

$$b^2 + c^2 = 2 \left(\frac{a^2}{4} + BM^2 \right) = \frac{a^2}{2} + 2BM^2$$

なので、

$$BC^2 = 4BM^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

同様にして、

$$CA^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$AB^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。ところで、いま、

$$S = \frac{1}{2} \times CA \times AB \times \sin \angle CAB$$

であるが、この式を両辺 2 倍してから 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 4S^2 &= CA^2 AB^2 \sin^2 \angle CAB \\ &= CA^2 AB^2 (1 - \cos^2 \angle CAB) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= CA^2 AB^2 \left\{ 1 - \left(\frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} \right)^2 \right\} \\
&= CA^2 AB^2 - \frac{1}{4} (CA^2 + AB^2 - BC^2)^2 \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 4CA^2 AB^2 - (CA^2 + AB^2 - BC^2)^2 \right\}
\end{aligned}$$

となるので、この式に①, ②, ③を代入して、整理すると以下を得る。

$$4S^2 = \frac{1}{4} (18a^2b^2 + 18b^2c^2 + 18c^2a^2 - 9a^4 - 9b^4 - 9c^4)$$

ゆえに、両辺を $\frac{1}{4}$ 倍してから平方根をとると、示すべき等式が導かれる。(Q. E. D.)

上述の例 2 は重心についての問題だが、これを内心で考えると、次の定理が成り立つことがわかった。

定理 3

$\triangle ABC$ において、内心を I とし、 $IB \cdot IC = \alpha$, $IC \cdot IA = \beta$, $IA \cdot IB = \gamma$ とする。また、 $\angle IBC = \theta$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
&\gamma \alpha \sin^3 \theta \\
&\quad + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \sin^2 \theta - \beta^2 = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明)

図 4 のように、 $IA = a$, $IB = b$, $IC = c$ とおく。 $\triangle IAB$ において、正弦定理より、

$$\frac{a}{\sin \theta} = \frac{b}{\sin \angle IAB}, \quad \sin \angle IAB = \frac{b \sin \theta}{a}$$

より、

$$\cos^2 \angle IAB = 1 - \frac{b^2 \sin^2 \theta}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2 \sin^2 \theta}{a^2}$$

ここで、 $\angle BAC < 180^\circ$ より、 $\angle IAB < 90^\circ$ であるから、 $\cos \angle IAB > 0$ である。ゆえに、

$$\sin \angle IAB = \frac{b \sin \theta}{a} \quad \dots \text{①}$$

$$\cos \angle IAB = \frac{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \theta}}{a} \quad \dots \text{②}$$

が成り立つ。

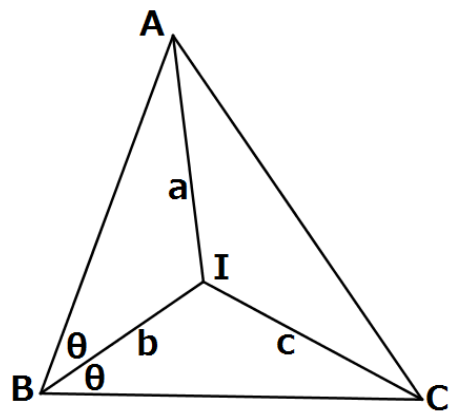


図 4

また、 $\triangle IBC$ において、正弦定理より、

$$\sin \angle BCI = \frac{b \sin \theta}{c} \quad \dots \text{③}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\angle BCI &= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABC - \angle CAB) \\
&= 90^\circ - \theta - \angle IAB
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\sin \angle BCI &= \sin \{90^\circ - (\theta + \angle IAB)\} \\
&= \cos (\theta + \angle IAB) \\
&= \cos \theta \cos \angle IAB - \sin \theta \sin \angle IAB
\end{aligned}$$

①, ②を代入して、

$$\begin{aligned}
\sin \angle BCI &= \frac{\cos \theta \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \theta}}{a} - \frac{b \sin^2 \theta}{a}
\end{aligned}$$

ゆえに、③とあわせて、

$$\frac{\cos \theta \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \theta}}{a} = \frac{b \sin \theta}{c} + \frac{b \sin^2 \theta}{a}$$

両辺を 2 乗してから、整理すると、

$$2ab^2c \sin^3 \theta + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \sin^2 - c^2a^2 = 0$$

この式において、 $bc = \alpha, ca = \beta, ab = \gamma$ とおけば、求める等式が得られる。

(Q. E. D.)

この等式を $\sin \theta$ についての方程式とみて $\sin \theta$ を求めれば、三角形 ABC の面積を求めることができるが、 $\sin \theta$ を求めるには 3 次方程式を解く必要があり、 $\triangle ABC$ の面積を IA, IB, IC だけで表すと複雑な式となる。

次も、五心が用いられている問題である。

例題 3

$\triangle ABC$ の内心を I, 外心を O とする。 $AB=2, AC=3, \angle AIO=90^\circ$ が成立しているとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。 [日本ジュニア数学オリンピック 2011 予選]

解答

図 5 のように、辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とすると、 $\angle AMO = \angle ANO = 90^\circ$ が成り立つ。また、 $\angle AIO = 90^\circ$ であるから、円周角の定理の逆より、5 点 A, M, I, O, N は同一円周上にある。特に、四角形 AMIN は円に内接するので、

$$\angle INC = 180^\circ - \angle IMB \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、三角不等式より、 $BC > AC - AB = 1 = AM$ なので、辺 BC 上に、 $BD=1$ となる点 D をとることができる。このとき、 $\angle MBI = \angle DBI$ であるから、 $\triangle MBI \equiv \triangle DBI$ である。ゆえに、 $\angle IMB =$

$\angle IDB$ である。①とあわせると、

$$\begin{aligned} \angle IDC &= 180^\circ - \angle IDB \\ &= 180^\circ - \angle IMB = \angle INC \end{aligned}$$

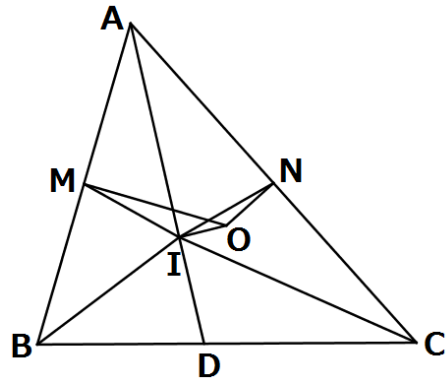


図 5

また、 $\angle DCI = \angle NCI$ であるから、 $\triangle IDC \equiv \triangle INC$ が成り立つ。よって、

$$CD = CN = \frac{3}{2} \text{ であるから、} BC = \frac{5}{2}.$$

3 辺の長さが得られたので、ヘロンの公式に代入すると、 $\triangle ABC = \frac{15\sqrt{7}}{16}$ を得る。

(終)

この問題において、辺の長さである 2 や 3 という数値自体にはそれほど意味がなく、

$$\angle AIO = 90^\circ \text{ かつ } \frac{3}{2} AB \leq AC \text{ を満たすとき、}$$

$$BC = \frac{AB + AC}{2} \text{ と表せることは容易にわかる。}$$

つまり、 $\angle AIO$ の大きさが 90° であるということが、この問題で最も重要なポイントであることがわかる。そこで、 $\angle AIO = \theta$ とすると、以下の定理が得られる。

定理 4

鋭角三角形 ABC において、内心を I, 外心を O とする。また、 $AB = c, AC = b,$

$\frac{3}{2}c \leq b$ とし、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R

とする。 $\angle AIO = \theta$ として、

$$\angle ABO < \theta < 180^\circ - \angle ABO$$

を満たすとき、以下が成り立つ。

$$\left(\frac{b}{R} + \frac{1}{\tan \theta}\right)\sqrt{4R^2 - c^2} + \left(\frac{c}{R} - \frac{1}{\tan \theta}\right)\sqrt{4R^2 - b^2} = b + c$$

(証明)

辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とする。 $\angle ABO < \theta < 180^\circ - \angle ABO$ より、辺 AB 上に $\angle ADO = \theta$ とする点 D をとることができる(図6)。また、 $c < b$ なので、 $\angle ACB < \angle ABC$ であり、

$$\angle ABO = 90^\circ - \angle ACB,$$

$$\angle CAO = 90^\circ - \angle ABC$$

とかけるので、 $\angle CAO < \angle ABO < \theta$,

$\theta < 180^\circ - \angle ABO < 180^\circ - \angle CAO$ が成り立つので、辺 AC 上に $\angle OEC = \theta$ とする点 E をとることができる。

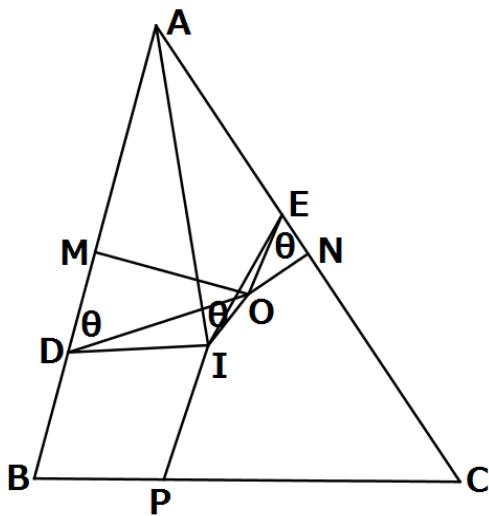


図6

このとき、 $OM^2 = OA^2 - AM^2$

$$= R^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{4R^2 - c^2}{4}$$

$$\text{より、} OM = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2}.$$

そして、 $\angle OMD = 90^\circ$ であるから、

$\theta < 90^\circ$ のとき、

$$\tan \theta = \frac{OM}{DM} = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2DM},$$

$$DM = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2 \tan \theta}$$

$$\text{ゆえに、} BD = \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2 \tan \theta}.$$

$\theta \geq 90^\circ$ のときは、点 D が線分 AM 上にあ

るが、 $DM = -\frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2 \tan \theta}$ が成り立つので、

この場合も、 $BD = \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2 \tan \theta}$ とかけ

る。同様にして、 $CE = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2 \tan \theta}$

を得る。

いま、三角不等式より、 $BC > b - c \geq \frac{c}{2}$

$> BD$ なので、辺 BC 上に、 $BP = BD$ とする点 P をとることができる。すると、

$\triangle BDI \equiv \triangle BPI$ であるから、

$$\angle IPC = 180^\circ - \angle BDI \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 $\angle ADO = \theta$, $\angle AIO = \theta$,

$\angle AEO = 180^\circ - \theta$ より、5点 A, D, I, O, E

は同一円周上にあるので、特に、四角形 $ADIE$ について、

$$\angle IEC = 180^\circ - \angle BDI \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より、 $\angle IPC = \angle IEC$ なので、

$\triangle IPC \equiv \triangle IEC$. ゆえに、

$$CP = CE = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2 \tan \theta}$$

つまり、

$$BC = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2 \tan \theta} + \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2 \tan \theta} \quad \dots \textcircled{3}$$

一方、正弦定理より、

$$\sin \angle ABC = \frac{b}{2R}, \quad \sin \angle BCA = \frac{c}{2R}$$

であるから、

$$\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R},$$

$$\cos \angle BCA = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$$

を得る。ここで、A から BC へ降ろした垂線の足を H とすると、

$$BH = \frac{c\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}, \quad CH = \frac{b\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$$

とかけるので、

$$BC = \frac{c\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R} \quad \dots \textcircled{4}$$

と表すことができる。そして、③を④へ代入してから整理すると、求める式が得られる。(Q. E. D.)

この一般化した命題も、もともとの問題の解答と同じアイデアで証明することができた。しかし、 θ の角度によっては、補助線を引くことができない場合があり、 $\angle ABO < \theta < 180^\circ - \angle ABO$ という条件が必要となる。

3.1.3 円に外接する四角形

最後に、円に外接する四角形に関する問題について考える。

例題 4

四角形 ABCD が点 O を中心とする円に外接しており、OA=5, OB=6, OC=7, OD=

8 が成立している。線分 AC の中点を M, 線分 BD の中点を N とするとき、OM : ON を求めよ。 [日本数学オリンピック 2011 予選]

解答

図 7 のように、円の半径を r とし、辺 DA, AB, BC, CD と円の接点をそれぞれ P, Q, R, S とする。また、線分 PQ, QR, RS, SP の中点をそれぞれ A', B', C', D' とする。

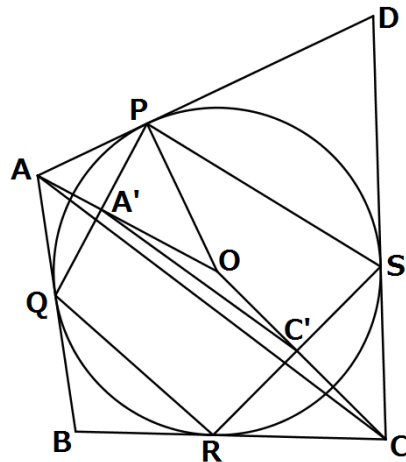


図 7

このとき、3 点 A, A', O は同一直線上にあり、 $\angle OA'P = 90^\circ$, $\angle OPA = 90^\circ$ であるから、 $\triangle OPA$ と $\triangle OA'P$ は相似である。ゆえに、 $AO : PO = PO : A'O$ から、

$$A'O = \frac{r^2}{AO}.$$

同様にして、 $C'O = \frac{r^2}{CO}$ を得る。よって、

$A'O : C'O = CO : AO$ であるから、 $\triangle OAC$ と $\triangle OC'A'$ は相似である。ここで、線分 $A'C'$ の中点を M' とすると、M と M' はこの相似により対応するので、

$$OM : OM' = OA : OC'.$$

ゆえに、 $OM' = \frac{OM \cdot r^2}{OA \cdot OC}$. 同様にして、線分 $B'D'$ の中点を N' とすると、

$$ON' = \frac{ON \cdot r^2}{BO \cdot DO}.$$

ここで、四角形 $A'B'C'D'$ は平行四辺形なので、線分 $A'C'$ と $B'D'$ はそれぞれの中点で交わり、 $M' = N'$ である。ゆえに、

$$\frac{OM \cdot r^2}{OA \cdot OC} = \frac{ON \cdot r^2}{OB \cdot OD}.$$

したがって、

$$\begin{aligned} OM : ON &= OA \cdot OC : OB \cdot OD \\ &= 35 : 48 \end{aligned}$$

より、答えは $35 : 48$. (終)

この問題では、 $M' = N'$ というものを使わなければ、 $OM : ON$ を求めるのは難しい。 $M' = N'$ となるのは四角形特有の性質であるから、この問題を一般の多角形について考えると、とたんに難しくなる。そこで、問題の図において、他に性質がないか調べたところ、次の定理を得た。

定理 5

中心 O の円に外接する四角形 $ABCD$ において、 $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$ とするとき、以下が成り立つ。

$$AB = ab \sqrt{\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c}}{ab + cd}}$$

$$\text{または } AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

証明

まず、以下の補題が成り立つことを示す。

補題 1

$AB : CD = ab : cd$ であり、

$$\angle AOB = \angle COD$$

または $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

(補題 1 の証明)

辺 DA, AB, BC, CD と円の接点をそれぞれ P, Q, R, S とする。また、 PQ, QR, RS, SP の中点をそれぞれ A', B', C', D' とすると、

例題 4 の解答より、 $OA' = \frac{r^2}{OA}$, $OB' = \frac{r^2}{OB}$

とかける。

ゆえに、 $OA : OB = OB' : OA'$ なので、 $\triangle OAB$ と $\triangle OB'A'$ は相似である。よって、

$$AB : A'B' = OA : OB',$$

$$A'B' = \frac{AB \cdot OB'}{OA} = \frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}.$$

ここで、 A', B' はそれぞれ PQ, QR の中点なので、 $2A'B' = PR$. ゆえに、

$$PR = \frac{2AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}.$$

同様にして、 $PR = \frac{2CD \cdot r^2}{OC \cdot OD}$ を得るので、

$$\frac{2AB \cdot r^2}{OA \cdot OB} = \frac{2CD \cdot r^2}{OC \cdot OD}.$$

したがって、 $AB : CD = ab : cd$ を得る。ここで、 O から辺 AB, CD に降ろした垂線の長さは等しいので、 $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ の面積比は $ab : cd$ となる。一方、

$$\triangle OAB : \triangle OCD$$

$$= ab \sin \angle AOB : cd \sin \angle COD$$

とかけるので、 $\sin \angle AOB = \sin \angle COD$.

ゆえに、 $\angle AOB = \angle COD$ または、 $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ である。 (Q. E. D.)

(定理 5 の証明の続き)

$\angle AOB$ が 90° であるときと、 90° でないときに場合分けをする。

(i) $\angle AOB=90^\circ$ のとき

三平方の定理より、 $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ が成り立つ。

(ii) $\angle AOB \neq 90^\circ$ のとき

補題 1 より、正の実数 k を用いて、 $AB = kab$, $CD = kcd$ とかける。ここで、 $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ であるから、 $\angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$ が成り立つので、

$$\cos \angle AOB = -\cos \angle COD$$

が成り立つ。ここで、

$$\cos \angle AOB = \frac{a^2 + b^2 - (kab)^2}{2ab},$$

$$\cos \angle COD = \frac{c^2 + d^2 - (kcd)^2}{2cd} \text{ なので、}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - (kab)^2}{2ab} = -\frac{c^2 + d^2 - (kcd)^2}{2cd}$$

が成り立つ。これを k について解くと、

$$k = \sqrt{\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c}}{ab + cd}}$$

$$AB = kab = ab \sqrt{\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c}}{ab + cd}}$$

を得る。ゆえに、題意は示された。(Q. E. D.)

また、以下の定理を得た。

定理 6

円に内接する四角形 $ABCD$ について、対角線の交点を O とする。 O から、直線 AB , BC , CD , DA へ降ろした垂線の足をそれぞれ X, Y, Z, W とする。このとき、四角形

$XYZW$ は中心 O の円に外接する。

(証明)

図 8 において、円周角の定理より、 $\angle DAO = \angle OBC$ 。また、 $\angle AWO = \angle BYO = 90^\circ$ より、 $\angle AOW = \angle BOY$ 。ここで、四角形 $AXOW$ と四角形 $BXOY$ は円に内接するので、 $\angle AOW = \angle AXW$, $\angle BOY = \angle BXY$ が成り立つ。ゆえに、 $\angle AXW = \angle BXY$ なので、 $\angle WXO = \angle YXO$ を得る。

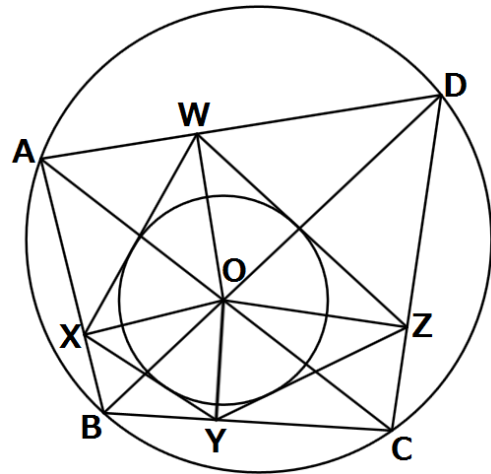


図 8

よって、 O は $\angle WXY$ の二等分線上にある。同様に、 O は 4 つの内角の二等分線上にあることが示されるので、四角形 $XYZW$ は、中心を O とする円に外接する。

(Q. E. D.)

ちなみに、定理 6 は次の問題から着想を得たものである。

例題 5

円周 X は四角形 $PQRS$ に内接している。また、四角形 $PQRS$ の辺を延長した直線のうち 3 本と接するような円周 A, B, C, D を図 9 のようにとる。円周 A, B, C, X の半径はそれぞれ 2, 1, 4, 3 である。このとき、円

周 D の半径を求めよ。 [日本ジュニア数学オリンピック 2012 予選]

次に、この問題について考察していく。

参考文献[2]には、点 P, Q, R, S から円の接点までの長さに着目した解答が記述されていたが、点 P, Q, R, S から円の中心までの長さに着目した次のような解き方も可能であることを発見した。

別解

5つの円周 A, B, C, D, X の中心をそれぞれ A_0, B_0, C_0, D_0, O として、半径をそれぞれ a, b, c, d, x とする(図9)。

$\angle C_0PO = \angle C_0QO = 90^\circ$ より、 $\angle POQ = 180^\circ - \angle PC_0Q$ であるから、 $\sin \angle POQ = \sin \angle PC_0Q$ が成り立つ。ゆえに、

$$\begin{aligned} \triangle POQ : \triangle PC_0Q \\ = OP \cdot OQ : C_0P \cdot C_0Q \end{aligned}$$

がわかる。一方、線分 PQ は共通なので、 $\triangle POQ : \triangle PC_0Q = x : c$ であることがわかる。

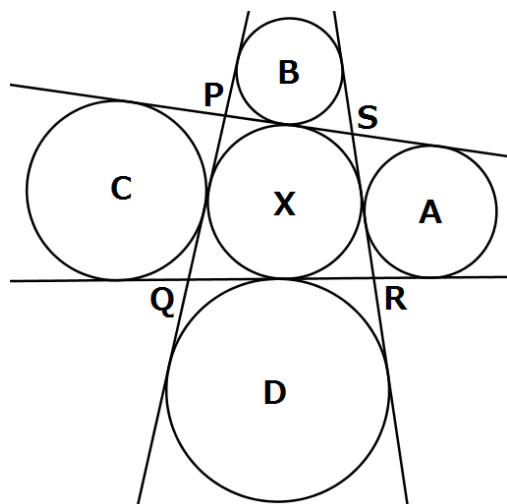


図9

よって、 $OP \cdot OQ : C_0P \cdot C_0Q = x : c$ より、

$$C_0P \times C_0Q \times \frac{x}{c} = OP \times OQ \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様にして、

$$A_0S \times A_0R \times \frac{x}{a} = OS \times OR \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$B_0S \times B_0P \times \frac{x}{b} = OS \times OP \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$D_0Q \times D_0R \times \frac{x}{d} = OQ \times OR \quad \cdots \textcircled{4}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \times \textcircled{2} &= OP \cdot OQ \cdot OR \cdot OS \\ &= \textcircled{3} \times \textcircled{4} \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} A_0S \times A_0R \times C_0P \times C_0Q \times \frac{x}{a} \times \frac{x}{c} \\ = B_0S \times B_0P \times D_0Q \times D_0R \times \frac{x}{b} \times \frac{x}{d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0S \times A_0R \times C_0P \times C_0Q \times bd \\ = B_0S \times B_0P \times D_0Q \times D_0R \times ac \end{aligned}$$

を得る。いま、 A_0 から RS へ降ろした垂線の足を I, B_0 から SP へ降ろした垂線の足を J とすると、 $\triangle A_0IS \sim \triangle B_0JS$ より、 $A_0S : B_0S = a : b$ が成り立つ。ゆえに、

$$B_0S = \frac{b}{a} A_0S \text{ が成り立つ。同様にして、}$$

$$B_0P = \frac{b}{c} C_0P, \quad D_0Q = \frac{d}{c} C_0Q, \quad D_0R = \frac{d}{a} A_0R$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} A_0S \times A_0R \times C_0P \times C_0Q \times bd \\ = A_0S \times A_0R \times C_0P \times C_0Q \\ \times \frac{b}{a} \times \frac{b}{c} \times \frac{d}{c} \times \frac{d}{a} \times ac \end{aligned}$$

よって、 $ac = bd$ を得るので、 $d = 8$ である。(終)

この解答の最後の式から、一般に、

$$A_0S \times A_0R \times C_0P \times C_0Q \\ = B_0S \times B_0P \times D_0Q \times D_0R$$

が成立することがわかる。

3. 2 数論

数論は、以下の問題について詳しく考察することができた。

例題 6

$8^n + n$ が $2^n + n$ で割り切れるような正整数 n をすべて求めよ。 [日本数学オリンピック 2009 本選]

解答

まず、以下のように変形する。

$$8^n + n = (2^n)^3 + n \\ = (2^n + n)((2^n)^2 - 2^n \cdot n + n^2) - n^3 + n.$$

よって、 $8^n + n$ が $2^n + n$ で割り切れることは、 $n^3 - n$ が $2^n + n$ で割り切れることと同値である。ゆえに、 $n^3 - n \geq 2^n + n$ である必要がある。

$n=1$ のときは、 $n^3 - n = 0$ であり、条件を満たす。 $n \geq 2$ のときは、 $n^3 > 2^n$ であることが必要である。ここで、正整数 n に対して、 $f(n) = \frac{n^3}{2^n}$ とすると、 $n \geq 4$ について、

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \\ \leq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 < 1$$

である。また、 $f(10) < 1$ であるから、 $n \geq 10$ について、 $n^3 < 2^n$.

ゆえに、 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ について調べればよい。すると、 $n = 1, 2, 4, 6$ を得る。 (終)

この問題の一般形として、次の定理が得られた。

定理 7

a を 2 以上の整数、 k を 3 以上の奇数とする。 $a^{nk} + n$ が $a^n + n$ で割り切れるような正の整数 n について、以下が成り立つ。ただし、 e はネイピア数を表す。

$$(1) k \leq a \text{ のとき、 } n \leq k - 1$$

$$(2) 3 \leq a < k \text{ のとき、 } n < k \cdot \frac{\log k - 1}{\log a - 1}$$

$$(3) a = 2 \text{ のとき、}$$

$$n < k \cdot \frac{\log k + \log 3 - 1}{\log 2 - \frac{1}{3}}$$

(証明)

$$(1) k \leq a \text{ とする。}$$

k は奇数であるから、任意の整数 x, y について、 $x^k + y^k$ は $x + y$ で割り切れる。ゆえに、以下が成り立つ。

$$a^{nk} + n = (a^n)^k + n^k - (n^k - n) \\ \equiv n^k - n \pmod{a^n + n}$$

つまり、 $a^{nk} + n$ が $a^n + n$ で割り切れることは、 $n^k - n$ が $a^n + n$ で割り切れることと同値である。ゆえに、 $n^k - n \geq a^n + n$ が必要である。

$n=1$ のときは $n^k - n = 0$ なので、条件を満たす。 $n \geq 2$ のときは、 $n^k > a^n$ であることが必要である。いま、 $k \leq a$ であるから、 $n \geq k$ について条件を満たすと仮定すると、 $n^k \leq k^n \leq a^n$ が成り立つので、矛盾する。

ゆえに、 $n \leq k-1$ が必要である。

(2) $3 \leq a < k$ とする。

先程の議論から、 $n \geq 2$ のとき、 $n^k > a^n$ となる必要がある。ここで、

$f(n) = \frac{n^k}{a^n}$ とすると、 $n \geq k$ において、以

下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \\ &\leq \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \end{aligned}$$

いま、 $k \geq 3$ について、数列 $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

を考えると、この数列は単調増加であり、ネイピア数 e に収束する。また、 $a \geq 3$ であることから、以下を得る。

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} \leq \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < \frac{e}{a} < 1.$$

すなわち、 $f(n)$ は $n \geq k$ において単調減少である。また、 $k \geq a$ より、 $f(k) = \frac{k^k}{a^k} > 1$

なので、 $1 < f(k+m)$ を満たす実数 m の範囲について調べればよい。

いま、 $\frac{f(n+1)}{f(n)} < \frac{e}{a}$ 、 $f(k) = \frac{k^k}{a^k}$ より、

$1 < f(k+m) < \frac{k^k}{a^k} \cdot \frac{e^m}{a^m}$ が成り立つ。

ゆえに、 $a^k \cdot a^m < k^k \cdot e^m$ 。

ここで、正の実数 p を用いて、 $m = pk$ とおくと、 $a^k \cdot a^{pk} < k^k \cdot e^{pk}$ から、

$(a^{p+1})^k < (k \cdot e^p)^k$ 、 $a^{p+1} < k \cdot e^p$ より

$$\left(\frac{a}{e}\right)^p \cdot a < k, \quad p < \log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a}.$$

ゆえに、 $m < k \log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a}$ であり、

$n < k + m < k \left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a} + 1 \right)$ を満たす n について $f(n) > 1$ である。ここで、

$$k \left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a} + 1 \right) = k \cdot \frac{\log k - 1}{\log a - 1}$$

より、題意は示された。

(3) $a = 2$ とする。

先程の議論同様、 $f(n) = \frac{n^k}{2^n}$ について考

える。すると、 $n \geq 3k$ において、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{3k}\right)^{3k} \right\}^{\frac{1}{3}} < \frac{\sqrt[3]{e}}{2} < 1. \end{aligned}$$

すなわち、 $f(n)$ は $n \geq 3k$ において単調減少である。また、 $k \geq 3$ より、

$$f(3k) = \frac{(3k)^k}{2^{3k}} = \left(\frac{3k}{8}\right)^k > 1$$

なので、 $1 < f(3k+m)$ を満たす実数 m の範囲について調べればよい。(2)と同様に計

算すると、 $m < k \log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3k}{8}$ が導かれ、

$n < k \left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3k}{8} + 3 \right)$ を満たす n について

$f(n) > 1$ である。ここで、

$$k \left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3k}{8} + 3 \right) = k \cdot \frac{\log k + \log 3 - 1}{\log 2 - \frac{1}{3}}$$

より、題意は示された。(Q. E. D.)

例題 6 は $(a, k) = (2, 3)$ の場合であり、これを定理 6 の(3)に代入すると、

$$n < k \cdot \frac{\log k + \log 3 - 1}{\log 2 - \frac{1}{3}} \approx 9.98$$

となり、例題の解答で示された $n < 10$ と一致する。しかし、定理 6 の(2)において、 $a = 4, k = 13$ とすると、

$$n < k \cdot \frac{\log k - 1}{\log a - 1} \approx 52.66$$

となるが、GeoGebra を用いてグラフ

$$y = \frac{x^{13}}{4^x} \text{ と } y = 1 \text{ の交点を求めたところ、}$$

$x = 32.7$, すなわち、 $n < 32.7$ が得られ、 (a, k) の値によっては誤差が大きくなる。

そこで、 $n^k - n = a^n + n$ となる場合を考える。 $n = 1$ のとき、明らかに成り立たないので、 $n \geq 2$ とする。 n を m 回 ($m \geq 1$) 割り切る素数 p について、 a^n は p で割り切れるので、 a は p で 1 回以上割り切れる。いま、 $p \geq 3$ とすると、 $n^k - a^n = 2n$ より、左辺は p で $\min(mk, p^m)$ 回以上割り切れ、右辺は m 回 p で割り切れるので、

$$\min(mk, p^m) \leq m$$

である。 $\min(mk, p^m) = mk$ のとき、 $k \geq 3$ であるから、明らかに不適である。

$\min(mk, p^m) = p^m$ のときも、 $p \geq 3$ より、 $p^m > m$ が成り立つので、不適となり、 $p = 2$ である。

このとき、 $\min(mk, 2^m) \leq m+1$ であるが、 $\min(mk, 2^m) = mk$ のときは適さないので、 $2^m \leq m+1$ が成り立つ。 $m \geq 1$ より、 $2 \leq m+1$ であるから、 $m = 1$ を得る。また、 $p \geq 3$ のとき矛盾することから、 $n = 2$ である。よって、 $2^k - a^2 = 4$ が成り立つ。このとき、 a は偶数であるから、正の整数 q

を用いて、 $a = 4q$ または $a = 4q - 2$ とかける。 $a = 4q$ とかけたとすると、 $k \geq 3$ から、左辺は 2 で 3 回以上割り切れ、右辺は 2 で 2 回しか割り切れないので、矛盾する。つまり、 $a = 4q - 2$ である。このとき、

$$2^k = a^2 + 4 = (4q - 2)^2 + 4$$

であり、右辺を展開すると $16q^2 - 16q + 8$ となり、これは 2 で 3 回しか割り切れないので、 $k = 3$ を得る。よって、 $q = 1$ より、 $a = 2$ であるから、 $(a, k) = (2, 3)$ の場合を除いて、 $n^k - n = a^n + n$ を満たす n は存在しない。

次に、 $n^k - n = 2(a^n + n)$ となる場合に

について考える。 $n^k - 2a^n = 3n$ となるから、 n を m 回割り切る素数 p について、同様の議論により、 $p \geq 5$ とすると矛盾が起きるので、 $p = 2, 3$ を得る。

$$p = 2 \text{ のとき、} \min(mk, 2^m + 1) \leq m \text{ と}$$

なるが、これを満たす m は存在しない。また、 $p = 3$ のとき、 $\min(mk, 3^m) \leq m+1$

となるが、これを満たす m は存在しない。

すなわち、 $n^k - n = 2(a^n + n)$ を満たす n は存在しない。

上の議論から、 $n^k - n \geq 3(a^n + n)$ となる。ゆえに、 $n^k \geq 3a^n$ となる必要があるから、 $f(n) = \frac{n^k}{a^n} > 3$ が必要である。つまり、 $a \geq 3$ のとき、 $3 < f(k+m)$ を満たす実数 m の範囲について考えればよい。上述のように計算すると、

$$n < k \left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a\sqrt[3]{3}} + 1 \right)$$

が得られる。特に、 $a = 2$ のときは、

$$n < k \left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3k}{8\sqrt[3]{3}} + 3 \right)$$

が得られ、評価を改良することができた。

もう一度、 $a = 4, k = 13$ のときを考える。上の式から、 $n < 49.82$ が得られる。また、GeoGebraを用いて交点を求めると、 $n < 31.59$ が得られるので、少しだけ精度が上がっている。

一般に、正の整数 b について、 $n^k - n \geq b(a^n + n)$ が成り立つことがわかっているとす。

$a \geq 3$ のときは、

$$n < k \left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a\sqrt[b]{b}} + 1 \right),$$

$a = 2$ のときは、

$$n < k \left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3k}{8\sqrt[b]{b}} + 1 \right)$$

が成り立つ。

しかし、 b の範囲を求める際、 b が具体的な数値である場合について考えることはそれほど難しくないが、一般的に考えることは難しい。また、例題6の解答では、最後に直接具体的な値を代入して確認しているので、一般形について、 n の具体的な値を求めることは難しい。

k の値が偶数のときは次の結果が得られた。

定理 8

a を2以上の整数、 k を2以上の偶数とする。 $a^{nk} + n$ が $a^n + n$ で割り切れるような

正の整数 n で、 a と互いに素であるものについて、以下が成り立つ。ただし、 e はネイピア数を表す。

(1) $k - 1 \leq a$ のとき、 $2 \leq n \leq k - 2$

(2) $3 \leq a < k - 1$ のとき、

$$2 \leq n < (k - 1) \left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k - 1}{a} + 1 \right)$$

(iii) $a = 2$ のとき、

$$2 \leq n < (k - 1) \left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3(k - 1)}{8} + 3 \right)$$

(証明)

まず、 $n \geq 2$ を示す。 $n = 1$ と仮定する。このとき、 $a^k + 1$ が $a + 1$ で割り切れるが、 $k = 2m$ (m は正の整数)とおくと、 $\text{mod } a + 1$ において、

$$a^k + 1 = a^{2m} - 1 + 2 = (a^2)^m - 1 + 2 \equiv 2$$

であるから、 $a \leq 1$ となるが、これは $a \geq 2$ に反する。ゆえに、 $n \geq 2$ が示された。

k は偶数であるから、整数 x, y に対して、 $x^{k-1} + y^{k-1} \equiv 0 \pmod{x + y}$ が成り立つ。ゆえに、 $\text{mod } (a^n + n)$ において、

$$\begin{aligned} a^{nk} + n &\equiv a^{nk} + n - a^n - n \\ &= a^{nk} - a^n = a^n (a^{nk-n} - 1) \\ &= a^n \left\{ (a^n)^{k-1} + n^{k-1} - n^{k-1} - 1 \right\} \\ &\equiv -a^n (n^{k-1} + 1) \end{aligned}$$

よって、 $a^n (n^{k-1} + 1)$ が $a^n + n$ で割り切れるような n について考えればよい。ここで、条件より、 a と n は互いに素なので、 $a^n + n$ と a^n は互いに素である。ゆえに、 $n^{k-1} + 1$ が $a^n + n$ で割り切れるような n について考える。 $n \geq 2$ より、 $n^{k-1} > a^n$ が必要である。

これ以降の証明は、定理 6 と同様である。

(Q. E. D.)

4. 今後の課題

今回は、特に幾何と数論の問題について考察を行ったが、不等式や場合の数、関数方程式なども一般化や考察を行っていきたい。また、問題間の関係性や有名な定理との関連を探っていくことも目標である。

5. 参考文献

(例題の解答はすべて以下の文献を参照とした。)

- [1] 「広中杯 ハイレベル中学数学に挑戦ーこれが中学数学の最高峰」, 算数オリンピック委員会 監修, 青木亮二 解説, 講談社
- [2] 「平面幾何パーフェクトマスター めざせ、数学オリンピック」, 鈴木晋一, 日本評論社
- [3] 「数学オリンピック 2011~2015」, 数学オリンピック財団, 日本評論社
- [4] 「初等整数パーフェクトマスター めざせ、数学オリンピック」, 鈴木晋一, 日本評論社

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。

物体認識のための画像解析

2年A組 中盛 楓也

望月 草馬

2年B組 小林 望

指導教員 藤野 智美

1. 要約

私たちは現在ロボットに搭載する画像処理システムについて開発をしている。今回はそのテスト段階として、映像の中からピンポン球を探し出し、座標を求めるシステムを開発した。

キーワード processing、OpenCV、AI、webカメラ、VR

2. 研究の目的と背景

現在、人が操作しなくても、AIによる自動判断で目的を達成できるロボットの開発を行っている。そのためにはwebカメラによる画像処理システムが必須になると考え、映像データのみからオブジェクトを認識し、座標を特定するシステムの開発を行った。processingとOpenCVをシステム開発のツールとして用いた。

3. ピンポン球の認識

3. 1 形状の認識

ピンポン玉を認識するために、私たちは色に注目した。ピンポン玉のオレンジという特徴的な色を認識できれば、その物体をピンポン玉として認識出来るのではないかと思い、「webカメラに写るオレンジのピクセルの平均座標=ピンポン玉」として認識させた。しかし、このプログラムではオレンジの物体全てに反応してしまい、ピンポン玉のみの認識が出来なかった。

そこで、ピンポン玉の形を認識することを試みた。ピンポン玉の円形を認識するためのアルゴリズムは以下の通りである。

- ① 画像のピクセルの色を調べ、オレンジが一番長く横に続いた場所を円形の直径とする。
- ② その円が接する正方形の場所ごとのオレンジの割合を調べる。
- ③ その正方形を図1のようにA、Bの領域に分け、Aの領域のオレンジのピクセルが5割以上、Bの領域のオレンジのピクセルが5割未満であれば、円形と認識した。その結果、ほかのオレンジ色の物体と区別して、ピンポン玉のみを認識することに成功した(図2)。

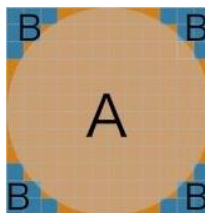


図1



図2

3. 2 webカメラからの距離

次に、認識したピンポン球の座標を求めるプログラムを考えた。最初にwebカメラとピンポン球との距離を求め、遠近法で画面上のピンポン球の大きさから距離を求める方法を考案した。まず、画面上のピンポン球のサイズとwebカメラの距離との関係を見つける。

<結果>



図3

図4

図3ではカメラからの距離が15cmで、画面上のピンポン球の直径は164ピクセルであった。図4ではカメラからの距離が30cmで、画面上のピンポン球の直径は83ピクセルであった。

これらの結果より、ピンポン球との距離(cm)を d 、画面上のピンポン球の半径(ピクセル)を r 、比例定数を a として式を立てると、以下の関係式が得られる。

$$d = \frac{a}{r}$$

写真2の場合、 $a=1230$ であり、写真3の場合 $a=1245$ となる。

<考察>

ピンポン球の直径とwebカメラからの距離はほぼ**反比例**することがわかった。

また、カメラによって比例定数が変わるが、今回のカメラでは何度か確かめた結果、比例定数は1230であった。

3. 3 左右のズレの測定

ピンポン球がwebカメラ(画面の中央)から左右にどれだけズレているかを求めるプログラムを考える。

webカメラから20cmのところに行った場合と30cmの場合で左右に6cmずらし、画面上でのずれたピクセル数を計測した。

<結果>

距離20cmの場合

→192ピクセル

距離30cmの場合

→122ピクセル

<考察>

結果から、

$$g = \frac{dp}{a}$$

d = webカメラからの距離(cm)

p = 画面上での左右のずれ(ピクセル)

g = 実際のwebカメラからの左右のずれとなり、定数 a は結果から、

$$6 = \frac{20 \times 192}{a}$$

というように求めることができ、複数回の実験の結果から a の平均は646となった。よって次の式が成り立つ。

$$g = \frac{dp}{646}$$

3.2と同じように、比例定数はwebカメラによって変わる。何度か試した結果、今回のwebカメラでは比例定数が約646ということがわかった。これらの結果をもとに

実際にロボットが行くべき道筋を求めることができる。その関係図が図5である。

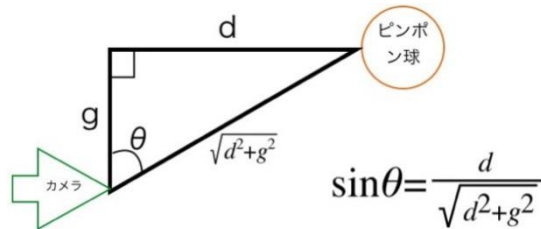


図5

4. VRへの応用

先述した内容を応用し、ヴァーチャル空間で現実の自分の動きを適用するVRコンテンツの開発を試みた。

4. 1 概要

webカメラデータから、プレイヤーの現在座標を求め、VR内のキャラクターに適用させるというものである。開発はUnityで行った。

4. 2 背景差分法

背景を事前に登録し、それをもとに人の位置を特定するという方法を試した。

アルゴリズムは以下の通りである。

- ① まず、動くものがない状態で画面上の全てのピクセルの色を記憶する(図6左上)。
- ② ①で記憶したそれぞれのピクセルで違う色を探し出し(図6中央)、そのピクセルの平均座標をプレイヤーの位置とする。

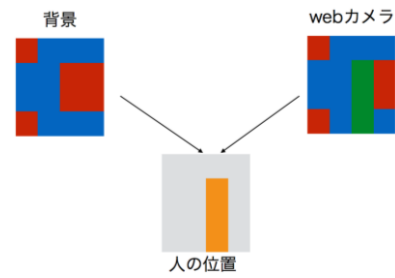


図6

<結果>

フルピクセルで調べると、ラグが多発してしまった。そのため、画素数を1/64のみ調べるといった方法をとると、多くの誤差が発生した。また、画面が少しでもずれると全てのピクセルが反応してしまい、正しく認識することができなかった。

4. 3 特徴検出法

体に色の付いたマーカを取り付け、そのマーカ的位置をwebカメラで見つけるという方法をとった。写真4はwebカメラの映像である。メカニズムは以下の通りである。

図7のようにピクセルを縦向きに調べていき、赤、緑、赤の順に並んでいるところをplayerの位置とする。

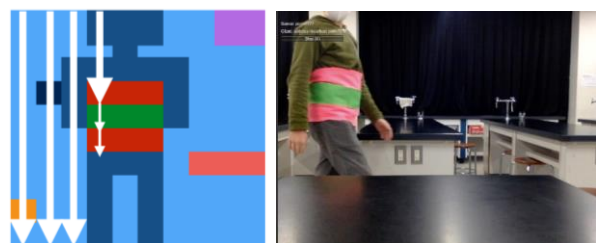


図7

図8

<結果>

今までで、一番スムーズかつ正確に反応し、この方法が一番実用的だと判断した。

5. コンテンツの仕組み

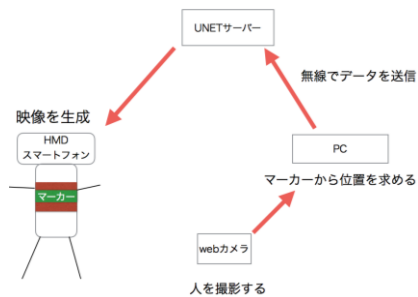


図 9

Unity を用いて、PC 上で上記の方法からプレイヤーの位置を求め、そのデータを無線で HMD 内のスマートフォンにインストールした App に送信する。そのデータをもとに、App でヴァーチャルワールド内の 1 人称映像を生成し、画面に表示する。また、スマートフォンのジャイロデータをもとに、視点の移動をする(図 9)。

6. 今後の課題

今後 VR で Kinect を使用し、人の手や足の動きも再現したり、時間のズレを解消していきたい。画像認識では、光の加減や、影のつき方で認識精度が大きく変わってしまうため、光加減を自動で認識するシステムが必要となる。今後もそのような視点を持って研究を進めたい。

また、今回はピンポン球という単純な形のオブジェクトを認識したが、もっと複雑な形のものを認識する方法も考えていきたい。加えて、複雑な形状の物体を学習するプログラムをも作っていきたい。

6. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の藤野先生には多大なご指導をいただきました。この場をお借りして深く御礼申し上げます。

眠気の数値化についての基礎研究

4年B組 熊谷 充弘

指導教員 藤野 智美

1. 要約

私は先行研究で眠気を検知し、眠気を覚ます方法を研究していた。しかし、眠気の検知や覚めたかどうかの判断材料として、「眠気の数値化」が必要であると考えた。ここでは眠気の数値化へ向けての研究過程、そして今後の展望を紹介する。

キーワード 概日リズム、副交感神経、メラトニン、錯覚、脈拍

2. 研究の背景と目的

私は、前回の研究で眠気を覚ます方法について研究をしていた。しかし、仮に眠気を覚ます方法が見つかり、試してみて本当に眠気が覚めたとしても、それはその人個人の感覚であり、科学的に証明した事にはならないという指摘を受けた。そこで、個人にしかわからない感覚に頼るのではなく、眠気を数値化することで評価しようと考えた。この研究では、最終的にウェアラブルデバイス型の眠気計測装置を製作し、眠気の数値が上がってきたら警告を鳴らし、トラックドライバーなどの居眠り運転事故を未然に防ぐことを目的としている。

3. 研究内容

3.1 睡眠のメカニズムの考察

眠気が引き起こされるメカニズムは、概日リズムによって引き起こされている。眠気は、様々なホルモンが分泌されることによって引き起こされる現象であり、その中でも代表的なホルモンは「メラトニン」である。メラトニンは、通常、夜に近づくにつれて脳内の「松果体」という部位から分

泌され、「副交感神経」を優位にする働きがある。「副交感神経」とは、体を活発に活動させるときに働く「交感神経」と反対の働きをする自律神経であり、具体的には脈拍、血圧、体温を下げて、睡眠に入るときに強く働く自律神経である。しかし、授業中など、通常であれば「副交感神経」が働きにくい時間帯に眠たくなるのはなぜなのか。私は外部からの影響によって脈拍や血圧などの体内環境が「副交感神経」が働いた時と同じような状態に変化し、脳が「副交感神経」が作用していると錯覚するからなのではないかという仮説を立てた。脳の錯覚は、簡単に体験する事ができる。分かりやすい脳の錯覚の例は、「錯視」である。「錯視」とは、本来そこにはないはずのものが、周囲の無関係な情報によって脳が勝手な思い込みをし、補完されることによって見える現象である。例えば図1では、長さの違う白い線が交互に並んでいるだけだが、補完されて波線が見える。

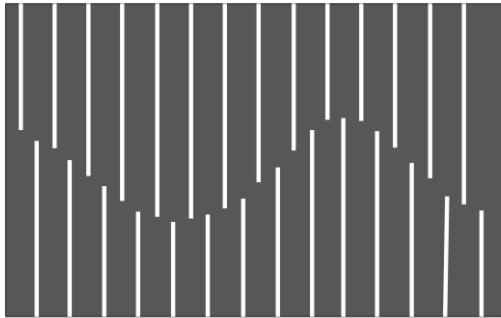


図1 脳の違い込みによる錯覚の例

眠気の場合も、この錯視と同じように、実際に「副交感神経」が働いていなくても、幾つかの他の条件がそろっただけで「副交感神経」が働いているのだと脳が違い込みをすることで、眠気が発生しているのではないかと考察した。

3.2 センサーモジュールの製作

前述の考察が正しいかどうかの検証をするために、センサーモジュールを製作する。大まかな検証プランとしては、脈拍、血圧や体温を約1分間隔ごとに計測していき、グラフとして記録する。そして被験者が眠気を感じた時にボタンを押してもらい、脈拍などの計測データのグラフと眠気を感じた時間を照らし合わせ、関係性を調べる。

まず初めに、製作するのが比較的容易である脈拍を計測するモジュールを製作することにした。脈拍を計測する方法は、ヘモグロビンが赤外線を吸収する性質を利用し、赤外線 LED を手首の血管に向かって照射し、その跳ね返ってきた光の量をフォトトランジスタで計測、オペアンプでその信号を増幅することとした。(図2)

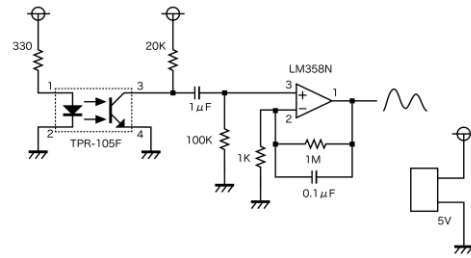


図2 脈拍測定モジュールの回路図

赤外線フォトトランジスタは、オペアンプが付いている基盤につけてしまうと、脈拍を測ることが困難になってしまうため、別の基盤に接続した。(図3)

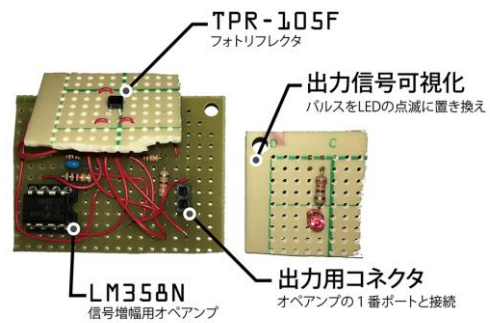


図3 実際に作成したモジュール

図3の右の基盤の部品は出力用コネクタに接続することで、出力される脈拍のパルスをLEDの点滅で表現する。将来的には出力用コネクタをマイコンと接続し、データの計測を行う。

3.3 実験

脈拍測定モジュールが完成したため、モジュールの出力コネクタとオシロスコープを接続し、実験した。しかし、確かに何かのパルスのようなものを確認することができたが、ノイズが多く、また装置と手首が少しずれただけで計測が困難になってしま

った。これについては、赤外線フォトトリフレクタの周りに他の光が入らないようにするフィルターがなかった事、赤色のヘモグロビンは赤色の補色である緑色の波長の光を赤外線よりも吸収する事が原因であると考へた。次回は緑色 LED を用いた、ロームが提供している光学式脈波センサーIC「BH1790GLC」を用いて実験をすれば受光部にカラーフィルターがあるため、上記の問題は解決できると考へている。

4. 考察

今回、脈拍測定モジュールを製作、それを用いての実験を行ったが、思いのほか少しの体の動きでもセンサーとの距離が変化してしまい、正確な脈拍が計測できなくなった。また、脈拍は眠気以外の要因でも劇的に変化するため、眠気を計測するための情報としては不適切である可能性があるため、脈拍、血圧、体温を総合的に評価する必要があると考へている。

5. 今後の課題

今回、脈拍計測モジュールを製作したが、現段階では誤差が大きすぎるため、これからセンサーと回路の見直しをする必要がある。また、血圧を計測するとき、市販されている腕を圧迫する方法での測定(図 4)は被験者の負担になる上に、計測することで被験者に刺激が発生する。そのため、被験者の目が覚めてしまい、正確なデータを得ることができない恐れがあり、眠気を評価する方法としては不適切であるとする。そこで腕を締め付けずに血圧を測定する方法を考へる必要がある。また「副交感神経」には瞳孔を縮小させる働きがあるため、カ

メラで瞳孔の大きさを測定し、眠気に直接関係があるのかどうか検証したい。



図 4 一般的な腕を締め付ける血圧計

6. 参考文献

- [1] 「よくわかる最新”脳”の基本としくみ」、後藤和宏、秀和システム(2009)
- [2] メラトニンの効能
<http://www.1ginzaclinic.com/anti-aging/melatonin.html>
- [3] 自律神経(交感神経と副交感神経)
<http://kusuri-jouhou.com/domestic-medicine/nerve3.html>
- [4] 自律神経の仕組み
http://www.med.miyazaki-u.ac.jp/community-medicine/child/jiritsu/jiritsu_2.htm
- [5] 色の科学
<http://sekatsu-kagaku.sub.jp/color-science.htm>

7. 謝辞

この研究を行うにあたり、顧問の藤野先生には多大なご指導を賜りました。また、サイエンス研究会の友人に多くの助言・協力を賜りました。この場を借りて、深く御礼申し上げますとともに、これからも御協力お願い申し上げます。

人が使いやすいと感じるキーボードとは

4年B組 荒木 潤正
指導教員 藤野 智美

1. 要約

僕は、市販されているキーボードより、より使いやすく、より奇抜なアイデアのキーボードを制作することを研究のテーマとしている。今回はその初期研究について報告する。

キーワード キーボード、キーストローク、キーピッチ

2. 研究の背景と目的

私は2007年からコンピュータを使い始めて今年で10年になる。最初のうちはただパソコンを使っただけだったが、次第にパソコンの能力や周辺機器に対して感じる不満が増えるようになった。コンピュータの長い歴史の中でディスプレイ、マウス、そしてプロセッサは進化しているのに対し、キーボードはあまり進化を遂げていないように感じた。この点から、キーボードには今後進化の余地が残されているのではないかと考えた。そこで今回は、キートップに文字を投影するようなタイプのキーボードを作成しようと考えた。

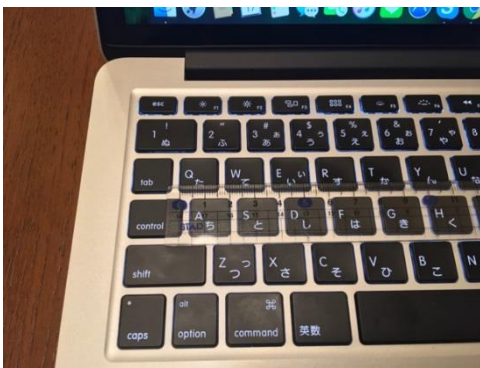


図1 実際のキーボード

3. 研究内容

今回Blenderを使用し、キーボードのキートップを作成することにした。なお、今回は現在使っているMac Book Pro Retina (13-inch Early 2015)のキーボードをベースに作成することにした。キーピッ

チは19ミリ、キーストロークは2ミリとなっているため、それに合わせてBlenderで作成した。



図2 Blenderで作成したモデル

4. 今後の課題

今回私は、試験的にキーボードのモデルを作成し、キートップに文字を入力したが、最終的にはキートップに文字をプリントしない形式のキーボードを作成したいと考えている。現在はキーボード状のマットを作成しその上に文字をプロジェクターで投影するようなものと考えている。または1つ1つのキーに液晶を採用し、ユーザーが好みのキー配列に並べかえられるようなものを作成したいと考えている。例えば、現在製品として売り出されているキーボードでは購入した状態からキーにプリントされている文字を変更することはできない。極端だがスペースキーにデリートを割り当てようとした時ソフトウェア的には変更することが可

能だが、キーにプリントされている文字まで変更することができないため使いづらさが生じる。しかし、私のアイデアを用いたキーボードを作成することができたならば、常にプリントされている文字と自分が割り当てたキーを一致させることができる。

そのためにまずは作成した 3D データを印刷しパソコンで認識できる回路とプログラムを作成する必要があると考えている。また、作成するキーボードのキーにどのような素材を適用するかどのような仕組みで文字を映し出せるようにするかも考える必要がある。

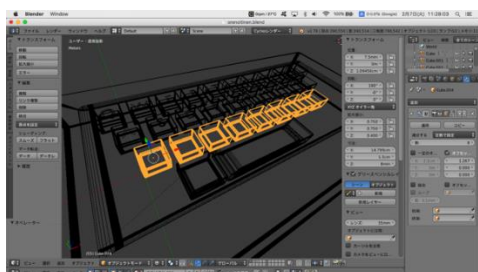


図 3 Blender での編集作業中

5. 参考 URL

- [1]<http://pc-pier.com/blog/2016/02/05/keyboard>
- [2]http://grafz.net/c_article_d013.html
- [3]<http://kato-h.cocolog-nifty.com/khweblog/2016/02/arduino-micro-u.html>
- [4]http://www.h6.dion.ne.jp/~tonoroom/katakoto/original_keyboard/original_keyboard.html

6. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において顧問の藤野先生をはじめ、先輩方、後輩から多大なご指導や、ご協力していただきました。この場を借りて深く御礼申し上げます。

ドローンの製作

5年A組 上林 幹宜
指導教員 藤野 智美

1. 要約

私は、強風などの悪条件下でも高速で飛行することのできるドローンの開発を目指している。そのために、可能な限り簡単にモータ制御を行う方法の考察とともに、安定した飛行方法を研究している。今回はドローンから得た情報を手元のパソコンへ送信し、その情報と人が操作した情報を総合してドローンへ送信しドローンを動かすための研究を行った。

キーワード 無線マイコン、モータドライバー、シングルボードコンピュータ

2. 研究の背景と目的

大災害が起こった場合に、がれきなどが散乱した道路では車などを使っての情報収集は難しいと考えられる。そのため、狭い隙間でも入ることのできるような小型で飛行する、小回りの利くものが情報収集の手段として必要だと考えた。そこで、そのような場合にドローンが便利ではないかと考えた。昨年度の研究で、3Dプリンタでドローンのプロペラを回すのに必要なギアボックスの製作を行うことに成功した。今回はドローンから得た情報を手元のパソコンへ送信し、その情報と人が操作した情報を総合してドローンへ送信し、ドローンを動かすための研究を行った。

TWE-LITE DIPには、標準状態でデジタル入力、デジタル出力、アナログ入力、アナログ出力のピンがそれぞれ4本ずつある。C言語でプログラミングを行うことにより、それぞれのピンの役割を変更することができる。私は標準状態のままのピンの使用用途を以下のように割り当てた。

親機デジタル入力→モータ制御送信用

親機アナログ出力→姿勢制御受信用

子機デジタル出力→モータ制御受信用

子機アナログ入力→姿勢制御送信用

双方向無線通信が行われているかどうかの確認をモータドライバ「TA7291P」と加速度センサ「KXR94-2050」を用いて行った。モータ制御受信用のピンにはTA7291Pを接続し、モータ制御を行った。姿勢制御送信用のピンにはKXR94-2050を接続し、姿勢制御受信用のピンにオシロスコープを接続することで電圧の変化を確認した。

3. 研究内容

3. 1 無線マイコンによる双方向無線通信

今回は、これまでの研究で行った無線マイコン「TWE-LITE DIP」を使用した無線制御を応用して双方向無線通信を行った。

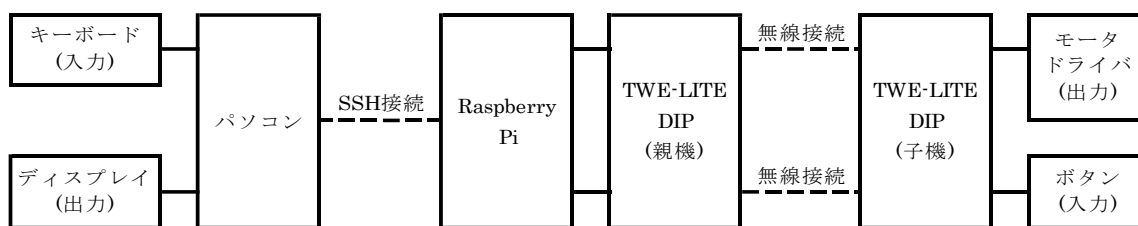


図1 パソコンと無線マイコンの接続図

3. 2 パソコンと無線マイコンの接続

ドローンをより安定させるためには、子機から送信されたドローンの傾きを示す情報と人が操作した情報を総合し、計算した上でモータを動かさなければならない。そこで、その計算をシングルボードコンピュータ「Raspberry Pi」上で行うようにした。Raspberry Pi は Linux OS を搭載でき、SSH(Secure Shell)接続することによってパソコンやスマートフォンなどの端末からインターネットを通じて簡単に操作することができる。

今回は Raspberry Pi の推奨 OS である Raspbian を Raspberry Pi にインストールし、Tera Term というターミナルエミュレーターを使用して windows 搭載パソコンで C 言語による Raspberry Pi のプログラミングを行った。これにより、無線マイコンへの情報の送信、無線マイコンが受信した情報の管理をパソコン上で行えるようにした。パソコン、Raspberry Pi、TWE-LITE DIP、TA7291P を接続し(図1)、パソコンから無線接続を通じてモータ制御を行うことに成功した。また、子機から無線接続を通じてボタンのオン、オフの情報をパソコンのディスプレイ上に表示させることにも成功した。

4. 今後の課題

今回、Raspberry Pi、TWE-LITE DIP を用いてパソコンから双方向無線通信を行うことができた。しかし、ドローン本体から送信された情報を使用してどのような計算をするとドローンが安定するのかを調べるためには今後、実験をしていかなければならない。また、昨年度の研究で製作したギアボックスを用いて本体を飛行させ、無線制御を行いたい。

5. 参考文献

[1]TWE-LITE DIP マニュアル
http://akizukidenshi.com/download/ds/tocos/TWE-Lite_DIP_manual.pdf

[2] TA7291P データシート
<http://akizukidenshi.com/download/ta7291p.pdf>

[3]Wiring Pi
<http://wiringpi.com/>

6. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の藤野先生をはじめ、多くの方々から多大なご指導を賜りました。この場を借りて深く御礼申し上げます。

天体望遠鏡の作成を目指して

－光の屈折に関する分析－

3年A組 林 晃太郎

2年A組 柴田 凌輔

2年B組 鶴崎 桐梧

指導教員 藤野 智美

1. 要約

私たちは天体の色や温度について調べることを目的としている。研究の過程において、観測機器である望遠鏡の仕組みに興味を持ち、光がレンズに入ったときの屈折の仕方を研究している。レンズが作る像の位置は「レンズの公式」によって求められることがわかった。そこで、レンズの公式を用いて、凸レンズが1枚の時、2枚の時の像の位置を理論的に算出し、検証実験の結果と比較して公式の妥当性を検証し、誤差の要因について考察を行った。

キーワード 天体望遠鏡、光の屈折、凸レンズ、凹レンズ、レンズの公式、収差

2. 研究の背景と目的

私たちは、望遠鏡を用いて天体観測を行い、天体に関する様々な解析を行うことを目的としている。その研究過程において、望遠鏡の仕組みを持って調べたところ、レンズが作る像の仕組みにたどり着いた。文献を調べていくと、像のできる位置がレンズの公式で決まることが分かった。そこで、その公式を用いて、凸レンズが1枚の時の像の位置、凸レンズを2枚組み合わせた時の像の位置、さらに凹レンズの像の位置を理論的に算出するとともに、その検証実験を試みた。

$$\text{凸レンズの公式} \cdots \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

a = 物体からレンズまでの距離

b = レンズから像までの距離

f = 焦点距離

つまり、この公式でレンズの像を求めるに

は、 $\frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ から算出すればよい。

3. 実験内容

3. 1 凸レンズが1枚のとき

私たちはレンズの像の位置を特定する公式があることを知った。そこで、公式について凸レンズが1枚の場合の検証実験を行った。レンズの公式を以下に示す。

3. 1. 1 実験手順

以下に実験手順を示す。

① レンズの焦点距離(f)を測定し、 $\frac{1}{f}$ を

求める。

② 光学台に(光源物体)、レンズ、スクリーンを設置する。

③ 光源の位置を固定して、光源からレンズまでの距離(a)を1cmずつ遠ざけながら、像が目視ではっきり見えたときのレンズから像(スクリーン)までの距離(b)を記

録する。

- ④ それぞれのデータからレンズの公式の $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ を算出し、①で求めた $\frac{1}{f}$ と比較した。

3.1.2 焦点距離の測定方法

蛍光灯と机を 2m メジャーでつなぎ、机とメジャーが直角になるようにする。スタンドにレンズを設置し、蛍光灯の形が分かる位置を焦点距離として計測した。

3.1.3 レンズの公式による理論値の算出

凸レンズのレンズの公式は、理論的に以下のように算出される。図 1 において、 $\triangle ABO \sim \triangle DCO$ 、 $\triangle BOF \sim \triangle DEF$ 、 $\triangle ABO \sim \triangle DCO$ によって、

$$a : b = BO : CO \quad (CO \text{ は像の大きさ})$$

$$\text{つまり、倍率 } CO = \frac{b}{a} BO$$

$$\triangle BOF \sim \triangle DEF \text{ から } f : b - f = BO : DE、$$

(DE は像の大きさ)

$$\text{つまり、} f : b - f = 1 : \frac{b}{a} \dots \text{①}$$

$$\text{①を变形すると、} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \text{ が得られる。}$$

3.1.4 考察

$\frac{1}{f}$ と $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ の差が (0.00666 の差) ほとんどないことがわかった。よって、レンズの公式は論理的になりたっていることが分かった。

3.2 凸レンズが 2 枚のとき

レンズが 2 枚の場合について確認実験を試みた。

3.2.1 実験手順

焦点距離が 7.73cm のレンズと 30.04cm のレンズを用いて実験を行った。

- ① レンズの焦点距離 (f') を測定し、 $\frac{1}{f'}$ を求める。

- ② 3.1.1 と同様に光学台に光源 (物体)、レンズ 1、レンズ 2、スクリーンを設置する。

- ④ 光源とレンズ 1 の位置を固定し、レンズ 1 からレンズ 2 までの距離を 1cm ずつ遠ざけて、像が見えたときのレンズ 2 からスクリーンまでの距離を記録する。また、像の位置は 3.1.1 と同様に目視で像のはっきり見える位置とする。

- ⑤ それぞれのデータからレンズの公式の $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}$ を算出し、②で求めた $\frac{1}{f'}$ と比較した。

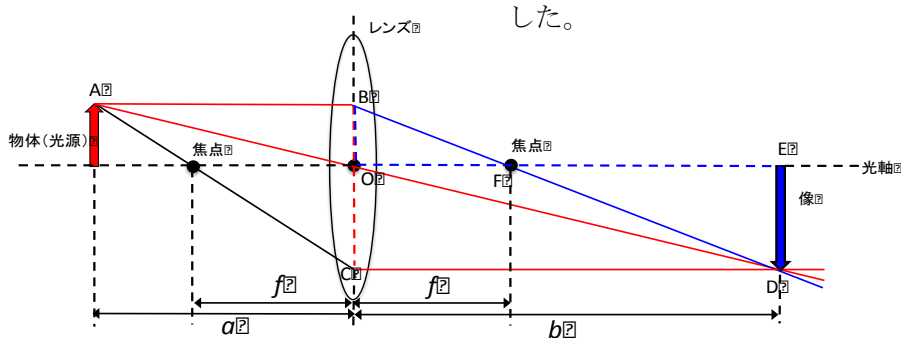


図 1

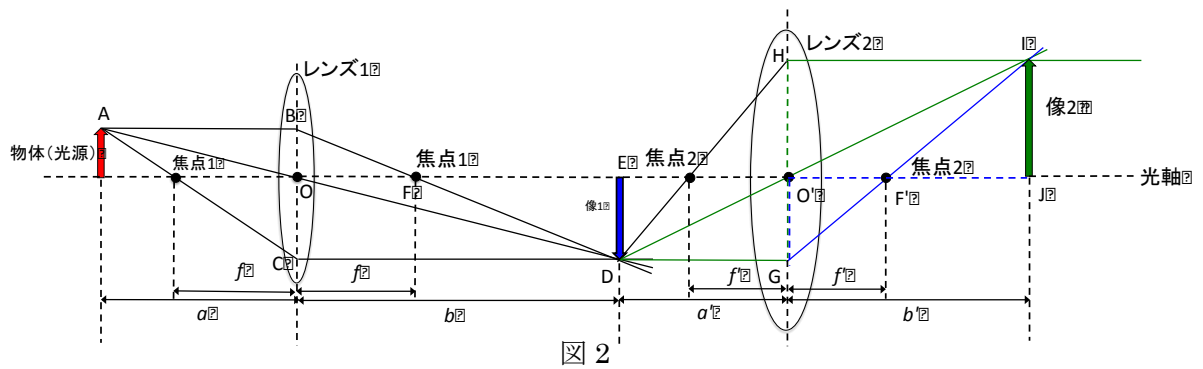


図 2

3.2.3 像の位置の予想方法

上図において

$$\triangle DGO' \sim \triangle IHO', \quad \triangle GO'K \sim \triangle IJK$$

$$\triangle DGO' \sim \triangle IHO'$$

よって、

$$a' : b' = GO : HO \quad (HO \text{ は像の大きさ})$$

つまり、倍率が $HO = \frac{b'}{a'} GO$

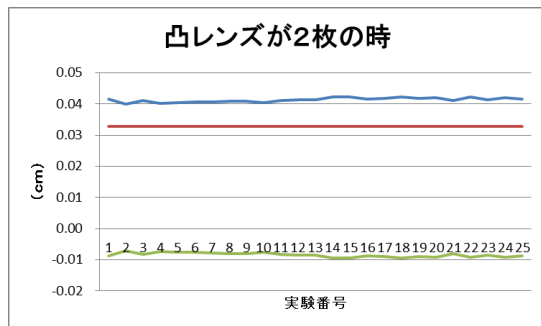
$\triangle GO'F' \sim \triangle IJF'$ から

$$f' : b' - f' = GO : IJ \quad (IJ \text{ は像の大きさ})$$

つまり、 $f' : b' - f' = 1 : \frac{b'}{a'} \dots \textcircled{2}$

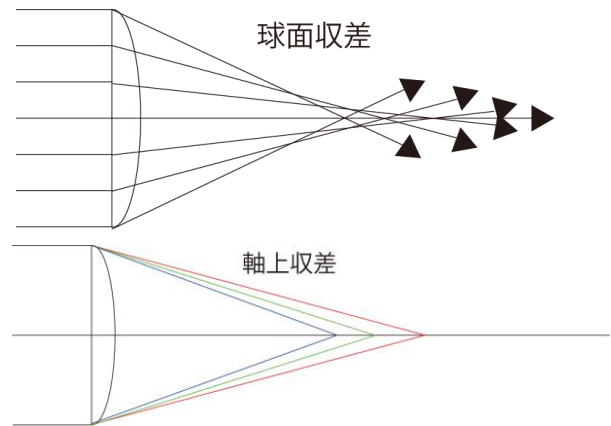
②より $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f'}$ となる。

3.2.4 考察



レンズが 2 枚のとき、予想値と結果が一致しなかったことについて、レンズ特有の収差によってこのような結果が導かれたと予想した。収差には色収差と単色収差の大きくわけて 2 種類ある。色収差はそれぞれの色の波長によって屈折率が変わることに

よってできるものである。単色収差にはさらに球面収差やコマ収差などがあり、これはラレンズの球面によって像の輪郭がぼやけたり、レンズの各部分によって厚みが違うことなどによって起きる収差である。この解消には、2 枚のレンズの両方をダブルットレンズやトリプレットレンズなどの組み合わせレンズを使用するか、凹面鏡を使用した反射望遠鏡の形式が考えられる。



3. 3凹レンズ

3.3.1 凹レンズのときの説明

天体望遠鏡には凹レンズも使われている。そのため今度は凹レンズの像の位置の特定を試みた。しかし、像の位置を特定するにはまず焦点距離が必要である。凸レンズではスクリーンに像を映すだけで良かったが、凹レンズはレンズの手前に像ができるため焦点も手前にできる。そこで、まずは凹レンズの焦点距離の測定方法を考察した。

3.3.2 焦点距離の測定方法

凹レンズに2カ所からレーザーポインタを照射し、広がった光をレンズの手前に延長し、交わったところを凹レンズの焦点とした。

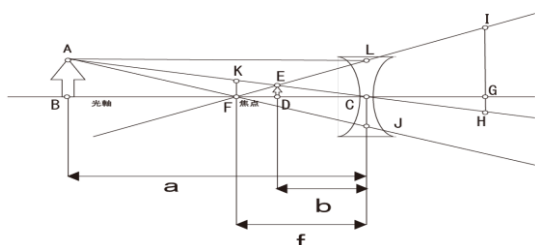
3.3.3 公式の導き出し方

$\triangle LFC$ の $\triangle EFD$ より、

$$LC:ED = f : f - b$$

$AB=LC$ より、 $a:b = f : f - b$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$$

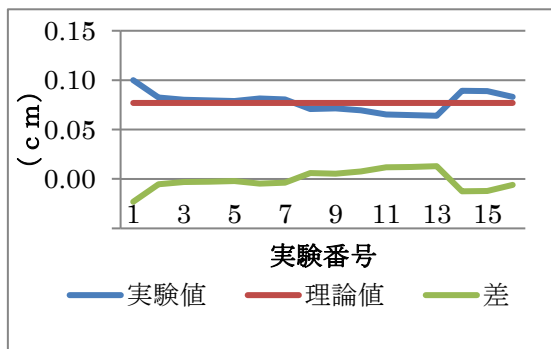


3.3.4 公式の確認実験

凹レンズから光の道筋に沿ってひもをたるとまないように張り、少しずつ光源から離していき像の位置と焦点距離を測定していった。そして、結果と予測値を比較した。

3.3.5 考察

比較したところ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$ が実験的に確認された。



4. 今後の課題

- ◆ 色収差を解消する方法の特定・応用
- ◆ この研究を生かしたオリジナル望遠鏡の作成
- ◆ 作成した望遠鏡を使用した天体の観測

5. 参考文献

「よくわかる光学とレーザーの基本と仕組み～光の性質とその応用～」

著者：国立東京工業高等専門学校教授

理学博士 潮 秀樹

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の藤野先生、ありがとうございました。