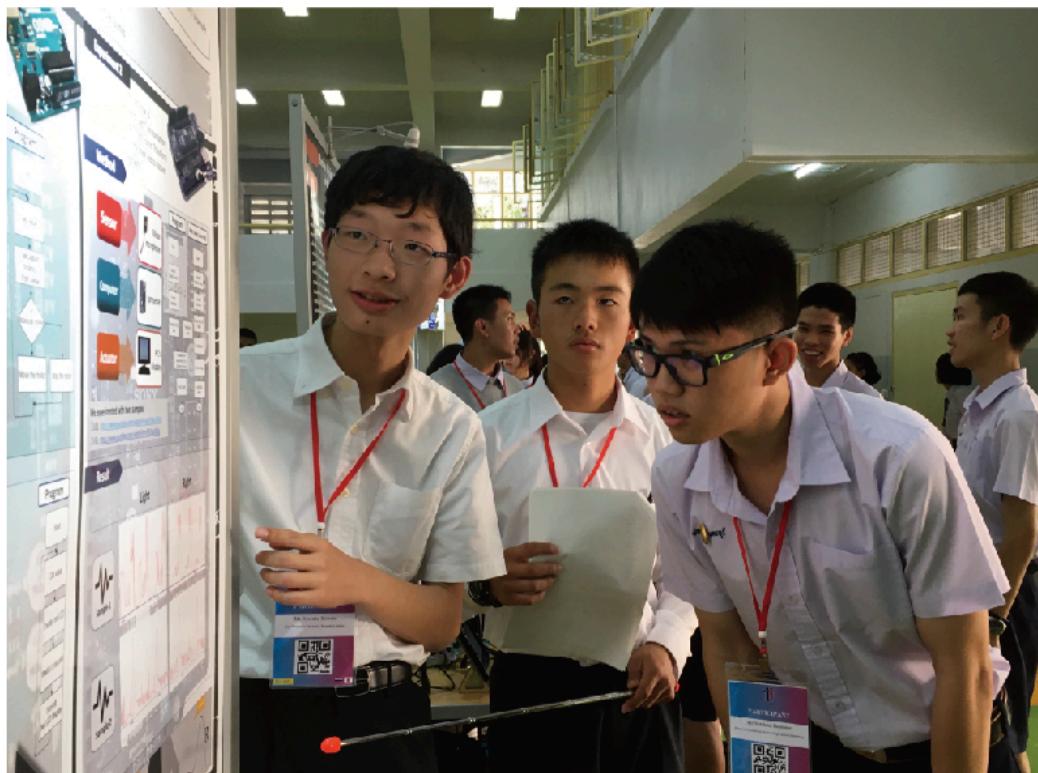


令和元年度

SSHサイエンス研究会

生徒研究論文集



The Thailand-Japan Student ICT Fair 2019

2019年度
スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会
研究論文集

奈良女子大学附属中等教育学校
2020年3月1日

2019年度 奈良女子大学附属中等教育学校

サイエンス研究会 研究論文集

目 次

刊行にあたって	1
2019年度教育課程表	2
第3期SSH概念図	3
研究論文	
数学班	
無限n進展開と進数表記の拡張	5
折り紙で正11角形を折る	8
ビュフォンの針の幾何学的拡張	11
サイコロの出る目の確率	34
無限多重根号について	38
○×ゲームの決着をつけよう！	42
物理班	
ウィルバーフォース振り子の製作	46
フィリングフィッパーの構造の最適化	50
超音波を用いた非接触型触覚提示装置	59
学園祭模擬店の食数管理システムの開発	67
Leap Motionによる手のトラッキング	72
振り子を設置した台車の挙動分析とペアリングを用いた実験モデルの提案	75
演奏に対応して変化するビジュアライズの作成	80
最大周波数の解析による英語発音の定性化	83
多彩な音色を表現できるMIDI ウィンドシンセサイザの試作	85
簡易的な電子ピアノの作製	88
化学班	
色素を用いた有機化合物の分離	90
混合分子膜の成長をナノスケールで調べる	92
グアバの葉コーヒー殻による銅(II)イオン吸着実験	97
メダカにロック曲を聴かせたときの体内変化	100
容器内でのロウソクの燃焼	104
生物班	
マツタケの人工培養を目指して	107
マイマイの非対称性	110
マウスの糞便を用いた雌雄班別	112
音が植物に与える効果の研究	114
微生物燃料電池の開発	116
粘菌の糖に対する反応と行動選択について	119
研修参加	
SSHベトナム生物研修報告	123

令和元年度 スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会研究論文集刊行にあたって

本校は SSH の指定をこれまで 3 期、平成 17 年度から第 I 期の 5 年間、平成 22 年度から第 II 期の 5 年間、平成 27 年度から第 III 期の 5 年間を採択していただきました。心からお礼申し上げます。現在 15 年目、第 III 期としては採択 5 年目の活動を精力的に行ってています。

本校の SSH の活動は、中高完全一貫教育という特色を生かし、1 年生から 6 年生まで（他校で言えば、中学 1 年生から高校 3 年生まで）の生徒たちが協力、切磋琢磨し、現在に至っています。

15 年間、連続して採択していただいたということは、正真正銘 6 年間、科学に没頭できた生徒が多数いるということです。お陰様で、卒業後、科学者への道を歩む者が少なくありませんし、現在も科学者の卵たちが多数在籍しています。また、15 年間継続してご支援いただいたお蔭で、科学教育を一層深化させることができました。ありがとうございます。

SSH の活動を通じて、生徒個人の科学的な学力、創造力を養い、探究心や発想力を深めることができました。そして、理数教育のカリキュラム開発、生徒全員の数学的・科学的リテラシーの育成、リベラルアーツの涵養が、本校では実現しています。第 III 期では、生徒たちの共創力を育成向上すること、他分野との融合研究を進めること、異分野・異文化間での議論を行う機会を設けることを推進してきました。さらに科学的态度や姿勢を身につけることを目指したプログラム、「イノベーター・キャンプ」を実施しました。

ここで、SSH の一角を担うサイエンス研究会の、今年度の対外的な成果を、具体的にご報告しましょう。

8 月の SSH 全国生徒研究発表会で、物理班 5 年の望月早馬君の口頭発表「超音波で物体を動かす-非接触型圧力提示システムの開発-」が科学技術振興機構理事長賞に選ばれました。第 III 期 SSH における本大会での受賞は 4 回目です。9 月の 2019 年度情報処理学会関西支部大会で、物理班 4 名（黒川陸君、中盛楓也君、中根彩乃さん、國見幸加さん）のポスター発表が、ジュニア会員特別賞に選ばれました。10 月の第 63 回日本学生科学賞（奈良県審査）で、生物班 1 年の中村一葉さん「メダカにロック曲を聞かせたときの体内変化」が県知事賞、化学班 5 年の竹内華保さん「食物繊維による合成着色料の吸着阻害」が商工会議所連合会賞に選ばれ、県代表として全国大会へ進みました。同じく 10 月、生物班「「ゆめちから」栽培プログラム」が第 8 期課題研究校に指定されました。12 月、上記の望月君が第 17 回高校科学技術チャレンジ（JSEC）本審査で、テレビ朝日特別奨励賞および、生徒が選ぶファイナリスト賞に選ばれました。本校の JSEC での受賞は SSH 指定期間の 3 期連続となります。同月、上記の竹内さんが第 63 回日本学生科学賞の本審査にて、入選 1 等に選ばれました。それぞれ、素晴らしい成果だと思います。

さて、本論文集は、SSH の活動の中心、サイエンス研究会の研究成果です。サイエンス研究会では、生徒のテーマは個々人が自由に選び、自主的に研究を行い、それぞれ自立した活動となっていることが特色です。本校の基本理念「自由、自主、自立」が、SSH の活動でも花開いていると言えましょう。生徒たちは自分の学力と才能、創造力をフルに發揮して、本当に楽しそうに「科学」しています。この国立大学附属学校の校長である私は、文学部生まれの文学部育ち、大学受験を最後に数学や物理から離れてしまった文学部教授でもあるのですが、SSH の発表会などで、目を輝かせながら「科学」し、研究発表する生徒たちの姿に感動さえ覚えていました。

個々人の研究と申しましたが、サイエンス研究会をはじめ、SSH の活動では、同じ学年のヨコのつながりだけでなく、先輩、後輩のタテのつながりも研究上、教育上、大きな役割を果たしています。先輩が後輩を育て、後輩が先輩を成長させてているのです。そして、管理教育を一切行わないという本校ではあるものの、数学・理科ほかの先生方の熱心な、でも手を出しすぎない指導が、SSH の活動をより元気にしていると確信しています。

このサイエンス研究会の研究論文集をご熟読いただき、執筆者である生徒たちに、どんどん質問して下さい。科学的な視点でのご指導をお願いします。将来、どんな形になるかは分かりませんが、日本の科学分野を担ってゆく彼らを育ててあげて下さい。温かく見守って下さい。彼らは、きっと、読者である皆さんに期待に応える科学者、社会人になってゆくと思います。

令和 2 年 3 月

奈良女子大学附属中等教育学校
校長 内田忠賢

2017年度(平成29年度) 教育課程

学年 時間	1年	2年	3年	4年	5年		6年			
	共通	共通	共通	共通	文系	理系	文系	理系		
1	国語基礎(4)	国語基礎(3)	国語総合(4)	国語総合(5)	現代文(2)		現代文(2)			
2					古典(2)		古典(2)			
3		社会(3) 歴史の分野	現代社会 I (2)		古典講読(1)		日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) *(3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)		
4					日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) *(3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)				
5	社会(3) 地理の分野	現代史 I (2)	現代史 II (2)		古典講読(1)	日本史特講(2) 世界史特講(2) 地理特講(2) △(0)or(2)	化学(4) 物理(4) 生物(4) *(4)or(8)	化学(4) 物理(4) 生物(4) *(4)or(8)		
6					世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)	物理(3) 生物(3) *(3)				
7		数学基礎 I (4) 代数分野 幾何分野	数学探究 I A(3)	数学探究 II A(3)	世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)	世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) △(0)or(3)				
8					化学基礎(2)	化学基礎(2)	化学(4) 物理(4) 生物(4) *(4)or(8)	化学(4) 物理(4) 生物(4) *(4)or(8)		
9					地学基礎(2) 音楽 II (2) 美術 II (2) △(0)or(2)	地学基礎(2) 化学(2)				
10	理科基礎 I (4)	理科基礎 II (4)	自然探究 I (3)	自然探究 II 物理基礎(2) 生物基礎(2) (4)	自然探究 II 物理基礎(2) 生物基礎(2) (4)	物理演習(2) 生物演習(2) △(0)or(2)	解析 II (4) △(0)or(4)	解析 II (4) △(0)or(4)		
11					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
12					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
13	音楽(2)	音楽(2)	美術(2)	技術総合・家庭総合(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	数学特講(2) 音楽 III(2)美術 III(2) 大学教養特講(1) △(0)or(1)or(2)	解析 II 特講(2) △(0)or(2)		
14					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
15					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
16	美術(2)	美術(2)	体育(2)	体育(3)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	数学特講(2) 音楽 III(2)美術 III(2) 大学教養特講(1) △(0)or(1)or(2)	解析 II 特講(2) △(0)or(2)		
17					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
18					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
19	工創基礎 I 生活基礎 I (2)	工創基礎 II 生活基礎 II (2)	体育(3)	家庭総合(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	数学特講(2) 音楽 III(2)美術 III(2) 大学教養特講(1) △(0)or(1)or(2)	解析 II 特講(2) △(0)or(2)		
20					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
21					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
22	保健(1)	保健(1)	保健(1)	保健(1)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	数学特講(2) 音楽 III(2)美術 III(2) 大学教養特講(1) △(0)or(1)or(2)	解析 II 特講(2) △(0)or(2)		
23					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
24					音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)	音楽 I (2) 美術 I (2) 書道 I (2) 工芸 I (2) *(2)				
25	Introductory English I (3)	Introductory English II (3)	Topic Studies I (2) Reading	Topic Studies II (3) Reading	保健(1)	体育(3)	Topic Studies III (3)	Topic Studies IV (3)		
26					Topic Studies I (1) Writing					
27					BasicEnglish III(1)					
28	BasicEnglish I (1)	BasicEnglish II (1)	Topic Studies I (1) Speaking	Topic Studies II (1) Writing	Topic Studies I (1) Speaking	Reading(2) △(0)or(2)	Reading(2) △(0)or(2)	数学特講(2) △(0)or(2)		
29	Introductory English I (1) Speaking	Introductory English II (1) Speaking			Topic Studies II (1) Speaking					
30	道德(1)	道德(1)			Topic Studies II (1) Speaking					
31	HR(1)	HR(1)	世界 I (2)	世界 II (2)	情報の科学(1)	Writing(1)	Reading(2) △(0)or(2)	数学特講(2) △(0)or(2)		
32	寧楽 I (2)	寧楽 II (2)			情報の科学(1)	Writing(1)				
33					世界 II (2)	コロキウム(2)				
34	短期集中	CG I (1)	HR(1)	HR(1)	HR(1)	HR(1)	AG(1)	AG(1) △(0)or(1)		
			AG(1)	AG(1)	AG(1)	AG(1)				
			テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)				

* 必修選択 △自由選択

共創力を備えた科学技術イノベーターを育成するためのカリキュラム開発



卒業生追跡調査

異なる活動の実績へ

科学技術イノベーターの育成

多分野融合研究において、自ら課題やプロジェクトを設定し、多様な他者を組織して、新たな研究領域を切り開いていく能力を持ったリーダー

研究ノートの作成・検証

体系的な論理システムの構立を目指して

国際交流連携校

サイエンス研究会

数学・物理・化学・生物・地学

イノベーターキャンプ

多分野を横断する課題解決型特別プログラム

例：エネルギー・気候変動・防災
環境・福祉・生物多様性

ISSS（共同研究）

地域的発展の課題
多様な価値観
国際的競争力



「共創力」を育む6年一貫カリキュラム

科学的思考力、幅広い視野と高い科学般・自然観を背景に、課題の解決や新たな価値や概念を創りだすために直面するとともに、主体的に判断し、主張・行動できる能力

奈良女子大学

理系女性教育開発共同研究

中高教育改革プロジェクト

高大連携・接続研究

研究開発した
ブックレット・
テキストの出版

連携大学・研究所

奈良女子大学
奈良教育大学
奈良県立医科大学
京都大学
同志社大学
ATR
NAIST

理系は理系問題化
（数学・物理・化学）理系問題化課題
（生物学・地学）

先進的な視野の育成

リバーラルアーツの思想
理数の専門教科
科学觀・自然觀の涵養
高度な専門性

Science ISSUES
サイエンス・イシュー
社会科学との連携
新規刊行の定期収録

数学探究Ⅰ・II
自然探究Ⅰ・II
数学的活動の実現
問題解決能力の育成

興味・関心・豊富の育成

5・6年

SS 課題研究 コロキウム

培われた自然科学観から
現代的課題を研究する

題の形成
大学教員・研究者との連携

課題研究 世界Ⅰ・Ⅱ
世界的な自然科学の課題
を地域の視点から探求する

視点の往復
グローバル～ローカル
ESD

基礎・基本の育成

3・4年

数学基礎Ⅰ・II
理科基礎Ⅰ・II
観察・実験の実習
数学化サイクルの実践

テクノロジーの活用
自然科學リテラシーの育成

基礎Ⅲ・Ⅳ・Ⅴ・Ⅵ
地域の素材の中から
自然科学を学ぶ

世界遺産学習
統計勉強
プレゼンテーション

協働型研究（発展期）

「研究ノート」
を使用した
研究指導

協働型研究（充実期）

日韓合宿
サイエンスキャンプ
(英語による共同実験)

協働型学習（基礎期）

自然科学に関する基本的な知識と技能を持ち、科学的根拠に基づいて
判断・主張・行動ができる、21世紀に必要とされる教養を備えた市民の育成

研 究 論 文

無限 n 進展開と進数表記の拡張

6年B組 川本 稔生

指導教員 川口 慎二

1. 要約

無限等比級数の公式を出発点として、整数を無限 n 進展開で表すことができた。また、そこから進数の負への拡張について考察した。

キーワード 無限等比級数、無限 n 進展開、無限 n 進数、 -2 進数、 $-n$ 進数

2. 研究の背景と目的

高校数学で扱う無限等比級数の公式では、収束条件として公比が -1 から 1 の間にあることが必要である。しかし、この条件を満たさない公比を代入した際ににおいても、公式が成立するような数体系を構築することが可能であることを発見したため、従来とは異なる新たな数の表記法と、その利点について考察することにした。

3. 研究内容

3-1 無限 n 進展開

等比数列の初項を a 、公比を r として、無限等比級数の公式を以下に示す。

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \quad (-1 < r < 1) \cdots ①$$

ここで、 $a=9, r=10$ とすると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot 10^k = 9 + 90 + 900 + \cdots = \cdots 999$$

このとき、仮に①が成り立つとすると、

$$\cdots 999 = \frac{9}{1-10} = -1 \quad \text{となる。つまり、}$$

$\cdots 999 = -1 \cdots ②$ を得る。

ここで、 $\cdots 999$ に 1 を足すと、下のように無限に 0 が続くため、これを 0 とみなせ

ば、②は成立する。

$$\begin{array}{r} \cdots 9 \ 9 \ 9 \\ + \qquad \qquad \qquad 1 \\ \hline \cdots 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

さらに、②を基準として、

$$\cdots 998 = -2, \cdots 997 = -3, \cdots 996 = -4,$$

$$\cdots 995 = -5, \cdots, \cdots 990 = -10, \cdots$$

のよう、順に定義していくば、負の整数全体を定義することができる。

次に、 $r=2$ の場合を考える。①において $a=1, r=2$ とすると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

となる。この和を表示することは困難だが、

2進法に改めると、 $(1+10+100+\cdots)_{(2)}$ 、

つまり、 $(\cdots 111)_{(2)}$ と書ける。

以下、文中の特に表記のない数字は 10 進数とする。また、 $\frac{1}{1-2} = -1$ であり、先の例と同様の議論から、これは 2 進法における -1 を表していると言える。

これを一般化すると、 $a=n, r=n$ のと

き、 $\sum_{k=0}^{\infty} (n-1)n^k$ は n 進法における -1 であると考えられる。

本稿では、このようにある数 m を無限桁の n 進数に変換する操作を m の **無限 n 進展開** と呼び、 n が整数のものを扱う。また、この操作によって展開された数を **無限 n 進数** と呼ぶ。

3-2 無限 n 進整数環

無限 n 進数についても、通常の数と同様に加法、乗法を定義することができる。以下の例は無限 10 進数によるものであるが、

$$-1 + (-1) = -2, \quad -1 \cdot (-1) = 1$$

などの計算結果と一致する。

$$\begin{array}{r} \cdots 999 \\ + \cdots 999 \\ \hline \cdots 998 \end{array}$$

のような加法や、乗法

$$\begin{array}{r} \cdots 99999 \\ \times \cdots 99999 \\ \hline \cdots 99991 \\ \cdots 9991 \\ \cdots 991 \\ \vdots \\ \hline \cdots 00001 \end{array}$$

が計算できる。

なお、筆算と同様にして減法の演算を行うこともできるが、無限 n 進数の場合、符号を用いずとも負の整数を表すことが可能なため、加法のみで十分である。

したがって、負の整数を無限 n 進数で置換した整数の集合 \mathbb{Z}' は環の公理を満たし、無限 n 進整数環を構成する。

3-3 -2 進数

無限 n 進展開を用いて進数を負へと拡張

することを考える。

まず、以下のように -2 進数の表記と加法を定める。

$$(a_n \cdots a_2 a_1 a_0)_{(-2)} = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (-2)^k \quad (a_j = 0, 1)$$

$$\begin{array}{r} 0 & 0 & 1 \\ + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 & 1 \\ + & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

これらの計算規則は、各桁で等しく成り立つ。

このとき、 -1 を無限 -2 進展開すると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-3) \cdot (-2)^k = -3 + 6 - 12 + \cdots$$

$$= (1101 + 11010 + 110100 + \cdots)_{(-2)}$$

$$= (11)_{(-2)} = (-1)_{(10)}$$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 11010 \\ 110100 \\ \vdots \\ \hline \cdots 000011 \end{array}$$

となり、 -1 に戻ることが確認できるため、この定義は妥当であると考えられる。

通常、10 進数を 2 進数に変換する際には、元の数を 2 で割り続け、出てきた余りを並べるという手法が用いられるが、 -2 進数においても同様の計算が可能であり、10 進数と -2 進数は一対一で対応する。

また、無限 n 進数と同じく符号が不要であるが、有限桁で表現することができる。

乗法は 2 進数と全く同じであり、ビットシフト後に -2 進数の加法に基づいて計算すればよい。

$$\begin{array}{r} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \times 0 & \times 1 & \times 0 & \times 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3-4 $-n$ 進数

-2 進数の表記法を一般化すると、 $-n$ 進数の表記法が得られる。

$$(a_n \cdots a_2 a_1 a_0)_{-n} = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (-n)^k$$

$(a = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

基本的には n 進数の場合と同じ規則で計算可能であるが、 p ($p < n$) 繰り上がる際には 2 つ上の位に 1 を入れ、1 つ上の位に $n-p$ を入れる必要がある。これは、位の偶奇によって正負が入れ替わるため、 $(-n)^2$ 倍

した位に足した分を補正する操作である。また、計算結果の先頭に無限に 0 が続くことを防ぐために、 $1(n-1)+1$ ($n=10$ のとき、 $19+1$) を 10 として扱う。これらの規則は、前述の -2 進数の基本演算規則にも内包されている。

乗法の場合も、繰り上がりを同様に処理することで計算できる。

4. 考察

一般に、コンピューターは 2 進数によって演算を行っており、負の数を表現する場合には補数表現が用いられる。これは、オーバーフローを利用して「負の数を足す」ことによって、加法の中に減法を含め、演算処理を簡略化するためである。しかし、補数表現による数値はあくまで通常の 2 進

数として扱うこともでき、その場合は異なる値になってしまうため、変数には型の指定が必須となる。さらに、オーバーフローによる誤差が発生することもある。一方、 -2 進数ならば各数値は正負を含めて一対一で対応しており、正の数は奇数桁、負の数は偶数桁となるため区別しやすい。当然、減法が必要ないという利点もある。同じ値を表現するのに 2 進数と比べてより多くの桁数が必要ではあるが、CPU の能力が年々向上していることを考えると実用も可能ではないだろうか。

5. 今後の展望

本稿では除法については特に言及しなかったが、余りの絶対値が最小になるように商を立てることで計算できると考えている。ただ、今回は完全に形式化することができなかったため、今後の課題とする。

また、加法、乗法についてもさらなる形式化を進め、 $-n$ 進数による演算を行えるプログラムを作成し、処理速度を比較する予定である。

6. 参考文献

- [1] 加藤文元、中井保行 「天に向かって続く数」、日本評論社 (2016)

7. 謝辞

本研究を行うにあたり、顧問の川口先生にご指導いただきました。この場を借りて御礼申し上げます。

折り紙で正 11 角形を折る

6 年 D 組 置名 璃子
指導教員 佐藤 大典

1. 要約

折り紙で正 11 角形が折れるかどうかを、複素数平面上で正多角形の頂点の座標を表すことにより調べる。

2. 研究の背景と目的

一般に、折り紙を用いて作図できる正多角形には限界があるといわれている。そこで、折ることができないとされる正 11 角形がなぜ作図できないのか、本当に作図できないのか調べることにした。

3. 研究内容

3.1 折り紙で作図することの意味

定規とコンパスによる作図では、角の二等分線が作図できることにより、2 次方程式を解くことができる。しかし、角の三等分線は作図できないので、3 次方程式を解くことはできない。それに比べて、折り紙による作図では、角の三等分が作図できることにより、3 次方程式も解くことができる。

3.2 作図可能な正 P 角形

どの正多角形も外接円を描くことができ、正多角形の各頂点から外接円の中心までの距離は等しい。また、中心角もすべて等しい。これより、複素数平面上に原点中心で半径 1 の円に内接する正 n 角形 (n は 3 以上の整数) を考えると、正 n 角形の各頂点は

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

と表すことができる。

この n 個の複素数は、方程式 $z^n = 1$ の解の全体であり、 $n = P$ とおくと (n は 3 以上の素数)、この方程式は、

$$(z - 1)(z^{P-1} + z^{P-2} + \dots + z + 1) = 0$$

と因数分解できるので、

$$z^{P-1} + z^{P-2} + \dots + z + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の解全体と $z = 1$ を合わせたものが正 P 角形の頂点である。ここで、折り紙では、2 次方程式、3 次方程式が解けるので $P = 2^m 3^j + 1$ (m, j は 0 以上の整数) であれば、折り紙で折ることができる。

しかし、11 は $2^m 3^j + 1$ の形で表せないため、正 11 角形を折るためにには、11 次方程式 $z^{11} = 1$ を解く必要がある。この方程式の解は、

$$\cos \frac{2k\pi}{11} + i \sin \frac{2k\pi}{11} \quad (k = 0, 1, \dots, 10) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、①より

$$z^{10} + z^9 + \dots + z + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

を変形すると、5 次方程式

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

となるが、この方程式は代数的に解くことができないため、②を平方根や立方根だけで表すことができない。

したがって、正 11 角形は折れないことが示された。

3. 3 多重折りで正 11 角形が折れる

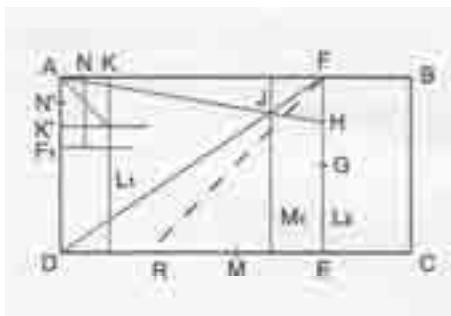
以上より、正 11 角形は通常の折り方では折れないことが分かった。しかし、「多重折り」を用いると、折ることができる。

「多重折り」とは、2 本以上の折り線を同時にかける折り方である。アルペリンとラングにより、一般の n 次方程式は $(n-2)$ 重折りによって解くことができるとして示されている。

正 11 角形を折るためにには、⑤の 5 次方程式を解く必要があるため、3 重折りを用いる。

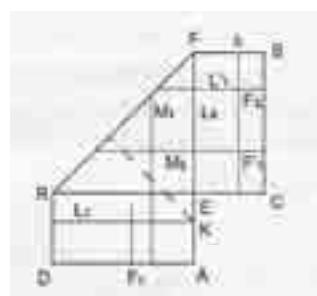
《正 11 角形の作図手順》

- イ) 縦横比が 1:2 の長方形 ABCD の辺 CD の中点を M とし、CM で 2 つ折りして垂直二等分線 EF を作図してこれを直線 L_2 とする。
- ロ) EF の中点を G、FG の中点を H とし、直線 AH と DF の交点を J とする。点 J を通り、CD に垂直な直線を M_1 とする。
- ハ) 辺 AD を FE に重ねて折ったときに、直線 M_1 が重なる直線として L_1 を作図し、辺 AB との交点を K とする。
- ニ) AK の中点を N とし、点 A を支点として点 K を AD 上に重なるように折ったときに、K、N が重なる点をそれぞれ K' 、 N' とする。そこで点 K' に関して N' と対称な点を F_1 とする。

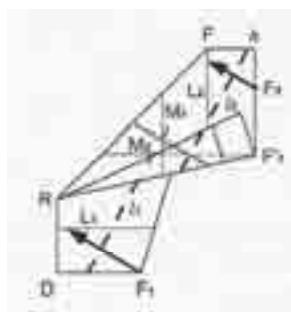


ホ) 点 F を支点として直線 FK が FE に重なるように 45° の折り線 FR で山折りして、左半分を下側へ折る。

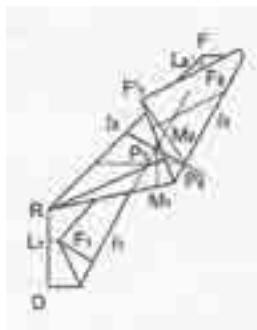
- ヘ) 点 K を通る FR の垂線で 2 つに折ったときに、辺 AD が重なる直線を k と表す。また、このとき、点 F_1 が重なる点を F'_1 とおく。
- ト) AF の垂直 2 等分線として直線 M_2 を作図し、直線 M_2 で 2 つに折ったときに、直線 L_1 が重なる直線 L'_1 と直線 k の交点として F_2 を作図する。



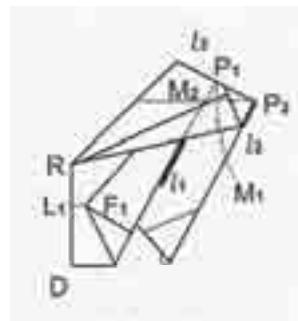
チ) 点 F_1 、 F_2 が紙の端にくるように、直線 k で山折りして紙の右端を裏に折り込む。同じく直線 FF1 で山折り、RF1' で谷折りして、紙の端部分を裏に折り込む。



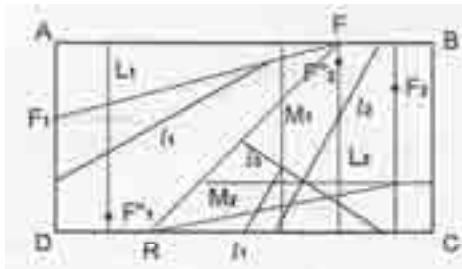
- リ) 下側の 1 枚は、点 F_1 が直線 L_1 に乗るように折り線 l_1 で折り、上側の 1 枚は、点が直線 L_2 に重なるように折り線 l_2 で折る (2 つの折り線 l_1 、 l_2 は平行)。
- ヌ) 折り線 l_1 と直線 M_1 との交点を P_1 、折り線 l_2 と直線 M_2 の交点を P_2 とする。



- ル) 点 P_1 、 P_2 でそれぞれ折り線 l_1 、 l_2 を自分自身に重なるように垂直に折ったときに、これらの折り線が 1 つの直線 $l_3 = P_1P_2$ に一致するような、折り線 l_1 、 l_2 、 l_3 で折る。



- ヲ) この折り方で、点 F_1 、 F_2 が重なった点をそれぞれ F_1'' 、 F_2'' とする。紙を広げた状態で折り線 l_1 及び l_2 の傾きはそれぞれ $2\cos\frac{2\pi}{11}$ およびその逆数である。



- ワ) 直線 L_1 で折ったときに、直線 AD が重なる直線を P_0D' とし、この直線と点 F_1

から横に伸びる折れ線との交点を O とする。

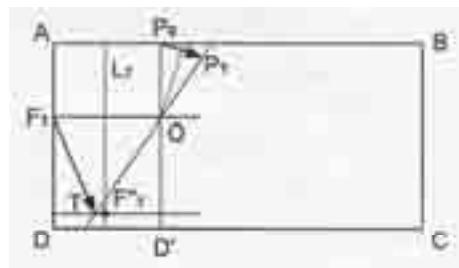
カ) 点 F_1'' を通る AD の垂線を作図すると、

この垂線と点 O の距離は $4\cos\frac{2\pi}{11}$ であ

る。そこで点 O を支点として、点 F_1 がこの直線に重なるように折ったときに、 F_1 が重なった点を T とすると、

$\angle TOD' = \frac{2\pi}{11}$ である。

ヨ) 直線 TO を折り、点 O を支点として点 P_0 を TO の延長線上に重なるように折ったときに P_0 が重なった点を P_1 とすると、線分 P_0P_1 は O を中心とする正 11 角形の 1 辺となる。以下は、 OP_1 に関して P_0 と対称な点を P_2 、…と他の頂点を次々作図していくべき。



3.4 まとめ

通常の折り方のみ用いることを考えると、折り紙で正 11 角形を折ることは不可能だが、3 重折りを用いれば、正 11 角形を折ることができる。

また、多重折りを用いると、折り紙ですべての正多角形が折ることができる。

4. 参考文献

折紙の数学 <https://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/openh24origami.pdf>

折り紙による 5 次方程式の解法 <https://core.ac.uk/download/pdf/59041733.pdf>

ビュフォンの針の幾何学的拡張

5年A組 左藤 開己
指導教員 川口 慎二

1. 要約

私はビュフォンの針に関する研究を行っている。今回はビュフォンの針の理論を拡張させた無理数の近似的な測定方法や高次元化に関する研究を幾何学的な視点から行った。

キーワード ビュフォンの針、無理数、正射影

2. 研究の背景と目的

今回の研究では、ビュフォンの針に関する性質やその幾何学的な応用に焦点をあてて研究を行った。また実際にビュフォンの針の証明やその実演に関する研究は数多く行われているが、その応用理論はよく知られておらず、独自の証明とそれによる公式の発見を目指している。

3. 研究内容

3-1 ビュフォンの針

ビュフォンの針の問題とは「間隔 d で描かれた無数の平行線が広がる平面上に長さ r の針を無作為に投げたときにそれが平行線と交わる確率を求める」という問題である（下の図1参照）。ここで、「針を無作為に投げる」とはその座標と方向を一様乱数で発生させるということである。

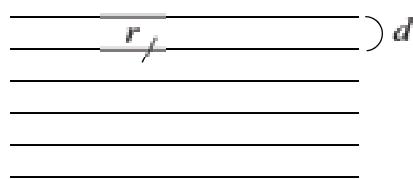


図1 ビュフォンの針

実際に、 $r < d$ のときに交わる確率は

$p = \frac{2r}{\pi d}$ となる。左辺の分母に円周率 π が含まれていることから大量の針を投げて、その交差数と試行回数から p を求め、 d, r を代入することで円周率 π の近似値を求めることができる（モンテカルロ法）。

3-1-1 ビュフォンの針の証明

ビュフォンの針において座標と方向の2つが確率変数となっており、1つずつ固定して考える。

(1) 平行線と垂直になるように針を落とす（方向を固定する）。

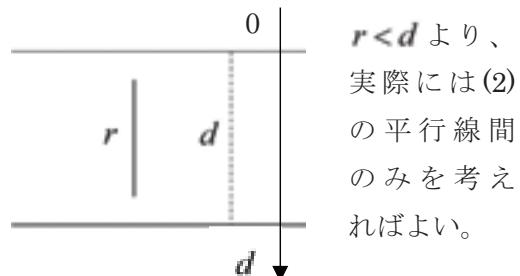


図2 (1)の状況

図2のように垂直成分に座標をおく。周期的に考えると針の下端の動く距離の範囲は

0から d までであり、そのうち0から r のときだけ交わると考えると、交わる確率は $\frac{r}{d}$ である。

(2) θ 回転させる（方向を考える）。

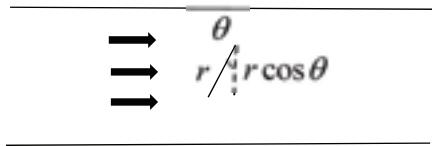


図3 針を正射影する

図3の垂直成分（正射影）は $r \cos \theta$ であり交わる確率は $\frac{r \cos \theta}{d}$ となる。

(3) グラフで考える。

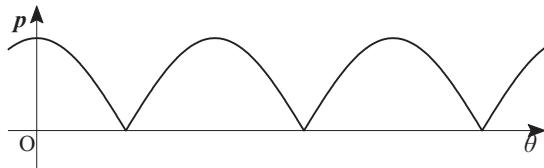


図4 $p = p(\theta)$ のグラフ

縦軸を p 、横軸を θ とおく。このとき大数の法則から、 p は真の平均値 \bar{p} に収束する。

図5のように $p = \frac{r \cos \theta}{d}$ のグラフと θ

軸、 p 軸 $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ で囲まれた面積を底辺で割るとその平均値 \bar{p} を求めることができる（長方形の高さとみなす）。

よって、 $r < d$ のとき、

$$\bar{p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \theta}{d} d\theta \div \frac{\pi}{2} = \frac{2r}{\pi d}$$

となる。（証明終）

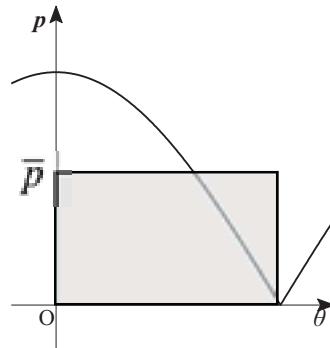


図5 平均値 \bar{p} を求める

3-1-2 ビュフォンの針のシミュレーション

エクセルを用いて簡単なシミュレーションを行った。ここで座標（垂直方向のみ）と方向をランダム関数で表した。

表1 シミュレーション結果

落とした 針の本数	交わった針 の本数	π の 測定値
10	7.4	2.703
20	11.1	3.063
50	33.1	3.021
100	61.7	3.241
1000	633.1	3.159
10000	6337.1	3.156
1000000	636510.2	3.142

$d=r=1$ とし、それぞれ10回ずつの試行の平均をとっている。試行回数を増やせば増やすほど理論値（ $\pi=3.141592\dots$ ）に近い値を導き出すことができた。

3-2 正多角形への拡張

針の代わりに正多角形を落としたときに、平行線と交わる確率についての研究を

行った。

3-2-1 シミュレーション

一辺を $r=1$, $d=5$ とする。針と同様にシミュレーションを行い、1000回の試行で平行線と交わった図形の数を求めた。今回は正三角形、正四角形、正五角形、正六角形の場合を調べた。

表2 多角形のシミュレーション結果

正三角形	正四角形	正五角形	正六角形
193	258	291	381

このときに平行線と交わる図形の数の比は $3 : 4 : 5 : 6$ に近い比であり、正 n 角形が平行線と交わる確率は、 n と比例関係があると予想できる。

3-2-2 正 n 角形 ($n=3, 4, 5, 6$) での確率

ビュフォンの針と同様に、正射影および向を変化させたときの長さの平均値を利用して求める。またそれぞれの座標は以後、複素数平面を用いて表すことにする。

虚部が正の複素数を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ としたとき、それらと原点を結んでできる図形の虚軸方向への正射影の長さを h とおくと $h = \text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_n)\}$ と表すことができる。

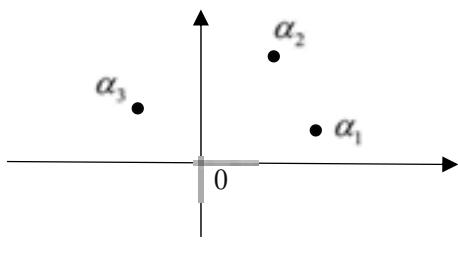


図6 複素数平面における正射影

例えば図6の場合を考える。虚軸方向への正射影において関係するのは α_2 と 0 であり、その長さは $\text{Im}(\alpha_2)$ である。

(1) 正三角形の場合

求める確率を p_3 とする。

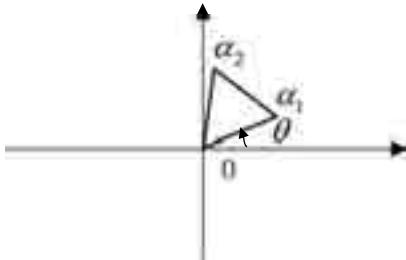


図7 正三角形の場合

図7のように原点中心で正三角形を θ だけ回転させて考える。このとき対称性より、 $0 \leq \theta < \frac{2}{3}\pi$ で考えればよい。

・ $\text{Im}(\alpha_2) \geq \text{Im}(\alpha_1)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{Im}\left(r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + ir \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right) \\ \geq \text{Im}(r \cos \theta + ir \sin \theta) \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ なので

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sin \theta \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} h &= \text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2)\} \\ &= r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} h d\theta \div \frac{\pi}{3} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) d\theta \div \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{3r}{\pi}$$

$$= \sqrt{2}r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

したがって、 $p_3 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{3r}{\pi d}$.

- $\operatorname{Im}(\alpha_1) \geq \operatorname{Im}(\alpha_2)$ のとき

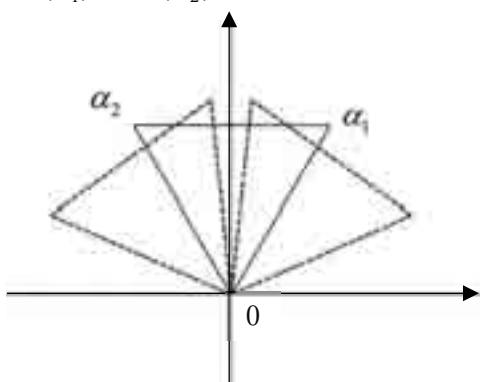


図 8 $\operatorname{Im}(\alpha_1) \geq \operatorname{Im}(\alpha_2)$ の場合

対称性（線対称）を利用すれば、同様の結果になる。

(2) 正四角形（正方形）の場合

求める確率を p_4 とする。

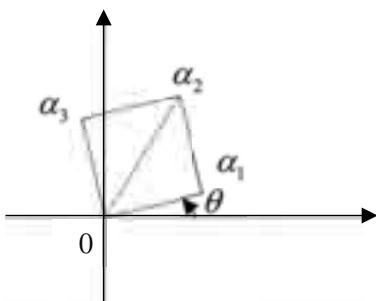


図 9 正方形の場合

このとき対称性より、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ で考えればよい。

三角形の場合と同様に考えると、

$$h = \operatorname{Max}\{\operatorname{Im}(\alpha_1), \operatorname{Im}(\alpha_2), \operatorname{Im}(\alpha_3)\}$$

となる。したがって、

$$\bar{h} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} h d\theta \div \frac{\pi}{4}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta \div \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4r}{\pi}$$

より、 $p_4 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{4r}{\pi d}$ となる。

(3) 正五角形の場合

求める確率を p_5 とする。

正三角形の場合と同様に $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{5}$ で考

えると、

$$h = \frac{1+\sqrt{5}}{2} r \sin\left(\theta + \frac{2}{5}\pi\right)$$

なので、

$$\bar{h} = \int_0^{\frac{\pi}{5}} h d\theta \div \frac{\pi}{5}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} r \sin\left(\theta + \frac{2}{5}\pi\right) d\theta \div \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{5r}{\pi}$$

ゆえに、 $p_5 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{5r}{\pi d}$ となる。

(6) 正六角形の場合

求める確率を p_6 とする。

正方形の場合と同様に、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ で

考えると、

$$h = 2r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

なので、

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} h d\theta \div \frac{\pi}{6} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) d\theta \div \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{6r}{\pi}\end{aligned}$$

ゆえに、 $p_6 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{6r}{\pi d}$ となる。

以上から考えると、正角形を落としたときに、平行線と交わる確率 p_n は、

$$p_n = \frac{nr}{\pi d}$$

と予想できる。

3-2-3 正 n 角形での確率

実際に、正角形を落としたときに平行線と交わる確率 p_n が、 $p_n = \frac{nr}{\pi d}$ であることと証明する。

定理 1

間隔 d の無数の平行線が描かれた平面上に、一辺の長さが r ($r \ll d$) である正 n 角形を無作為に落としたとき、それらが交わる確率を p_n とすると、

$$p_n = \frac{nr}{\pi d}$$

が成り立つ。

(証明) n の偶奇に分けて証明する。

(1) $n = 2m-1$ (n が奇数) のとき

α_1 と α_{m-1} を結ぶ線分の長さを l とする。

図 10 において、余弦定理より、

$$l = r \sqrt{\frac{1}{2\left(1 - \cos\frac{\pi}{2m-1}\right)}}$$

となる。

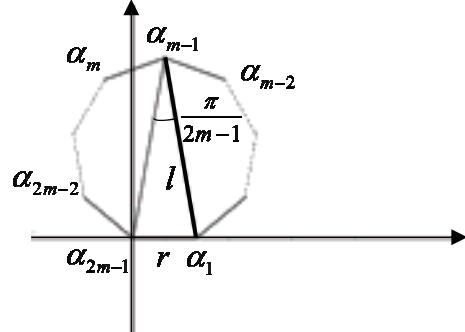


図 10 正 $2m-1$ 角形の場合

ここで、

$$\begin{aligned}\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m-1})\} \\ = \text{Im}(\alpha_{m-1})\end{aligned}$$

このとき、これまでと同様に、

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2m-1} \text{ で考えると、}$$

$$\sin\left(\theta + \pi\left(1 - \frac{2}{2m-1}\right)\right) \geq \sin\theta \text{ より、}$$

$$h = l \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2m-1}\right)\right)$$

したがって、三角関数に関する和積公式や半角の公式を利用すると、

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{2m-1}} h d\theta \div \frac{\pi}{2m-1} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2m-1}} l \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2m-1}\right)\right) d\theta \\ &\quad \div \frac{\pi}{2m-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2m-1} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2m-1} \right) \right) \right\} \div \frac{\pi}{2m-1} \\
&= 2l \sin \frac{\pi}{2(2m-1)} \div \frac{\pi}{2m-1} \\
&= \frac{(2m-1)r}{\pi}
\end{aligned}$$

である。したがって、

$$p_{2m-1} = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{(2m-1)r}{\pi d}$$

となる。

対称性を利用することにより、

$\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m-1})\} = \text{Im}(\alpha_{m-1})$ となる場合以外についても、同様の結果を得ることができる。

(2) $n=2m$ (n が偶数) のとき

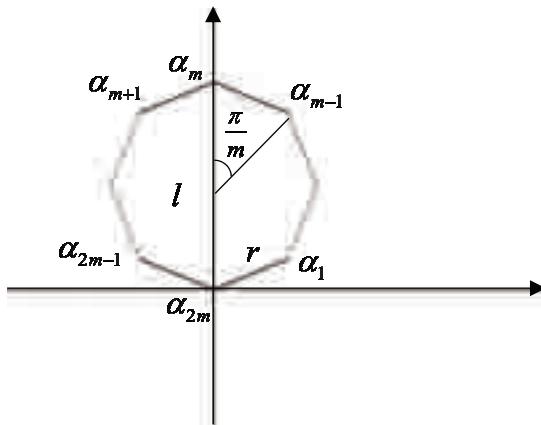


図 11 正 $2m$ 角形の場合

α_m と α_{2m} を結ぶ線分の長さを l とする。

図 11において余弦定理を用いると、

$$l = r \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \frac{\pi}{m}}}$$

となる。

ここで、

$$\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m})\} = \text{Im}(\alpha_m)$$

とする。

このとき、これまでと同様に、

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}$$

で考えると、

$$h = l \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right)$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned}
\bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{m}} h \, d\theta \div \frac{\pi}{m} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{m}} l \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right) d\theta \div \frac{\pi}{m} \\
&= l \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\div \frac{\pi}{m}$$

$$= 2l \sin \frac{\pi}{2m} \div \frac{\pi}{m} = \frac{2mr}{\pi}$$

である。したがって、

$$p_{2m} = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{2mr}{\pi d}$$

となる。

ゆえに(1)と(2)より、3以上のすべての

自然数 n に対して、 $p_n = \frac{nr}{\pi d}$ が成り立つ。
(証明終)

3-3 凸図形への拡張

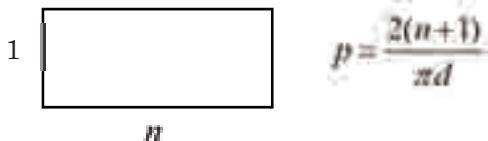
正 n 角形を含む凸図形を落としたとき

に、平行線と交わる確率について研究を行った。

3-3-1 凸図形の場合

さまざまな凸多角形について、平行線と交わる確率を求めた。結果を紹介する。

(1) 底辺 n 、高さ 1 の長方形



(2) 内接する正三角形の一辺を r とするルーローの三角形



(3) 半径 r の円



(4) 半径 r の半円



図 12 種々の凸図形の場合

図 12 の(1)から(4)の結果と正 n 角形の場合の確率を合わせて考えると、凸図形の周の長さを L としたとき、その凸図形を落

として平行線と交わる確率は、 $p = \frac{L}{\pi d}$ となるのではないかと予想できる。

3-3-2 凸多角形の場合

まず、凸多角形において、 $p = \frac{L}{\pi d}$ が成り立つことを証明する。以後、凸多角形の周の長さを L 、凸 n 角形と平行線が交わる確率を p_n とおく。

(1) 数学的帰納法を用いた証明

(i) $n=3$ のとき

正三角形と同様に複素数平面上で考える。しかし、それぞれの辺、角度に対称性がないことに注意する必要がある。

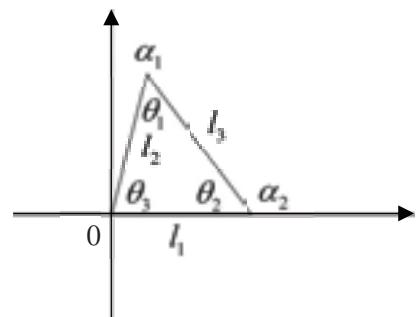


図 13 複素数平面上の凸三角形

① $\text{Im}(\alpha_2) \geq \text{Im}(\alpha_1) > 0$ のとき

$\sin(\theta + \theta_3) \geq \sin \theta > 0$ なので、

$$0 < \theta \leq \theta_2$$

② $\text{Im}(\alpha_1) > \text{Im}(\alpha_2) \geq 0$ のとき

$\sin \theta > \sin(\theta + \theta_3) \geq 0$ なので、

$$\theta_2 < \theta \leq \pi - \theta_3$$

③ $\text{Im}(\alpha_1) \geq 0 > \text{Im}(\alpha_2)$ のとき

$\sin \theta \geq 0 > \sin(\theta + \theta_3)$ なので、

$$\pi - \theta_3 < \theta \leq \pi$$

これ以降は、原点中心の点対称を利用してきるので、 $0 < \theta \leq \pi$ のみ考えればよい。

①～③より、

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \frac{1}{\pi} \left\{ l_2 \int_0^{\theta_2} \sin(\theta + \theta_2) d\theta \right. \\ &\quad \left. + l_1 \int_{\theta_2}^{\pi - \theta_3} \sin \theta d\theta \right. \\ &\quad \left. + l_3 \int_{\pi - \theta_3}^{\pi} \sin(\theta - \theta_2) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ l_2 (\cos \theta_3 + \cos \theta_1) \right. \\ &\quad \left. + l_3 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \right. \\ &\quad \left. + l_1 (\cos \theta_2 + \cos \theta_3) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ (l_2 + l_3) \cos \theta_1 + (l_3 + l_1) \cos \theta_2 \right. \\ &\quad \left. + (l_1 + l_2) \cos \theta_3 \right\}\end{aligned}$$

ここで、余弦定理から、

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2}{2l_2 l_3} \\ \cos \theta_2 &= \frac{l_3^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_3 l_1} \\ \cos \theta_3 &= \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_1 l_2}\end{aligned}$$

を代入して計算すると、

$$\bar{h} = \frac{1}{\pi} (l_1 + l_2 + l_3) = \frac{L}{\pi}$$

となるので、 $p_3 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{L}{\pi d}$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき

$$p_k = \frac{L}{\pi d} \text{ が成り立つと仮定する。}$$

$n=k+1$ のとき、図 14 の $k+1$ 角形において、 A_k を点 $A_k(\alpha_k)$ として、

$$l_1 = A_{k+1}A_1 + A_1A_2, \quad l_2 = A_{k+1}A_2$$

とおく。

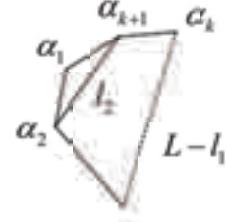


図 14 頂点を 1 つ削る

平行線と $\triangle A_{k+1}A_1A_2$ が交わる確率を

$p_{(3)}$, k 角形 $A_2A_3 \cdots A_{k+1}$ が交わる確率

を $p_{(k)}$, 線分 $A_{k+1}A_2$ が交わる確率を $p_{(l)}$ と

おくと、以下の等式が成り立つ。

$$p_{k+1} = p_{(3 \vee k)} = p_{(3)} + p_{(k)} - p_{(l)} \cdots (*)$$

すると、(i)より、 $p_{(3)} = \frac{l_1 + l_2}{\pi d}$. 仮定

より、 $p_{(k)} = \frac{L - l_1 + l_2}{\pi d}$. また、ビュフォ

ンの針における事実より、 $p_{(l)} = \frac{2l_2}{\pi d}$.

これらを(*)式に代入して、

$$p_{k+1} = \frac{l_1 + l_2}{\pi d} + \frac{L - l_1 + l_2}{\pi d} - \frac{2l_2}{\pi d} = \frac{L}{\pi d}.$$

以上より、3 以上のすべての自然数 n に

対して、 $p_n = \frac{L}{\pi d}$ が成立する。

(証明終)

(2) 組み合わせの重複を利用した証明

図 15 のような凸 n 角形を考える。平行線は 2 つの辺とのみ交わると考え、それぞれの辺と交わる確率を p_1, p_2, \dots, p_n とおく。

このとき、いずれかの辺と交わる確率は

$$\sum_{k=1}^n p_k \cdots ① \text{ である。}$$

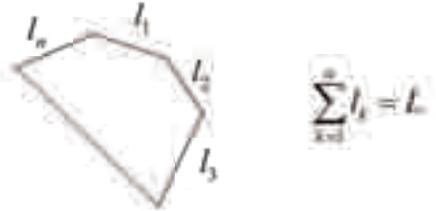


図 15 辺長が l_1, l_2, \dots, l_n である凸多角形

実際には、交わる 2 つの辺を選ぶ（組合せ）と考えることができる。そのため重複を考える必要がある。例えば、三角形の場合は図 16 のような重複が考えられる。

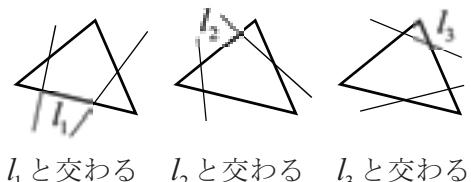


図 16 三角形の場合の重複

6本の直線（平行線）のうち3本重複している。それぞれの辺が平行線と交わる確率は、ビュフォンの針における事実より、

$$p_n = \frac{2l_n}{\pi d} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②を合わせて考えると、

$$p = \sum_{k=1}^n p_k \times \frac{\frac{n}{n} C_2}{\frac{n}{n} P_2} = \frac{2}{\pi d} \sum_{k=1}^n l_k \times \frac{1}{2} = \frac{L}{\pi d}.$$

重複分 (証明終)

3-3-3 凸図形での確率と証明

次に曲線部分を凸図形が含んでいても、

$p = \frac{L}{\pi d}$ が成り立つことを証明する。

(1) 図 17 のように凸図形に三角形を内接させる。また、すき間を埋めるように三角形を詰める操作を繰り返し行う。

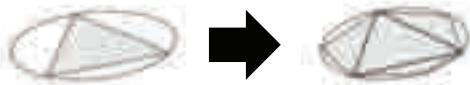


図 17 すき間を埋める操作

凸図形の周の長さを L として、操作を x 回繰り返したときの多角形の周の長さを $f(x)$ とする。このとき、三角不等式より、 $f(x) < f(x+1)$ 。また、凸性より $f(x) < L$ である。上に有界な単調増加列は上限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ と

なる。そこで、操作を x 回繰り返したときに平行線と交わる確率を $p_1(x)$ とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \quad \dots \textcircled{1}$$

(2) 図 18 のように凸図形に三角形を外接させる。また、すき間にできる三角形を削る操作を繰り返し行う。

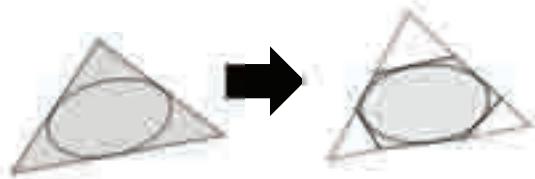


図 18 すき間を削る操作

この操作を x 回繰り返したときの多角形の周の長さを $g(x)$ とする。このとき、三角不等式より、 $g(x) > g(x+1)$ 。また、凸性より $g(x) > L$ である。下に有界な単調減少列は下限に収束するので、

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$ となる。そこで、操作を x

回繰り返したときに平行線と交わる確率を $p_0(x)$ とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \quad \cdots ②$$

(3) (1)において凸図形と凸多角形との間に
ある残ったすき間とのみ交わる確率を
 $p^{(1)}(x)$ 、(2)において残ったすき間とのみ
交わる確率を $p^{(2)}(x)$ とする。このとき、

$$p_1(x) + p^{(1)}(x) = p = p_0(x) - p^{(0)}(x)$$

が成り立ち、 $p^{(1)}(x) > 0$, $p^{(0)}(x) > 0$ より、 $p_1(x) < p < p_0(x)$ $\cdots ③$ が成り立つ。

以上から、①～③より、はさみうちの原
理により、 $p = \frac{L}{\pi d}$. (証明終)

ここまで議論により、次の定理が成り立つことを証明できた。

定理2

間隔 d の無数の平行線が描かれた平面上に、周の長さが L である凸図形を無作為に落としたとき、それらが交わる確率を p とすると、

$$p = \frac{L}{\pi d}$$

が成り立つ。

ここで、ビュフォンの針について再考する。底辺が Δh , 高さが r である長方形を落としたときに、平行線と交わる確率は定理2より、 $\frac{2(r + \Delta h)}{\pi d}$ である。ここで、針は底辺の長さが限りなく小さい長方形であると考えると、

$$p = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{2(r + \Delta h)}{\pi d} = \frac{2r}{\pi d}$$

となる。循環論法が生じるため、これはビュフォンの針の事実を証明することにはならないが、分子の係数が 2 である理由などを説明することができる。

3-4 高次元空間への拡張

ビュフォンの針や定理1、定理2の高次元化に関する研究を行った。

3-4-1 高次元化への拡張理論

定理2の次元を単純に1つ上げた場合、表面積に比例する等式を導き出すことが可能ではないかと考えた。本節ではその等式を発見することを目標とする。

発生させる図形の次元や発生させる図形の動ける範囲の次元、交差する図形の次元という3つの次元に着目した。

①発生させる図形の次元

例えば、針の次元は1次元、凸図形の次元は2次元である。

②発生させる図形の動ける範囲の次元

例えば、3-1-1節の(1)は1次元、(2)は2次元の例である。

③交差する図形の次元

これまでの研究では、平行線を考えてきた。まず1つ次元を上げるとどのような図形になるのかについて、以下の2つの仮説を立てた。

【仮説1】 平行面

直線の次元を上げると平面になるから、平行線は平行面に置き換えすことにより、拡張できるという仮説である。

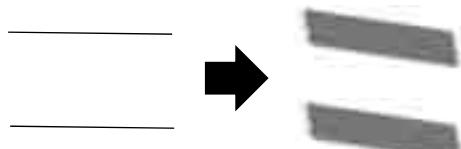


図 19 平行線を平行面に

しかし、仮説 1 が誤りであることを示す反例を見つけることができた。

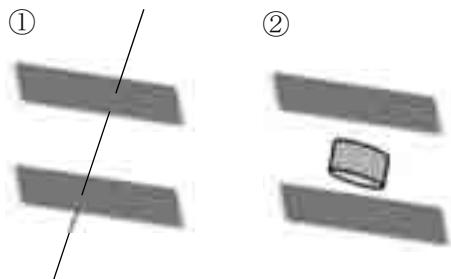


図 20 仮説 1 の反例

図 20 の 2 つの図形を比較したとき、表面積が小さいのは①であるのに対し、明らかに交わる確率が大きいのも①である。よって、平行面に交わる確率は表面積に比例しないと考えられる。

また、単純に定理 2 の分子の次元を 1 つ上げたとしても、仮説 1 のモデルでは分母にある間隔 d の次元（平行面の幅）が上がっていないことが成り立たない原因であると考えられる。

【仮説 2】 格子平面

これまでの研究の原点である 3-1-1 節(1)のモデルに戻って考え直した。

① 3-1-1 節(1)の単純化

3-1-1 節(1)について、本来針の動ける範囲の次元は 1 次元であり、それが交差する相手の図形の次元は 0 次元（点）であ

る。つまり平行線（1 次元）は不要である。具体的に考えると、図 21 のモデルになる。

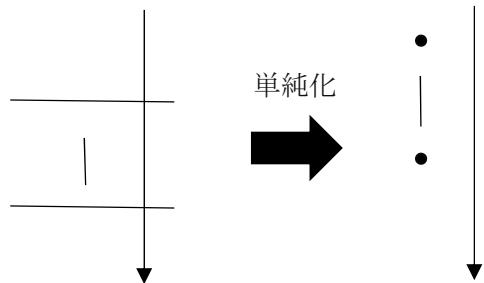


図 21 3-1-1 節(1)の単純化モデル

② 2 次元図形の捉え方

2 次元図形は図 21 のように点と点の間の空間（線分）内に収めることができない。ここで必要な操作が正射影である。

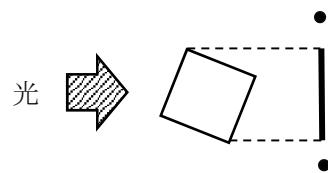


図 22 2 次元図形の正射影

つまり、「凸図形を落として平行線が交わる」とは、「凸図形の正射影が等間隔に並ぶ点と交わる」と置き換えることができる。またこれ以降、この操作を「単純化」と呼び、その逆の操作を「複雑化」と呼ぶことにする。

③ 単純化したモデルの高次元化

仮説 1 の失敗を踏まえ、間隔に相当するものの次元を上げることに注意して、新しいモデルを考えた。

図 23 のように拡張させた平面を「格子平面」と呼ぶことにし、また n 次元におい

て同様の操作を行ってできる空間を **n 次元格子空間**（例えば、格子平面は 2 次元格子空間）、格子点の間隔を **単位 n 次元格子空間**（例えば、正方形は単位 2 次元格子空間）と呼ぶこととする。

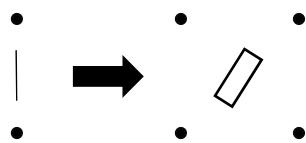


図 23 格子平面

④格子平面と交わる確率

格子平面上において単位正方形（格子点に囲まれた正方形）の面積を s 、発生させる図形の面積を c ($c \ll s$) とし、その図形が格子点と交わる確率について考える。

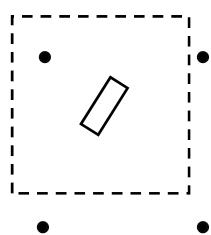


図 24 図形の近傍としての単位正方形

「固定された格子平面上に図形を発生させる」とは、逆に考えて「固定された図形上に格子平面を発生させる」としてもよい。図 24 は図形の近傍にある格子点を示している。ここで、格子平面の周期性を利用すると、点 1 つ当たりが動ける座標の範囲は図 24 中の点線で囲まれた単位正方形の内部になる。よって、「格子点と図形が交わる確率」は「単位正方形の内部の 1 つの点に着目して、それが図形の内部に存在する確率」と置き換えることができる。

よって $c \ll s$ のとき、格子点と図形が交

わる確率を p とおくと、 $p = \frac{c}{s}$ が成り立つ。

ここで、3-1-1 節(1)における $p = \frac{r}{d}$

と比較すると、1 つ次元が上がったと考えることができる。よって、この等式を定理 2 と同様に拡張させることにより、表面積に比例する等式を発見できると予想した。

⑤3 次元図形の捉え方

②と同様に 3 次元図形は格子平面上に収めることができない。ここでも正射影が必要である（図 25 参照）。

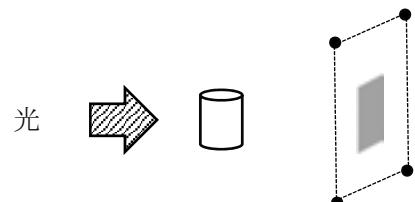


図 25 3 次元図形の正射影

⑥⑤の複雑化

最後に⑤を複雑化すると図 26 のようになる。

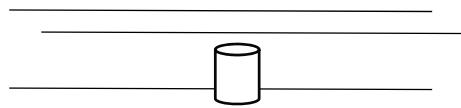


図 26 ⑤の複雑化

3-4-2 定理 2 の 2 次元化

仮説 2 のモデルをもとに実際に定理 2 の 2 次元化（ここで 2 次元とは格子空間の次元のことを意味する）を行い、単純化したモデル（3-4-1 節の(3)(5)）において格子点と影が交わる確率を求める。

(1) 定義

3-4-1節の(1)~(3)に基づいて、以下のように定義する。

定義 1

m 次元凸図形の座標と方向を一様乱数のもとで発生させ、動ける範囲の次元を k 次元とする。このとき、その m 次元凸図形が n 次元格子空間上の格子点と交わり、また $k > n$ のときは、その正射影が格子点と交わる確率を $p(n, m, k)$ とおく。

ただし、 m 次元凸図形の体積、表面積は単位 n 次元格子空間の体積に比べて十分小さいものとする。

例えば、

$$p(1, 1, 1) = \frac{r}{d} \quad (\text{ただし、 } r \ll d)$$

$$p(1, 1, 2) = \frac{2r}{\pi d} \quad (\text{ただし、 } r \ll d)$$

$$p(1, 2, 2) = \frac{L}{\pi d} \quad (\text{ただし、 } L \ll d)$$

$$p(2, 2, 2) = \frac{c}{s} \quad (\text{ただし、 } c \ll s)$$

(2) まず、 $p(2, 2, 3)$ を求める（ビュフォンの針の2次元化）。ここで、以下の事実を前提として扱う。

事実

平面 P に含まれ面積が S である図形を平面 Q に正射影したときの面積は $S \cos \theta$ である。ただし、 θ を平面 P と平面 Q のなす角とする。

ここで、3-4-1節の(3)(4)に基づいて

単位正方形の面積を s 、発生させる図形の面積を c とおく。

仮説 1 $p(2, 2, 3) = \frac{2c}{\pi s}$ である。

ビュフォンの針と同様に考えると、

$$\bar{c} = \int_0^{\pi} c \cos \theta d\theta \div \frac{\pi}{2} = \frac{2c}{\pi}$$

$$p = \frac{\bar{c}}{s} = \frac{2c}{\pi s} \quad \text{となる。}$$

しかし、これはなす角が一様乱数のもとで図形を発生させたときに、格子点と交わる確率であり、方向を一様乱数のもとで考えたときの確率ではない。

一般に、なす角を決定しても方向ベクトルが決定される訳ではない（図 27 参照）。

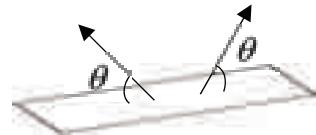


図 27 なす角と方向ベクトル

よって、なす角が一様乱数で表せるとは限らず、仮説 1 の信憑性は下がる。

①方向についてベクトルを用いて厳密に考える。

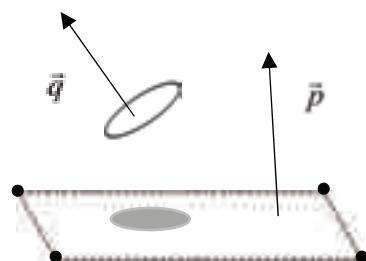


図 28 2つの法線ベクトル

図 28 のように、単位正方形の法線ベクトル $\vec{p} = (0, 0, 1)$ と発生させる図形の法線ベクトル $\vec{q} = (x, y, z)$ をおき、2つの法線ベクトルのなす角を θ とおく。このとき、 \vec{q} は、 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 、つまり単位ベクトルとし、対称性から、 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ で考える。このとき、それぞれのベクトルの内積を利用すると、

$$p = \frac{c \cos \theta}{s} = \frac{c}{s} \cdot \frac{(0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z)}{\|\vec{p}\| \|\vec{q}\|} = \frac{cz}{s}.$$

よって、 \vec{q} の方向を一様乱数で発生させたときの z 成分の期待値を求める必要がある。 z 成分の期待値を $E[z]$ と表す。

②球面状の点の一様分布として考える。

\vec{q} の条件である $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と、 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ を幾何的に考える
と、 $\frac{1}{8}$ 球面と解釈することができる。 \vec{q} の

先端を 1 つの点として考えると、 \vec{q} の方向
を一様乱数で発生させると、 $\frac{1}{8}$ 球面上に
点を一様分布させると考えることができる。



図 29 $\frac{1}{8}$ 球面上の一様分布

このとき、球面を媒介変数を用いると、

$$x = \cos \theta \sin \varphi,$$

$$y = \cos \theta \cos \varphi,$$

$$z = \sin \theta$$

と表すことができる。図 29 はこの媒介変数を用いて表した球であり、 θ, φ は等間隔で表されている。しかし、これは明らかに緯線と経線の交点が球面で一様に分布されていなかったいえず、北極にその交点が集中していることがわかる。よって、 θ, φ を一様乱数にしても球面上に点を一様に分布できないと考えた。

実際にこれらを一様乱数にすると、 θ, φ は独立で無相関であり、

$$E[x] = E[\cos \theta] E[\sin \varphi] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2},$$

$$E[y] = E[\cos \theta] E[\cos \varphi] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2},$$

$$E[z] = E[\sin \theta] = \frac{2}{\pi}.$$

ここで、 $\frac{2}{\pi}$ は 3-1-1 節の(3)と同様に

計算して求めた。よって対称性が崩れており、一様分布とはいえないことがわかる。

③正確な一様分布を考える。

例えば、図 30 のおうぎ形内部の点の一様分布を考える。

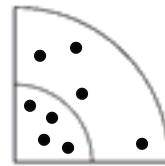


図 30 おうぎ形内部での一様分布

おうぎ形内部の点は独立 2 変数 r, θ で表すことができる（極座標）。 r, θ を一様乱数で表すと、中心部分に点が集中する。これは密度の偏りが原因である。

例えば図 30 において、点をそのように、

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 1$ のもとで発生させる
と、 $r < \frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2} \leq r$ で点の数の割合は等しい
値に近づく。しかし、 $r < \frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2} \leq r$ では、
面積の割合が 1:3 になっているため密度の
比は 3:1 となり偏りが生じる（図 30 は 8
個の点であるが密度の偏りを生んでいるこ
とがわかる）。

よって、密度を等しくするには面積の割合を等しくする必要があり、面積の変化量自身を一様乱数にする必要がある。具体的には面積の変化量を図 31 のように Δs とおくと、 $\Delta s = \frac{1}{2} \Delta\theta (\Delta r)^2$ となる。

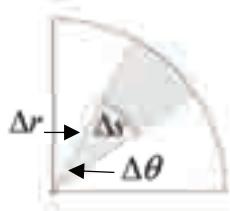


図 31 面積の変化量 Δs

よって、この式から Δs を一様乱数にするには Δr , $\Delta\theta$ を一様乱数にすればよい。

次に球面上でも同様に表面積の変化量を計算すると、

$$\Delta s = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \int_0^{\Delta\theta} 2\pi \cos x \, dx = \Delta\phi \sin \Delta\theta$$

となり、 $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ を一様乱数にすればよい。確認としてそれぞれの期待値を求める
と、 θ , φ は独立で無相関であり、

$$E[\sin \varphi] = E[\cos \varphi] = \frac{2}{\pi},$$

$$E[\sin \theta] = \frac{1}{2}, E[\cos \theta] = \frac{\pi}{4}$$

となるので、

$$E[x] = E[\cos \theta] E[\sin \varphi] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$E[y] = E[\cos \theta] E[\cos \varphi] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$E[z] = E[\sin \theta] = \frac{1}{2}$$

となり、それぞれの対称性を維持できてい
ることがわかる。

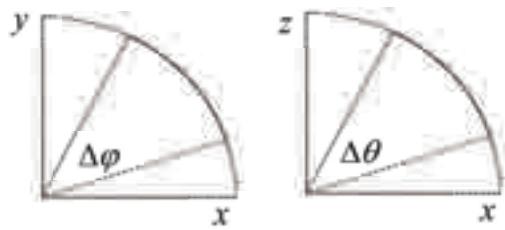


図 32 球面上の表面積の変化量

ゆえに、3-4-2節の(2)①より、

$$p(2, 2, 3) = \frac{c E[z]}{s} = \frac{c}{2s}.$$

(3) 次に、 $p(2, 3, 3)$ を求める（定理 2 の 2 次元化）。

① 3-3-2節の(2)と同様に考える。

発生させる凸 n 多面体のそれぞれの面積を、 c_1, c_2, \dots, c_n とおき、 $F = \sum_{k=1}^n c_k$ とおくと、 F は表面積を表す。

ここで、1 つの格子点に向けて発せられた光線（正射影の成分）はやはり 2 つの面とのみ交わる。

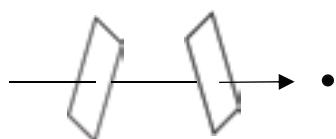


図 33 1 つの格子点に向けた正射影

これと重複を合わせて考えると、

$$p = \sum_{k=1}^n c_k \times \frac{{}_n C_2}{{}_n P_2} = \frac{1}{2s} \sum_{k=1}^n c_k \times \frac{1}{2} = \frac{F}{4s}.$$

② 3-3-3節と同様に考える。

四面体OABCを考える。 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OAC, \triangle ABC$ の面積を s_1, s_2, s_3, s_4 として、それぞれ、 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OAC$ と $\triangle ABC$ のなす角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とおく。ここで、

$0 < \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$ ($i=1, 2, 3$)とする。このとき、

$$\begin{aligned} s_4 &= s_1 \cos \theta_1 + s_2 \cos \theta_2 + s_3 \cos \theta_3 \\ &< s_1 + s_2 + s_3 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ（三角不等式の3次元化）。

[1] 表面積が F である凸（立体）図形の内部に四面体を内接させる。すき間を埋めるように四面体を詰める操作を繰り返し行い、 x 回繰り返したときの凸多面体の表面積を $F(x)$ とおく。

①より $F(x) < F(x+1)$ 。また、凸性から、 $F(x) < F$ 。上に有界な単調増加列は

上限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F$ 。よ

って、 x 回繰り返したときに3次元空間内の格子点と交わる確率を $P_1(x)$ とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{4s} = \frac{F}{4s} \quad \cdots \textcircled{2}$$

[2] 表面積が F である凸（立体）図形の外部に四面体を外接させる。すき間にできる四面体を削る操作を繰り返し行い、 x 回繰り返したときの凸多面体の表面積を $G(x)$ とおく。

①より $G(x) > G(x+1)$ 。また、凸性か

ら、 $G(x) > F$ 。下に有界な単調減少列は

下限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = F$ 。よ

って、 x 回繰り返したときに3次元空間内の格子点と交わる確率を $P_0(x)$ とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{4s} = \frac{F}{4s} \quad \cdots \textcircled{3}$$

[3]（複雑化したモデルで）[1]において凸図形と凸多面体との間に残ったすき間とのみ交わる確率を $P^{(1)}(x)$ 、[2]において残ったすき間とのみ交わる確率を $P^{(2)}(x)$ とする。

このとき、

$$P_1(x) + P^{(1)}(x) = p(2, 3, 3) = P_0(x) - P^{(0)}(x)$$

が成り立ち、 $P^{(1)}(x) > 0, P^{(0)}(x) > 0$ より、 $P_1(x) < p(2, 3, 3) < P_0(x)$ $\cdots \textcircled{4}$ が成り立つ。

以上から、②～④より、はさみうちの原理により、 $p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}$ 。（証明終）

以上から、3-4-2節の(1)の定義に基づいて、単位格子平面の面積を s 、発生させる図形の表面積を F とおくと、次の定理が成り立つ。

定理3

$$F \ll s \text{ であるとき、 } p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}.$$

3-5 n 次元空間への拡張

$$\text{定理2、定理3より、 } p(1, 2, 2) = \frac{L}{\pi d},$$

$$p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}$$

となることがわかった。

すると、それぞれの右辺の係数に注目して、なぜ次元が上がると無理数である π が消えるのかについて疑問に思った。そこで本節では、これらを一般化してその疑問を解消することを目標とする。

3-5-1 諸定義

以下の記号を定義する。

- $V^{(n)}$: 発生させる n 次元図形の体積
- $S^{(n)}$: 発生させる $n+1$ 次元図形の表面積
- $d^{(n)}$: 単位 n 次元格子空間の体積
- V_n : n 次元球の体積
- S_n : $n+1$ 次元球の表面積
- \mathbb{R}^n : n 次元ユークリッド空間

3-5-2 係数に着目した定理2および定理3の一般化

いくつかの手順を経て一般化する。

(1) $p(n, n, n)$ を求める。

\mathbb{R}^n を無限個の点の集合として考えると、3-4-1節の(3)(4)を応用させることができ、 $p(n, n, n) = \frac{V^{(n)}}{d^{(n)}}$ となる。

(2) $p(n, n+1, n)$ を立式する。

① 3-4-2節の(2)で用いた事実を一般化する。

定義2

\mathbb{R}^{n+1} における n 次元図形の体積を u_n ,

それをなす角 θ で \mathbb{R}^n に正射影させたとき

の n 次元図形の体積を u_n^\downarrow とおく。

命題

すべての自然数 n に対して、

$$u_n^\downarrow = u_n \cos \theta$$

が成り立つ。

(証明)

[i] $n=1$ のとき

明らかに、 $u_1^\downarrow = u_1 \cos \theta$ が成り立つ。

[ii] $n=k$ のとき

$u_k^\downarrow = u_k \cos \theta$ と仮定する。

$n=k+1$ のときを考える。

$k+1$ 次元図形を含む \mathbb{R}^{k+1} に正射影させる。 \mathbb{R}^{k+1} との交わり (k 次元) に垂直な \mathbb{R}^{k+1} において、もとの $k+1$ 次元図形を切断して考える。 $x=t$ で切断してできる k 次元図形の体積を $v(t)$ とおくと、 u_{k+1} は次のように表現できる。

$$u_{k+1} = \int_a^b v(t) dt \quad \cdots (\text{ア})$$

仮定より、

$$u_{k+1}^\downarrow = \int_a^b v(t) \cos \theta dt$$

$$= \cos \theta \int_a^b v(t) dt \quad \cdots (\text{イ})$$

(ア), (イ) より、 $u_{k+1}^\downarrow = u_{k+1} \cos \theta$.

ゆえに、[i], [ii] より、数学的帰納法から、題意が示された。(証明終)

② 3-4-2 節の(2)と同様に考える。

単位 n 次元格子空間の法線ベクトルを $\vec{p} = (0, 0, \dots, 1)$, 発生させる図形の法線ベクトルを $\vec{q} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とおく。このとき、 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, つまり \vec{q} は単位ベクトルであるとし、対称性により、 $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で考える。ここで 3-5-2 節の(2)①とベクトルの内積を合わせて考えると、

$$p(n, n+1, n) = \frac{V^{(n)}}{d^{(n)}} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \frac{V^{(n)} \cdot E[x_n]}{d^{(n)}}$$

となる。また、 $p(n, n+1, n) = \frac{k_n V^{(n)}}{d^{(n)}}$ とおくことができる (k_n は n によって決まる定数である)。

(3) $p(n, n+1, n+1)$ を立式する。

3-4-2 節の(3)と同様に考える。
発生させる $n+1$ 次元凸 m 多面体のそれぞ

れの体積を $u_1^{(n+1)}, u_2^{(n+1)}, \dots, u_m^{(n+1)}$ とおく

と、 $S^{(n)} = \sum_{k=1}^m u_k^{(n+1)}$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^m p_k \times \frac{\text{C}_2}{\text{P}_2} = \frac{k_n}{d^{(n)}} \sum_{k=1}^m u_k^{(n+1)} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{k_n S^{(n)}}{2 d^{(n)}}. \end{aligned}$$

また、3-5-2 節の(2)①より、三角不等式の n 次元化 ($s_{n+1} < s_1 + s_2 + \dots + s_n$) が得られるので、同様に上下から評価することができ、 $n+1$ 次元図形でも同じ結果が得られる。ゆえに、

$$p(n, n+1, n+1) = \frac{k_n S^{(n)}}{2 d^{(n)}}.$$

(4) 定数の決定

3-5-2 節の(1)~(3)の研究をまとめると、結局 $p(n, n+1, n+1)$ は $S^{(n)}$ に比例するということを示していることになる。よって、その比例定数を決定するには最低限ひとつの図形を当てはめる必要がある。そこで、 n 次元球を代入すると、

$$p(n, n+1, n+1) = \frac{k_n S_n}{2 d^{(n)}} \quad \cdots ①$$

$$p(n, n, n) = \frac{V_n}{d^{(n)}} \quad \cdots ②$$

となる。このままでは定数を決定することではできないが、 n 次元球の正射影は方向によらず一定で、 $n-1$ 次元球である性質を利用できる。ゆえに

$$p(n, n+1, n+1) = p(n, n, n) \quad \cdots ③$$

$$\text{①} \sim \text{③} \text{を解くと、 } \frac{k_n}{2} = \frac{V_n}{S_n} \text{ となる。}$$

(5) 公式の利用

上述の漸化式を解く上で、1つの等式を発見したので紹介する。

定理 4

$$\text{等式 } \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{V_n}{S_n} \pi \text{ が成り立つ。}$$

定理 4 を証明するために、以下の事実を紹介しておく。

- $V_{2n+2} = \frac{2\pi}{2n+2} V_{2n}$, $V_1 = 2, V_2 = \pi$
- $S_{2n+2} = \frac{2\pi}{2n+1} S_{2n}$, $S_1 = 2\pi, S_2 = 4\pi$

(定理4の証明)

[1] n が偶数のとき

(i) $n=2$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{V_2}{S_2} \pi = \frac{\pi}{4} \text{ より、成立}$$

する。

(ii) $n=2k$ のとき題意が成り立つと仮定すると、 $n=2(k+1)$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{2k+1} x \, dx$$

$$= (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx$$

$$- (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx$$

ゆえに、

$$(2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx$$

$$= (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx \quad \cdots (*)$$

ここで仮定より、

$$(2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx = (2k+1) \frac{V_{2k}}{S_{2k}} \pi$$

$$= (2k+1) \frac{\frac{2k+2}{2\pi} V_{2k+2}}{\frac{2k+1}{2\pi} S_{2k+2}} \pi$$

$$= (2k+2) \frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}} \pi$$

より、(*)から、

$$(2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx = (2k+2) \frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}} \pi$$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx = \frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}} \pi.$$

[2] n が奇数のとき

(i) $n=1$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1, \quad \frac{V_1}{S_1} \pi = 1 \text{ より、成立する。}$$

(ii) $n=2k+1$ のとき題意が成り立つと仮定すると、 $n=2(k+1)+1$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{2k+2} x \, dx$$

$$= (2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx$$

$$- (2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx$$

ゆえに、

$$(2k+3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx$$

$$= (2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx \quad \cdots (**)$$

ここで仮定より、

$$(2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx = (2k+2) \frac{V_{2k+1}}{S_{2k+1}} \pi$$

$$= (2k+2) \frac{\frac{2k+3}{2\pi} V_{2k+3}}{\frac{2k+2}{2\pi} S_{2k+3}} \pi$$

$$= (2k+3) \frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}} \pi$$

より、(**)から、

$$(2k+3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = (2k+3) \frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}} \pi$$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = \frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}} \pi.$$

よって、[1], [2]から、数学的帰納法のようすべての自然数で題意は示された。

(証明終)

そこで、代入して計算してみると、

$$\frac{k_n}{2} = \frac{V_n}{S_n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \cdots (\dagger)$$

いま、 $\frac{V_n}{S_n}$ は、もちろん漸化式として解く

ことが可能であるが、(†)式のように変形することによって、 $n=1$ のとき（ビュフォンの針や定理 2）に三角関数を積分した理由を一般的に理解することができる。また右辺の積分漸化式は、**ウォリス積分**と呼ばれており、スターリングの公式と密接に関係していることが知られている。

定理 5 (ウォリスの積分公式)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \text{とおくとき、}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$$

が成り立つ。また、

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (n: \text{even}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

となる。

(証明)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \text{とすると、}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\ &= \left[\sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot (-\cos^2 x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx \end{aligned}$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

したがって、 $n I_n = (n-1)I_{n-2}$ より、

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

後半を示す。

[1] n が偶数のとき

漸化式を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &= \cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

[2] n が奇数のとき

漸化式を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &= \cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{(n-1)!!}{n!!}. \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

そこで、(†)式とウォリスの積分公式を合わせて考えると、

$$\frac{k_n}{2} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{1}{2} & (n: \text{even}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{1}{\pi} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

となり、これらを 3-5-2 節の(3)に代入すると、

$$p(n, n+1, n+1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{S^{(n)}}{d^{(n)}} & (n: \text{even}) \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{S^{(n)}}{d^{(n)}} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

となる。また、超立方体の体積（単位 n 次元格子空間の体積）の公式 $d^{(n)} = d^n$ を用いると、次の定理を得る。

定理 6

$$p(n, n+1, n+1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{S^{(n)}}{d^n} & (n: \text{even}) \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{S^{(n)}}{d^n} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

確認のために、 $n=1, 2$ の場合について、定理 6 を確認する。

・ $n=1$ のとき

$$d_1 = d, S^{(1)} = L \text{ より、}$$

$$p(1, 2, 2) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{0!!}{1!!} \cdot \frac{L}{d} = \frac{L}{\pi d}$$

・ $n=2$ のとき

$$d_2 = s, S^{(1)} = F \text{ より、}$$

$$p(2, 3, 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{F}{s} = \frac{F}{4s}$$

となり、上述の結果と一致する。

このように、 n が奇数のときには係数に π が存在し、 n が偶数のときには係数に π が存在しないことから、なぜ定理 2 の次元が上がると π が消えるのかについて納得することができた。

3-6 応用例

これまでの研究を他の定理や研究に応用させることができないか、応用例を考えた。

3-6-1 バルビエの定理の別証明

応用例の 1 つとして、「バルビエの定理」が挙げられる。この定理はバルビエにより、1860 年に発見された。微分幾何の知識（曲率）が証明に必要だと考えられている。しかし、定理 2 を利用すると簡単に証明することができる。

ここで、定幅図形とは、図 34 のように、図形の角度にかかわらず高さが一定の図形のことを指す。

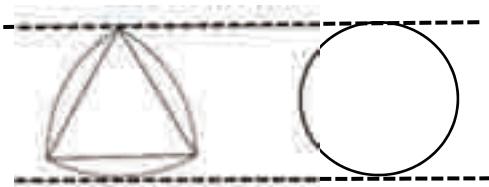


図 34 定幅図形

定理 7 (バルビエの定理)

定幅図形の周長は一定である。

(証明)

幅が r の定幅図形を間隔 d の平行線が描かれた平面に無作為に投げる。定幅性より、

$$p(1, 2, 2) = p(1, 1, 1) = \frac{r}{d} \quad \cdots ①$$

また、定理 2 より、

$$p(1, 2, 2) = \frac{L}{\pi d} \quad \cdots ②$$

①, ②より、 $L = \pi r$ となり、この定幅図形の周長 L は一定である。 (証明終)

3-6-2 表面積の測定

定理 3 を利用することにより、以下のように推測している。

(推測)

凸立体図形の表面積はそれを均等にさま

ざまな角度から見たときの面積（正射影の面積）を4倍すると求められるのではないか。

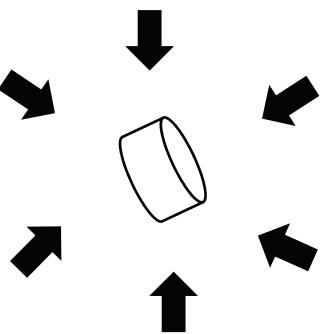


図35 凸多面体の表面積に関する推測

例えば、半径 r の球の場合その正射影の平均は πr^2 となり、それを4倍すると $4\pi r^2$ であり、球の表面積を測定することができる（定理3で球の表面積の公式を利用しているため証明にはならない）。

正射影の面積の測定は、点の一様分布を利用したモンテカルロ法や $p(2, 2, 2)$ を利用するのが適切ではないかと考えている。

3-6-3 無理数の近似の測定

本研究の背景は、ビュフォンの針で π の近似値を測定できることにあった。そこで、ビュフォンの針を拡張させた理論で他の無理数 e や $\sqrt{2}$ の近似値を測定できるのではないかと考えた。

例1 ネイピア数 e

定理2や $p(2, 2, 2)$ から周長や面積に e が関係する図形を考えればよい。身近なものであることを踏まえるとカテナリー曲線を含む凸図形が適するのではないかと考えた。定理2では、確率に結局 π が関係しているので、それが関係しない $p(2, 2, 2)$ を利用する方が無理数による循環論法が生ま

れないので適切である。

例2 2の平方根 $\sqrt{2}$

直角二等辺三角形が適すると考えた。

3-6-4 $r \geq d$ の場合

本研究では $r \ll d$ として研究してきたが、 $r \geq d$ の場合、どうなるのかについて考えた。

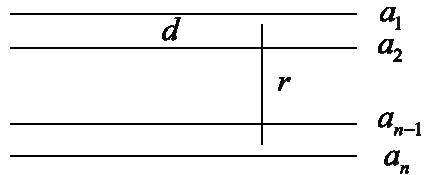


図36 $r \geq d$ の場合

図36において、長さ r の針を平行線に対して垂直になるように落としたとき、針と平行線の交差数の期待値を E とし、 a_k と針が交わる確率を p_k とおく。周期性より針の上端が a_1 と a_2 の間にあるときを考

える。 $E = 1 \times \sum_{k=2}^{n-1} p_k + 1 \times p_n$ となる。

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = 1, p_n = \frac{r - d(n-2)}{d}$$

より、

$$\begin{aligned} E &= 1 \times 1 \times (n-2) + 1 \times \frac{r - d(n-2)}{d} \\ &= \frac{dn - 2d}{d} + \frac{r - dn + 2d}{d} = \frac{r}{d}. \end{aligned}$$

このように、 $r \geq d$ を許すとき、 $E = \frac{r}{d}$ となることがわかり、これを定理2へ拡張させると以下の定理が成り立つ。

定理8

間隔 d の無数の平行線が描かれた平面上に周の長さが L の凸図形を無作為に落としたとき、それらが交わる平行線の本数の期待値を E とおくと、

$$E = \frac{L}{\pi d}$$

である。

4. 今後の課題

4-1 応用例の研究

定理2および定理3の応用理論に関する研究を進めたいと考えている。今回は周長と面積に関する興味深い不等式を1つ紹介する。

定理9（等周不等式）

平面内の滑らかな曲線で囲まれた領域 s を考える。 s の面積を $|s|$ 、周長を L とおくと不等式

$$4\pi|s| \leq L^2$$

が成り立つ。等号は s が円のときに成立する。

4-2 仮説1の研究

4-3-1節(3)の仮説1について平行面と図形の交わる確率に表面積は関係しないという理由からその確率を求めなかつたが、実際に確率は何に依存するのかについて考えている。また、その確率は平行面の間隔が1次元であることより、 $p(1, 3, 3)$ と表現できる。つまり正射影を2回行う必要があり、より複雑になるのではないかと考えている。参考までに、 d を平行面の間隔、 r を針の長

さとして、 $p(1, 3, 1) = \frac{r}{2d}$ である。
3-4

-2節(2)の③より空間内での針の座標成分の期待値がわかるので安易に証明できる。

5. 参考文献

- [1] 「数学超絶難問」、小野田博一、日本実業出版社
- [2] 「曲線と曲面の微分幾何」、小林昭七、裳華房
- [3] web サイト「高校数学の美しい物語」
<http://mathtrain.jp>

サイコロの出る目の確率

2年A組 奥野 俊輔

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイコロの出る目の確率について、一般的な「くぼみのあるサイコロ」と「くぼみのないサイコロ」を使って確かめることにした。どちらのサイコロも振る回数が少ないときは確率にばらつきがあったが、回数が多くなるにつれて、それぞれの目の出る確率が一定の値に近づいていった。また「くぼみのないサイコロ」の方が各目の出る確率の差がとても小さくなることがわかった。

キーワード サイコロ、確率、重心

2. 研究の背景と目的

ボードゲームをしているときに、サイコロを振ると、6や5よりも、1や2の方が多く出ているのではないかと疑問をもった。そこで、サイコロのそれぞれの目（数字）が出る確率はすべて同じなのか、それとも決まった目が多く出るようになっているのか調べてみることにした。

3. 研究内容

3-1 仮説

サイコロは立方体（正六面体）でできているので、重さにかたよりが無ければすべての面が同じ確率で出るはずで、その確率は $\frac{1}{6}$ になるはずである。しかし、一般的な

サイコロでは数字を表す点をそれぞれの面にくぼみを作つて色を付けているため、くぼみの数のぶんだけ軽くなつて重さのかたりができるのではないかと考えた。

例えば、すべてのくぼみの大きさが同じならば、6の面がいちばん軽く、1の面が一

番重くなるはずである。1の面と6の面は反対側に配置されているので、最も重い1の面が下になり、最も軽い6の面が上になりやすいということが予想できる。

実際には、1の面の赤い点のくぼみは他の黒い点のくぼみより大きく、赤い点のくぼみ1個と黒い点のくぼみ何個分が釣り合うのかはわからない。黒い点のくぼみだけで考えると、2の面が最も重く、3の面、4の面、5の面、6の面の順に軽くなっていく。2の面が最も下になりやすいので反対側の5の面が出やすいという結果が予想される。

では、一般的なサイコロではなく、各面にくぼみがなく数字そのものを印刷しているサイコロを使った場合はどうなるのだろうか？ その場合は、それぞれの面の重さが同じだと考えられるので、それぞれの数字がほぼ同じ確率で出ると予想される。

3-2 研究の方法

(1) 一般的な「くぼみのあるサイコロ」を6000回振ってそれぞれの目（数字）が

出る数を数えていく。

- (2) それぞれの目が出た回数から確率を計算する。
- (3) 「くぼみのないサイコロ」でも同様の実験をする。

3-3 結果と考察

3-3-1 「くぼみのあるサイコロ」の実験結果と考察

一般的な「くぼみのあるサイコロ」を6000回振って、それぞれの目が出る回数を数えて、確率を計算した。結果は図1のようになった。この結果を考察する。

- (1) サイコロを振る回数が少ない時は確率のばらつきが大きかったが、回数が多くなるにしたがって、それぞれの目が出る確率が $\frac{1}{6}$ に近づいている。
- (2) 約3000回振ると、それぞれの目が出る確率の上下幅が小さくなり、6000回の確率とほぼ同じになった。
- (3) 「5」や「6」の目の出る確率が大きいことは予想通りだったが、確率が小さいと予想していた「2」の出る確率が上から3番目だった。「5」に相反する「2」も確率が高いのは、重心のずれ等のサイコロ自体に理由があると考えられる。
- (4) 「3」の出る確率が他よりずいぶん小さかった。「3」と対面する「4」も確率が小さいことから(3)と同様の考察が得られる。

3-4-2 「くぼみのないサイコロ」の実験結果

「くぼみのないサイコロ」も同様に6000回振って、それぞれの目が出る回数を数え

て、確率を計算した。結果は図2のようになつた。この結果を考察する。

- (1) 「くぼみのあるサイコロ」と同様に振る回数が少ないときは、確率のばらつきがあったが、回数が多くなるにつれて、それぞれの目が出る確率が一定の値に近づいている。
- (2) 約3000回振ると、それぞれの目が出る確率の変化が「くぼみのあるサイコロ」に比べ、より上下幅が小さくなり、6000回の確率とほぼ同じになった。
- (3) 「くぼみのないサイコロ」は「くぼみのあるサイコロ」と比べると各目の出る確率の差が、「くぼみのあるサイコロ」は約15~18%に対し、「くぼみのないサイコロ」は約16~17.5%と幅がとても小さかった。この理由は仮説の通りだといえる。また、サイコロの出る目の確率はほぼすべて $\frac{1}{6}$ になると予想していたが、そうではなかった。

4. 今後の課題

サイコロの出る目の確率について「くぼみのあるサイコロ」と「くぼみのないサイコロ」を振り調べてみた。するとどちらも、それぞれの目の出る確率に差ができた。「くぼみのないサイコロ」は、出る目の確率がほぼすべて $\frac{1}{6}$ になると予想したが異なつた。なぜ、そうではなかつたのか物理的な面も踏まえ、考えていきたい。

5. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。

図1 「くぼみのあるサイコロ」の確率

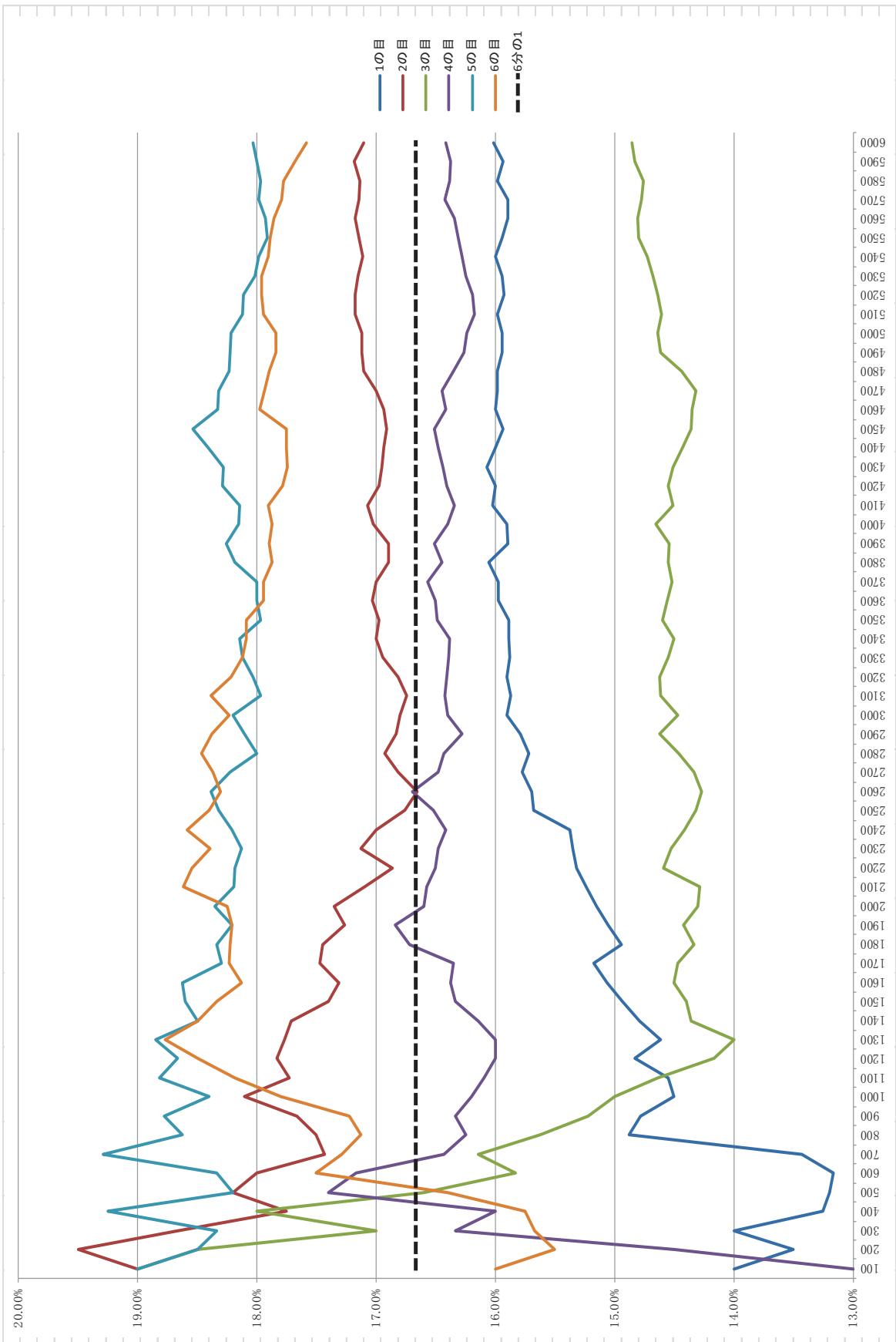
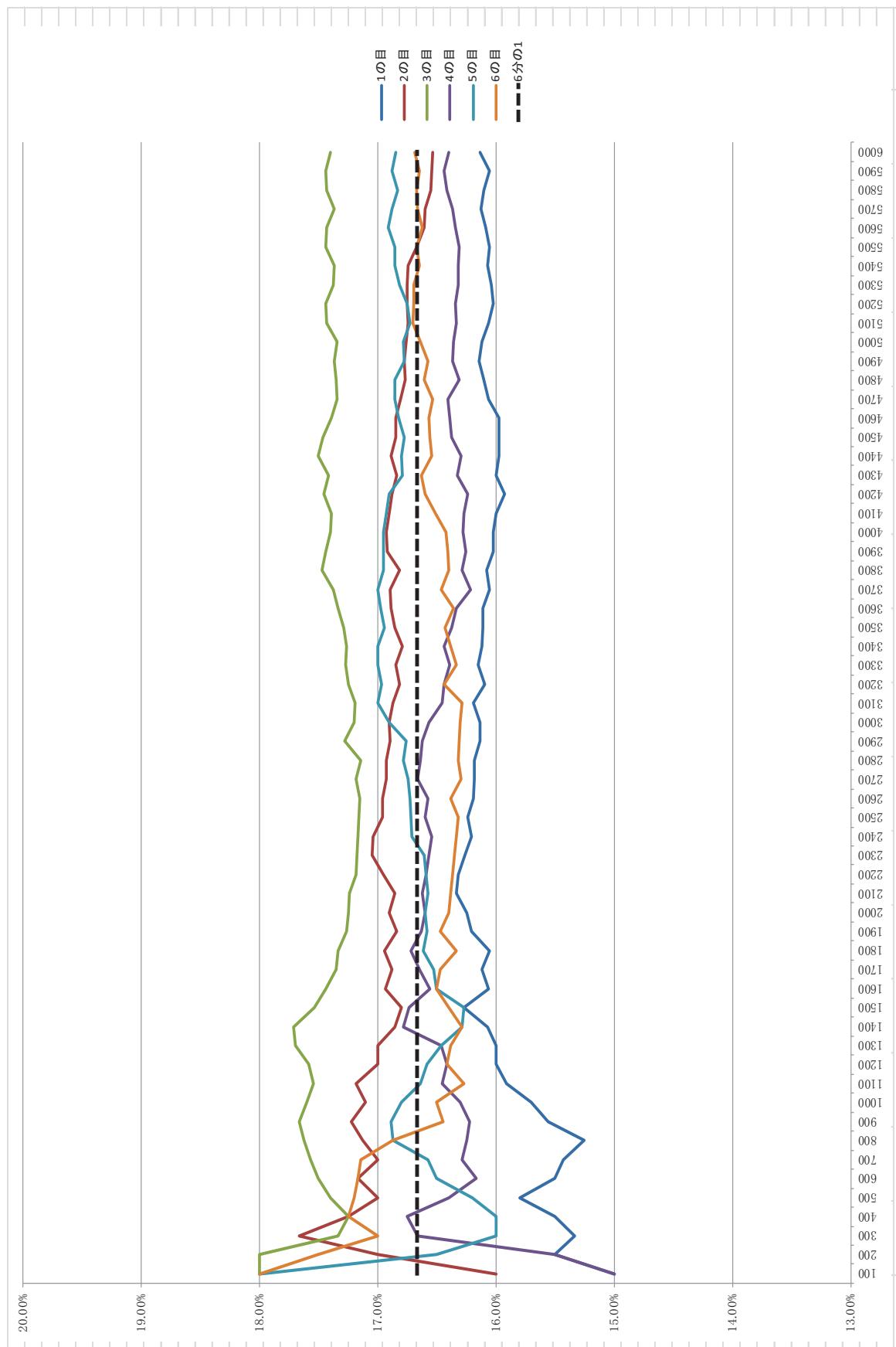


図2 「くぼみのないサイコロ」の確率



無限多重根号について

2年B組 井上 友裕

指導教員 川口 慎二

1. 要約

根号($\sqrt{\cdot}$)の中で根号を無限に足して繰り返していく数式を無限多重根号という。自然数 m に対して、無限多重根号 $\{a_n^{(m)}\}$ を $a_0^{(m)} = 0$, $a_n^{(m)} = \sqrt{m + a_{n-1}^{(m)}}$ と帰納的に定義した数列の極限 F_m として計算した。その結果、 $F_m = \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}$ であることがわかった。また、三乗根 $(\sqrt[3]{\cdot})$ に拡張して、考察を行った。

キーワード 無限多重根号、数列、極限

2. 研究の背景と目的

名古屋大学教育学部附属中学校・高等学校との交流会で、無理数の連分数展開を知った。無理数を有理数で表すことができるならば、有理数を無理数で表すこともできるのではないかと考え、調べてみた結果無限多重根号の存在を知った。そして、無限多重根号にはどのような性質があるのか、調べてみることにした。

3. 研究内容

3-1 無限多重根号とは

無限多重根号とは、例えば

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}}}$$

のように根号の中で根号の足し算を無限に繰り返す数式である。上の式において、

$$x = \sqrt{2 + \cdots}}}}}}}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}} \\ x^2 &= 2 + x, \quad x^2 - x - 2 = 0 \text{ なので、} \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x \text{ は正の数だから、 } x &= 2 \text{ である。} \end{aligned}$$

この計算方法は厳密でないが、値の見当をつけるために役に立つ。

自然数 m で考えてみると、

$$x = \sqrt{m + \sqrt{m + \sqrt{m + \sqrt{m + \sqrt{m + \cdots}}}}}$$

とおくと、 $x^2 = m + x$ を得る。

$$\text{これを解くと、 } x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4m}}{2}.$$

x は正の数だから、 $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}$ となる。

無限多重根号の値について見当がついたので詳しく調べた。

3-2 無限多重根号と数列

定義 1

自然数 m において数列 $\{a_n^{(m)}\}$ を次のように帰納的に定義する。

$$a_0^{(m)} = 0, \quad a_n^{(m)} = \sqrt{m + a_{n-1}^{(m)}}$$

このとき、 $a_n^{(m)}$ を m の n 重根号という。

定義 2

m の n 重根号 $a_n^{(m)}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(m)}$ は収束する。このとき、 $F_m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(m)}$ を m の無限多重根号とよぶ。

命題 1

数列 $\{a_n^{(m)}\}$ は単調増加である。

(証明)

$$a_n^{(m)} < a_{n+1}^{(m)}$$

数学的帰納法を用いて、証明する。

$$(1) \quad a_0^{(m)} = 0, \quad a_1^{(m)} = \sqrt{m} \quad \text{より} \quad a_0^{(m)} < a_1^{(m)}.$$

(2) $n = k$ のとき、 $a_k^{(m)} < a_{k+1}^{(m)}$ が成立する
と仮定して、 $n = k+1$ のときも成立することを示す。

$$a_k^{(m)} < a_{k+1}^{(m)} \quad \text{より} \quad m + a_k^{(m)} < m + a_{k+1}^{(m)}.$$

$$\sqrt{m + a_k^{(m)}} < \sqrt{m + a_{k+1}^{(m)}} \quad \text{なので} \quad a_{k+1}^{(m)} < a_{k+2}^{(m)}$$

ゆえに、 $n = k+1$ でも成立する。

数学的帰納法により、すべての自然数 n

に対して $a_n^{(m)} < a_{n+1}^{(m)}$ が成立する。

したがって、数列 $\{a_n^{(m)}\}$ は単調増加である。 (Q.E.D.)

定理 1

$m \neq 1$ とするとき、 $a_n^{(m)} \leq m$ である。

(証明)

$$a_n^{(m)} \leq m \quad \text{を示せばよい。}$$

数学的帰納法で証明する。

$$(1) \quad a_0^{(m)} = 0 \quad \text{より} \quad \text{明らかに} \quad a_0^{(m)} \leq m.$$

(2) $n = k$ のとき、 $a_k^{(m)} \leq m$ が成立すると仮定して、 $n = k+1$ のときも成立することを示す。

$$a_k^{(m)} \leq m \quad \text{より} \quad m + a_k^{(m)} \leq 2m.$$

$$\sqrt{m + a_k^{(m)}} \leq \sqrt{2m} \quad \text{なので} \quad a_{k+1}^{(m)} \leq \sqrt{2m}.$$

$2 \leq m$ のとき、 $\sqrt{2m} \leq m$ が成り立つことを確認すればよい。

$$2 \leq m \quad \text{ゆえ} \quad 2m \leq m^2, \quad \text{よって} \quad$$

$$\sqrt{2m} \leq m. \quad \text{すなわち} \quad a_n^{(m)} \leq m \quad \text{である。}$$

ゆえに、 $n = k+1$ でも成立する。

数学的帰納法により、自然数 $n \neq 1$ に対して、 $a_n^{(m)} \leq m$ が成立する。 (Q.E.D.)

定理 1 から、 $F_m \leq m$ がわかる。また、 $m \neq 1$ でこの数列は収束することがわかる。

次に、 $m=1$ の場合を考える。

から、 $m=t^2-t$ とおける。

命題 2

$a_n^{(1)} \leq \sqrt{3}$ である。

(証明)

数学的帰納法を用いて証明する。

(1) $a_0^{(1)} = 0$ より、明らかに $a_0^{(1)} < \sqrt{3}$.

(2) $n=k$ のとき、 $a_k^{(1)} < \sqrt{3}$ が成立すると仮

定して、 $n=k+1$ のときも成立することを示す。

仮定より、 $a_k^{(1)} < \sqrt{3}$. ゆえに、 $a_k^{(1)} < 2$.

$1+a_k^{(1)} < 3$ だから、 $\sqrt{1+a_k^{(1)}} < \sqrt{3}$.

すなわち、 $a_{k+1}^{(1)} < \sqrt{3}$.

ゆえに、 $n=k+1$ でも成立する。

数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して、 $a_n^{(1)} \leq \sqrt{3}$ が成立する。 (Q.E.D.)

命題 2 から、 $F_1 \leq \sqrt{3}$ がわかる。

定理 2

$F_m = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$ である。

(証明)

$t = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$ とすると、

$$(2t-1)^2 = 1+4m, \quad 4t^2 - 4t + 1 - 1 = 4m$$

$$a_n^{(m)} = \sqrt{m+a_{n-1}^{(m)}} \text{ より},$$

$$|a_n^{(m)} - t| = \left| \sqrt{m+a_{n-1}^{(m)}} - t \right|$$

$$= \left| \frac{m+a_{n-1}^{(m)} - t^2}{\sqrt{m+a_{n-1}^{(m)}} + t} \right|$$

$$< \left| \frac{1}{t}(a_{n-1}^{(m)} - t) \right| < \left| \frac{1}{t^2}(a_{n-2}^{(m)} - t) \right|$$

$$< \cdots < \left| \frac{1}{t^n}(a_0^{(m)} - t) \right| = \left| \frac{1}{t^{n-1}} \right|.$$

$$\text{よって、 } 0 \leq |a_n^{(m)} - t| < \left| \frac{1}{t^{n-1}} \right|.$$

はさみうちの原理より、

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n^{(m)} - t| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{t^{n-1}} \right| \quad \cdots (*)$$

補題 1 $t > 1$ である。

(補題 1 の証明)

$$t-1 > 0, \text{ つまり, } \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2} - 1 > 0$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2} - 1 &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4m} - 2) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{1+4m} - 1) \end{aligned}$$

ここで、 $m > 0$ より $\sqrt{1+4m} > 1$ だから、 $\sqrt{1+4m} - 1 > 0$.

ゆえに、 $t > 1$ である。 (Q.E.D.)

(定理 2 の証明の続き)

(*)より、 $0 \leq F_m - t < 0$ ゆえ、 $F_m = t$.

したがって、 $F_m = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$. (Q.E.D.)

3-3 無限多重三乗根号

次のような数式を考える。

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2 + \cdots}}}}$$

この式の値を計算する。 $(与式) = A$ とする
と、 $A^3 = 2 + A$ だから、 $A^3 - A - 2 = 0$.

ここで、3次方程式に関するタルタリアの公式を用いる

定理3 (タルタリアの公式)

3次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の解は、

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

で与えられる。

定理3により、

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{-\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3}} \\ &\quad + \sqrt[3]{-\frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{26}{27}}} \\ &\doteq 1.5213797. \end{aligned}$$

自然数 m で考えてみる。

$$A = \sqrt[3]{m + \sqrt[3]{m + \sqrt[3]{m + \sqrt[3]{m + \cdots}}}}$$

$$A = \sqrt[3]{m + A}, \quad A^3 = m + A \quad \text{ゆえ、}$$

$$A^3 - A - m = 0. \quad \text{これを解くと、}$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{27m^2 - 4}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{27m^2 - 4}{108}}}$$

となる。

4. 今後の課題

無限多重根号の値に見当をつけて予想が正しいことを示した。今後は、

- ・3乗根、4乗根、さらに一般化させて n 乗根の場合はどうなるか。
- ・無限多重根号の幾何学的応用はないかなどの課題に取り組んでいきたい。

5. 参考文献

[1] 「Newton 別冊数学の世界 数の神秘編 素数、虚数、 π など、数が織りなす美しい世界」(ニュートンプレス)

[2] 「理系脳を鍛える！ Newton ライト 二乗してマイナスになる 奇妙な数！ 虚数のきほん」(ニュートンプレス)

[3] 「無限多重根号①(解法編) Fukusuke の数学めも」
<https://mathsuke.jp/infinite-nested-radical-solution/>

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。

○×ゲームの決着をつけよう！

2年C組 川野 聰真

指導教員 川口 慎二

1. 要約

○×ゲームとは2人で先攻と後攻を決め、先攻は○、後攻は×を 3×3 の格子にそれぞれ書き込んでいき、縦・横・斜めに記号を揃えた方が勝ちというゲームである。ここでは、 n 番目に置く記号を○ n 、× n のように表記している。

キーワード ○×ゲーム、確率、引き分け

2. 研究の背景と目的

○×ゲームは 3×3 の格子で行うと引き分けになる確率が大きく、決着がつかない。そこで私は条件を加えて「引き分けをなくす」とこと、「○と×の勝率を同じにする」ことを目的とし、この研究を行った。

3. 研究内容

3-1 3×3 以外の格子・その1

条件1 縦 $3\times$ 横4の格子にする

<ルール> 3×3 のときと同様に、縦・横・斜めに3つ記号を揃えた方が勝ちとする。

<検証方法>

(1) ○1を1番上の行の左端に置く。×1を、

○1を置いたマス以外のすべてのマスに置く。

(2) ○1を中心の行の左端に置く。×1を、

○1を置いたマス以外のすべてのマスに置く。

(3) ○1を中心の行の左から2番目のマスに置く。×1を、○1を置いたマス以外のすべてのマスに置く。

(4) ○1を1番上の行の中央のマスに置く。

×1を、○1を置いたマス以外のすべて

のマスに置く。

検証をしていく上で、例えば検証(1)であれば、○1を1番上の行の左端に置いたとき、×1の置き方は $3\times 4 - 1 = 11$ （通り）あるため、その11通りすべての場合の○と×の勝つ確率を調べた。また今回は、○2を置く場所を必ず○1の縦・横・斜めにしか置かないようにした。したがって、○2を置く場所は限られており、最高でも8通りである。この○2に対する×2の置き場所は限定されている。すると、○3の置き方には2つの方法が考えられる。

①残っている8マスのうち、自由な場所に置く。

②×1と×2が縦・横・斜めにそろっており、場所が限定されている。

①の場合は残っている8マスのうち○が勝つのに有利な場所に置く。

<検証結果>

それぞれの場合について、例を示す。

(1) ○1を1番上の行の左端に置く。

○1	×1		
○3	○2		
		×2	

○の勝ち

○1	×1		
○2	○3		
	×2		

○の勝ち

(2) ○1を中心の行の左端に置く。

×1	○3	○4	
○1	○2	×2	
	×3		

○の勝ち

			○3
○1	○2	×2	
	×1	×3	

×の勝ち

(3) ○1を中心の行の左から2番目に置く。

○2	○3		
×1	○1		
	×2		

○の勝ち

		○3	
○2	○1	×2	
×	1	×3	

×の勝ち

(4) ○1を1番上の行の左から2番目に置く。

	○1		
×	1	○2	○3
	×2		

○の勝ち

×	1	○1	○2	×2
			○3	

○の勝ち

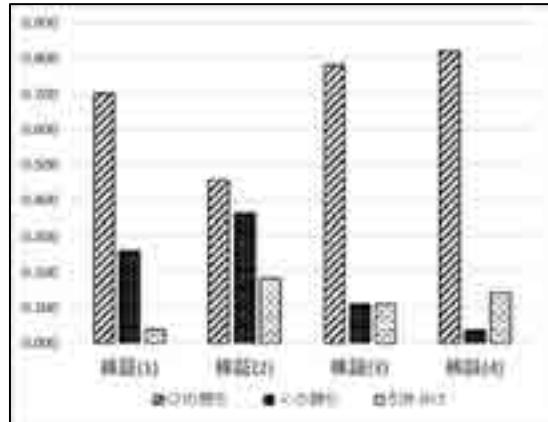


図1 条件1の検証結果（勝率）

3-2 3×3以外の格子・その2

条件2 縦3×横5の格子にする。

<ルール>は3-1節と同様とする。

<検証方法>

以下のすべての場合において、×1は、○

1を置いたマス以外のすべてのマスに置いて調べる。

- (5) ○1を1番上の行の左端に置く。
- (6) ○1を1番上の行の左から2番目に置く。
- (7) ○1を1番上の行の中央に置く。
- (8) ○1を中心の行の左端に置く。
- (9) ○1を中心の行の左から2番目のマスに置く。
- (10) ○1を中央のマスに置く。

<検証結果>

それぞれの場合について、例を示す。

- (5) ○1を1番上の行の左端に置く。
- | | | | | |
|----|----|----|--|--|
| ○1 | ○2 | ×2 | | |
| × | 1 | ○3 | | |
| | | | | |
- | | | | | |
|----|----|---|---|----|
| ○1 | | | | |
| ○2 | ×3 | | | |
| × | 2 | × | 1 | ○3 |
- の勝ち
- ×の勝ち
- (6) ○1を1番上の行の左から2番目に置く。
- | | | | | |
|----|----|----|--|--|
| × | 1 | ○1 | | |
| ○2 | ○3 | | | |
| × | 2 | | | |
- の勝ち
- ×の勝ち
- (7) ○1を1番上の行の中央に置く。
- | | | | | | |
|----|----|--|----|--|--|
| × | 1 | | ○1 | | |
| ○2 | ○3 | | | | |
| × | 2 | | | | |
- の勝ち
- ×の勝ち
- (8) ○1を中心の行の左端に置く。
- | | | | | | |
|----|----|---|---|--|--|
| × | 1 | × | 3 | | |
| ○2 | ○3 | × | 2 | | |
| ○3 | | | | | |
- ×の勝ち
- の勝ち
- (9) ○1を中心の行の左から2番目のマスに置く。
- | | | | | | |
|----|----|---|--|--|--|
| ○2 | × | 1 | | | |
| ○1 | ○3 | | | | |
| × | 2 | | | | |
- の勝ち
- 43 —

x1	○2		
	○1	○3	
	x2		

○の勝ち

×の勝ち

(10) ○1 を中央のマスに置く。

		x1	x2		
	○1			○1	○3
○2				x2	x1

×の勝ち

○の勝ち

<検証結果>

それぞれの場合について、例を示す。

(11) ○1 を 1 番上の行の左端に置く。

○1	○2	x2	
x1	○3		

○の勝ち

○1			
	○2		
	x1	x2	

×の勝ち

(12) ○1 を 1 番上の行の左から 2 番目に置く。

x1	○1		
	○2	○3	
	x2		

○の勝ち

○1	x3	○3	
○2	x1		
x2			

×の勝ち

(13) ○1 を上から 2 番目の行の左端に置く。

x1			
○1			
○2	○3		
x2			

○の勝ち

	x1	x3	
○1	○2	x2	
			○3

×の勝ち

(14) ○1 を上から 2 番目の行の左から 2 番目のマスに置く。

x1	○1	○3	
	○2		
	x3		

○の勝ち

x1			
○1			
○2	○3		
x2			

○の勝ち

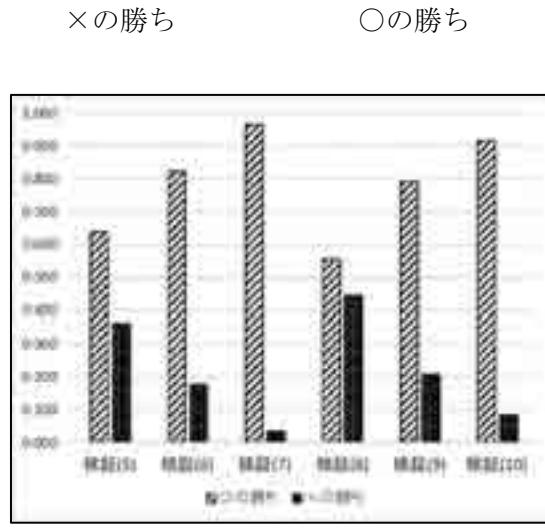


図2 条件2の検証結果(勝率)

3-3 3×3以外の格子・その3

条件3 縦4×横4の格子にする。

<ルール>は3-1節と同様とする。

<検証方法>

以下のすべての場合において、×1は、○1を置いたマス以外のすべてのマスに置いて調べる。

(11) ○1 を 1 番上の行の左端に置く。

(12) ○1 を 1 番上の行の左から 2 番目に置く。

(13) ○1 を上から 2 番目の行の左端に置く。

(14) ○1 を上から 2 番目の行の左から 2 番目のマスに置く。

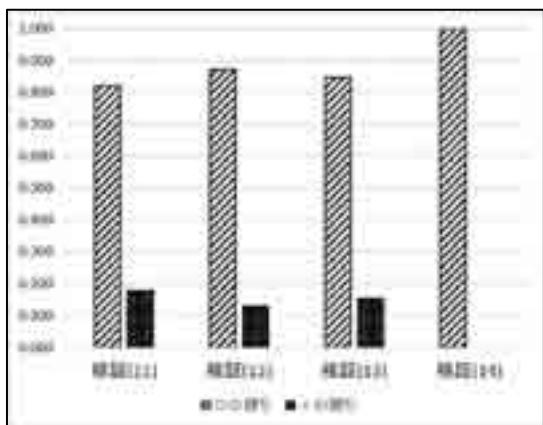


図3 条件3の検証結果（勝率）

3-4 考察

3-1節から3-3節までの検証を行ったことにより、縦3×横5、縦4×横4の格子では引き分けにならないことがわかった。

また、圧倒的に○(先手)が勝利する確率が大きかった。

4. 今後の課題

圧倒的に○(先手)が勝利する確率が大きい理由を探るため、先手が不利になる状況・条件とはどのようなものかを調べたい。

また、図4のような場所に同じ記号を置くことを制限させて同様の検証を行いたい。

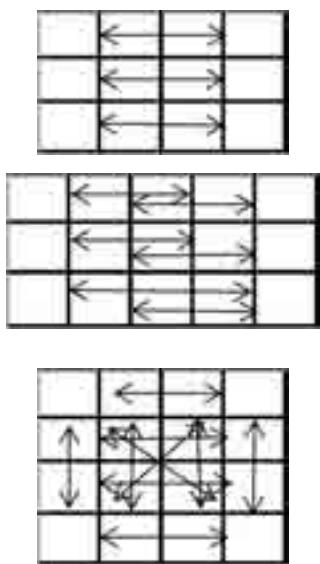


図4 同じ記号の置き場所の制限

この矢印の場所に置くことによって、その矢印の隣の部分に異なる記号がない限りその記号の勝利が確定してしまう。つまり、先手である○が圧倒的に有利になってしまふ。そのため、図4のような場所に同じ記号を置くことを制限させて同検証を行い○と×の勝率が少しでも近づければなと私は考える。

5. 謝辞

研究を進める過程でたくさんのアドバイスを下さった顧問の川口先生、サイエンス研究会数学班・物理班のみなさん、ありがとうございました。

ウィルバーフォース振り子の製作

6年B組 神鳥 有沙

6年B組 喜多 真優

指導教員 守本 寛治

1. 要約

上下運動とねじれ運動を交互に繰り返す振り子、ウィルバーフォース振り子の製作を試みた。実験的運動解析と理論的導出の末、ウィルバーフォース振り子の成立条件を導くことができた。また、振り子の製作を通してねじれ弾性定数の導出を行った。

キーワード 共振 ばね定数 ねじれ弾性定数 慣性モーメント 永久機関

2. 研究の背景と目的

5年次に3Dプリンタを用いて効率的な風力発電の研究を行った。その際に風力などの非継続的なエネルギー源を用いた発電装置ではなく永続的にエネルギーの供給が可能な発電装置を作れば、より多くのエネルギーが得られるのではないかと思い、永久機関のような発電装置を作りたいと考えた。この時に頭に浮かんだのが理科の教科書に必ず載っているコイルの中に金属棒を出し入れしたら電流が生じる電磁誘導を用いた発電装置である。この金属棒の動きを永久機関で再現できれば永続的な発電が可能となる。そこで目をつけたのがウィルバーフォース振り子である。ウィルバーフォース振り子は共振現象から、一見永久機間に見える不思議な振り子である。不思議な動きをするのにまだ実社会に応用されていないことを知り、工学的利用を目的に研究することにした。その際、手元にウィルバーフォース振り子がなかったので作ってみることにした。

3. 研究内容

3.1序論

ウィルバーフォース振り子とは、1894年にイギリスの物理学者ウィルバーフォースが発見した上下運動とねじれ運動が交互に起こる振り子である。



Fig.1：振り子の運動原理

この現象は振り子の上下運動（Fig1の縦矢印）の周期とねじれ運動（Fig1の回転矢印）の周期が一致することにより一振り子内で共振を起こす仕組みである。

3.2自作ウィルバーフォース振り子

方法 A) 実験的運動解析

振り子のねじれ運動と上下運動の周期を測定し、周期の一致点を求める

使用したもの

バネ、おもり、スタンド、iPad、ストップウォッチ

a)手順

- ①スタンドにバネとおもりを固定する
- ②おもりを少し引き、回転方向に初速をつけて静かに離す
- ③上下運動とねじれ運動の様子を iPad に録画し、周期を測定する
- ④測定結果からおもりの調節を行う

①～③を 5 回繰り返し、その周期の平均を導出した。

b)使用したおもり

おもり i

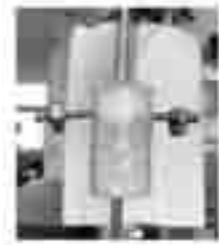


Fig.2 おもり i : 原点

質量 : 1.38×10^{-1} [kg]

円柱半径 : 1.5×10^{-2} [m]

素材 : フィルムケース、ねじ、ナット、鉄球、油粘土

おもり ii



Fig.3 おもり ii : おぼろ月

質量 : 7.5×10^{-2} [kg]

円柱半径 : 1.2×10^{-2} [m]

素材 : アルミ製

おもり iii



Fig.4 おもり iii : 炭火

質量 : 3.5×10^{-2} [kg]

円柱半径 : 1.2×10^{-2} [m]

素材 : プラスチック

おもり iv



Fig.5 おもり iv : 希望の星

質量 : 1.09×10^{-1} [kg]

円柱半径 : 1.39×10^{-2} [m]

素材 : プラスチック、鉄球、油粘土

c)結果

おもり	i	ii	iii	iv
半径(m)	0.015	0.012	0.012	0.0139
上下周期	0.74	0.52	0.47	0.68
ねじれ周期	1.85	0.8	0.6	1.1

Fig.6 グラフ 1 : 振り子の周期測定結果の平均

表のように周期がなかなか一致しなかった。手動でのおもりの調節は非常に難しいことがわかったため、理論的に求めることにした。

方法 B) 理論的運動予測

a) 基本的物理量の測定

振り子の共振条件を探るとともに理論的導出に必要な物理量を得るために基本的な物理量の測定を行った。

a. 1) ばね定数 k の測定

ばねの上端を固定し、スタンドに物差しを取り付け、おもりを吊るしたときのばねの伸び Δz を測定し、

$$k = \frac{mg}{\Delta z} \quad \dots (1)$$

が得られる。

一般にはね定数 k のばねに質量 m のおもりがつるされ、釣り合いの位置から z 伸びている時、おもりの運動方程式は

$$\frac{md^2z}{dt^2} = -kz \quad \dots (2)$$

と表される。

つるされたおもりは上下に単振動し、ばね振り子と呼ばれている。(2)式より、

角振動数 ω_z は

$$\omega_z = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots (3)$$

周期 T は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots (4)$$

と求められる。

a. 2) ねじれ弾性定数 μ と慣性モーメント I の測定

ウィルバーフォース振り子も一種のねじり振り子であるが、通常のねじり振り子は針金をくわえた支点から振り下げおもりまでの針金の長さは一定である。そこで振り下げおもりを吊るし、釣り合いの状態でばねの上端と下端を糸で結び、ばねが回転運動しかできないようにしようとした。しかし、糸での固定が難しかったので測定する

ことができなかった。ここで、この実験が成功したと仮定して話を進める。一般に慣性モーメント I のねじれ振り子が釣り合いの位置から θ だけねじれている時、生じる力のモーメントは回転角 θ に比例する。この時に振り子の回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu\theta \quad \dots (5)$$

で、比例定数 μ はねじれ弾性定数である。

(5)式は(2)式と同型であり、ねじれ弾性による単振動が生じる。そのねじれ振り子の角振動数 ω_θ および周期 T は

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{I}} \quad \dots (6)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{I}} \quad \dots (7)$$

と表される。使用したおもりは半径 r の円柱であるから、そのおもりの慣性モーメント I は

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad \dots (8)$$

である。

b) a で導いた式を元に未知数を算出する

ウィルバーフォース振り子の成立条件により、(4)式と(7)式が等しい値を示せば良いので連立して、(8)式を代入すると、

$$\mu = I \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \dots (9)$$

$$r^2 = \frac{2\mu}{kr^2} \quad \dots (10)$$

が得られる。よって(9)(10)式に実測値 m, k, r, t ($m = 1.38 \times 10^{-1}$ [kg], $k = 2.8$ [N/m], $r = 1.5 \times 10^{-2}$ [m], $T = 1.2616$ [s]) を代入すると、

$$\mu = 3.8 \times 10^{-4} \quad \dots (11)$$

$$r = 1.39 \times 10^{-2} \quad \dots (12)$$

が得られた。

のことからウィルバーフォース振り子としてこの振り子が上下運動とねじれ運動で共振を起こすためには半径 $1.39 \times 10^{-4}[\text{m}]$ の円柱をおもりに吊るす必要があることがわかった。

3. 3 考察

方法 A)おもりの形状調節により共振現象を観察することは容易ではなかった。3種類のバネを切断し、9個の異なる形状のおもりを製作し、それぞれ重さを変えて計50回ほどの実験を行うことで共振現象の確認とウィルバーフォース振り子の完成を目指したが、全て失敗した。またおもりの半径を方法 B に従って算出した数値を元に実験したが共振現象は確認できなかった。この失敗の原因はばね定数の k の測定誤差、算出された数値の誤り、ばねと実験装置の摩擦による減衰だと考える。

方法 B) 方法 A で得られた実測値から上下運動の周期 T を測定し、慣性モーメントあるとねじれ弾性定数 μ を算出することに成功した。これにより、ばね固有のばね定数 k とねじれ弾性定数 μ を求めることができれば、おもりの半径 r のみの調節で共振現象を観察できることを発見し、理論上のウィルバーフォース振り子が完成した。

3. 4 結論

自作したウィルバーフォース振り子の基本的物理量を測定し、そのねじれ弾性定数 μ

と慣性モーメント I を導出し、円柱型のおもりの半径 $r = 1.39 \times 10^{-4}[\text{m}]$ の付近で共振が起こることを予測した。時間不足のために予測通りの調整おもりを作り実験してみることができなかつたが可能であれば確認実験を行いたかった。購入した既製品のウィルバーフォース振り子の運動解析も行なったが、ばねと実験装置の摩擦によるエネルギー損失が大きく見られ、永久機関として動くウィルバーフォース振り子としては遠いもののように思われた。

今後改良するのであれば、減衰を抑える対応が必要であるといえる。工学的利用を目指していたが、少しの引き具合の加減で運動が大きく変わってしまうことも大きく、もし発電装置として利用するのであれば、安定した電力供給は難しいと感じた。しかし、最近免震も兼ねて、高速道路の振動や微弱な地震を利用した共振現象に基づく発電装置も注目を集め始めているのでこれらの問題点が解決すれば工学的利用も夢ではないかもしない。

4. 参考文献

- ・浜島清利."物理のエッセンス"
- ・鈴木(三),布施,鈴木(茂),伊藤."ウィルバーフォース振り子の運動".2012.9.11,p.161-167
- ・Jose Lois Castro. "The Wilberforce Pendulum". Learning Scientific Programming with Python.2015.12.17

フィングリッパーの構造の最適化

6年B組 川本 稜生

指導教員 守本 寛治

1. 要約

フィングリッパーとは主にロボットアームのハンド部に用いられる構造であり、外力の方向に変形する特性により、余分なアクチュエータを搭載せずに柔軟に対象物を把持することができる。本研究では、より物体の把持に優れた構造を特定するため、形状の差異が特性にもたらす変化をシミュレーションで考察した。また、実際にモデルからフィングリッパーを試作して検証を行った。

キーワード フィングリッパー、シミュレーション、シリコーンゴム、TPE

2. 研究の背景と目的

多方面でロボットの導入が進んでいる現代では、ある機能に特化したものよりも、汎用性の高いものが求められる。対象の形や状態によらない安定した動作を実現するために多様なアームが考案されており、フィングリッパーもその一つである。しかし、製品としての実用化がなされる一方で、フィングリッパーそのものの構造について研究した論文は国内にはほとんどない。そこで、形状を徐々に変えてその特性の変化の様子を調べ、どのような構造なら様々な状況に対応できるのか考えることにした。

3. 研究内容

3. 1 モデルの作成

3. 1. 1 設計

シミュレーションをするにあたり、基本となるモデルを作成した。次ページの図1はその設計図である。フィングリッパーは、一般的に薄い側面を複数の架橋部（ブリッジ）で接合した構造をしている。今回は、

シミュレーションの負荷を軽減するためにモデルをなるべく単純なものにした。基本モデルでは、架橋部の数（以下「ブリッジ数」とする）を3、架橋部の厚み（以下「ブリッジ厚」とする）を3mm、側面の厚み（以下「側面厚」とする）を1.5mmとそれぞれ定めている。また、材質はシリコーンゴムとした。本稿では、主にこれらの数値を変えた際の挙動の変化について考察する。

3. 1. 2 Mooney-Rivlin 定数の同定

ゴム材料のような大きな変形を伴う材質の場合、荷重と変位量が比例関係になく、非線形解析と呼ばれる手法が必要になる。中でも、Mooney-Rivlin モデルは超弾性体の解析において広く利用されている。この研究では Autodesk 社の Fusion 360 というソフトを用いてシミュレーションを行ったが、非線形解析の際にモデルの材料特性として Mooney-Rivlin 定数を設定する必要があった。本来なら引張試験などの材料試験を実施して算出るべきものであるが、

こうした試験を行うことができなかつたため、既存の論文やデータを参考にして、以下のように設定した。

C ₀₁	0.1473 (MPa)
C ₁₀	3.6731 (MPa)

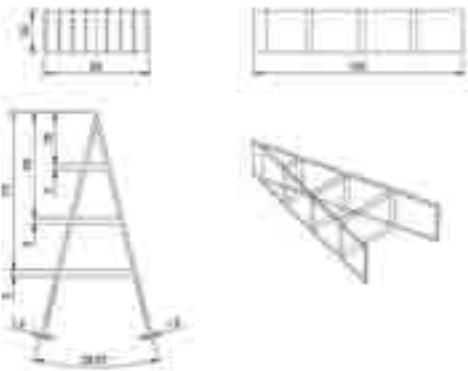


図1 基本モデル設計図



図2 基本モデル外観

3.2 シミュレーション

3.2.1 設定条件と解析手法

モデルの底面（図2における正面）を固定して、図3の矢印のように静的荷重を加えたと仮定し、10ステップ分の解析を行う。荷重の大きさを変えて複数回シミュレーションを繰り返し、変位（初期位置からの距離）、応力（Von Mises応力）、ひずみ（等価ひずみ）のそれぞれについて最終ステップでの最大値を調べる。さらに、前述のブリッジ数、ブリッジ厚、側面厚を変えたモ

デルでも同様にシミュレーションを行い、数値を比較する。



図3 シミュレーション

3.2.2 結果

計15種類のモデルでシミュレーションを行い、次ページのようなデータを得た。



図4 結果（変位分布）

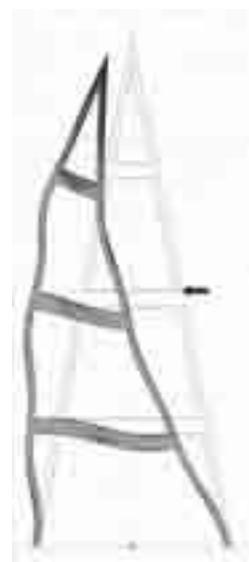


図5 結果（応力）

ブリッジ数/ブリッジ厚/側面厚

3/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/1mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ																																																																																																																																																																																																																																																																								
5N	11.04	1.007	0.07836	3N	8.171	0.9032	0.0715																																																																																																																																																																																																																																																																								
10N	18.1	1.674	0.133	5N	12.78	1.482	0.1153																																																																																																																																																																																																																																																																								
12N	21.22	2.099	0.1494	7N	16.8	2.209	0.1512																																																																																																																																																																																																																																																																								
3/2mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	8N	19.12	2.575	0.166																																																																																																																																																																																																																																																																								
5N	7.997	0.9603	0.07624	9N	23.34	3.204	0.2067																																																																																																																																																																																																																																																																								
10N	14.51	1.692	0.1374	3/3mm/1.25mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ																																																																																																																																																																																																																																																																								
15N	20.39	2.462	0.1847	5N	9.366	1.116	0.07575	3/3mm/1.5mm(基本モデル)	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	8.034	1.261	0.09008	20N	15.84	2.423	0.1698	12N	21.3	3.016	0.1809	25N	19.71	3.061	0.2133	3/3mm/2mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/4mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	2.646	0.5366	0.04239	5N	5.309	1.007	0.07906	20N	11.42	1.721	0.1058	15N	7.974	1.403	0.1097	25N	14.07	2.179	0.134	20N	10.64	1.799	0.1395	3/3mm/2.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	25N	13.64	2.387	0.1793	10N	4.097	0.7199	0.05123	30N	17.24	3.092	0.2192	20N	8.001	1.38	0.1018	35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314
5N	9.366	1.116	0.07575																																																																																																																																																																																																																																																																												
3/3mm/1.5mm(基本モデル)	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	8.034	1.261	0.09008	20N	15.84	2.423	0.1698	12N	21.3	3.016	0.1809	25N	19.71	3.061	0.2133	3/3mm/2mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/4mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	2.646	0.5366	0.04239	5N	5.309	1.007	0.07906	20N	11.42	1.721	0.1058	15N	7.974	1.403	0.1097	25N	14.07	2.179	0.134	20N	10.64	1.799	0.1395	3/3mm/2.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	25N	13.64	2.387	0.1793	10N	4.097	0.7199	0.05123	30N	17.24	3.092	0.2192	20N	8.001	1.38	0.1018	35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314								
10N	8.034	1.261	0.09008																																																																																																																																																																																																																																																																												
20N	15.84	2.423	0.1698	12N	21.3	3.016	0.1809	25N	19.71	3.061	0.2133	3/3mm/2mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/4mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	2.646	0.5366	0.04239	5N	5.309	1.007	0.07906	20N	11.42	1.721	0.1058	15N	7.974	1.403	0.1097	25N	14.07	2.179	0.134	20N	10.64	1.799	0.1395	3/3mm/2.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	25N	13.64	2.387	0.1793	10N	4.097	0.7199	0.05123	30N	17.24	3.092	0.2192	20N	8.001	1.38	0.1018	35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																
12N	21.3	3.016	0.1809																																																																																																																																																																																																																																																																												
25N	19.71	3.061	0.2133	3/3mm/2mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ																																																																																																																																																																																																																																																																								
3/4mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	2.646	0.5366	0.04239	5N	5.309	1.007	0.07906	20N	11.42	1.721	0.1058	15N	7.974	1.403	0.1097	25N	14.07	2.179	0.134	20N	10.64	1.799	0.1395	3/3mm/2.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	25N	13.64	2.387	0.1793	10N	4.097	0.7199	0.05123	30N	17.24	3.092	0.2192	20N	8.001	1.38	0.1018	35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																
10N	2.646	0.5366	0.04239																																																																																																																																																																																																																																																																												
5N	5.309	1.007	0.07906	20N	11.42	1.721	0.1058	15N	7.974	1.403	0.1097	25N	14.07	2.179	0.134	20N	10.64	1.799	0.1395	3/3mm/2.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	25N	13.64	2.387	0.1793	10N	4.097	0.7199	0.05123	30N	17.24	3.092	0.2192	20N	8.001	1.38	0.1018	35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																								
20N	11.42	1.721	0.1058																																																																																																																																																																																																																																																																												
15N	7.974	1.403	0.1097	25N	14.07	2.179	0.134	20N	10.64	1.799	0.1395	3/3mm/2.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	25N	13.64	2.387	0.1793	10N	4.097	0.7199	0.05123	30N	17.24	3.092	0.2192	20N	8.001	1.38	0.1018	35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																
25N	14.07	2.179	0.134																																																																																																																																																																																																																																																																												
20N	10.64	1.799	0.1395	3/3mm/2.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ																																																																																																																																																																																																																																																																								
25N	13.64	2.387	0.1793	10N	4.097	0.7199	0.05123	30N	17.24	3.092	0.2192	20N	8.001	1.38	0.1018	35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																
10N	4.097	0.7199	0.05123																																																																																																																																																																																																																																																																												
30N	17.24	3.092	0.2192	20N	8.001	1.38	0.1018	35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																								
20N	8.001	1.38	0.1018																																																																																																																																																																																																																																																																												
35N	23.54	4.282	0.2535	25N	9.865	1.697	0.1259	3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																
25N	9.865	1.697	0.1259																																																																																																																																																																																																																																																																												
3/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/3mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ																																																																																																																																																																																																																																																																								
10N	6.025	1.148	0.09243	10N	3.12	0.6146	0.04534	20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																
10N	3.12	0.6146	0.04534																																																																																																																																																																																																																																																																												
20N	12.22	2.303	0.1818	20N	6.203	1.22	0.09096	30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																								
20N	6.203	1.22	0.09096																																																																																																																																																																																																																																																																												
30N	18.65	3.545	0.2751	25N	7.719	1.512	0.1133	35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																
25N	7.719	1.512	0.1133																																																																																																																																																																																																																																																																												
35N	22.44	4.161	0.324	30N	9.209	1.793	0.135	40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																								
30N	9.209	1.793	0.135																																																																																																																																																																																																																																																																												
40N	44.12	5.044	0.3731	40N	12.11	2.324	0.1765	4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																
40N	12.11	2.324	0.1765																																																																																																																																																																																																																																																																												
4/1.5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	50N	14.94	2.869	0.2179	5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																								
50N	14.94	2.869	0.2179																																																																																																																																																																																																																																																																												
5N	9.372	0.8556	0.06315	60N	17.79	3.447	0.2602	10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																
60N	17.79	3.447	0.2602																																																																																																																																																																																																																																																																												
10N	15.93	1.479	0.1168	70N	20.9	4.022	0.3023	12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																								
70N	20.9	4.022	0.3023																																																																																																																																																																																																																																																																												
12N	18.05	1.722	0.1353	75N	35.55	5.108	0.3553	4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																
75N	35.55	5.108	0.3553																																																																																																																																																																																																																																																																												
4/3mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	3/3mm/4mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ																																																																																																																																																																																																																																																																								
10N	7.161	1.085	0.08249	10N	2.179	0.4844	0.03438	20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																																
10N	2.179	0.4844	0.03438																																																																																																																																																																																																																																																																												
20N	14.18	2.05	0.1607	30N	6.527	1.459	0.105	25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																																								
30N	6.527	1.459	0.105																																																																																																																																																																																																																																																																												
25N	17.6	2.581	0.1997	50N	10.74	2.387	0.174	4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																																																
50N	10.74	2.387	0.174																																																																																																																																																																																																																																																																												
4/5mm/1.5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	70N	14.84	3.24	0.2392	10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																																																								
70N	14.84	3.24	0.2392																																																																																																																																																																																																																																																																												
10N	4.074	0.7797	0.05892	80N	16.9	3.639	0.2705	20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																																																																
80N	16.9	3.639	0.2705																																																																																																																																																																																																																																																																												
20N	8.34	1.632	0.1216	90N	19.06	4.064	0.3012	30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																																																																								
90N	19.06	4.064	0.3012																																																																																																																																																																																																																																																																												
30N	12.8	2.557	0.1997	95N	20.41	4.319	0.3165	40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ	10N	1.546	0.3875	0.0266	30N	4.653	1.176	0.08138	50N	7.741	1.957	0.1365	70N	10.79	2.71	0.1904	90N	13.81	3.427	0.2427	100N	15.33	3.772	0.2682	120N	18.59	4.438	0.3187	125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																																																																																
95N	20.41	4.319	0.3165																																																																																																																																																																																																																																																																												
40N	17.87	3.553	0.287	3/3mm/5mm	変位(mm)	応力(MPa)	ひずみ																																																																																																																																																																																																																																																																								
10N	1.546	0.3875	0.0266																																																																																																																																																																																																																																																																												
30N	4.653	1.176	0.08138																																																																																																																																																																																																																																																																												
50N	7.741	1.957	0.1365																																																																																																																																																																																																																																																																												
70N	10.79	2.71	0.1904																																																																																																																																																																																																																																																																												
90N	13.81	3.427	0.2427																																																																																																																																																																																																																																																																												
100N	15.33	3.772	0.2682																																																																																																																																																																																																																																																																												
120N	18.59	4.438	0.3187																																																																																																																																																																																																																																																																												
125N	19.53	4.601	0.3314																																																																																																																																																																																																																																																																												

表1 シミュレーション結果

3.3 解析

表1の結果より、変位、応力、ひずみの最大値はそれぞれ荷重の大きさに比例すると考えられる。そこで、最小二乗法を用いて一次関数による近似を試みた。なお、表1において赤字で示されている項目は、シミュレーションの結果変形が著しく、外れ値として処理するべきだと判断したものである。

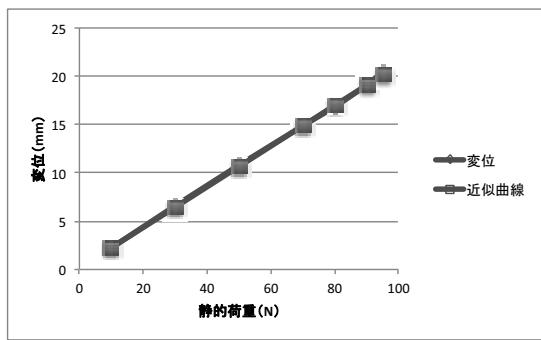


図6 近似の例 (3/3mm/4mm)

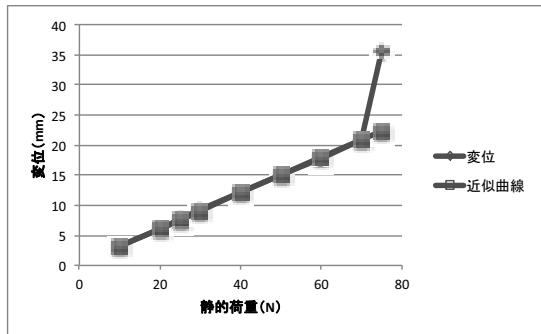


図7 外れ値の処理の例 (3/3mm/3mm)

近似によって得られた関数の一次の係数を次ページに示す。数値が大きいほど、静的荷重の増加に対する各項目の増加の割合が大きいことを表す。さらに、これらのデータからブリッジ数、ブリッジ厚、側面厚の差異による係数の増減について考察した。

表3は、ブリッジ数のみが異なるモデルについて比較し、ブリッジ数3のモデルに対するブリッジ数4のモデルの各係数の割

合を算出したものである。ブリッジ数が増加すると係数は減少する傾向にあり、基本的には、ブリッジ数の増加に伴ってより変形しにくく、より壊れにくくなっていると言える。また、ブリッジ厚が増すと係数の減少率も平均して大きくなっています、ブリッジが厚くなることでブリッジ数の増加による効果が大きく出ていると考えられる。

図8～10は、ブリッジ数3、側面厚1.5mmの5つのモデルの、ブリッジ厚に対する各係数の変化の様子と、二次関数で近似した曲線をグラフにしたものである。なお、ブリッジ厚が1.5mmのモデルのデータは変形が大きく、外れ値とした。外れ値を除いた相対誤差の平均値はいずれも3%未満で、近似の精度は十分であると思われる。各係数はブリッジ厚が4mmのものから5mmのものにかけて増加しており、近似によればブリッジ厚がそれぞれ4.29mm、3.92mm、3.76mmの際に係数が最小値をとると予想される。

図11～13は、ブリッジ数3、ブリッジ厚3mmの8つのモデルの、側面厚に対する各係数の変化の様子と、指數関数で近似した曲線をグラフにしたものである。ブリッジ厚の場合と同様に相対誤差の平均値を算出したところ、変位係数と応力係数は約2%、ひずみ係数は約9%となった。ひずみ係数は他に比べて小さく、シミュレーション結果のグラフにも若干のブレが見受けられるため、9%は許容範囲であると考える。側面厚が増すと単純に強度も上がるが、側面厚が1.5mmを下回った辺りから急激に強度が落ち、変形しやすくなっていることが分かる。

	3/1.5mm/1.5mm	3/2mm/1.5mm	3/3mm/1.5mm(基本モデル)
変位係数	1.446146628	1.239289448	0.778714288
応力係数	0.151652968	0.150168564	0.119457143
ひずみ係数	0.010298399	0.010845912	0.00818
	3/4mm/1.5mm	3/5mm/1.5mm	4/1.5mm/1.5mm
変位係数	0.575020022	0.6284	1.253532679
応力係数	0.098930909	0.12080339	0.123944977
ひずみ係数	0.006940399	0.009201257	0.010388436
	4/3mm/1.5mm	4/5mm/1.5mm	3/3mm/1mm
変位係数	0.696778575	0.435446667	2.400111155
応力係数	0.099270672	0.086422333	0.371987931
ひずみ係数	0.007814963	0.006830733	0.021086942
	3/3mm/1.25mm	3/3mm/2mm	3/3mm/2.5mm
変位係数	1.683307054	0.542138767	0.385387809
応力係数	0.269767426	0.080653333	0.06526392
ひずみ係数	0.014661485	0.004693517	0.004989265
	3/3mm/3mm	3/3mm/4mm	3/3mm/5mm
変位係数	0.293354943	0.211654716	0.154013127
応力係数	0.058131758	0.044500881	0.036950019
ひずみ係数	0.0042500	0.003312508	0.002661552

表2 近似の一次係数

	3/1.5mm/1.5mm	4/1.5mm/1.5mm	割合
変位係数	1.446146628	1.253532679	0.866808838
応力係数	0.151652968	0.123944977	0.817293443
ひずみ係数	0.010298399	0.010388436	1.008742833
	3/3mm/1.5mm(基本モデル)	4/3mm/1.5mm	
変位係数	0.778714288	0.696778575	0.894780775
応力係数	0.119457143	0.099270672	0.831014953
ひずみ係数	0.00818	0.007814963	0.955374491
	3/5mm/1.5mm	4/5mm/1.5mm	
変位係数	0.6284	0.435446667	0.692945045
応力係数	0.12080339	0.086422333	0.715398592
ひずみ係数	0.009201257	0.006830733	0.742369573

表3 ブリッジ数に関する比較

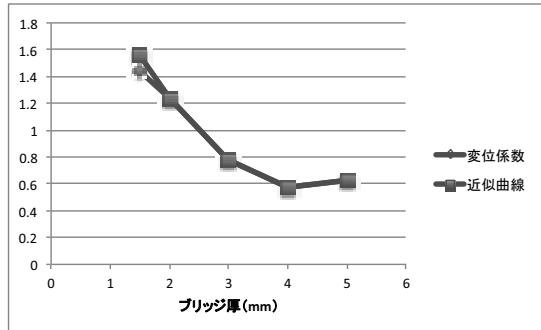


図 8 ブリッジ厚と変位係数の関係

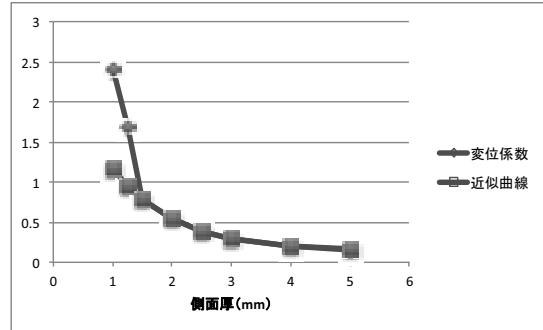


図 1 1 側面厚と変位係数の関係

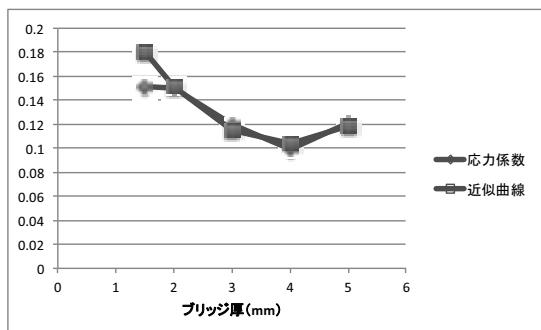


図 9 ブリッジ厚と応力係数の関係

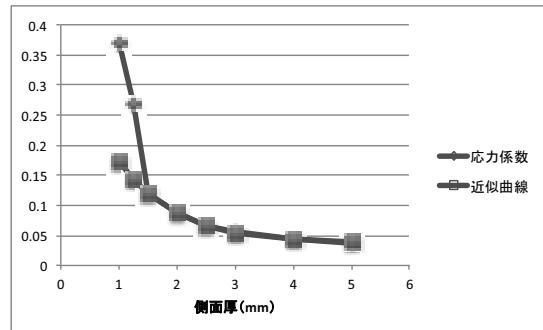


図 1 2 側面厚と応力係数の関係

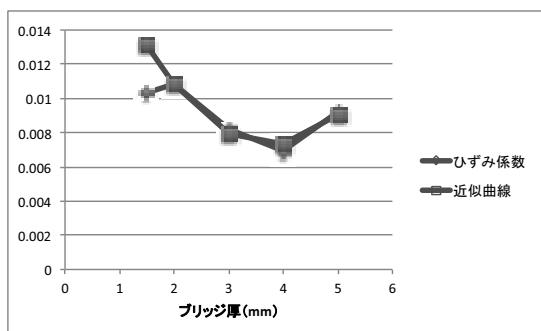


図 1 0 ブリッジ厚とひずみ係数の関係

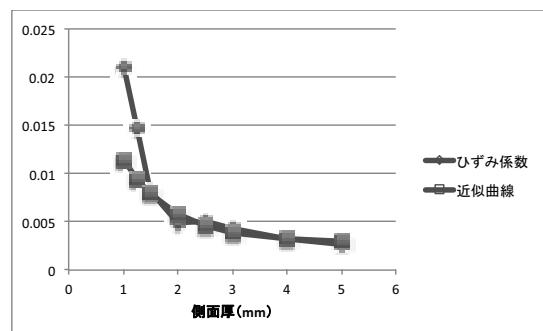


図 1 3 側面厚とひずみ係数の関係

いることが分かる。

3.4 試作

基本モデルから型を作成し、3Dプリンターを用いて出力（ABSを使用）した。フィングリッパー本体の材料には市販のTPE（熱可塑性エラストマー）を使い、熱湯で温めてから型に押し込んで成形した。TPEは、硬化してもシリコーンゴムなどの素材と同様にある程度の弾性を保ち、粘・接着性及び生体適合性を持つため、ロボットアームの材料として適當である。

今回の試作では、実際にシミュレーションと同じように変形することまでは確認できたが、定量的な測定を行うまでは至らなかつたので、今後測定方法を考案していきたい。



図14 出力した型



図15 基本モデルの試作品

4. 考察

図16、17は基本モデルにおいてMooney-Rivlin定数の有無によるシミュレーション結果の違いを比較したものである。（図2の正面から見た図）表示されているのは変位分布であり、色相が赤に近づくほど初期位置から大きく動いていることを表す。定数なしのシミュレーションでは、大きく変形した際に外力に対して垂直方向（図の下向き）に曲がってしまっているが、定数ありの場合では垂直方向への変形が抑えられている様子が見て取れる。これは、Mooney-Rivlin定数の導入によって弾性体としての性質を加味した結果、定数なしのシミュレーションでは変形に耐えられず上下に逃げていた力を吸収することができるようになったためだと考えられる。また、定数ありのモデルの方がより大きな力に耐えるという点からも、Mooney-Rivlin定数を考慮したことで現実の弾性体の挙動に近づいたと言えるだろう。ただ、今回はシリ

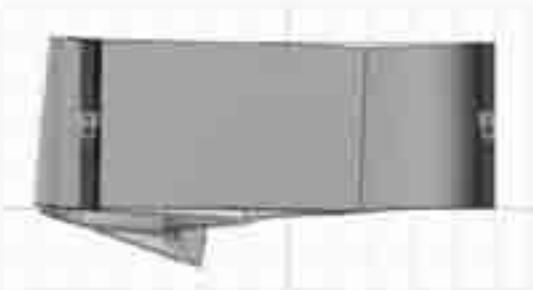


図16 Mooney-Rivlin定数なしのシミュレーション

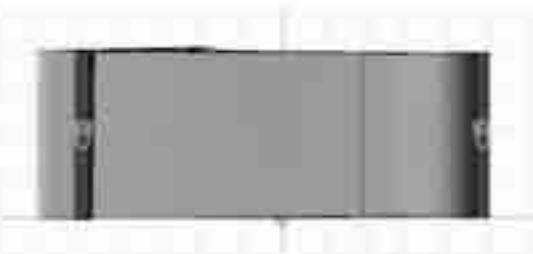


図17 Mooney-Rivlin定数ありのシミュレーション

コーンゴムの材料定数を元にシミュレーションを行ったが、設定した値がシリコーンゴムのものとして適切であるかは判断できないため、材料試験によって確認する必要がある。

解析結果によれば、ブリッジ数と側面厚が増加すると強度は上がるが、ブリッジ厚に関しては一定値を超えると逆に強度が低下する。これは、モデル全体のサイズを統一してシミュレーションを行ったために、ブリッジ厚が増すと空洞部分が減り、柔軟性が失われたためだと思われる。ロボットアームとしての機能を果たすためには、強度だけでなく、物体の形状に沿って変形する柔軟さも必要とされるため、十分な強度と柔軟性を両立させなければならない。現在のモデルならば、ブリッジ厚が空洞幅の2割弱程度のものが最適であると考えられる。側面厚は指数関数的に変化しており、3mm以上にしても強度を上げる効果は薄く、硬くなるばかりであるから、側面厚は3mm程度にしてブリッジ数を増やすのが効果的だろう。



図19 球体の先端部での把持



図20 立方体の把持

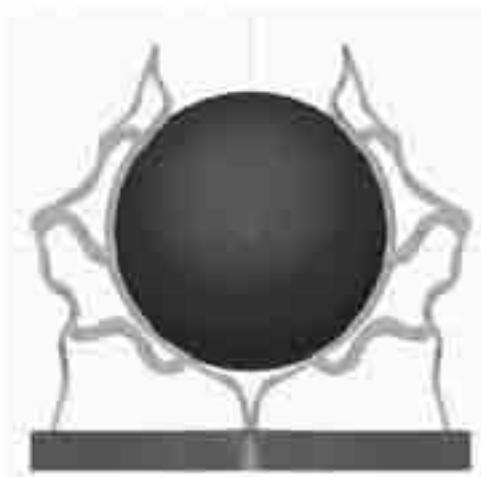


図18 球体の中心部での把持



図21 立方体の把持（斜め）

対象物の形状、位置などを変えて変形の様子をシミュレーションしたところ、ある程度対象の形に合わせて変形することが確認できた。しかし、対象物の大きさの問題か変形に不自然な箇所も散見されるため、モデル、シミュレーション手法共に改善しなければならないだろう。

5. 今後の展望

今回の研究では、ブリッジ数とブリッジ厚の違いによる差異について考察するにはデータが不足していたため、さらにモデルの種類を増やして細かくデータを取る予定である。また、図22のように接合部に溝を掘って、よりなめらかな変形を可能にしたものなど、新たなモデルの作成も進めたいと考えている。

今回はTPEを用いて試作を行ったが、TPEが射出成形可能な流動性を示す温度帶は200°C前後であり、現状の設備ではより複雑なモデルを再現することは難しい。そ

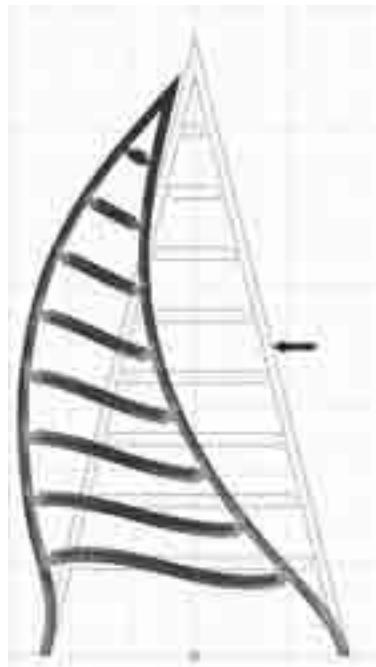


図22 溝ありのモデル

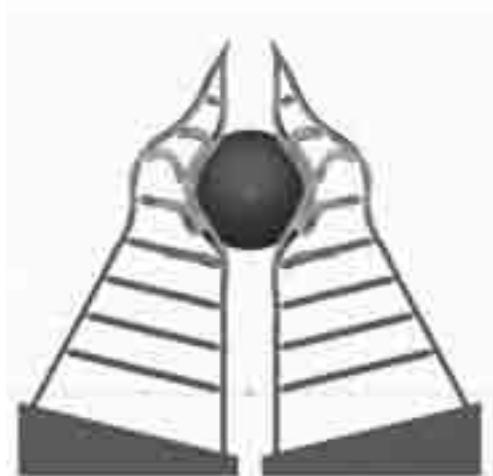


図23 シミュレーションの様子

こで、常温で成形可能な市販のシリコーンシーラントまたは液体シリコーンを用いることを検討している。

6. 参考文献

[1] はじめてのゴム材料解析:有限要素法マルチフィジックス解析ツール ANSYS:サイバネット

<https://www.cybernet.co.jp/ansys/case/tips/29.html>

[2] 石川覚志「機能性エラストマーの数値解析理論に関する研究」京都大学学術情報リポジトリ (KURENAI) , 2009年

https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/81829/1/D_Ishikawa_Satoshi.pdf

[3] 華陽物産株式会社「ゴム物性一覧表」
https://kayo-corp.co.jp/common/pdf/rubber_propertylist.pdf

7. 謝辞

本研究を行うにあたり、顧問の守本先生にご指導いただきました。また、増井先生には材料特性に関する助言をいただきました。この場を借りて御礼申し上げます。

超音波を用いた非接触型触覚提示装置の開発

5年A組 望月 草馬
指導教員 藤野 智美

1. 要約

超音波が持つ高い周波数は、医療・産業分野における活用が注目されている。本研究では、超音波の音響放射圧を空気中の一点に焦点化することで、仮想物体に人が触れた際に触覚を再現することを目指した。その実現方法として、多数のスピーカーから発振される超音波を同位相で重ね合せ、圧力を提示するシステムを開発した。成果として、軽量な物体を直接触らないで形を変化させたり、動かすことにより成功し、空中映像表示素子と組み合わせることで「触れた感触があるホログラムディスプレイ」を開発することができた。

キーワード 超音波、触覚、音響放射圧、FPGA

2. 研究目的

私は以前より VR(Virtual Reality) や AR(Augmented Reality) に興味があり、画像解析によってユーザーと仮想空間上の位置座標を同期させる研究や、VR ソフトウェアの開発などを行ってきた。その過程で、VR や AR などで見えている仮想物体に手を伸ばしたとき、物体に触れたかのような感触を得られれば、ユーザーの使用感が高まり、応用性が広がるのではないかと考えた。同様の目的を達成する既存の製品として、着脱式の手袋型のものがある。しかし、この製品は、使用時に圧迫感を与えることなく、手をかざすだけで触れた感触を感じられる装置を開発したいと考え、身の回りにありふれている「空気」の活用に着目した。本研究では、「空気」の振動現象である「音」が物体を押す力を利用して、非接触で触覚(圧力)を提示するシステムの開発を目指す。具体的な手法として、遅延時間を利用した位相制御によるフェーズドアレイシステムの実現を予定している。また、活用する音には超音波を選択した。

3. 研究手法

3. 1 システム構築

(1) 音響放射圧による圧力の提示

音の進行を物体が遮ると、物体表面に「音響放射圧」が発生し、音の進行方向に物体が押される。この現象を利用して、空間上で圧力を提示できると考えた。得られる音響放射圧は以下の式で表される。

$$P = aE = a\frac{I}{v} = a\frac{p^2}{\rho v^2}$$

P[Pa] : 音響放射圧

a : 物体によって決定する係数

E[J/m³] : 音響エネルギー密度

I[W/m²] : 音響インテンシティ

p[Pa] : 超音波の音圧

v[m/s] : 音速

ρ[kg/m³] : 媒質の密度

関係式より、音響放射圧は音圧に依存しており、触覚提示を行うには音圧を上げる必要性があることがわかる。また、以下の 3 つの理由から、本研究に適した音源として、超音波を選択した。

① 指向性が高い

→意図した方向に音が伝搬し操作しやすい。

② 高周波

→エネルギーが高い。

③ 聞こえない

→使用時に騒音などの問題がないため、ユーザーに音源の存在を認知させない。

(2) FPGA と振動子アレイによる発振

単一の超音波振動子(以下、振動子)では音圧が微弱であるため、振動子を多数配置することによって音圧の増幅を試みた。振動子は SPL (Hong Kong) Limited 社製の UT-1007-Z325R(中央周波数 40kHz±1kHz)を用いた。振動子アレイ(以下、アレイ)は自作し、計 72ch を最密構造で配列した(図 1)。

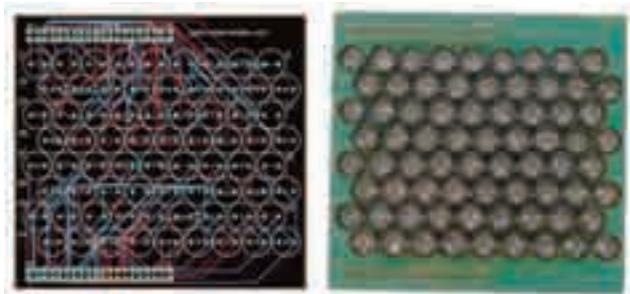


図 1：振動子アレイの回路設計図と実物

振動子の発振は intel 社製の FPGA 評価ボード DE10-Nano を用いた(図 2)。図 3 にシステム概要を示す(図 3)。



図 2：DE10-nano

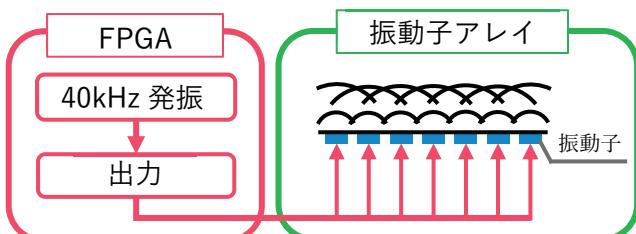


図 3：システム

(3) 検証実験 | 圧力提示

【手法】

アレイの正面に付箋をかざし、動きの変化を見て物体への圧力提示が実現できているか検証した。

【結果】

付箋は動かず、一切変化は見られなかった。

【考察】

超音波は出力されているにも関わらず、付箋が動かなかった理由として、すべての振動子を同位相で発振したことでの波面が平面になってしまい、十分な音響放射圧が得られなかったと考えられる(図 4)。

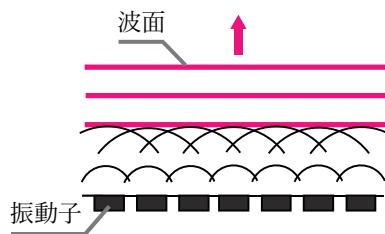


図 4：音の伝搬モデル

(4) 音圧の焦点化

前述したとおり、音を出すだけでは波面が平面となってしまい、音圧が分散することが分かった。高い音圧を限定的な範囲でのみ得るためにには、音を集束させて焦点化する必要がある。音圧を焦点化する手法として、以下の 2 つの手法を考えた。

【手法 1】 振動子の立体配置

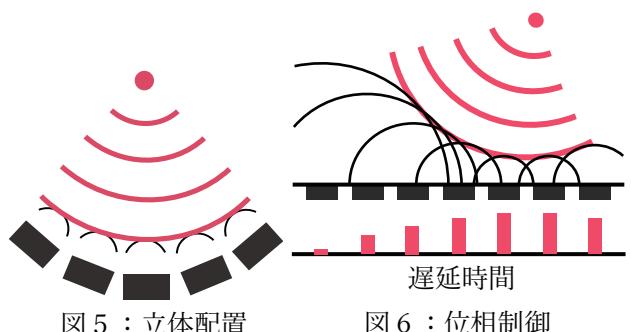


図 5：立体配置

図 6：位相制御

振動子を球面上に配置することで空間上的一点で音の焦点を形成する手法を考えた(図 5)。しかし、この手法では焦点が固定されてしまい、任意の座

標で焦点化することができない。また、立体に配置するため装置が大型になるという課題が生じる。

【手法 2】位相制御

手法 1 の問題点を解決するために、振動子を平面に配列し、それぞれの振動子に位相差をつけることで空間上に焦点を形成する手法を考えた(図 6)。この手法は、位相差を生み出すための遅延のつけ方により、任意の座標で焦点化することが可能となるため、非常に自由度が高い。また、振動子を平面に配置するため、装置の小型化が可能となる。自身のシステムの活用手法として、ユーザーの手の位置を追尾して焦点位置を変化させることを目指している。将来的な展望もふまえ、焦点位置を用途に応じて変更できる手法 2 を採用した。

(5) 位相差計算

任意の座標に超音波を焦点化するために、焦点座標と各振動子間の距離差に応じて位相差を計算する手法を考えた。各振動子と焦点との間にある波数差から位相差を求めることで計算の処理を簡易化した。各振動子の波数は以下の式で表される。

$$w_i = \frac{D_i}{\lambda} \quad w : \text{波数} \quad i : \text{振動子番号} \\ \lambda [\text{m}] : \text{波長} \quad D [\text{m}] : \text{焦点と振動子の距離}$$

求めた波数の小数部分が波数差であり、これが位相差となる。

次に、この計算式を導入した遅延計算シミュレーターを Unity を用いて自作した(図 7)。焦点座標の入力のみで多数の振動子の遅延が自動算出されるため、焦点位置を変更した場合の各振動子の遅延時間の算出ができる。



図 7：シミュレーション画面

(6) 位相差の制御

上記で求めた位相差を信号処理として実現するために、カウント変数の初期値を変更することで初期位相を変化させた。例えば 1/2 周期の位相差を持った二つの矩形波を出力する場合、半周期分のクロック数をかさましすることで任意に位相を制御することができる(図 8)。実際に波形の様子をオシロスコープで計測した結果が以下である(図 9)。なお、今回作成した位相制御システムは 20ns の分解能を持つ。

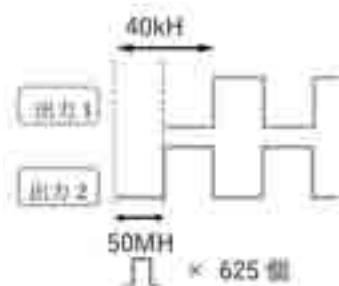


図 8：位相制御ロジック

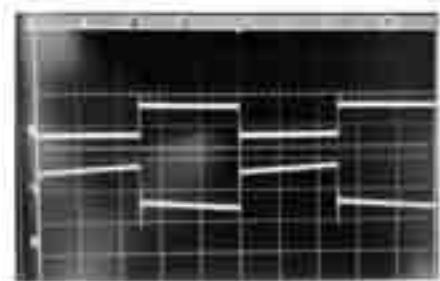


図 9：オシロスコープの画面

(7) 位相制御を適用したシステム概要

以下に位相差計算と制御を組み合わせたフェーズドアレイの処理フローを示す。まず、前述した自作シミュレーターで遅延時間を算出した。その後、FPGA 内で遅延時間を元に位相制御を行い、アレイに出力する手法を採用した(図 10)。なお、シミュレーションでは実際にアレイ上に配置されている振動子 72ch 分の遅延データを生成し、FPGA に適用した。

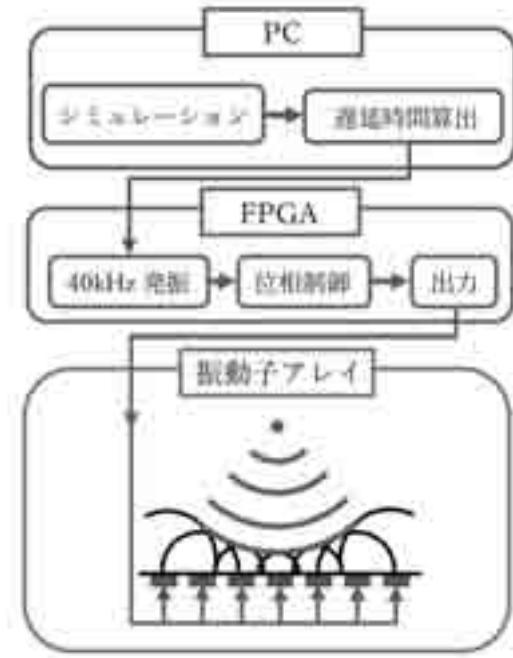


図 10：音の焦点化システム

3. 2 検証実験と装置の改良

(1) 検証実験 1 | 焦点化の検証

位相差を波数差として扱うシステム開発により、意図した場所に超音波の焦点化ができているかを検証した。

【手法】

超音波マイクロフォン(中央周波数 40kHz)をオシロスコープに接続し、超音波の焦点位置とそれ以外の位置の波形の振幅を比較した。

【結果】

焦点では振幅が増大したが、焦点以外の地点では振幅が計測できないほど小さくなかった(図 11)。焦点位置を別の場所に変更しても同様の結果が得られた。

【考察】

アレイが平面であるにもかかわらず任意の点に音圧を焦点化することができた。構築した遅延時間による位相制御が正しく機能していることがわかった。

(2) 検証実験 2 | 音圧分布の測定

音圧の平面分布を測定し、焦点付近の音圧分布について測定した。2 つの手法を用いて音圧分布

を測定し、評価を行った。

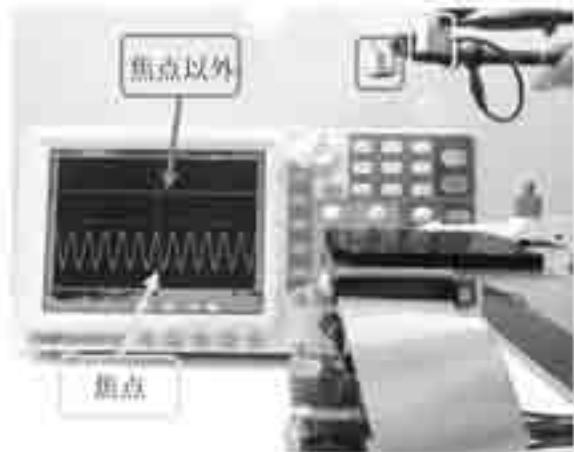


図 11：実験の様子とオシロスコープの画面

【手法】

XY レコーダーのペン位置にマイクロフォンを取り付け、オシロスコープと接続する(図 12)。縦横 1cm ずつマイクロフォンをずらしていき、合計 231 箇所で電圧波形の絶対値の最大値を計測した。条件を変えて同様の操作を計 6 回行った。計測の条件はアレイとマイクロフォンの距離と焦点化位置が 10cm, 20cm, 30cm の場合を計測し、いずれも位相制御ありとなしの両方のデータを計測した。

【結果】



図 12：実験風景

結果をわかりやすくグラフにまとめたものが以下のものである(図 13)。

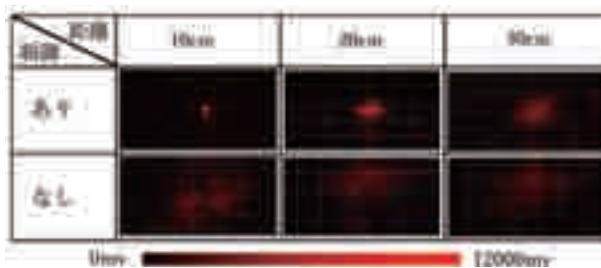


図 13：音圧分布

【考察】

実験結果より、位相制御を行うことで超音波が焦点化されていることがわかった。アレイから 10cm の距離で最も精度よく超音波が集束しており、距離が離れるほど焦点の輪郭がぼやけている。これは距離に応じて超音波の指向性が低下することが原因であると考えられる。また、この時点では触覚は感じられず、付箋の移動もできなかった。原因として、信号電圧の低さがあると考えた。

(3) 検証実験 3 | オペアンプによる信号増幅

検証実験 2 では電圧の不足により物体を押すほどの十分な音圧を得ることができなかつた。解決手法として、アレイのチャンネル数に合わせた 72 個のオペアンプを使用した增幅回路(図 14)を自作した。アレイのチャンネル数と同数である 72ch の信号をそれぞれ増幅するため、計 72 個のオペアンプを使用した。一連のシステムの概要を以下に示す(図 15)。

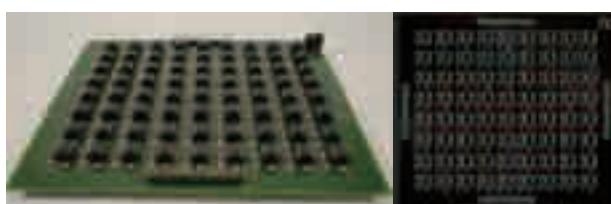


図 14：増幅回路の実物と基板設計図

【手法】

透明な上下がメッシュになっている筒の中に発泡スチロールビーズを入れ、アレイの上にかざした時の様子を観察した。

【結果】

焦点位置以外では発泡スチロールビーズに変化

は見られなかつたが(図 16)、筒の底面を焦点位置に置くと発泡スチロールビーズが激しく吹き飛ぶ現象が確認できた(図 17)。

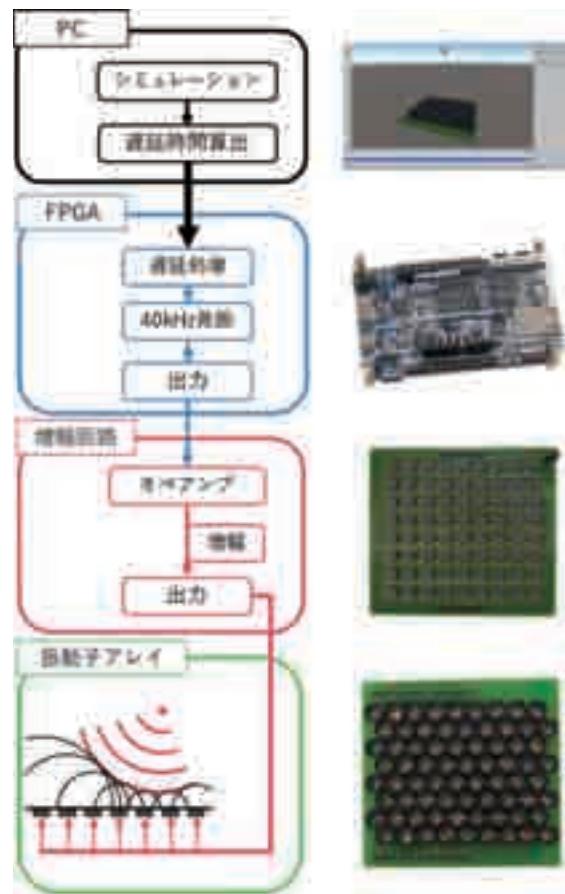


図 15：システムの概要

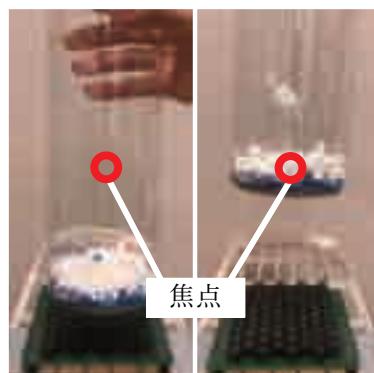


図 16：焦点以外 図 17：焦点

【考察】

超音波で軽量物の変形、移動に成功するとともに、任意の位置で圧力を提示することができた。

(4) 検証4 | 音圧分布の測定

音圧分布を計測し、装置の評価を行った。

【手法】

測定用のマイクロフォンを4cmずつ間をあけて7個並列にならべたものに対向するように本装置を設置した。焦点距離は100mm,200mm,300mm,焦点なしの4つパターンを設定し、アレイの中央に焦点を結ぶものとした。アレイから遠ざかるようにして5cmずつマイクロフォンの位置をずらし、音圧を測定した(図18)。マイクロフォンからの信号はマイクロフォンアンプで増幅後、オーディオインターフェースでA/D変換を行いPC上で38kHz~42kHzのバンドパスフィルタをかけて音圧をデータ化した。なお、測定用マイクロフォンはSony ECM-88B、マイクロフォンアンプにはThinknet MA-2016C、オーディオインターフェースはRME Fireface UFXを使用した。実際の様子が図19である。この検証実験は立命館大学の西浦教授の協力のもとで行った。

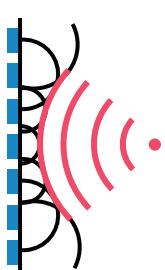


図18：測定手法のモデル



図19：実験風景

【結果】

結果のグラフを以下に示す(図20-21)。図20は增幅回路なしで測定を行ったもので、図21は增幅回路ありで測定を行ったものである。グラフの上に記載されている長さはアレイから焦点までの距離(100mm,200mm,300mm)を表しており、無制御は位相制御なしの場合を表している。縦方向の目盛りはアレイからの距離を、色は音響レベルを表している。グラフはgnuplotで作成した。

【考察】

結果より、超音波の集束が点ではなく線状になる様子が確認された。これは、アレイの面積が小

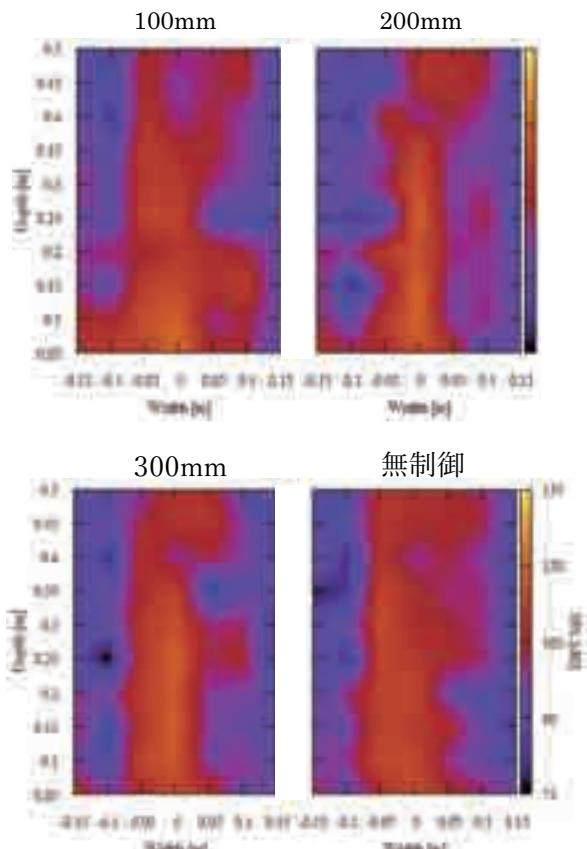


図20：増幅器なしでの音圧分布グラフ

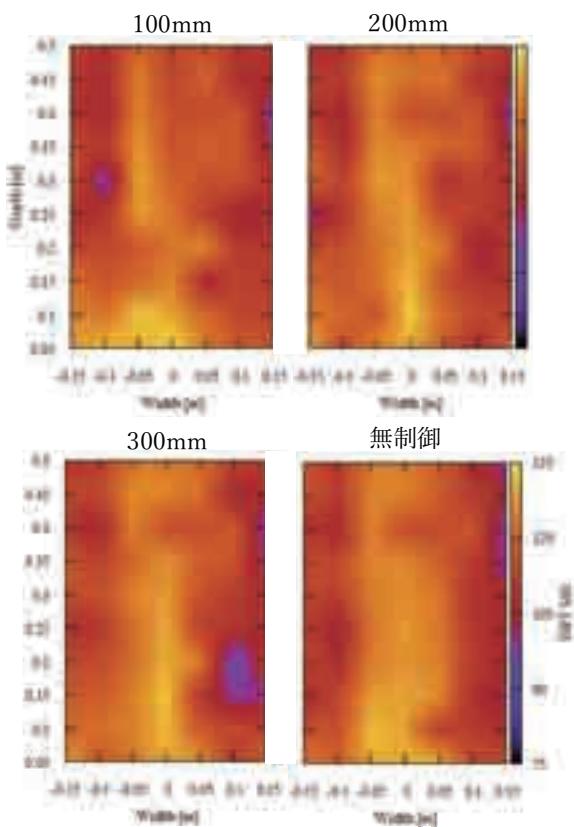


図21：増幅器有での音圧分布グラフ

さいため超音波の集束の過程で焦点地点でなくとも焦点と似た状態が形成されることが原因であり、理論的な予想と合致している。また、焦点位置が理論値より手前に観測されたが、ハードウェア作成時の誤差や計算式の簡略化によるものと考える。

3. 3 触覚の実現

(1) 触覚提示

これまでの実験で、物体に対して圧力を提示し、変形・移動を行うことは実現できていたが、触覚の提示に関しては実現できていなかった。これは人間の肌が音響放射圧で常に一定の力で押されているため、通常状態からの変位がわかりにくいために起因していると考えた。そこで、常に圧力を提示するのではなく超音波を変調させて出力することで周期的に(緩急をつけて)圧力を提示し、振動刺激を与えることで触覚を知覚させることを試みた。

【手法】

超音波を変調させて(約 160Hz)出力し、手をかざして触覚を感じるかを自身及び指導教員で検証した。

【結果】

焦点で振動刺激を感じた。ピリピリとした感触があった。

【考察】

触覚を再現することはできたが、明確に変調周波数がどのくらいであれば触覚を感じやすいかななどはわかつていないため、今後検証する必要がある。

(2) ホログラムディスプレイとの連携

触覚の提示を行うことができたため、空中映像表示素子であるパリティミラーを用いて操作時に触覚を得ることのできるホログラムコンテンツを作成した。

【手法】

LeapMotion というセンサーを用いて手の形状および位置座標を取得し、現実空間でのホログラムと手の位置座標状態を図 22 のように仮想空間上に再現した。そこで、ユーザーがホログラムに触れた際に触覚を形成した(図 23)。

【結果】

ホログラムに触れた際に触覚を感じた。ただホログラムを制御するよりも操作感があった。



図 22：仮想空間



図 23：操作している様子

【考察】

実体のないものに対して触覚を持たせることでより直感的に UI などを操作できるようになった。

4. 結果と考察

本研究により、以下のような結果が得られた。

- ・波数差から位相差を算出することで超音波を集束する一連のシステムの構築ができた。
- ・平面配置のスピーカーで位相制御を行うことで、任意の場所に焦点を形成できた。
- ・軽量物であれば移動、変形させることができた。
- ・触覚の提示に成功した。
- ・単一のスピーカーアレイのみでなく複数個のアレイを使用することにより限定的な範囲に超音波を集束させ、より精度を高められる可能性が見いだせた。
- ・增幅回路の冷却装置を作成することでより長時間の装置の稼働が実現できた。
- ・焦点を連続的かつ滑らかに移動させることで、物体の移動や流速を生み出すことが見いだされた。

5. 今後の展望

本研究で開発したシステムの応用例として、以下ののような場面での汎用を期待したい。

- ・触覚付きホログラムの開発と目の不自由な方向けの補助インターフェース

→Kinect や Leap Motion など、手の位置情報を取得できるセンサーと併用することで、手をかざした部分に触覚として投影したり、MR やパリティミラーなどのホログラム技術を組み合わせることで利便性を向上する。

- ・非接触での微粒子の操作

→超音波の焦点化による物体の移動と定常波を作り出すことによる物体の固定を行い、触らずに植物の受粉を行うことや、工業的場面で触れないものを音で操作する。

本研究では平面のアレイであるにもかかわらず超音波で非接触に圧力および触覚を提示することができたが、実用するには精度や汎用性が不十分である。今後はソフトウェアやセンサーなどと組み合わせることで応用方法を探っていきたい。

6. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、装置の評価実験にご協力いただいた立命館大学の西浦教授および、研究予算の援助を賜りました THK 株式会社様にこの場を借りて深く御礼申し上げます。また、顧問の藤野智美先生に多大なご指導を賜り、同研究会のメンバーにも多くの助言をいただきました。御礼申し上げます。

7. 参考文献

- [1] 「改訂 物理基礎」，東京書籍，平成 30 年
- [2] 小林優 「改訂 2 版 FPGA ボードで学ぶ 組込みシステム開発入門」，技術評論社

学園祭模擬店の食数管理システムの開発

5年B組 中盛 楓也
指導教員 藤野 智美

1. 要約

本校学園祭の模擬店では、食券を使用して商品の販売を行なっているが、食券の管理は手作業でカウントされており、ミスが発生したり、管理に長時間を要している。これらの問題点を解決すべく、本研究では食数管理ネットワークシステムの開発を目指した。

キーワード ネットワーク、バーコード、食券管理

2. 研究の背景と目的

本校学園祭の模擬店では、図1のように、顧客は本部にて現金で食券を購入し、生徒が運営する模擬店で食券と交換することで商品の購入が可能となる。各模擬店は1時間に一度、売り上げた食券を本部まで運び、台紙に食券を貼り付けて販売数をカウントし、各店舗の売り上げ数を報告する。本部では各模擬店の売上数を把握後、在食数を割り出す。学校各所に点在する模擬店からの往復移動時間、台紙貼り付け作業含めて約20分の作業である。これは本部が売れた数に応じて、客に売り切れ商品を表示したり、商品の不足による返金を減らすことを目的としている。

本校ではこの模擬店運営形態を10年以上続いているが、この一連の作業には、①労力が多い ②食券運搬や台紙貼り付け中の食券紛失等の手作業によるミスや重複使用のミスが発生する ③リアルタイム性に欠けるという3つの問題点がある。これらの問題点を解決すべく、本研究では食数管理システムの開発を目指した。

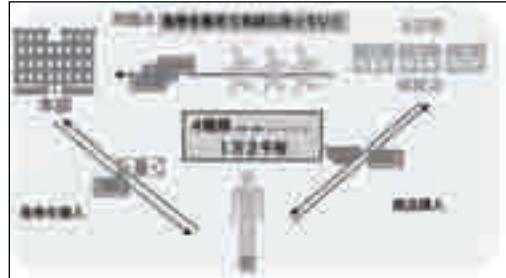


図1 システム導入前の模擬店販売の流れ

3. 研究内容

研究目的で述べた3つの問題点を解決するため、以下の内容を実現できるシステムを開発する。

- ・ネットワークによる食券購入数リアルタイム管理(問題点①、③の解決)
- ・食券重複使用チェック(問題点②の解決)
市販されている既存のシステムを導入する場合、専用のバーコードリーダーやシステムの購入費等で数十万円の導入コストがかかる。本研究では導入コストを抑えるために、PCやスマートフォンなどすでに学校や模擬店員が所持している多様なデバイスに対応させ、機材の追加購入の必要性をなくすことを目指した。

また今後の販売戦略に生かすために以下の機能も追加した。

- ・購入時間の記録
- ・購入データの書き出し

3.1 バーコードの設定

食券には、使用日、食券種類(主食、ジュースなど)、重複チェック用にそれぞれ違った固有の番号の 3 つの情報を記す必要がある。

食券の大きさやデータの読み取りやすさ及び、12,000 枚の食券を識別するために必要な情報量は少ないため、バーコード最低桁数の 8 桁の JIS8 を選択した。学校に授業で使用したバーコードリーダーがあつたことや、食券の形やサイズを考えると、QR コードよりもバーコードが適していると判断した。

図 2 のように食券の裏側にそれぞれバーコード(JIS8)を印字した。なおバーコードは以下のルールで設定する。

【バーコードの設定方法】

1 桁目・・使用日

(2 日間のうち、どの日の食券か)

2 桁目・・食券種類

(主食=1、ジュース=2 など)

3~7 桁目・・食券固有番号

(重複チェック用にそれぞれ異なる)



図 2 作成した食券

3.2 ソフトウェアの開発

オフラインでも使用できるよう Web 形式ではなく、ソフト形式での開発を選択した。また、様々なデバイス種類に対応するため、Unity で開発を行い、ネットワークサーバーは Photon を利用した。

トラブルが起きていない通常運用時のアルゴリズムは図 3 のようになる。

研究当初はネットワークトラブル(wi-fi 環境の弱さ)は発生しないと想定していたため、最初にネットワークが健全な状態においてのみ正しく機能するアルゴリズムを組んだ。

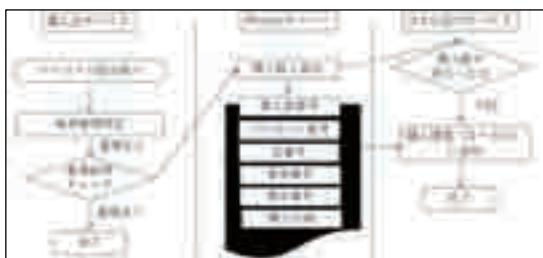


図 3 通常運用時のアルゴリズム

【アルゴリズム 1 (通常運用時)】

①ソフト起動時に店舗専用のバーコードでログインし、どの店舗が端末を使用しているかを設定する。

②商品販売を行った店舗が、客から受け取った食券のバーコードをバーコードリーダーで読み取る。

③バーコード 2 桁目から食券種類を特定し、店舗情報からどの商品(焼きそばなど)が購入されたか特定する。もし同一店舗で主食が 2 種類以上販売されており、食券種類だけで商品を特定できない場合、図 4 の通知画面が表示され、キーボードキー等でソフトの使用者に商品を決定してもらう。



図 4 商品選択通知画面

④これまでの購入データからバーコード番号が一致しないか確認し、重複使用されていなかつたら、[累計会計数(全端末での総数)][バーコード番号][店舗番号][商品番号][購入日時]をサーバーに送信する。ネットワークに参加している全端末は、サーバーに送られたこれらのデータをローカルでセーブし、サーバーにはデータを蓄積しない。その理由はネットワークが切れて、オンラインで使用する場合を想定したためである。

ネットワークに参加している全端末に購入データを送信したら会計は完了する。また、各店舗では図 5 のように、自店舗の商品の累計販売個数が表示され、本部では図 6 のように、全店舗の累計販売個数が表示される。



図 5 各店舗画面

図 6 本部画面

学園祭当日の運用を想定したシステムとして、2019 年 8 月 22 日に学園祭の当日の店舗の場所に PC を設置し、当日使用される 8 台で同時多発的に会計を試みた。結果

的にトラブルは発生せず、適切に会計処理がなされた。

3.3 初日の運用とフィードバック

学園祭 1 日目に本システムを運用した結果、ネットワーク回線が弱い屋外の発団が、オンラインの状態で会計処理を行ったため、データが破損した。このトラブルによって 8 店舗(屋内 4、屋外 4)中 4 店舗が適切に運用でき、残りの 4 店舗では正常に運営できなかった。内訳として、成功した店舗はいずれも学校屋内のネットワーク回線が行き届いている場所であり、失敗した 4 店舗全てが屋外の店舗だった。以下発生した問題点である。

①LOGOUT ボタンを押すことでローカルに保存していたデータを PC 上のファイルに書き出してセーブするように設定していた。これはアプリケーションの動作を軽くするためである。そのため事前に模擬店舗員全員に LOGOUT ボタンを押して再起動することを伝えていたが、当日 LOGOUT ボタンを押さずにウィンドウを閉じた発団があり、オンライン中だけでなく、オンライン状態の時のデータも破損してしまったというヒューマンエラーが発生した。

②1 日目の運用結果から考察すると、本校の wi-fi は接続する場所やネットワーク使用人数によって、断続的に回線が途切れてしまうことがわかった。Photon の特性上、一度 PC のネットワーク回線が途切れてしまうと、たとえその後 PC がネットワークにつながったとしても、アプリケーションを再起動しないとサーバーに再び接続できない。これに対する対処法として、以下が挙げられた。

- ・問題点①のヒューマンエラーによるアプリケーション再起動におけるミスを解決する方法として、アプリケーションを全画面化し、ウィンドウを閉じるボタンを押せないようにしておくことで、意図しないアプリケーションの終了を防いだ。
- ・問題点②のネットワーク環境問題に対しては以下の種類のトラブルシューティングを開発した。

3.4 トラブルシューティング1：ネットワーク切断

ネットワークが切断され、オフライン使用時にデータが共有されずそのまま破損してしまった。この問題を解決するため以下のアルゴリズムを組んだ。

- ①今までの購入データと、オフライン中の自端末で会計した分のデータから重複使用チェックを行う。
- ②購入データはサーバーに送信せず、ローカルで保存しておく。
- ③ネットワークに再接続したら、オフライン時に保存したローカルデータをサーバーに送信し、3.6 の方法によりそれまでの他のデバイスの購入データを受け取る。

3.5 トラブルシューティング2：サーバーに途中参加した場合の想定

サーバーに途中参加したデバイスは、サーバーにはデータがないため、それ以前の他の店舗の購入データを持っていない。この問題を解決するため図 7 のアルゴリズムを組んだ。

- ①現在の累計会計数と自端末が持っている購入データの数を比べ、持っていないデータあった場合、そのデータの累計会計数番

号をサーバーに送信して、他端末にデータを送信してもらうよう要請する。

- ②サーバーに送信された要請データを持っていた場合、そのデータをサーバーに送信する。
- ③要請したデバイスは、他の端末が上げた購入データをローカルに保存して要請を解除する。

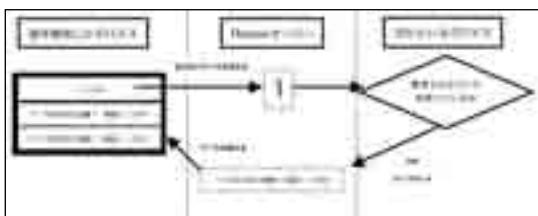


図 7 サーバー途中参加アルゴリズム

4. 結果

3.4 および 3.5 のトラブルシューティングを施した学園祭 2 日目の本システムの運用結果は以下のようである。

- ①1日目のような会計データの破損などの問題はなく、適切にシステムを運用することができた。
- ②オフラインの端末がオンラインに復帰するのに時間がかかった店舗があり、リアルタイム性に欠けるという結果になった。
- 7 店舗(屋内 3、屋外 4)中 7 店舗全てで適切に運用でき、7 店舗中 4 店舗(屋内 3、屋外 1)が常にリアルタイムでデータの送信に成功した。残りの 3 店舗(屋外 3)は最大約 1 時間のデータのディレイがあった。

また、2 日目のシステム運用で得られた、CSV 形式の購入データから売れた個数と時間の統計をとることで、来年以降の販売の参考にできる。

5. 考察

3.4 および 3.5 の 8 月に実施したシステムテストにおいて、ネットワークに関して問題が起らなかつたにも関わらず、学園祭当日はネットワークが弱かつた。これには模擬店以外の学園祭発団のネットワーク使用など、テスト時とは異なるネットワーク使用状態になったことが考えられる。トラブルシューティングを導入したことオフラインにも対応でき、考えられる不測の事態全てに対応できたと考えられる。実際に、学園祭 2 日目にはシステムは適切に運用できた。

来年度のシステム運用に向けて、オフライン中は音を鳴らしてアプリケーションの再起動を促すなど、ユーザーインターフェースの方向からの、リアルタイム性の問題について解決に努めたい。

6. 今後の展望

本研究によって、ネットワークによる食券購入数リアルタイム管理・食券重複使用チェック・購入時間の記録・購入データの書き出しを達成することができた。これによって各店舗それぞれ 4 時間の作業時間削減と CSV データによる販売時間や販売量のデータ入手でき、来年度以降の販売戦略の参考データが取得できる。

研究方法で示したトラブルシューティングのように、本研究のシチュエーションのようにデータ数が少ない場合、全端末でデータをローカル保存することで、ネットワーク回線が悪い状況にも対応できる。

本研究で、「ネットワークによる小規模コミュニティでのデータ共有」、「デバイスの種類に捉われないソフト開発」、「オフライ

ン状況下でのオンラインと同様の振る舞い」に成功した。本研究で開発したソフトを一般化することで、他学校やフリーマケット等の小規模マーケットや入場者管理システム等への汎用性が期待できる。また本システムのアルゴリズムを使用することで、リアルタイムで教師と生徒の問題提供や回答送信ソフトを作り、教育現場の生徒管理、ログの記録に大幅に貢献できる。このように、本研究は小規模コミュニティでのリアルタイム情報共有システムに展開でき、教育現場など様々なシチュエーションで実社会に応用できるものと考える。

7. 参考文献

[1]Unity4 入門

出版社：SB クリエイティブ 2013 年 7 月
25 日出版 著：浅野 祐一、荒川 巧也、森信虎

[2] PUN2 で始めるオンラインゲーム開発入門

<https://connect.unity.com/p/pun2deshimeruonraingemukai-fa-ru-men-sono1>

8. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の藤野先生にご指導いただきました。この場を借りて、深く御礼申し上げます。

Leap Motion による手のトラッキング

5年B組 中根 彩乃

指導教員 藤野 智美

1. 要約

本研究では、手の三次元の動きをセンシングし、画面上の画像を操作するシステムを開発した。なお、開発環境は Xcode を、手の動きを認識するセンサーとして Leap Motion を用いた。

キーワード Leap Motion、Xcode、三次元空間、画像解析

2. 研究の背景と目的

今日、様々なデジタルアートがあるが、その中でも人の動きに伴って映像が変化するものに興味を持った。そこで、本研究では手の動きに伴って画面上で図形を描くシステムを作成した。人の動きを認識するためのセンサーには、手の動きを認識する事に特化した Leap Motion を用いた。

3. Leap Motionについて

Leap Motion とは、2012 年に Leap Motion 社から販売された、2 基の赤外線カメラと赤外線照射 LED から構成された小型のセンサーである。Leap Motion に手をかざすと、赤外線 LED に照らされた手や指を赤外線カメラで撮影し、画像解析により 3D 空間での手や指の位置を割り出すことができる。両手と 10 本の指を 0.01mm の精度で認識する事が可能で、検出数については、両手だけでなく、Leap Motion センサーの範囲に入ってしまえばいくつでも検出可能なため、複数名でも利用できる。認識可能な範囲はデバイスの 2.5cm 上方、約 60 × 60 × 60cm の逆ピラミッド型の 3D 空間

の中である。



図 1 Leap Motion

4. 研究内容

4. 1 手の位置情報から手を描画する <方法>

【1】ヘッダファイルを定義する

C++で使用出来る vector 配列(動的配列)を使用した。この手法により、通常の配列のようにサイズをあらかじめ指定せず、実行時に自動的にサイズ変更を可能にし、手が動いたときに配列が自動的に変化するようにした。

【2】vector 配列を宣言する

vector 配列では三次元座標を扱い、三次元ベクトルを格納する。位置と速度の座標を管理することで手の位置と動作の検知が可能となる。また、この配列を用いることで

指や関節の位置情報が保存できるようにした。なお、一つの手は 20 個の三次元座標の集まりで表されている。

【3】指の位置情報を格納する

- ① Leap Motion で取得した手の位置情報を simple Hands Vector 配列に格納する。
- ②以前に保存した手の位置情報を消去し、手を画面上に描画できるようにマッピングを行う。
- ③手の関節や指先の新しい位置情報を格納し、手が認識され、かつ更新された時に手の座標を更新する命令を呼び出す。

【4】手を描画する

手の数だけ for 文を回して手の関節や指先などの描画を行う。

- ①【3】の③で格納したそれぞれの手の指先、関節の位置を各指四つの球体で表す。
- ②指の各点を線で結び、骨の位置を線で表現する。

<結果>



図 2 手の描画

4. 2 手の中心間の距離を直径とする球を描く

<方法>

【1】手の中心を示す球を描く

- ①新たに手の中心座標を保存する vector 配列を宣言する。
- ②指の位置情報を格納した場合のように、手の中心座標を vector 配列に追加するプロ

グラムを作成する。

- ③取得した手の中心座標に球を描く。

<結果>



図 3 手の中心を示す球の描画

【2】手の中心座標を使って球を描く

- ①手が 2 つの時に球体を描くことを指定する条件分岐を、if 文を用いて書く。
 - ②手の中心座標の 2 つからその距離を出し、これを直径とする球を描く。
- また、球を描くとき、中心座標は手の中心である二点の中心となるようにとる。

<結果>

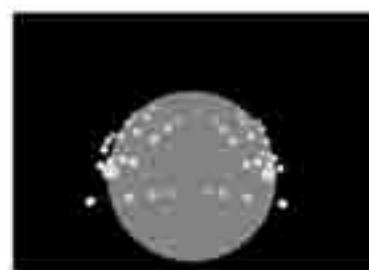


図 4 球の描画

4. 3 手の中心間の距離の範囲によって画像を変化させる

<方法>

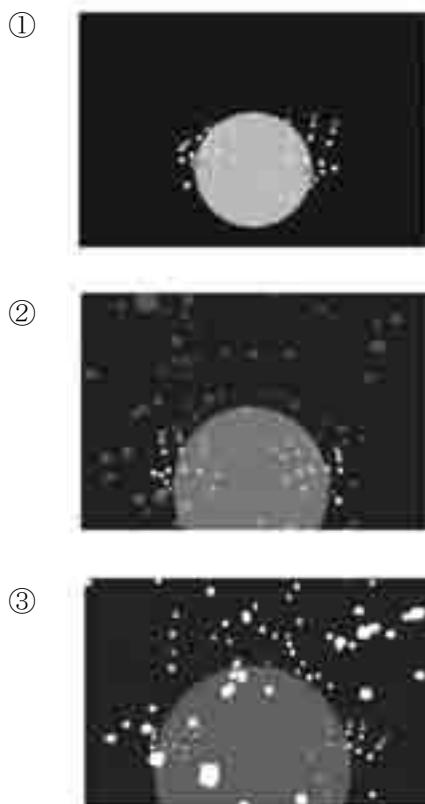
距離の範囲を 4 つ指示し、表示する画像を指定する。距離が狭い範囲から順に以下の操作を指定した。

- ① 4.2 の方法で球を描く。
- ② 時間で色が変化する立方体を表示する。

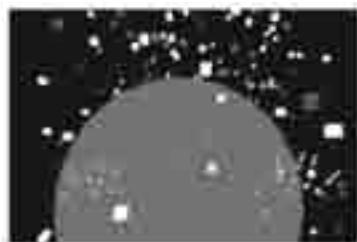
- ③ 白い立方体を表示し、 x 軸回転させる。
- ④ 白い立方体を x 軸で回転させ、かつ時間によって色が変化する立方体を y 軸で回転させる。

このとき、時間によって色が変化する部分では、プログラムが開始してからの時間を計算し、HSB の値を時間ごとに変化させた。HSB 色空間を操作することで色彩、彩度、明度を変化させることができる。なお、色彩の指定部分に時間を計算した結果を代入することで色の変化を可能にした。また、このプログラムでは 2 つの手によって表現される球を、前述したプログラムを用いることで時間によって色を変化させた。

<結果>



④



5. 今後の展望

今回は手の動きを認識して画面の中に映し出しだしたが、今後は手だけでなく全身の動きを認識する他、変化する画像や映像を画面の中だけで表すのではなく、大きな領域に映し出したいと考えている。その方法として、Kinect センサーを用いて全身を認識することを検討している。

6. 参考文献

- [1]Leap SDK で指を検出してみよう
<https://www.buildinsider.net/small/leapmotioncs/002>
- [2]Life is Tech ! TECH FILE
<https://members.life-is-tech.com/textbooks/259/html>

7. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の藤野先生にご指導いただきました。この場を借りて、深く御礼申し上げます。

振り子を設置した台車の挙動分析と ペアリングを用いた実験モデルの提案

5年C組 柴田 凌輔

5年C組 鶴崎 桐悟

指導教員 藤野 智美

1. 要約

私たちは、台車上に設置した振り子を振らせたときの振り子と台車の挙動に興味を持ち、研究を行っている。運動量保存を用いた理論的な予想から、台車と振り子はその場で振動すると考えたが、作成した装置を用いて挙動を観測したところ、台車は振動しながら前進した。本研究では、実験装置の改良およびパーツにペアリングを用いた実験モデルについて提案する。

キーワード 振り子、台車、運動量、ペアリング、3Dプリンター

2. 研究の背景と目的

私たちは台車上に設置した振り子を振らせたときの振り子と台車の挙動に興味を持ち、運動量の保存から台車と振り子の間でやり取りされる運動量の考え方を用いて理論と実験の両面から考察したいと考えた。

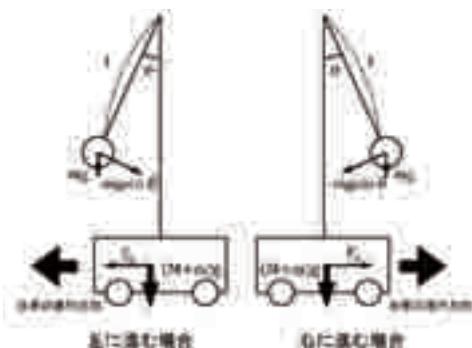


図1 装置1による実験のモデル図

3. 研究内容

3. 1 実験 I

3. 1. 1 仮説の立案と実験

2で述べたように、運動量保存則から以下のように仮説を立てた。

重力加速度を g 、振り子のおもりの質量を m 、台車の質量を M 、時刻を t とする(図1)。おもりにはたらく重力 mg と張力 T を合成し

た力は復元力となるため、振り子は振動する。この力の反作用 F が台車にはたらくため、この F も復元力となり、台車も振動する。振り子と台車の速度を v, V とすると、初期値が静止状態であるから $v_0 = 0, V_0 = 0$ となる。運動量保存より、

$$mv_0 + MV_0 = mv + MV = 0 \quad \cdots ①$$

①式より、台車の振動方向は振り子の振動方向と逆になることがわかる。

次に、振り子と台車の重心について考える。なお、 x 軸方向の運動についてのみ注目する。すると、振り子の重心の x 座標を x_m 、台車の重心の x 座標を x_M 、振り子と台車の重心の x 座標を X_G とすると、重心の x 座標は次のように表される。

$$X_G = \frac{mx_m + Mx_M}{m+M} \quad \cdots ②$$

②の X_G について、その速度を求めるために②の時間変化を考えると、

$$V_G = \frac{X_G}{t} = \frac{\frac{mx_m + Mx_M}{m+M}}{t} = \frac{mv + MV}{m+M} \quad \cdots ③$$

①、③より、③の右辺の分子が0となるため、 $V_G = 0$ となる。従って、振り子と台車の重心は、振り子が振れている間、初期位置の状態であることがわかる。よって、本実験

の仮説は以下の通りとなる。

<仮説>

振り子を振っても台車と振り子の重心の速度は 0 となるため、重心位置を変えずにその場で振動する。

そこで、ミニ四駆に竹串で支柱を立て、糸と 50g の重りを装着した簡易的な装置 1 を作成し、実際に実験を行ったところ、台車は振動しながら前進した。

3. 1. 2 装置の改良

前述した装置 1 には、以下の問題点が考えられた。

- ・重心が装置全体の中心にない。
- ・装置自体の質量が小さいため大きな運動を観測できない。
- ・正確なデータ取得ができない。

上記の問題点を解決するため、以下に記述する装置 2 を作成した。

3. 1. 3 装置 2 の作成

装置 2 は支柱を 3D プリンターで左右対称に作成し、力学台車の中心に配置することで振り子の支点が重心の真上になるようにした。また全体の大きさや質量も大きくし、おもりの質量も大きくした（図 2）。



図2 装置2の3Dイメージ(左)
と作成後の様子(右)

3. 1. 4 装置 2 を用いた実験

<実験方法>

1. 装置 2 の台車を手で固定し、糸がたるまないようにおもりを引き上げる。
2. 台車とおもりを同時に静かに離し、台車の挙動を観測する。

<実験結果>

台車はその場で左右に振動するのではなく、振動しながら少しづつ前進した。

<考察>

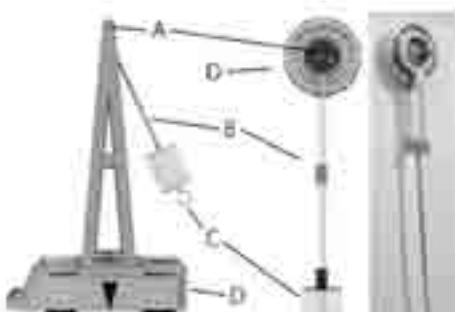
得られた結果は装置 1 の場合と同じようなもので、仮説とは異なった。その原因として装置 2 に関する以下の問題点を考察した。

1. 台車と振り子を同時に離せない。
2. 振り子の振れ角を大きくし過ぎると重心が移動して片方の車輪が浮き、倒れる。
3. 使用した力学台車に存在する 4 つのタイヤがそれぞれ摩耗していて、各タイヤの摩擦力が異なる。
4. 振り子の紐がねじれ、おもりが台車の進行方向以外にも振れてしまう。

考察の結果、上記の問題を解決するには構造的根本的な変更が必要だと考えた。

3. 2 実験 II

3. 2. 1 装置 3 の作成



A…振り子の支点,B…振り子の紐(棒),C…重り,D…ボディ(台車)

図3 装置2(左)と装置3(中央)の3Dモデルと

装置3作成後の様子(右)

前述の問題点を解決するために装置の設計について根本的な変更を行った(図3)。装置3では台車の代わりにベアリングを使用し、紐は剛体の棒(アルミパイプ)を用い、下部におもりを設置して振り子とした。

3. 2. 2 ベアリングの活用

装置3に用いるベアリングは金属製のリングを内外部に持ち、間に球を複数個配置することでこの2つのリング間に生じる摩擦力を少なくするための器具である。装置3ではベアリングが台車の車体(ボディ)に相当し、振り子の力を受けた場合に本体が回転するのを防ぐために用いた。また、一方にしか軸が回らないため、振り子がボディの進行方向にしか振れない。

3. 2. 3 装置2からの改良点

装置2から3への改良点をまとめると以下のようになる。

1. 剛体振り子を用いることでおもりを動かすだけでボディをつり合いの位置に移動でき、おもりを離すと同時にボディも自由な状態になる。
2. 振り子の支点とボディの重心を全く同じ位置に配置することで転倒を防ぎ、様々な振り角を得られるようにする。
3. ベアリング自体を台車の代わりとすることでタイヤの数を4つから1つにでき、摩擦力の統一化を図る。
4. 振り子の支点にベアリングを用いることにより、振り子を一方向に振らす。
5. 2と同じように振り子の支点とボディの重心を全く同じ位置に配置することで、ボディの重心のズレによる実験誤差を減少させる。

3. 2. 4 センサによる位置情報の取得

3.2.3の5で述べたように、装置3では振り子の支点とボディの重心が全く同じ位置にある。そこで、その位置にセンサ(小型無線多機能センサ:TSND121)を設置すれば、ボディの位相と振り子の重りの位相を計測できると考え、位置センサを設置するための器具を作成した。



図4 位置センサと
アタッチメントのイメージ

3. 2. 5 装置3の各部紹介

ここでは装置3の各部について詳しく説明する。なお名称の右側に記載している色はそのパーツの色を表している。

1. ボールベアリング

3.2.2でも紹介したように、装置3にはボールベアリングを使用している。装置全体の動きを見やすいものにするためベアリング自体も大きく、重たいものを使用した。また、3.2.4のような位置センサを内部に仕込めるような内径を持つ点にも留意した。

図5 使用したベアリング



<ベアリングの仕様>

深溝軸受ボールベアリング(NTN製)
外径:120mm, 内径:65mm, 幅:21mm

2. アルミパイプ

装置全体の動きを大きくするということは、振り子の棒部分は長くなり、おもりの質

量はより大きいものとなる。そのため、力がかかるつてもあまりしならず、かつ長いものが必要である。これらを考慮し、アルミパイプを使用した。また、使用しているボルト、ナットを組み合わせたとき一本で挟める幅が最大 19mm であったため、使用したアルミパイプも 3D プリンターで作成したパートも含めて止められるサイズを使用した。なお、装置 3 を傾けたとき、鉛直方向と棒の成す角が 60 度になったときにレールの下側に当たるよう長さを調節した。

<アルミパイプの仕様>

$\phi 13\text{mm}$, 厚さ 1mm

3. シャフト(黄)

1 のボールベアリングの内径(65mm)に合うパイプを手に入れられなかつたため、3D プリンターで作成



図 6 作成したシャフト

した。内部に位置センサを設置できるほど内径を保ちつつ、最大の厚さに設計した。なお積層方向に裂くように力が加わってしまうため、積層ピッチを細かくしている。素材には、耐衝撃性と強度を考え、ABS 樹脂を使用した。

<シャフトの仕様>

UP!Plus 製、スライサ:UpStudio

ABS 樹脂(黄), 密度:13%, 品質:ノーマル
積層ピッチ:0.1mm

4. アーム(緑)

3 のシャフトを抱えるようにアルミパイプと接続している。積層型 3D プリンターは縦の円の作成を苦手としている。そのため密度が低かったりノズルの移動速度が速かったりすると円が円よ



図 7 作成したアーム

りも上に積層されていく樹脂の質量によって変形し、橢円になってしまふ。そのためこのパートは密度を高めに設定した。また、2 で前述したように、アルミパイプとアームの幅を含めて 19mm となるようにパイプがはまる穴と外郭との間は 3mm となるよう設計した。

<アームの仕様>

Up!Plus 製、スライサ:UpStudio

ABS 樹脂(緑), 密度:65%, 品質:ノーマル
積層ピッチ:0.2mm

5. バンドル(青)

ベアリングのアームからレールを避けるようにして下がつてくる 2 本のアルミパイプをまとめて 1 本のアルミパイプに接続している。このパートは 3D プリンター製のもので一番負荷がかかるパートであり強度が必要なので密度を高く設定している。また、パイプ用の穴の寸法はアームと同じ設計になっている。



図 8 作成したバンドル

<バンドルの仕様>

Up!Plus 製、スライサ:UpStudio

ABS 樹脂(青), 密度:80%, 品質:ノーマル
積層ピッチ:0.2mm

6. おもりケースアタッチメント(黄)

1 本にまとめられたアルミパイプの先端とおもりケースを接続している。2 力所をボルト、ナットでしめる設計になっていて、穴の寸歩さえ合えば位置センサや追加のおもり等の設置も可能となっている。なお、パイプ用の穴の寸法はアームと同じ設計になっている。



図 9 アタッチメントのイメージ

<おもりケースアタッチメントの仕様>

Up!Plus 製、スライサ:UpStudio

ABS 樹脂(黄), 密度:13%, 品質:ノーマル
積層ピッチ:0.2mm

7. おもりケース(白)

ケース本体と内部にはめ込むおもり、ボルト、ナットを合わせて約 500g となるように設計している。内部には 200g、40g をそれぞれ 2 個ずつ入り、重心は全体の中心に来るよう設計している。なお、おもりをはめ込むため穴を少し小さめに設計し後加工として紙やすりで削るために ABS 樹脂を使用した。



図 10 作成した
おもりケース

<おもりケースの仕様>

Up!Plus 製、スライサ:UpStudio

ABS 樹脂(白), 密度:13%, 品質:ノーマル
積層ピッチ:0.2mm

8. センサアタッチメント(黒)

3.2.4 で述べたように、

センサをボディの重心に設置するため、円形に設計した。位置センサを器のうなみで挟み込み、ボルト、ナットでしめたあと、アタッチメントそのアタッチメントごとシャフトに止めるように設計した。なお、挟み込む機構のため器の深さよりも位置センサの厚さの方が厚く、器自体が湾曲すると予測し、ねじ穴自体を円ではなく少しうとりを持たせた。なお、形状から判断し、PLA 樹脂を使用した。



図 11 作成した
アタッチメント

<センサアタッチメントの仕様>

Up!Plus 製、スライサ:UpStudio

PLA 樹脂(黒), 密度:13%, 品質:ノーマル
積層ピッチ:0.2mm

4. 今後の展望

前述した装置 3 を作成し、再度実験を行う。また、装置 3 は今までの装置との相違点である位置センサを使用して正確なデータを取得する。

一方、剛体振り子としての理論構築が必要であるため、再度理論の組み立てを行う予定である。

5. 参考文献

[1] 「よくわかる初等力学」著：前野 昌弘
東京書籍

[2] 「KIT 物理ナビゲーション

単振り子：運動方程式」

http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/physics/category/mechanics/masspoint_mechanics/simple_pendulum/henkantex.cgi?target=/math/physics/category/mechanics/masspoint_mechanics/simple_pendulum/sp_equation_of_motion.html

[3] 「3D プリンター活用技術検定 公式ガイドブック」著：一般社団法人 コンピュータ教育振興協会 日系 DP

[4] 「キットで始める 3D プリンタ自作入門」著：吹田 智章 ラトルズ

6. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の藤野先生には多大なご指導を賜りました。また、探究活動の助言をくださった米田先生にも様々なアドバイスをいただきました。深くお礼申し上げます。

演奏に対応して変化するビジュアライズの作成

5年C組 國見 幸加

指導教員 藤野 智美

1. 要約

本研究では、聴くものとして捉えられている音を、「見るもの」として捉えることで、新たな音の楽しみ方を見つけられるのではないかと考え、MIDI キーボードとプログラムを組み合わせ、音を視覚的に表現するツールの作成を目指した。物理エンジンを使用した、演奏に対して偶発的な反応を示す映像の製作手法を記述する。

キーワード MIDI、物理エンジン、ofxbox2d

2. 研究の背景と目的

私は習い事や部活で楽器を弾く機会があり、もともと音楽に興味があった。また、観客を巻き込むことで表現を成立させるインタラクティブアートにも興味があった。そこで、MIDI キーボードとプログラムを組み合わせ、観客と作品によって完成される対話型アートの作成を行うと同時に、音を見て楽しむという新たな音楽の楽しみ方を試みた。

使用したツール

- openFrameworks (クリエイティブコーディング用の C++ ツールキット)
- MIDI(Musical Instrument Digital Interface)キーボード



図 1 :
MIDI キーボード

張するためのライブラリ。今回は ofXBox2D と ofxMidi を使用する。

- ofxMidi : MIDI の生成に関するライブラリ。
- ofxBox2D : 重力や反発力、摩擦、衝突判定といった物理計算を高速に行う物理エンジンのライブラリ。※ここまで OK

3.2 MIDI に関するプログラムの作成

MIDI とは

電子楽器の演奏情報を機器間で効率良く伝達するための共通規格であり、音の波形そのものを伝達するのに比べ約 100 分の 1 に圧縮された効率のよい演奏情報である。

MIDI 搭載の電子楽器を演奏すると、その MIDI OUT 端子からは常に演奏情報が output される。流れる信号はデジタルデータのため、コンピュータに記録させることができるのである。

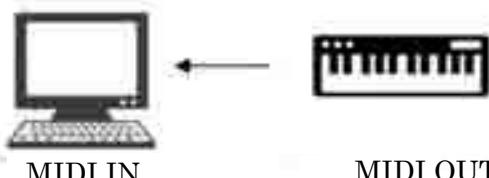


図 2: MIDI による演奏情報の伝達

3. 研究内容

3.1 機能の拡張

addon を使用

addon とは openFrameworks の機能を拡

3.2.1 MIDI の入力に合わせてパソコンから音を出力

<方法>

- (1) 3つのインスタンスを用意し、インスタンス化を行う。

インスタンス化とは

クラスを基にした実際の値としてのデータを生成すること。今回は 3 つのインスタンスを使用する。

①midiIn : MIDI の入力を受け取るためのインスタンス。

②midiMessage : MIDI 入力データを保存するためのインスタンス。受信した midiMessage の情報のうち、

- ・キーボードが押されたか離されたか
- ・キーボードの押されたキーの高さ

の 2 つを今回は使用する。

③manager: 音を出力するためのインスタンス。

(2) MIDI の入力を受け取る。

MIDI キーボードからの入力があれば入力データを保存する newmidiMessage という型を呼び、audioRepuested という型で MIDI キーボードの入力を元に音を生成する。これらの型を用いてキーが押された時、キーの高さによる音のデータを作成する。

(3) 出力の設定

出力する音の波形に関する設定として、ofSoundStreemSetup という関数を使用する。波形を滑らかに調節して音の波形に近づける。この関数が含む内容は以下である。
ofSoundStreemSetup(出力チャンネル, 入力チャンネル, コールバック, サンプリングレート, バッファ数)

(4) 音データの構築

出力する音の波形を生成して再生できる準備が出来次第、新しい音の波形を作って再生する。

<結果>

音がパソコンから出力されることが確認できた。

3.3 ofxBox2D に関するシステムの作成

3.3.1 MIDI からの入力に合わせて物体を落下

<方法>

(1) 物理世界の生成

物理パラメータ(密度・弾性係数など)を設定し、物理法則を適用した世界を生成する。

(2) 物体を追加

ofxBox2D にはあらかじめ用意されている物理法則を適用可能な基本図形を生成する。

<結果>



図 3: 物理法則を適用した物体の生成

(3) 複数の物体を追加する

Vector 配列を使用して、大量の物体を追加する。

(4) MIDImessage の pitch 数に合わせて物体を生成する



図 4: pitch 数(48~72)

If 文で条件分岐し、pitch ごとに異なる形が落下するように設定する。

<結果>

生成された物体は自由落下しながら、画面下方へと消えた。



図 5: 実行結果

3.3.2 障害物を作る

<方法>

`createGround`(始点の x 座標, y 座標, 終点の x 座標, y 座標) を使用する。

<結果>

生成したボールは線上に溜まったあと、左右から落ちていった。



図 6: 実行結果

3.3.3 障害物となる線を観客が自由に引けるよう設定

トラックパッドの操作によって線を表示できるように設定する。

<方法>

トラックパッドを押しているか、離しているかでそれぞれ型を用意する。

<結果>

生成した形は線で囲ったことにより、画面下方に消えず引かれた線上にとどまつた。

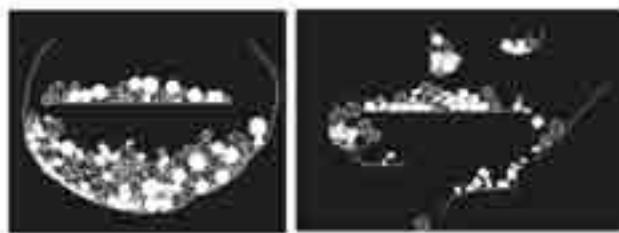


図 7: 実行結果

4. 今後の展望

- ①生成された物体をリセットできる設定の作成を行う。
- ②一定数の物体がたまれば映像が変化する仕掛けの作成を行う。
- ③プロジェクターによる映像の投影を行う。

5. 参考文献

[1] 小嶋秀樹 | 研究室

<https://www.ei.tohoku.ac.jp/xkozima/lab/ofTutori al5plus2.html>

[2] Life is Tech! Members

<https://members.life-is-tech.com/techfile>

6. 謝辞

本論文の作成にあたり、終始適切な助言を賜り、丁寧に指導して下さった顧問の藤野先生に感謝します。また、美術部教師として長谷先生からは本研究の制作におけるデザインについて重要な示唆を賜りました。厚く感謝を申し上げます。そして研究の相談にのってくれた美術部員の皆様とサイエンス研究会の皆様にはこの場を借りて深く御礼申し上げたいと思います。本当にありがとうございました。

最大周波数の解析による英語発音の定性化

5年C組 柴田 凌輔
4年A組 坂本 一眞
4年C組 安藤 陽史
指導教員 藤野 智美

1. 要約

私たちは、英語の発音を点数化し採点するシステムの開発を目指している。本研究ではその初期段階として、マイコンボード「Spresense」を使い、「Light」と「Right」のサンプル音声に高速フーリエ変換(FFT)を行い、最大周波数グラフを生成した。さらに、これらのグラフを比較すると、差異と共通点が見られることがわかった。

キーワード Spresense、発音、FFT、最大周波数

2. 研究の背景と目的

近年、大学入試へのスピーキングテスト導入が検討され、英語発音をスコア化する需要が増えつつある。本研究では、発音の音声波形を正解となる発音の波形と比較することで、発音をスコア化することを目指している。その初期段階として、今回は「Light」と「Right」の音声の最大周波数を測定し、最大周波数と時間の相関を表したグラフの形状の違いを分析した。

3. 研究内容

3. 1 最大周波数の取得

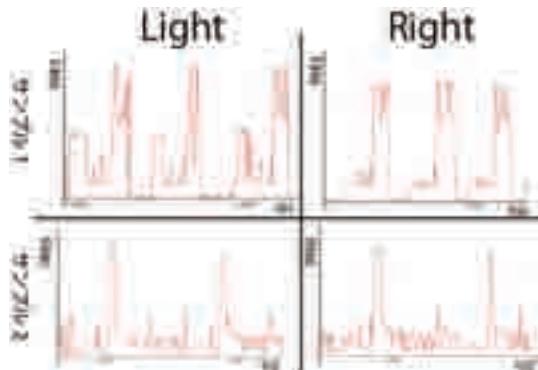
「Light」と「Right」の発音の違いを、最大振幅の周波数と時間のグラフから取得する。方法は以下の通りである。

- ①Spresense にシリコンマイクを接続する
 - ②サンプル音源の最大周波数のグラフを生成する(FFT を使用)
 - ③発音ごとの最大周波数の違いを見つける
- サンプル音源には「Light」と「Right」の発音を 10 組用いた(動画サイト youtube より収集)。

3. 2 Spresense の機能

Spresense とは、SONY が開発したマイコンボードである。数多くのユーザーを持つマイコンボードである Arduino と互換性があり、Arduino IDE による開発環境も用意されている。また、GPS やハイレゾ対応機能なども標準で搭載されており、幅広い応用性がある。

3. 3 測定結果

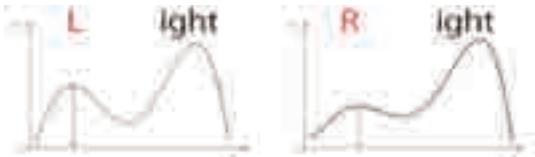


(すべてのサンプルの取得先は最後に記載)

上のグラフは、最大周波数と時間の関係を表している。「Light」のサンプルにおいて、グラフの始点から「ight」の前までに山ができた。また、「Right」においては同

じ場所にも山はできたが、「Light」よりも小さいかほとんど無かった。

4. 考察



「Light」の発音は最大周波数をグラフにしたときに 2 つの大きな山ができる。また、「Right」の発音の最大周波数のグラフにおいては 1 つの山ができ、その前に小さい山ができることもあった。しかし、これにあてはまらないサンプルもあり、最大周波数だけで「Light」と「Right」を判別するのは難しいと考える。

5. 今後の展望

私たちは発音スコアの判定として、ディープラーニングシステムを使うことを考え、Spresense の開発者である SONY セミコンダクタソリューションズの小泉氏と Web 会議を行った。システム開発の具体的なプロセスとして以下のアドバイスをいただいた。

- FFT によるサンプル音声のスペクトグラム生成
 - スペクトグラムを画像化し、ディープラーニングにより画像認識を行うシステムの構築
 - 上記を繰り返すことによる精度の向上
- これらのプロセスをもとに、今後の展望として以下の項目を考えた。

① 解析の精度向上

スペクトグラムによるアプローチ

最大周波数だけではなく、すべての周波数を解析し、スペクトグラム化することで

より高精度な解析を行う。

サンプル数によるアプローチ

解析精度向上を目指し、サンプル数の増加とノイズの少ないデータ使用を実現する。

② 発音のスコア化

機械学習によるアプローチ

機械学習により各発音グラフの数値の理想値を算出し、受験者の数値と比較する。

6. 参考文献

【1】「Spresense デベロッパーガイド」

<https://developer.sony.com/ja/develop/spresense/developer-tools/get-started-usingarduino-ide/developer-guide>

【2】「スタックオーバーフロー」

<https://ja.stackoverflow.com/questions/61189/spresense%e3%81%aefft%e3%82%b9%e3%82%b1%e3%83%83%83%e3%83%83%81%e3%81%ab%e3%81%a4%e3%81%84%e3%81%a6>

7. 謝辞

今回の実験を行うにあたり、Web 会議をはじめ様々なサポートをしてくださった SONY の小泉様、多大なご指導を賜った顧問の藤野先生、研究のアドバイスをくださいましたサイエンス研究会の先輩方にこの場を借りて深く感謝申し上げます。

8. 補足

サンプル音源およびすべての結果のグラフはこちらからご覧いただけます。↓

<https://drive.google.com/drive/folders/1s8wNT8rAZHbJOchVYKGXKZ15sRLKDYt?usp=sharing>



多彩な音色を表現できる MIDI ウィンドシンセサイザの試作

2年B組 黒川 陸
指導教員 藤野 智美

1. 要約

本研究では、息と指で演奏する MIDI ウィンドシンセサイザの開発を目指した。気圧センサで息を測定し、静電容量センサやフォトダイオードで運指を測定し、Arduino から USB で MIDI 信号を送信する装置を作った。さらに、息を吸っても音が鳴る機能、アルペジオ機能、ビブラート機能などを追加した。

キーワード： MIDI, 気圧センサ, 静電容量センサ, フォトダイオード, Arduino

2. 研究の背景と目的

私は小学生の頃からリコーダを演奏することが好きである。しかし、リコーダを演奏していると、騒音被害を訴えられ、音量の調節を求められたが、リコーダの音色を失わずに音を調節することが難しかった。このように困窮していたところ、ウィンドシンセサイザを発見した。そこで、市販のウィンドシンセサイザを購入しようとしたが、機能に物足りなさを感じたため、オリジナルのウィンドシンセサイザを作ることを目指した。

3. 研究内容

3. 1 息の入力

気圧センサの LPS33HW(図 1)で息の測定を行った。その手順を①から③で説明する。

- ① 装置の電源を入れると一度環境の気圧を測定して、基準の気圧として保存する。
- ② リアルタイムで現在の気圧を測定し

続ける。

- ③ 現在の気圧と基準の気圧との差を求めて、息の数値として格納する。

ControlChange 信号の MainVolume に息の数値を代入して音量の調節を行う。すると、息を吹いていない時は音量が 0 なので、音が鳴らず、息を多く吹き込めば吹き込むほど音量は大きくなる。これにより、息によって音に抑揚を加えることに成功した。息の数値を絶対値で処理すると、息を吸って負の数になった時も音が鳴るようになった。

3. 2 運指の入力



図 1：気圧センサ(LPS33HW)

運指の入力方法として、以下に示す静電容量センサを使う方法と、フォトダイオードとレーザーを使う方法の 2 つを検討した。運指にはバロック式のソプラノリコーダの運指を採用した。

① 静電容量センサ

＜方法＞

静電容量センサの Adafruit1982 を使用して、人間が音孔に触れたことを検出する。

＜結果＞

この方法では、触れているかどうかの 2 段階の検出に成功した。

② フォトダイオードとレーザー

＜方法＞

管の内部から、音孔を通って外部に光が出るようにフォトダイオードをそれぞれの音孔に設置する。音孔を指でふさぐと、指にレーザー光が当たって乱反射し、管内部の光量が増えるので、それをフォトダイオードで観測した。図 2 はフォトダイオードとレーザーを使った運指測定装置の内部の写真である。

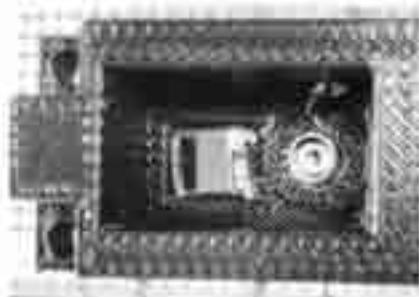


図 2：フォトダイオードとレーザー
半導体を使った運指の測定装置の内部

＜結果＞

フォトダイオードの信号を Arduino で読み取ることにより、運指の測定に成功した。音孔をふさぐ面積を利用して、入力の違い

も識別できた。

3. 3 MIDI 信号の出力

Arduino のファームウェアを MIDI コントローラに書き換えることで、OS に Arduino を USB MIDI コントローラとして認識させた。これにより、Arduino からの MIDI 信号を OS が受け取り、GarageBand(図 3)や MuseScore で音を鳴らすことに成功した。



図 3 : GarageBand

3. 4 演奏エフェクト

自動でビブラートをかける機能を作った。仕組みは、MIDI Control Change のミュレーション信号のなだらかな上げ下げである。さらに、アルペジオパターンを音孔に割り当てて演奏する機能も作った。

4. 考察

息と指の入力を受けるシステムの製作と基本的な MIDI 出力に成功した。

5. 今後の展望

5. 1 USB ケーブルの無線化

MIDI 信号をコンピュータに送信するにあたって、USB ケーブルを必要としている。この通信を無線トランシーバ モジュ

ールで無線化できれば演奏者がある程度自由に動き回れるようになる。

5.2 FM 音源の搭載

現在は音を鳴らすのに常にコンピュータと接続して、DAW ソフトを起動しなければならない。一方、FM 音源(図 4)を搭載すると、でウィンドシンセサイザ本体のみで音を鳴らすことができる。

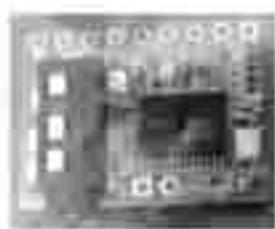


図 4 : FM 音源の YM-F825

5.3 加速度センサによるエフェクト

加速度センサ(図 5)を搭載することで、ウィンドシンセサイザを揺らしてビブラートをかけたり、角度をつけるとピッチを上げたりする機能を追加し、演奏の幅を広げる。



図 5 : 加速度センサの GY-291

5.4 音孔でのピッチ調節

現在は、運指の入力を使う音孔のセンサについては塞いでいるかどうかの 2 段階しか認識していないが、塞ぐ面積でピッチを調節できる機能を追加して表現力を向上させる。例として、サムホールを半分ふさぐこ

とで音程を変えるサミング演奏を実装する。

5.5 制御アプリケーションの開発

息の入力を使う気圧センサの感度や、運指の割り当てを手軽に行えるアプリケーションを開発し、演奏者の必要に応じて設定を変更可能にする。

6. 参考文献

楽しい電子管楽器の作り方

<http://naitsuku.hatenablog.com/entry/2018/12/08/115704>

7. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の藤野先生には多大なご指導を賜りました。

また、同研究会の先輩方に多くの助言をいただきました。この場を借りて深く御礼申し上げます。

簡易的な電子ピアノの作製

2年C組 奥田誠ノ介

指導教員 藤野 智美

1. 要約

私は普段からピアノの練習をしており、友人が着手していた電子楽器の研究について興味を持った。そこで、まずは基礎的なプログラミングを学び、知識や実技を得た後に、簡易的な電子ピアノの作製を目指した。

キーワード 電子ピアノ、スピーカー、タクトスイッチ、Arduino

2. 研究の背景と目的

研究に着手した理由は、友人が電子リコーターの作成に取り組んでいたことについて興味を持ち、自分もやってみたいと思ったからである。今回の研究は起点に過ぎず、同様の研究を重ねることにより、プログラミングおよび電子工作の知識と技術の向上に加え、電子音楽による音楽性の多様化を目指し、研究している次第である。

本研究では、まずは一番自分にとって身近であるピアノを電子工作の観点で研究・開発することを目標にした。具体的には、スイッチを押すことによって特定の音が発せられるといった、擬似的な楽器作りを目指した。

3. 研究内容

3.1 実験目的と方法

<方法>

既存のサンプルプログラムを入手し、音階周波数の箇所を中心に目的のコードに変更した。その後、実際にスイッチを押すことによって音が発せられるかどうかの確認を行った。以下がコードの内容である。なお、

今回はマイコンとしてArduinoを使用した。

```
Void setup(){
    pinMode(13,OUTPUT)      ※①
    pinMode(2,INPUT_PULLUP);
    pinMode(3,INPUT_PULLUP);}
```

```
Void loop(){
    if(digitalRead(2)==LOW){   ※②
        tone(13,783.991);     ※③
    }
    else if(digitalRead(3)==LOW){※④
        tone(13,698.456);
    }
    else{                     ※⑤
        noTone(13);
    }
    delay(10);                ※⑥
}
```

① 音階周波数は音色を決定するものであり、変更することでピアノに従った音色を出せるようにした。

② どのタクトスイッチが押されたかを認識し、押された時に信号をONにして、「digitalRead」で指定した

- ピンの値を読み取る。
- ③ 13 は電流を出力するピン、783.991 は音階周波数の Hz の数値で、「ソ」の音を表す。
 - ④ else は「他の場合」(ここでは他のタクトスイッチを押した場合) の時に使用する。動作の内容は変わらないため、同じく「digitalRead」を使用する。
 - ⑤ noTone は「何も音を出さない」ということを表す。つまりなんの動作も行なっていない場合、スピーカーから音が出ないようにする。
 - ⑥ delay は信号の ON/OFF の間隔を表す。1000 で 1 秒間となる。



図 1:作成した簡易電子ピアノとタクトスイッチ部分(鍵盤)の拡大写真

3. 2 実験結果

作成した簡易電子ピアノを操作すると、タクトスイッチを押した際に、割り当てていた音がスピーカーから正しく発信できた。

4. 考察

プログラミングの基礎を学ぶことで、タクトスイッチを鍵盤にみたてた、一番簡易的かつ擬似的な電子ピアノを作成できた。

今後の課題として、現状のシステムでは 2 つ以上のスイッチを押した際に高い方の音しか出力できないことがわかった。和音の演奏ができるように、今後は改良を行う予定である。

5. 今後の展望

基盤は完成したため、まずは様々なプログラミングコードの内容を理解し、Arduino とプログラミングについて学び、今回作成した電子ピアノの機能性の向上を図りたい。

6. 参考文献

【1】アルディノは小さなコンピューターシステム

http://www.ric.co.jp/book/contents/pdfs/879_p018.pdf

【2】音階の周波数

<https://tomari.org/main/java/oto.html>

7. 謝辞

今回の研究において、多大なご指導を賜った藤野先生、研究に起きた御教示くださったサイエンス研究会の先輩方や友人にこの場を借りて深く感謝申し上げます。

色素を用いた有機化合物の分離

6年B組 石塚 朝咲
指導教員 増井 大二

1. 概要

芳香族有機化合物を混合したジエチルエーテル溶液から、それぞれの化合物が持つ官能基の違いを利用して分離することができる。今回は、芳香族化合物として色素を用いて分離を試みた。色素を用いているため、分離の判別は容易であると予想した。実験の結果、溶液の色の変化が分かりにくいものの、分離することが確認できた。

キーワード 有機化合物 酸塩基指示薬 官能基 有機溶媒 緩衝溶液 抽出

2. はじめに

化学の授業では、芳香族化合物を混合したジエチルエーテル溶液から、官能基を持つ特徴、例えば酸性・中性・塩基性の違いを利用してことで、各物質を分離することを学んだ^{1,2)}。合成着色料や染料にも用いられる色素は、芳香族化合物からなるものが多く、酸性や塩基性の置換基を持っている。そこで、pHの違いにより溶液の色が変化する色素である酸塩基指示薬を用いて、これらの色素の混合物から、一方のみを抽出できないか検討した。

3. 実験

色素（酸塩基指示薬）は、購入したものそのまま用いた。pH 4.1 の緩衝溶液は、0.10 mol/L 酢酸水溶液と 0.10 mol/L 酢酸ナトリウム水溶液を 4:1 の体積比で混合して調整した。

<使用した色素>

(a) ブロモチモールブルー



黄色の粉末で水には溶け



にくいが、エタノールには溶ける。変色域は pH 6.0(黄) - 7.6(青)。

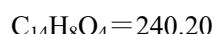
(b) ブリリアントグリーン



緑褐色の結晶性粉末で、水・エタノールに溶ける。変色域は pH 1.0(黄) - 3.0(青紫)。



(c) アリザリン

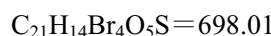


天然では、セイヨウアカネの根から採取される赤色の染料。橙色粉末で水・エ

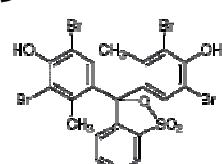


タノールに少し溶ける。変色域は pH 5.5(黄) - 6.8(青), 10.1(青) - 12.1(紫)。

(d) ブロモクレゾールグリーン



褐色粉末で中性の水に少し溶ける。水酸化ナトリウム水溶液には溶ける。変色域は pH 3.8(黄) - 5.4(青)。



<実験操作>

試験管にジエチルエーテル 2.5 mL と pH

4.1 の緩衝溶液 1 mL をとり、これに以下の(1)～(3)の組み合わせで固体の色素を少量(約 1 mg) ずつ入れた。試験管にゴム栓をしてよく振り混ぜた。

色素の組み合わせは、次の 3 通りである。
(1) ブロモチモールブルーとブリリアントグリーン、(2) アリザリンとブロモクレゾールグリーン、(3) ブロモチモールブルーとアリザリン

4. 結果と考察

(1) ジエチルエーテルと pH4.1 の緩衝溶液が入った試験管に、ブロモチモールブルーとブリリアントグリーンを加えてよく振り混ぜると、ジエチルエーテル層(上層)は濃い緑色に、水層(下層)は黄緑色になった。



ブロモチモールブルーおよびブリリアントグリーンは、水溶液の pH が 4.1 のときにそれぞれ黄色および青紫になる。実験結果から、ブリリアントグリーンは分子構造が無電荷の状態(緑色構造)でジエチルエーテル溶液中に多く含まれている。ブロモチモールブルーは、スルトン環が開裂してスルホナト基-SO₃⁻となり電荷を持つため、水層(下層)に多く含まれたと考えた。

(2) ジエチルエーテルと pH4.1 の緩衝溶液が入った試験管に、アリザリンとブロモクレゾールグリーンを加えてよく振り混ぜると、ジエチルエーテル層(上層)は黄色に、水層(下層)は黄緑色になった。



アリザリンの構造中にはフェノール性のヒドロキシ基がある。pH 4.1 の溶液中ではヒドロキシ基は電離しておらず(アリザリンの 2 つの-OH の pKa は、8.2, 12.0)，無電荷であるため、ジエチルエーテルに溶けていると考えた。一方、ブロモクレゾールグリーンは中性では溶解度が低いものの、酸性溶液では溶解度は高いため、水層(下層)に多く含まれると考えた。

(3) ジエチルエーテルと pH4.1 の緩衝溶液が入った試験管に、ブロモチモールブルーとアリザリンを加えてよく振り混ぜると、エーテル層(上層)は濃い黄色に、水層(下層)は緑色になった。



溶液の色から、ブロモチモールブルーは水層(下層)に、アリザリンはジエチルエーテル層(上層)に多く含まれていると考えた。

5. まとめ

実験で用いた色素は、酸塩基指示薬であり、水溶液の pH の違いにより色が異なる。緑、黄色と近い色の変化であったため、分離の判別は容易ではなかったが、なんとか分離することができた。

6. 参考文献

- 1) 化学改訂版、啓林館, p.338.
- 2) 後飯塚由香里, 化学と教育, 62, 2014, pp.206 - 208.

混合分子膜の成長をナノスケールで調べる

6年D組 小早川なの
指導教員 増井 大二
松浦 紀之

1. 要約

テレビやスマートフォンの普及とともに、液晶ディスプレイや有機発光ディスプレイに用いられる機能性分子膜の高性能化・高機能化が図られている。自発的に分子膜を形成し、異なる融点を持つ分子であるジヘキシルカテルチオフェンとジヘキシルセキシチオフェンの混合物について、融点や分子膜の成長の様子を調べることを目的とし、アニール温度と混合比の条件を変え、混合物の表面を原子間力顕微鏡(AFM)で測定した。

キーワード 分子膜 原子間力顕微鏡 液晶 有機EL チオフェン

2. 研究の動機

私は大阪大学 SEEDS プログラムの講義が進む中で、ナノテクノロジー、特に、走査型プローブ顕微鏡(SPM)や走査型電子顕微鏡(SEM)を用いたナノスケールでの物質の構造解析に興味を持った。

これらの顕微鏡を用いてナノの世界を探求したいという一心で実感コースを受講し、本テーマの研究を始めるに至った。

テレビやスマートフォンが生活に欠かせない今、機能性分子膜はさらに高性能化・高機能化が求められている。これらの課題を解決する新規の材料を開発するためには、分子膜の成膜過程について調べる必要性がある。

3. 2 機能性分子膜とは

分子膜の中には、自発的に分子が集合し、所定の温度で整った構造を持つものがある。このように、分子間の相互作用(主に分子間力)により、固体表面の分子が自発的に高い配向性・密度の膜を作ることを「自己組織化」という。これは液晶ディスプレイを始め、有機半導体として有機ELや太陽電池

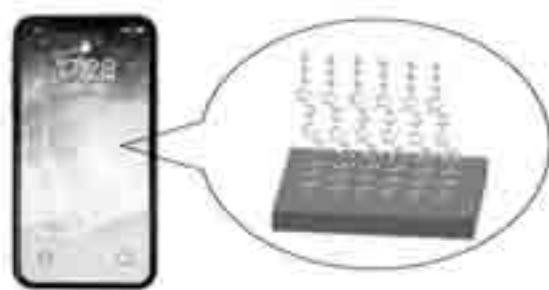


Fig. 1 自己組織化膜の応用例

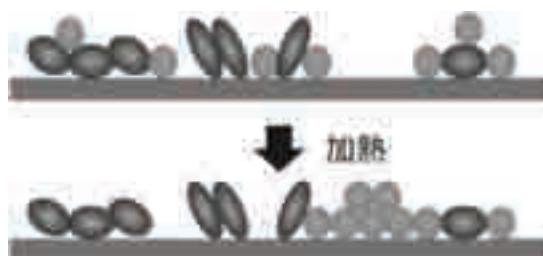


Fig. 2 混合物の成膜過程

にも応用されている。

3. 3 目的

3. 1の「機能性分子膜の高性能化・高機能化」とは、より誘電率が高く薄い分子膜を作ることで、それにはより高い配向性や密な構造を持たせる必要がある。高校化学では、アルミナの融解塩電解に用いられるホール・エルー法や混合溶液の凝固点降下など、添加物や混合物により本来の融点を下げる方法を学んだ。

そこで、純粋な分子材料の場合ではなく、異なる分子の混合物について考える。異なる融点を持つ2種類の分子を混ぜた時、それらの特徴はどう変化するのだろうか。アニール温度や混合比の条件を変え、原子間力顕微鏡（AFM）で測定することで、融点や分子膜の成長の様子を明らかにすることを目的とした。

4. 研究内容

4. 1 試料の測定

2種類の分子（4. 3 参照）を、以下の割合で混合し、Si基板上に塗る（ラビング）。それぞれ下の温度に炉で20分間保った（アニール）後、室温に20分置いたものをAFMで測定した。

●混合比(%)

DH4T	0	25	50	75	100
DH6T	100	75	50	25	0

●アニール温度

室温, 320 K, 340 K, 360 K, 380 K, 400 K

4. 2 原子間力顕微鏡 - Atomic Force Microscope

ナノスケールで物質の画像を得ることが

できる顕微鏡で、走査型プローブ顕微鏡（SPM）の一種。カンチレバーという先端が鋭い短針で表面をなぞることで、試料表面の垂直方向と水平方向の情報を得る。

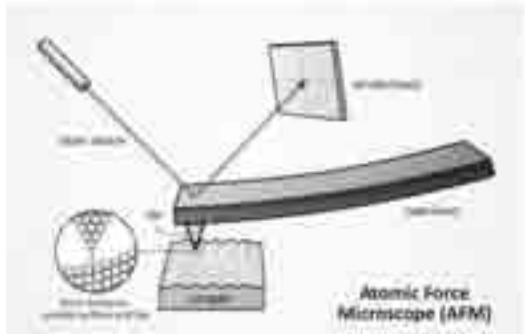


Fig. 3 AFM の仕組み^[6]

ナノスケールで物質の挙動に着目したとき、固体の表面は内部（バルク）とは異なる性質を持っている。それは Fig. 4 のように、バルクに比べ表面の分子はより小さな分子間力しか受けないためである。特に分子膜すなわち薄膜では、バルクよりも表面が大きな影響を与えることがわかる。

今回使用したのは大阪大学大学院理学研究科所有の JEOL 社製 AFM である。

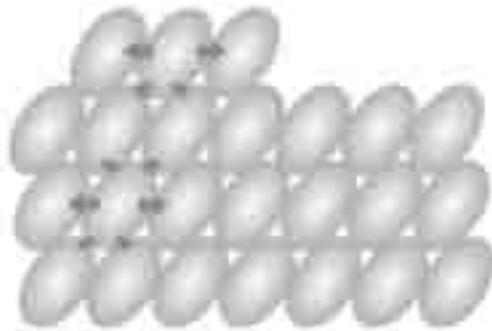


Fig. 4 固体表面とバルクの違い

4. 3 測定試料

●ジヘキシリクアテルチオフェン

—Dihexylquaterthiophene (以下, DH4T)

融点: 453K, 結晶: 層状に成長



Fig. 5 DH4T の構造式

●ジヘキシルセキチオフェン
—Dihexylsexithiophene (以下, DH6T)
融点 : 553K, 結晶 : 層状に成長



Fig. 6 DH4T の構造式

5. 結果と考察

5. 1 AFM像からの考察

プローブ顕微鏡用解析ソフト Gwyddion を用いて、測定データから 2 次元の画像の作成や補正を行った。Fig. 7 に各条件下での AFM 像を示した。

①一定のアニール温度における混合比変化

画像から、DH4T の割合が大きくなるとより滑らかな分子膜を形成することがわかる。これは DH4T を付加することで DH6T の融点が下がったことを意味している。どちらか一方の分子が固まって成長した様子ではなく、両分子は基板上で混在していることから、確かに添加物により融点を下げる効果が確認できた。

②一定の混合比におけるアニール温度変化

温度が高くなるほど、より滑らかな膜を形成する。DH4T, DH6T 単体のみの場合と変わらずアニールの効果が表れていることが確認できる。

4. 2 ヒストグラムを用いた解析

測定データから AFM 像の高さの分布を表すグラフであるヒストグラムを作成した。これにより、成膜過程を明らかにする手がかりとなる分子膜の 1 層の高さの解析を試みた。

縦軸は線密度 [nm⁻¹]、横軸は高さ [nm] を表す。最も大きなピークから 2.8 nm (DH4T

の結晶の 1 分子の長さ)ごとに●(黒)を、3.6 nm (DH6T の結晶の 1 分子の長さ) ごとに●(青)を打ち、ピークの差に着目して解析を行った。

Fig. 8 では同じ混合比の条件下でアニール温度の変化に着目したヒストグラムを、Fig. 9 では 360 K において混合比の変化に着目したヒストグラムを示した。

①一定のアニール温度における混合比変化 (Fig. 9)

DH4T の比率が高いほど、ピークが鋭くなっていることが読み取れる。これはピークの高さの点がより多く分布している、すなわち分子膜がより滑らかであることを示している。

②一定の混合比におけるアニール温度変化 (Fig. 8)

Fig. 8 からは、全体を通じて部分的な相分離が読み取れた。ピークが●(黒)や●(青)の付近にあることから、部分的に分離していると考えられるが、ピークがゆるやかで完全に分離しているとは言えない。したがって、分子膜の 1 層の高さを断定するには至らなかった。

特に(d)ではピークが●(青)と同じ間隔で表れており、1 层の高さが 3.6 nm であることが予想できるが、ここでもピークがゆるやかなために DH6T の層であると断定はできない。

ヒストグラムに鋭いピークが現れなかつた理由として、DH4T と DH6T は非親和性があまりないため相分離が起きないか、もしくはデータを統計的に扱うには、基板のゆがみなども関係して測定精度が甘かった可能性も考えられる。

6. 今後の展望

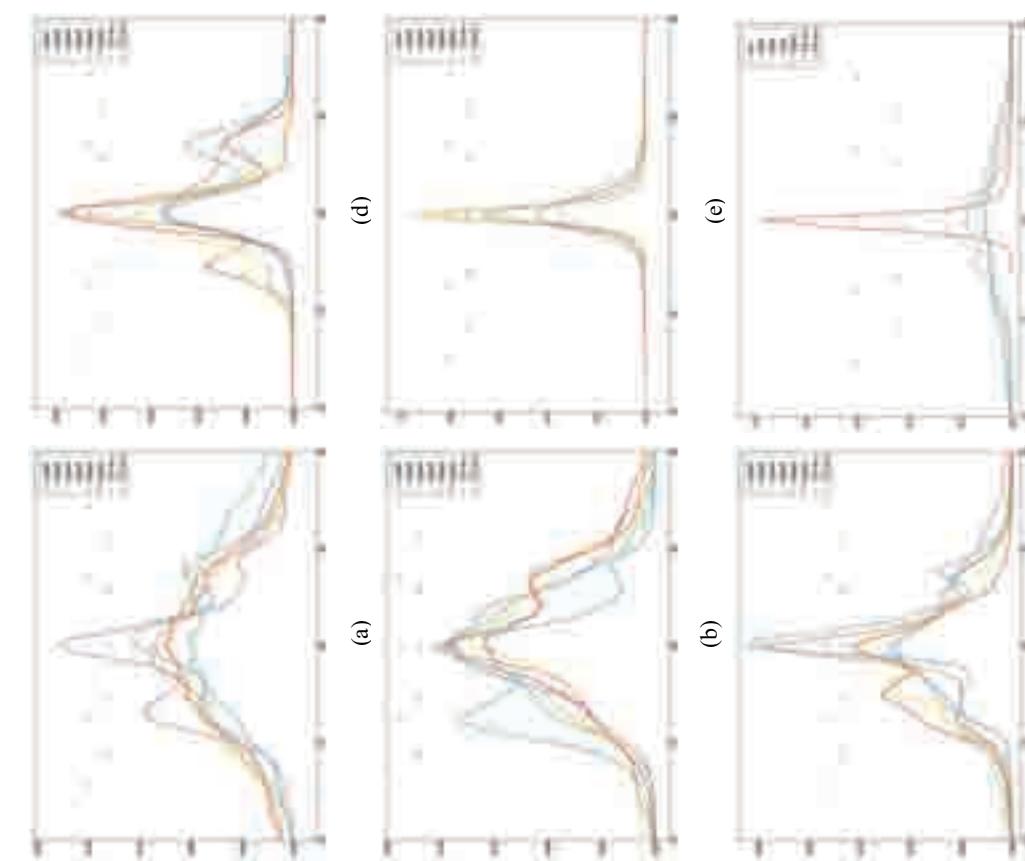
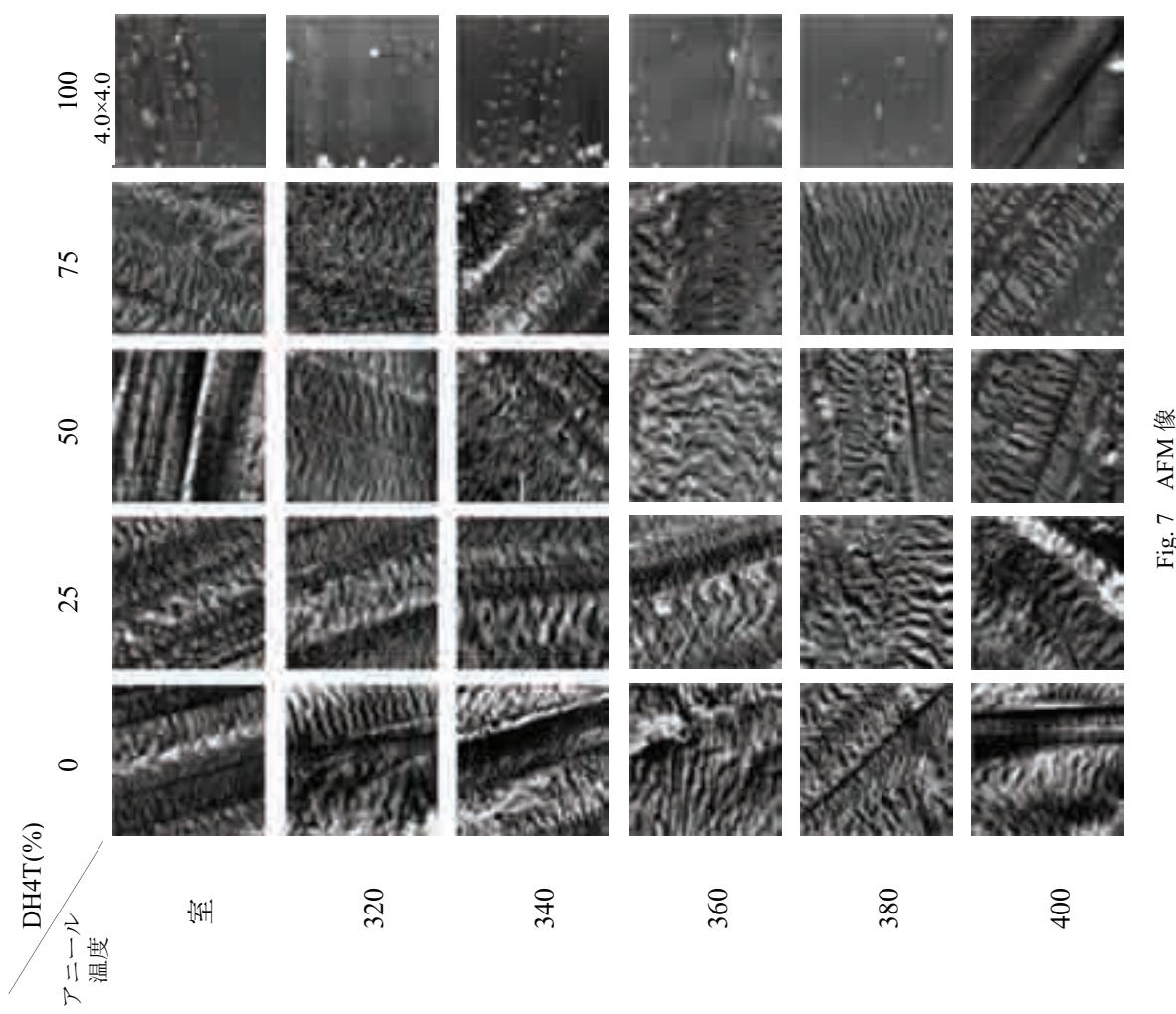
振り返ると、新参の初心者として最低限の結果は得られたとしても、経験の未熟さを思い知らされる研究であった。第2ステップの研究や実験に進む前に、AFMや自己組織化膜、表面化学などさまざまな知識を蓄えておく必要を感じている。

7. 参考文献

- [1] 産業技術総合研究所 ナノテクノロジー知識研究会. ナノテクノロジー・ハンドブック. 日経BP社, 2003.
- [2] 西久保晴彦. 最新 半導体の仕組み. ナツメ社, 2010.
- [3] 川合知二. ナノテクノロジ一大事典. 工業調査会, 2003
- [4] A. Facchetti, et al., *J. Am. Chem. Soc.*, **126**, pp. 13480-501(2004).
- [5] F. Garnier, et al., *Chem. Mater.*, **1998**(10), pp. 3334-3339(1998).
- [6] NISE NET. Scientific Image - Atomic Force Microscope Illustration.
<https://www.nisenet.org/catalog/scientific-image-atomic-force-microscope-illustration>

8. 謝辞

本研究を行うにあたりご指導くださった大阪大学大学院理学研究科准教授 加藤浩之先生、本校理数科の先生方に厚く御礼申し上げます。



グアバの葉、コーヒー殻による銅(II)イオン吸着実験

5年A組 大山 喜千

4年B組 高井 ゆり

Chitralada School Prawduen Bodharamik

Pimmada Faraksa

指導教員 松浦 紀之

1. 概要

重金属イオンの下水道や河川などへの排出は、法律や規制によって厳しく規制されている。そのため、適切な処理が必要であり対応にはコストがかかる。そこで、グアバの葉およびコーヒー殻を用いて、水溶液中の銅(II)イオンの吸着実験を行った。どちらも水中から銅(II)イオンの吸着されることが分かった。しかし、今回の実験では、水中からの銅(II)イオンの除去が、タンニンに結合によるものか、グアバの葉やコーヒー殻の繊維に直接吸着によるものか、どちらの効果が大きかったのかは分からなかった。

キーワード グアバ コーヒー タンニン ポリフェノール 銅(II)イオン 吸着

2. はじめに

工業排水には、 Cu^{2+} , Ag^+ , Pb^{2+} などの重金属イオンが含まれていることがある。これらは河川や海を汚染し、生態系に影響を及ぼす。私たちは、植物に含まれるポリフェノールが持つ重金属イオン吸着能力に着目することで、水中の重金属イオンを回収できるのではないかと考えた。ポリフェノールを含むグアバ(フトモモ科の熱帯性低木)の葉およびコーヒー殻を用いた Cu^{2+} の吸着実験は、日本・タイの高校生 4 名による共同研究として実施した。

3. 実験操作

グアバの葉はバンコク市内で採取して自然乾燥させて細かく切り刻んだ。コーヒー殻はペルー産コーヒー豆を挽き(中細挽き)、コーヒー抽出後の殻を自然乾燥させた。

(1) グアバの葉とコーヒー殻中の総ポリフェノール量の測定

総ポリフェノールの定量は、Folin-Denis 法により行った¹⁾。濃度の異なるタンニン酸水溶液に、フォーリン試薬 1.0 mL, 20%炭酸ナトリウム水溶液 5.0 mL を加え、20 分放置した。分光光度計により 735 nm の吸光度を測定することで、検量線を作成した。

ガラス製容器にグアバの葉 1.0 g, 30%エタノール水溶液を入れ、栓をして 70°C の水浴中で 3 時間攪拌した。吸引ろ過後のろ液を希釈し、フォーリン試薬 1.0 mL, 20%炭酸ナトリウム水溶液 5.0 mL を加えた。20 分経過後、分光光度計により 735 nm の吸光度を測定し、検量線より総ポリフェノール量を見積もった。コーヒー殻についても同様に行った。

(2) ヨウ素滴定法によるグアバの葉, コーヒー殻の Cu^{2+} 吸着量測定

グアバの葉（またはコーヒー殻）0.50 g ~2.50 g (0.50 g ごと)を、1.0%硫酸銅(II)水溶液 100 mL が入った三角フラスコに入れ、室温で 30 分攪拌した。吸引ろ過後、ヨウ化カリウムを 0.60 g を加えて 1 分間攪拌した。この溶液を 0.080 mol/L チオ硫酸ナトリウム水溶液により滴定することで、グアバの葉またはコーヒー殻に吸着されなかった Cu^{2+} の量を求めた（図 1）²⁾。

4. 結果と考察

(1) グアバの葉とコーヒー殻中の総ポリフェノール量

タンニン酸水溶液の濃度と Folin-Denis 法より求めた 735 nm の吸光度との関係は、0.50~10 mg/L の濃度範囲で直線になった ($r^2 = 0.98$)（図 2）。この検量線を用いて、グアバの葉およびコーヒー殻 1.0 g から抽出された総ポリフェノール量を見積もると、それぞれ 3.30 mg, 0.40 mg であった（総ポリフェノール量；グアバの葉の粉末/コーヒ

ー殻 = 7.8）。これより、 Cu^{2+} の吸着能力はコーヒー殻よりグアバの葉の方が優れていると予想できる。ポリフェノールには水溶性と不溶性の 2 種類があることが知られている³⁾。水溶性ポリフェノールが Cu^{2+} を吸着しても、結合により生じた化学種は水に溶けやすいと考えられ、水中から除去することは難しい。そこで、フェノールとホルマリンから、メチレン基-CH₂-により架橋されたプラスチックであるベークライトを合成する反応に注目した。この反応を応用することで、水溶性ポリフェノールを重合できないかと考えた。ポリフェノールがさらに重合して高分子化すると、水に不溶な固体となり、吸着された Cu^{2+} はろ過により容易に取り除くことが可能になる。

グアバの葉（またはコーヒー殻）1.0 g, ホルマリン 5.0 mL, 0.10 mol/L の硫酸 20 mL を三角フラスコに入れて栓をし、60°Cの水浴中で 2 時間攪拌した。遠心分離により粉末を沈殿させて上澄みを取り除き、蒸留水で洗浄する手順を 5 回繰り返したのち、吸引ろ過し、得られた固体は自然乾燥させた⁴⁾。

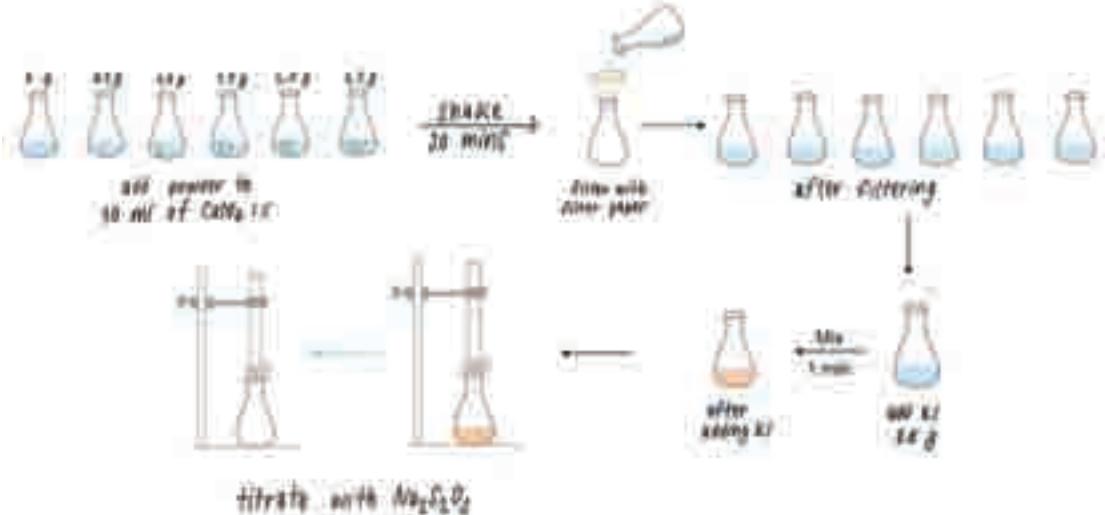


図 1. ヨウ素滴定法によるグアバの葉, コーヒー殻の Cu^{2+} 吸着量測定

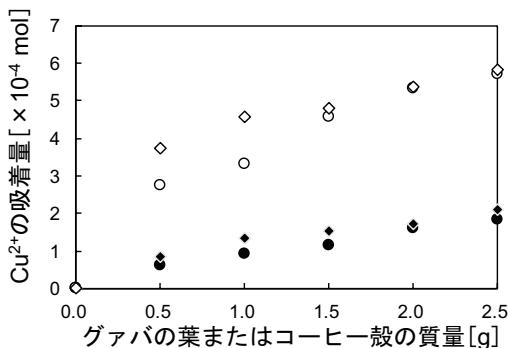


図 1. Folin-Denis 法により作成した検量線

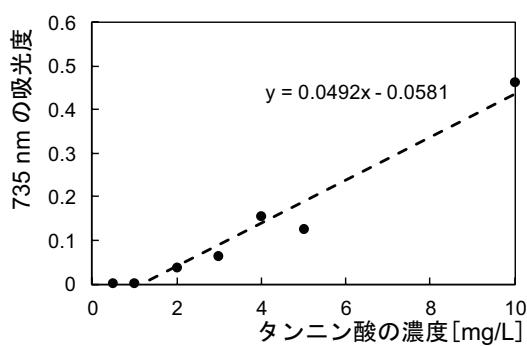


図 2. グアバの葉またはコーヒー殻に対する Cu^{2+} の吸着量
 ●コーヒー殻, ◆コーヒー殻(ホルマリン処理)
 ○グアバの葉, ◇グアバの葉(ホルマリン処理)

同じ質量当たりの Cu^{2+} の吸着量は、コーヒー殻よりグアバの葉の方が多かった。これはポリフェノールの含有量の差と一致した。グアバの葉、コーヒー殻のいずれも、ホルマリン処理の有無による Cu^{2+} の吸着量の差は大きくなかった（図 3）。この理由としては、水溶性ポリフェノールが高分子化されなかつことが考えられる。また、 Cu^{2+} の吸着について、ポリフェノールとの結合による効果よりも、グアバの葉やコーヒー殻への直接の吸着の効果の方が大きかった可能性もある。

5. まとめ・今後の予定

今回用いたグアバの葉、コーヒー殻は、工業排水などから重金属イオンを取り除くのに利用できることが分かった。重金属が吸着したグアバの葉、コーヒー殻は、燃焼させることで重金属を回収することができる。今後は、重金属イオンの吸着のメカニズムについて詳細に調べ、他の異なる種類の重金属イオンについても実験を行っていきたい。

本研究は、立命館高校 SSH 科学技術人材育成重点枠の支援により実施したものである。

参考文献

- 藤田修三, 山田和彦, 食品学実験書第 3 版, 医歯薬出版, 2017, pp.115-116.
- 松岡雅忠, 化学と教育 2014, 62, 594.
- 村松敬一郎, 茶の科学, 朝倉書店, 1991, pp.115-123.
- 木村優, 山下博美, 駒田順子, 分析化学 1985, 35, 400.

メダカにロック曲を聴かせたときの体内変化

1年 A 組 中村 一葉

指導教員 松浦 紀之

1. 要約

2つの水槽にメダカ（ヒメダカ, *Oryzias latipes*）を3個体ずつ入れ、一方に水中スピーカーを入れて「前前前世」を1日12時間、5日間聴かせ、もう一方は、音楽を聴かせなかつた。音楽を聴かせたメダカは、すべてが5日後にやせ細っており、消化器官は委縮していた。ヒトの肥満度を表すボディマス指数（BMI）をメダカに当てはめて計算すると、やせ細ったメダカのBMIは20以下まで低下していた。これらのメダカの内臓、一方、音楽を聴かせなかつたメダカは、特に目立つ変化は見られなかつた。これより、ロック曲「前前前世」はメダカを死に至らしめるほどの影響があると考えた。

キーワード メダカ ロック曲 体内変化 ボティマス指数

2. はじめに

小学校6年生の時、メダカに音楽を聴かせることでメダカの行動にどのような変化が起きるのかについて研究した。その結果、メダカに音楽を聴かせると、音源から離れるよう行動することを見出した。中でもロック曲「前前前世」に一番大きな変化があることに気が付いた。そこで、「前前前世」を長い時間聴かせることで、どのような変化が起きるのか調べた。

3. 実験

3. 1 使用器具

スマートフォン（iPhone SE）または音楽プレーヤー（SONY Walkman NW-S131）をスピーカーにワイヤレス接続して流した。スピーカーは、Mindkoo社製のワイヤレス防水スピーカーMindkoo BS01を用いた。メダカの体重（質量）測定は、電子天秤（最小秤量0.01g）を用いた。メダカの解剖時の麻酔

は、DS ファーマアニマルヘルスの冷血動物用麻酔 FA100（1mL中、オイゲノール107mg含有）を用いた。メダカの解剖写真は、生物顕微鏡の接眼レンズ部にスマートフォンまたはコンパクトデジタルカメラを近づけて撮影（コリメート法）した。

3. 2 実験操作

実験は、室内の直射日光が当たらないエアコンが効いた場所（25°C）で行った。

- (1) 音楽を聴かせるメダカと、音楽を聴かせないメダカを3匹ずつ選んだ。
- (2) 2019年8月9日7:00～19:00までボリューム11（最大音量の1/3）でロック曲「前前前世」を流した。
- (3) 5日後に音楽を聴かせたメダカ3匹と、音楽を聴かせていないメダカ3匹を解剖した。聴かせているメダカと聴かせていないメダカでどのような違いがあるのかを比較した。解剖では体長、体高、体重、消化器官の4項目を比較した。

4. 結果と考察

音楽を聴かせているメダカは、3匹ともエサを与えてもあまり食べなかった。そのためか音楽を聴かせていたメダカが痩せていった。音楽を聴かせたメダカの体重は、音楽を聴かせてないメダカの体重の約1/2に減った。しかし、体重、体長、体高は特に変化が見られなかった（表1）。実験5日目に音楽を聴かせていたメダカ1匹が死んだ。音楽を聴かせたメダカと音楽を聴かせていないメダカを比べると、音楽を聴かせたメダカのほうが圧倒的にやせ細っていた（図1）。

解剖の結果、音楽を聴かせたメダカは、やせ細り、消化管が委縮していた。体長、体高、体重は特に変わらなかつたが体の中は大きく異なつた（図2）。

メダカに毎日12時間、計5日間、音楽を聴かせると、音楽を聴かせたメダカが衰弱した。解剖の結果、消化器官が委縮していることが分かつた。去年（小学6年）の研究より、クラシック曲「アイネクライネ・ナハト・ムジーク」をメダカに聴かせたときには衰弱することができなかつたので、ロック曲を流したときの振動によるストレスが原因だと考えた。

5. ボディマス指数を用いたメダカの比較

「メダカがどのくらいやせ細っているのか」を比較する方法について、何か良い方法がないかと考えたところ、ヒトの肥満度を表すために用いるボディマス指数（BMI）^{5,6}をメダカに当てはめることができるのでないかと考えた。BMIとは、肥満度をあらわす体格指数（ヒトの体格のバランスを把握するために計算される指數）のことである。BMIは、ヒトの体重と伸長の関係から

計算することができ、

$BMI = \frac{\text{体重}[kg]}{\text{身長}[m] \times \text{身長}[m]}$

で求めることができる。そこで、メダカA～Eについて求めると音楽を聴かせたメダカ（A、B）のBMIは20以下、音楽を聴かせていないメダカ（D～F）のBMIは平均26.1となり、これらの値には差があつた（表2）。計算した結果をヒトの肥満判定表に当てはめると、音楽を聴かせているメダカは「普通・正常（BMI 18.5 異常 25 未満）」、音楽を聴かせていないメダカは「肥満1度・前肥満（BMI25 異常 30 未満）」に相当する⁷⁾。メダカとヒトを単純に比較することはできないが、メダカの場合はBMI値は20～35程度で健康的であり、20以下では衰弱し死んでしまうと考えた（表3）。

6. 研究のまとめ

メダカにロック曲を聴かせるという実験を行うと、「音楽の発信源から出る振動」と、「壁により跳ね返る振動」から離れているところにいく。体重が減少し、消化器官が委縮する。ということが分かつた。これは低音が発生するときにできる振動と波によるストレスが原因だと考えた。過去の研究より、クラシック曲「アイネクライネ・ナハト・ムジーク」をメダカに聴かせたときには衰弱することができなかつたのでロック曲特有の現象の可能性がある。

7. 展望

様々な音源の周波数分析を行い、低音がメダカを死亡させるほどのストレッサーとなるかどうかの関係を調べたい。軽音楽バンドの電子楽器やオーケストラを構成する各楽器の音など、波長や楽器の音色との関

係を調べたい。

この研究を行うことで、外来種が嫌う音楽を池に流して駆除することや養殖の際、その魚の成長率が高い音楽を流すことで増殖率を上げるということができると思われる。

8. 参考文献

- 1) 中村一葉, 檜原市昆虫館特別展「美しきメダカ展～光と影～」招待講演, 2019年8月25日
- 2) 中村一葉, メダカカンタービレ, 第37回海とさかな自由研究・作品コンクール, 2018.
- 3) 戸井武司, 今日からモノ知りシリーズ
- トコトンやさしい音の本, 日刊工業新聞社 2004.
- 4) 内山りゅう, ぜんぶわかる! メダカ, ポプラ社, 2015.
- 5) BMIと肥満度を計算しよう!
www.uemuraclinic.com/dmlecture/bmi.htm
(参照 2019-9-6)
- 6) WHO ボティマス指数-BMI
<http://www.euro.who.int/en/health-topics/disease-prevention/nutrition/a-healthy-lifestyle/body-mass-index-bmi> (参照 2019-9-6)
- 7) 日本肥満学会, 臨時増刊号肥満症診断基準 2011, 2011.



図1. 実験の後のメダカの様子

(左: 音楽を聴かせているメダカ 右: 音楽を聴かせていないメダカ)



図2. 実験の後のメダカの解剖写真

(左: 音楽を聴かせているメダカ 右: 音楽を聴かせていないメダカ)

表1. 実験の計測結果

メダカ	音楽	体長[cm]	体高[cm]	体重[g]	その他
メダカ A	あり	2.70	0.30	0.14	死亡（衰弱）
メダカ B		2.70	0.25	0.14	食欲なし
メダカ C		—	—	—	死亡
メダカ D	なし	2.95	0.40	0.18	—
メダカ E		3.10	0.40	0.32	—
メダカ F		2.65	0.30	0.17	—

表2. 実験したメダカのボディマス指数(BMI)計算式

メダカ	計算式	BMI
メダカ A	$0.00014 \div (0.0027 \times 0.0027) = 19.2 \approx 19$	
メダカ B	$0.00014 \div (0.0027 \times 0.0027) = 19.2 \approx 19$	
メダカ D	$0.00018 \div (0.00295 \times 0.00295) = 20.6 \approx 21$	
メダカ E	$0.00032 \div (0.0031 \times 0.0031) = 33.2 \approx 33$	
メダカ F	$0.00017 \div (0.00265 \times 0.00265) = 24.2 \approx 24$	
※メダカ A～Cは音楽を聴かせたもの、メダカ D～Fは音楽を聴かせていないものである。メダカ Cは測定できなかった。測定値は有効数字 2 衔であった。計算は小数点第 1 位まで求めて、四捨五入して表した（有効数字 2 衔になる）。		

表3. 実験の結果をヒトのボディマス指数(BMI)に当てはめて求めた判定結果

BMI	世界保健機関 (WHO)	日本肥満学会	実験結果 ※メダカに当てはめて判定した
18.5 未満	やせ	低体重	(衰弱死)
18.5 以上 20 未満	やせ	低体重	やせ
20 以上 25 未満	普通	正常	健康
25 以上 30 未満	肥満 1 度	前肥満度	健康
30 以上 35 未満	肥満 2 度	I 度	健康
35 以上 40 未満	肥満 3 度	II 度	
40 以上	肥満 4 度	III 度	

容器内でのロウソクの燃焼

1年A組 福留 菜月

1年A組 廣谷 美羽

指導教員 松浦 紀之

1. 概要

空気中には酸素が約20%含まれている。小学生のときの理科の授業で、容器内でロウソクを燃焼させると、酸素の量が減少し、二酸化炭素の量が増加することを学んだ。しかし、ロウソクを燃やしたあとの容器内には、酸素がまだ残っている。酸素が残っているのにロウソクの火が消えたのか、疑問に思い実験を行った。ロウソクの燃え方や容器内の酸素の消費量は、容器内に存在する気体の割合にあると考えられるが、今回の実験では検証できなかった。

キーワード 燃焼 ロウソク 化学カイロ

2. 研究背景と目的

空気中には酸素が約20%含まれている。小学生のときの理科の授業で、容器内でロウソクを燃焼させると、酸素の量が減少し、二酸化炭素の量が増加することを学んだ¹⁾。しかし、ロウソクを燃やしたあとの容器内の気体を气体検知管で調べると、酸素はまだ残っている。なぜ、酸素が残っているのにロウソクの火が消えたのだろうか。疑問に思い、実験を行った。

2. 仮説と実験操作

実験に用いたロウソクは「カメヤマローソク」(パラフィンワックスを主原料とする)を、使い捨てカイロは「桐灰カイロミニ」を用いた。

(1) 予備実験 容器内でのロウソクの燃焼

水が入ったシャーレにロウソクを立て、点火してからガラスコップをかぶせてコップ内の様子を観察した(図1)。

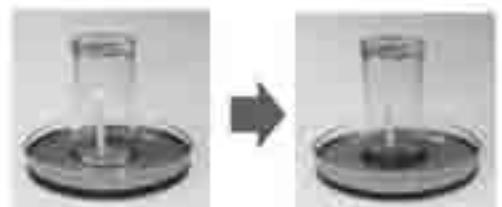


図1. 予備実験の様子
(水位が上昇した)

(2) 実験1. ロウソクの長さによる、燃焼時間の変化

3種類の長さの異なるロウソクを用意し、それぞれ粘土にロウソクを立て点火させ、粘土と隙間ができるようすぐにガラス瓶をかぶせた(図2)。長さの違いによるロウソクの燃焼時間の差を調べた。



図2. 実験1の様子

(3) 実験 2. 容器内の二酸化炭素の量による、ロウソクの燃焼時間の変化

実験 1 と同じ装置で、粘土の上に固体の水酸化ナトリウム NaOH を置き同様の手順でロウソクを燃焼させた。

(4) 実験 3. 容器内での使い捨てカイロの燃焼

文献²⁾の方法を改良して、実験を行った。カイロを袋から出して、温かくなったのを確認してから、ガラス製の 100 mL 注射器に入れた。100 mL の目盛りに注射器を合わせ、注射器の先端にコックを付けた。30 秒ごとに注射筒を動かし、注射筒が自然に止まったところの注射器内の気体の体積を調べた（図 3）。



図 3. 実験 3 の様子

3. 結果と考察

(1) 予備実験. 容器内でのロウソクの燃焼

水が入ったシャーレにロウソクを立てて、点火してからコップをかぶせると、コップ内の水が上昇して火が消えた。ロウソクが燃えてできた水蒸気は

冷えると水になり、また二酸化炭素は水に溶けるので、コップ内の気体の体積が減り、さらにコップ内の気体は冷えると体積が小さくなるので、その分だけ水が入ったと考えた。

(2) 実験 1. ロウソクの長さによる、燃焼時間の変化

容器内でロウソクの火が消えるのは、燃焼時にロウソクへ新鮮な酸素が送り込まれなくなるからだと予想した。短いロウソクでは、ロウソクの上部の空間が広いので、一番長く燃焼するのではないだろうかと考えた。

結果は、仮説通りの結果にはならなかった（表 1）。ロウソクの燃焼に関する論文³⁾には、「短いロウソクの方がより長く燃焼した」と書かれていることから、論文と実験の装置や方法の違いがこのような結果になったと考えられる。

表 1. ロウソクの長さと燃焼時間の関係

試験	8.5cm	6.8cm	3.4cm
1	14.5	24.8	17.4
2	16.4	24.4	17.5
3	21.0	22.8	18.8
4	20.0	24.3	18.8
5	23.3	22.7	17.6
6	25.7	20.6	17.0
7	23.4	20.4	16.9
8	17.1	16.9	16.3
9	18.3	20.4	15.3
10	20.3	18.7	17.7
平均	19.8	21.6	17.7

(3) 実験 2. 容器内の二酸化炭素の量による、ロウソクの燃焼時間の変化

実験 1 の結果からロウソクの燃焼時に発生する二酸化炭素を除去し続ければ、ロウソクは実験 1 よりも酸素を使って燃焼し続けるのではないかと考えた。

固体の水酸化ナトリウムが、燃焼で生じた二酸化炭素を吸収（中和）して、二酸化炭素の濃度が下がり、ロウソクが燃え続けると予想した。しかし、結果はロウソクの燃焼時間に大きな変化はなかった。固体の水酸化ナトリウムの代わりに、濃い水酸化ナトリウム水溶液を使って二酸

化炭素を吸収できるか検討中である。

(4) 実験3. 容器内での使い捨てカイロの燃焼

ロウソクの代わりにゆっくり燃焼するカイロを用いれば、容器内の酸素はたくさん消費されるのではないだろうかと考えた。

容器内での使い捨てカイロの燃焼時間とともに、注射器内の体積は減少し、10分後には82 mLで一定になった(図4)。空気中の酸素の体積は約20%なので、ほとんどの酸素が消費されたといえる。ロウソクのような燃焼ではなく、カイロのゆっくりとした燃焼が関係していると考えた。

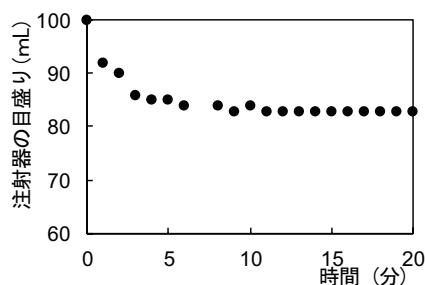


図4. 実験3の結果

4. まとめ・今後の展望

ロウソクの燃え方や容器内の酸素の消費量は、容器内に存在する気体の割合に関係があると思われるが、十分に検証することができなかった。現在、窒素、酸素、二酸化炭素を様々な割合で混合した気体中のロウソク燃焼実験を行っている。

参考文献

- マイケル・ファラデー, 白川英樹(監修), 尾嶋好美(訳), 「ロウソクの科学」が教えてくれること, ソフトバンククリエイティブ, 2018.
- 平賀伸夫, 日井豊和, 化学と教育 1989, 37, 534.
- 第25回日本学生科学賞論文集, 容器内のローソクの燃焼について, 1981, 172.

本研究の外部発表

「まほろばけいはんなサイエンスフェスティバル」

(令和元年11月)

「集まれ!理系女子 女子生徒による科学研究発表交流会 関西大会」

(令和元年12月14日, 奈良女子大学)

「日本化学会近畿支部第36回高等学校中学校化学研究発表会」

(令和元年12月25日, 大阪科学技術センター) <奨励賞受賞>

マツタケの人工培養を目指して

6年B組 加藤 大翔
指導教員 松原 俊二

1. 要約

私は、未だ安定した手法が確立されていないマツタケの人工培養法について研究している。マツタケ菌糸の成長速度を向上させる条件を探るために、培地の寒天量とpHを変えて培養を行った。今回の実験結果から、酸性の培地には、菌糸の成長速度を促進させる作用があることが分かった。

キーワード マツタケ菌糸 成長速度 pH 寒天量

2. 研究の背景と目的

現在、安定したマツタケの人工培養の成功例は報告されていない。私は「なぜマツタケの人工培養は困難であるのか」に興味をもち、マツタケの研究を始めた。マツタケの人工培養が困難である理由の一つに、菌糸の成長速度の遅さがある。本研究では、マツタケの人工培養を目指して、菌糸の成長速度が向上する条件を探ることを目的とした。

3. 実験内容

3.0 事前準備

実験室をビニールカーテンで区切り、その中でプラズマクラスターを約24時間作動させることで、できるだけ菌の少ない状態にした。また、以下の全ての実験において、マツタケ菌を扱う際にはクリーンベンチを用いて、無菌状態で操作を行った。

3.1 実験目的

菌糸の成長速度を向上させる条件を探るうえで、いくつかの参考文献を参照した。参考文献[1]では、

「有機物の少ない合成培地で培養すると、菌糸の伸長成長は良いが、分岐が少なく、コロニーはうすくなる。」

との記述があった。そこで有機物であるグルコースの量を減らすことを試みたが、根拠をもって減らす量を決めることができなかつた。

参考文献[2]を参照したところ、「Fig. 5に培養成績に及ぼす初発グルコース濃度の影響を示した。最適濃度は約20g/Lであることが分かる。」

との記述があり、通常作成している培地のグルコース濃度と一致したため、グルコースの分量はそのままで実験を行った。

さらに環境要因を探るために、近年人工栽培に成功しているバカマツタケに着目し、どのような環境で生育が行われているかを調べることにした。

参考文献[3]より、「バカマツタケの菌糸体は、10~30°Cの温度範囲で成長し、成長最適温度は25°C付近であった(図8)。試験したpH4.0から7.0までの培地では、pH 5.0の培地で菌糸体が最もよく成長した。初発pH値にかか

わらず、すべての培地の培養で最終 pH が 4.0~5.7 となり、初発 pH が高い培地ほど培地内からグルコン酸が多く検出され（図 9）、酸の生産が活発となることを示した。」との記述があり、マツタケの人工栽培を目指すうえでもこれらの環境は影響しているのではないかと仮説を立て、今回は学校の設備等を考慮した結果、pH を変化させることによる菌糸の成長速度の変化を探ることにした。

2016 年度に行った研究から、1/3 培地（通常の培地の寒天量を 1/3 倍にした培地）で培養すると、菌糸の成長速度に変化はないが形態に変化が起きることがわかつっていたので、今回は 1/3 培地も用いて対照実験を行った。

3.2 実験仮説

バカマツタケでは、pH5 の条件にすると菌糸の成長速度が最も早いことが知られている。マツタケにおいても、同じ条件が最も菌糸の成長速度を向上させるのではないか。また、1/3 培地の菌糸の成長速度に多少の変化が生じるのではないか。

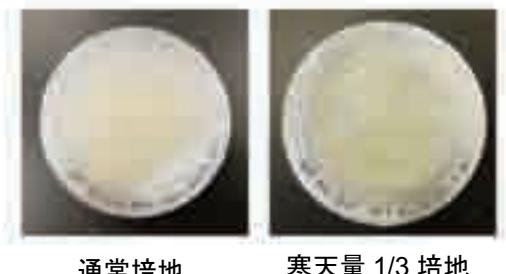
3.3 実験方法

過去の実験から、浜田培地と IFO-7 培地では、成長速度に顕著な差がないことがわかつている。したがって、今回は作成が安易な IFO-7 培地を用いて実験を行った。

通常の培地と、1/3 培地をそれぞれ作成した。pH の調整は、水酸化ナトリウムと塩酸を用いて pH メーターで行った。培地へ菌糸の植え継ぎを行った後、両方の培地を 28°C に設定したインキュベーターで保管し、55 日間培養を行った。培地の組成は以下の通りである。

【通常培地】シャーレ主成分	
乾燥酵母(エビオス)	0.75g
グルコース	3.00g
寒天	2.70g
蒸留水	Σ150ml

【1/3 培地】シャーレ主成分	
乾燥酵母(エビオス)	0.75g
グルコース	3.00g
寒天	0.9g
蒸留水	Σ150ml



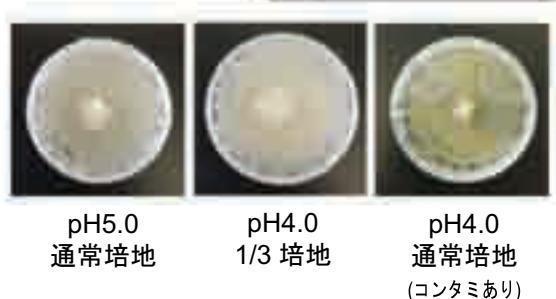
通常培地 寒天量 1/3 培地

3.4 実験結果

培養した菌糸の長径を測定し、菌糸の大きさを比較した。

	pH5.0 通常	pH5.0 1/3	pH4.0 通常	pH4.0 1/3
成長	1.55(差)	2.65	0.65	×
成長	2.25(差)	×	△(差)	△(差)
成長	2.75	△(差)	1.55	1.15
成長	2.00	△(差)	×	×

△：成長しなかった
×：コンタミまで成長しなかった
※：コンタミあり



長径が 2cm を超えた培地が多かったことより、pH4～pH5 の酸性の培地の菌糸が最も成長速度が大きかった。中性の培地は菌糸に変化が見られなかった。このことから、酸性の培地が菌糸の成長速度を向上させるという仮説は正しいことがわかった。しかし、殺菌が不十分だったためかコンタミした培地も多く、菌糸がうまく成長しなかった可能性がある。その影響で、通常培地と 1/3 培地でのマツタケ菌糸の成長速度の比較はできなかった。

5. 今後の課題

今回十分な時間がなく、完全な無菌環境を作ることができなかつたために、コンタミした培地が多くなってしまった。今回の実験では、pH を 4～7 までの 4 種類しか調整していないため、さらに pH を小さくするとどのような結果になるのかを調べたい。また、塩基性域だと成長を妨げるのかについても確かめる必要があると思われる。さらには、1/3 培地における菌糸の成長の特徴を探っていくことが、マツタケの人工栽培を実現するため重要なと考えられる。

6. 謝辞

本研究活動において、松原先生に多大なご指導を受け賜わりました。この場をお借りして、深く感謝申し上げます。

7. 参考文献

- [1] 『微生物の生態 9—糸状細胞』, 学会出版センター, pp.151-59
- [2] 「標準気泡塔によるマツタケ菌糸の液体培養」

<https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https://www.nara-k.ac.jp/nnct-library/publication/pdf/h14kiyo16.pdf&ved=2ahUKEwjCi-aK6ZLkAhUGBKVKHaG4CeMQFjAAegQIAxAB&usg=AOvVaw3MGWcRKYfLpyh0QHMLnvL6>

- [3] 「シイ林におけるバカマツタケの生態」
https://www.jstage.jst.go.jp/article/kinoko/3/3/3_KJ00007317702/_pd

マイマイの非対称性

6年D組 川本 圭午

指導教員 松原 俊二

1. 研究の背景と目的

『右利きのヘビ仮説』(細将貴著) という本を読んで、マイマイ(カタツムリ)には右巻きと左巻きがあり、右巻きの種類が多数派だということを知った。このような個体数の偏りはどのようにして起こるのか、また、なぜ右巻きの方が多数派なのかに興味を持ち、飼育による観察とコンピュータによるシミュレーションを利用して研究することにした。

2. 飼育による観察

まずは、マイマイを捕獲し、飼育しながら観察を行った。飼育にはケージを用い、餌としてニンジンやキュウリを与えた(写真1)。

多くの場合、餌がある時だけ下りてきて、ふつうはケージの天井に貼りついて殻にこもっていた。野生では樹上にいることが知られている。産卵は確認できたが、孵化しなかった。



写真1. マイマイの飼育の様子

3. コンピュータを用いたシミュレーション

Processing(プログラミング言語)を利用して次のようなプログラムを作った。

(1)マイマイを黒の丸、餌の植物を緑の丸であらわす。(直径 15)

(2)最初ランダムな座標にマイマイと植物を 40 体ずつ配置する。

(3)マイマイは半径 30 以内に植物があるとその方向に動く。ない場合はランダムな方向に動く。

(4)マイマイと植物の距離が 10 以内なら植物を食べる。3 回植物を食べるとマイマイを 1 体増やす。

(5)植物は、毎フレームに X % の確率で周りに植物を 1 体増やす。

X の値を変化させて 10 回ずつ実験し、実際のマイマイの増え方を探った。

4. 結果

X の値に関係なく、植物とマイマイの数が安定することはなかった(表1)。

また、爆発的に増加する場合、図2から図3のように、数体のマイマイから数百体に増えることがわかった。

X(%)	マイマイ 絶滅(回)	植物が先 に絶滅 (回)	マイマイ 爆発的に 増加(回)
1.1	10	0	0
1.2	8	2	0
1.3	7	3	0
1.4	7	1	2
1.5	7	1	2
1.6	7	0	3
1.7	5	0	5
1.8	6	1	3
1.9	4	0	6
2	1	0	9
2.1	1	0	9

表1. X とマイマイの増え方の関係

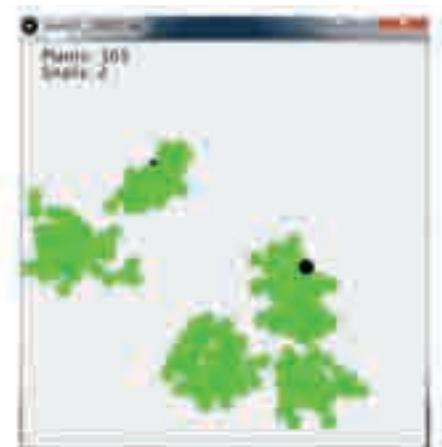


図1. マイマイと植物の分布（序盤）



図2. マイマイと植物の分布（終盤）

5. 考察

観察結果から、片方の巻き方向のマイマイが多い理由について2つの仮説を立てた。

(1) 太陽光を避けるために、常に太陽と反対側の木の幹にいるので移動する際にかかる重力に偏りがあるから。

(2) マイマイが好む植物の葉や枝の伸び方が左右対称ではなく螺旋状などになっているため、登り降りの際に右巻きと左巻きで差が生じるから。

(1)に関して、この仮説が正しいならば、赤道付近は右巻きと左巻きが混在していて、北半球と南半球とでは多数派が逆転するはずであるが、そのような情報は確認できていない。

(2)に関して登るのに有利な場合と下り

るのに有利な場合に立場が逆転するので、どちらの方がより生存に関わるのか調べる必要がある。

また、コンピューター上でのシミュレーションにおいて、数体から数百体に増えることから、最初の数体の偏りがその後の偏りに反映され、現在の偏りが生まれたのではないかと考えられる。

6. 今後の課題

シミュレーションで行った数値設定の根拠が明確ないことと、本来の環境とは異なる条件設定（天敵や他の種がない、単独で繁殖するなど）であったことなどから、実際とは異なるふるまいをしている可能性がある。これらの問題を解決するために、遺伝進化学や統計学の観点から今回の研究を見直し、再度実験する必要がある。

また、マイマイは移動速度が遅く、狭い範囲でも地域差が生じやすいため、巻き方向にかかわらず地域差（殻の形状や模様）なども調査したい。

7. 参考文献

- (1)『右利きのヘビ仮説』(細将貴 東海大学出版部)
- (2)『木登りカタツムリはなぜ木に登る?』(筑波大学, 北海道大学
<https://www.tsukuba.ac.jp/wp-content/uploads/170330saeki-1.pdf>)
- (3)『単一の遺伝子で鏡像の種が進化した』
<https://www.jst.go.jp/pr/info/info4/index.html>

マウス糞便を用いた雌雄判別

6年D組 辻井 韶
指導教員 松原 俊二

1. 背景・目的

DNA型鑑定とは、DNAを検査することで個人を識別するために行う鑑定である。近年では、犯罪捜査や、親子鑑定などに利用されることが増加している。一般的には、だ液・血液などの体液や頭髪などの細胞を用いて鑑定が行われる。動物の糞便からDNAを抽出し、個体識別をする技術は確立されていないが、新たな生物調査方法やペットの糞の後始末をめぐるトラブル解消などへの利用が期待できる。本研究では、糞便からの個体識別を実現するための第一歩として、マウス糞便からDNAを抽出し、雌雄を判別する方法を検証した。

2. 方法

まず、雌雄のマウスからそれぞれ糞便を回収した（写真1）。次に、DNA簡易抽出キット（KANEKA）を使い、マウス糞便からDNA抽出を行った。抽出DNAが入ったチューブにプライマーを添加し、ピペッティングをすることで混ぜ合わせた。各チューブをサーマルサイクラーにセットし、PCR法で性判別に必要なDNA領域のみを増幅させた。

PCR後、チューブを冷やし、染色液を混ぜ合わせた。あらかじめ作成しておいたアガロースゲルのウェルにサンプルを10μLずつアプライし、30分間泳動した。最後に、電気泳動させたゲルをFAST BLAST染色液で1時間染色し、脱色した。



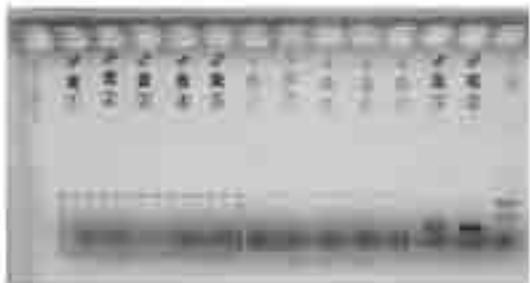
写真1. マウスから糞便を取り出す様子

3. 結果

各実験において、PCR法で増幅したDNAを、アガロースゲル電気泳動により確認した結果は次のようにになった（図1、2）。



図1. マウス尾を用いた雌雄判別結果



音が植物に与える効果の研究

6年D組 室 陽奈子
指導教員 松原 俊二

1. 研究の背景と目的

“モーツアルトの曲を聞かせて育てたイチゴ”を看板に掲げる農家がある。このように音楽を用いて作物を育てる方法を音響栽培と呼ぶ。このような栽培方法を取り入れている農家が存在することから、「音は植物に何らかの効果をもたらす」と考えたことがある人は多いはずだ。しかし、その効果はまだはっきり解明されていない。本研究では、音が植物の成長にどのように影響するのか、実験によって調べることを目的とした。また、最終的には、「植物の成長に最も効果のある音を探す」ことを目指したい。

2. 実験方法

カイワレダイコンを用いて、植物への音響の効果を調べるための実験を行った。まず、25°Cに設定したインキュベーター（暗室）を2つ用意し、片方のインキュベーターにのみパソコンを入れて500Hzの音を出し続けた。その状態で1週間放置し、カイワレダイコンの葉柄と茎の長さを測定して、成長量を評価した。カイワレダイコンを入れるカップの大きさや水の量などを変えて、同様の実験を2回行った（実験1, 2）。

2.1 実験1の方法

透明なプラスチックカップに水を15ml含ませた脱脂綿を入れ、25粒ずつ種を蒔いた。次に、各インキュベーターに4カップずつ設置して実験を行った（写真1）。



写真1. 実験1の様子

2.2 実験2の方法

試験管に、水を4ml含ませた脱脂綿を入れ、2粒ずつ種を蒔いた。次に、各インキュベーターに5本ずつその試験管を設置して実験を行った。

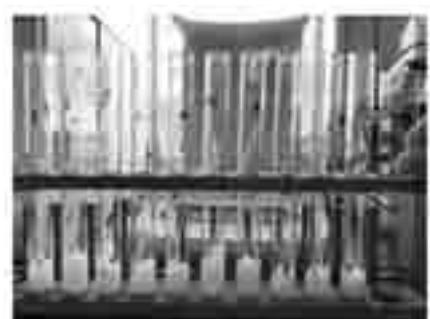


写真2. 実験2の様子

実験1の条件では、種同士の間隔が狭く、根が絡まってしまったため、問題点を解消するために、上記のように試験管を用いることにした。試験管を用いることで、カイワレダイコンがまっすぐに伸び、密集しないようになった。

3. 結果

それぞれの実験結果を図1～3に示した。

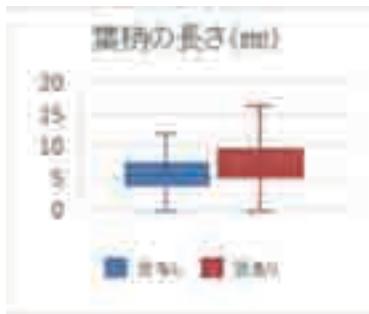


図 1. 音の有無と葉柄の長さの関係

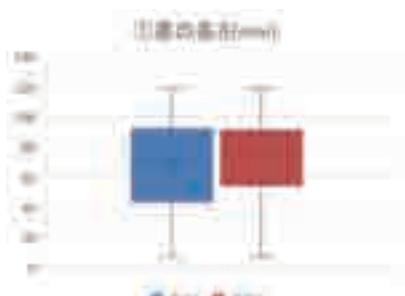


図 2. 音の有無と植物の成長（実験 1）

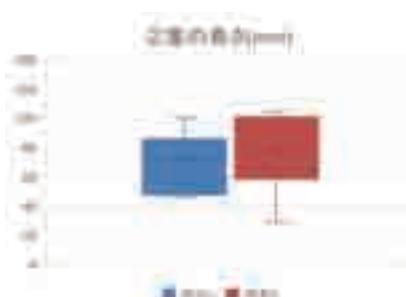


図 3. 音の有無と植物の成長（実験 2）

4. 考察

音は、空気に圧力差が生じ、空気の圧力の高いところと低いところの連続した粗密波として伝わる。その音による振動が刺激となって、植物の成長に何らかの影響を及ぼす可能性は高いと考えられる。

今回の実験では、音を聞かせた方が茎の成長量がわずかに大きいという結果が得られた。今回は暗室で実験を行ったので、光合成は行われず、種に内在していた栄養と水だけで成長している。そのため、茎の伸長にわずかな差異が見られたのは、初めから種に含まれていた養分の差、養分の利用効率の差、水の吸収量の差が考えられる。

音を聞かせた方が成長量が大きくなる仕組みとして、植物が音の振動によって、養分の利用効率が良くなることなどが考えられた。その場合、植物が持つ固有振動数と同じ周波数の音を聞かせることで、植物が共振し、更に大きく振動することにより効果が得られるかもしれない。

5. 今後の課題と展望

本研究では、早く結果を得るためにカイワレダイコンを材料に実験を行い、葉柄や茎の長さの変化を、成長量とみなして音の効果を調べた。今後は、音響栽培に役立てるために、トマトなどで同様の実験を行い、糖度に違いができるのかなどを調べたい。

先ほど考察で述べたように、音の周波数によって効果は違うと思われる所以、他の周波数の音でも同様の実験を行い、最も効果のある音を探すことができればよかったです。

今後この分野の研究が発展し、音響栽培に役立つ事実が発見されることを願う。

6. 参考文献

「植物における音の影響」、佐野日本大学高等学校
佐藤優紀、化学と生物 Vol. 51, No. 3, 2013
https://www.jstage.jst.go.jp/article/kagakutoseibutsu/51/3/51_196/_pdf

微生物燃料電池の開発

4年A組 井関 天羅
指導教員 松原 俊二

1. 要約

私は土壤に棲む微生物を利用した発電について研究している。今回は、オートクレーブ処理を用いて、発電が微生物によるものか調べるための実験を行った。また、ペットボトルとカーボンクロスを用いて自作で微生物燃料電池を作成し、発電量を測定した。その結果、発電は土壤中の微生物によるものだと確認できた。加えて、自作の実験装置を用いることで、実験前後の変化がより詳しく観察できた。

キーワード 微生物、燃料電池、電流発生菌、発電、鉄還元細菌、土壤

2. 研究の背景と目的

土壤中に生息する微生物は、土壤中の有機物を分解することによりエネルギーを得ている。これらの微生物の中には、嫌気状態である時、有機物を分解しエネルギーを得る際に電子を放出させるものもいる。そのため陰極を土壤中に、陽極をその上の水中に沈めることで、両極間を電気が流れ発電させることができる。

本研究では、どのような条件で電流が多く流れるのかを明らかにするために、環境条件を変えて実験を行った。前年度までの実験で、土壤の種類や室温によって結果が変化することが確認できたため、今年度は、発電が土壤中の微生物の働きであるのかを調べた。

また、本研究で発生する電気は、デジタルテスター(PM3)を用いて電圧を測定し、市販の微生物発電装置 Madwatt を用いた実験に関しては、専用のスマートフォンアプリを用いて発電量を測定した。

3. 研究内容

3.1.1 仮説

土壤中に微生物が存在しなければ発電しない。

3.1.2 方法

実験装置として、市販の微生物発電装置 Madwatt を用いた(写真1)。まず、容器に底から1cmの高さまで土を入れ、その上に負極のグラファイトフェルト(厚さ0.5cm)を置き、さらに土を3.5cm入れて正極のグラファイトフェルト(厚さ1.0cm)を置いた(図1)。

その後、35°Cに設定したインキュベーターに保管し、毎日16時頃に測定した。測定は、付属の昇圧ICとコンデンサーによって点滅したLEDを専用のスマートフォンアプリを用いた。土壤には、市販の家庭菜園用の土をオートクレーブにより処理したものと、処理していないものをそれぞれ用了。



写真1. Madwatt装置の外観

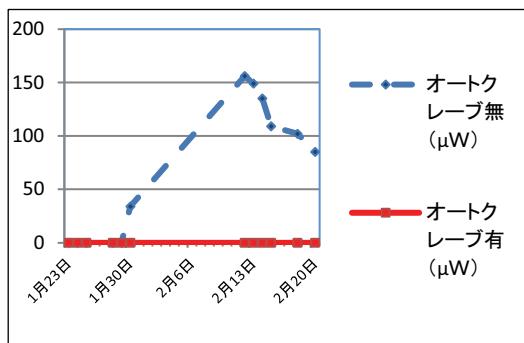


図 1. 微生物燃料電池の構造

3.1.3 結果と考察

実験結果は次の表 1 のようになつた。

表 1. オートクレーブ処理の有無による発電量の比較



オートクレーブ処理をした土壌では発電せず、未処理のものは発電した。このことから土壌中の微生物の活動で発電していることが確認できた。また発電に至るまでは1週間程度かかった。

3.2 自作の微生物燃料電池の作成

3.2.1 方法

まず、500ml のペットボトル容器に 4cm の高さまで土壌を詰め、アノード電極を置き、その上に 3cm 土を入れ泥の表面に切れ込みの入ったサランラップを被せ、カソード電極を水道水とともに入れた。その後、35°C に設定したインキュベーターに保管し、毎日 16 時頃に電圧を測定した。電極は、カ

ーポンクロス (3cm × 3cm) でプラスチック製のネットをはさみ、ニッケル線を巻きつけたものを使用した。また、実験前後の土壌中の栄養分をデジタル EC/C テスター Soil Test で測定し、無機物の含有量を比較した。

3.2.2 結果と考察

発電の結果は、次の表 2 のようになつた。また、栄養分は 10 回測定したもの下の表 3 にまとめた。

表 2. 発電量の変化 (単位 : V)

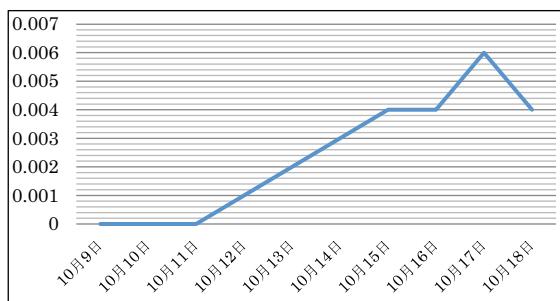


表 3. 平均の栄養分と標準偏差

	平均	標準偏差
実験前	0.636	0.093
実験後	0.728	0.042

実験前に比べて実験後は無機物 (栄養分) の含有量が多かつた。これは、微生物の代謝活動により有機物が分解され無機物に変化したと考えられる。ただ、標準偏差の結果からみて取れるように、必ず実験前の値が実験後を下回るわけではなかつた。また、実験を通じて強い硫黄臭を感じた。

4. 結論

結果から、発電が土壌中の微生物の活動によるものであることが確認できた。また、自作の実験装置を用いても発電量が得られることが確認でき、実験前後の変化が観察できた。無機物の含有量の変化や、硫黄臭

が発生したことから、何らかの嫌気性微生物の代謝活動によって、有機物の分解が促進されたことが考えられる。

感謝の意を表します。

5. 今後の課題と展望

今回の結果より発電が微生物の活動であることが確認できた。これは、嫌気条件下における微生物の有機物の分解と考えられるが、電流発生菌の代謝活動によるものと断言するのは難しい。長期的な実験において無機物の含有量が大幅に増加し、有機物の含有量が減少していることを確認したい。

さらに、分解に伴う有機酸の発生、嫌気性微生物の確認も行いたい。また、現段階ではLEDを点滅させるためには昇圧ICやコンデンサー等が必要な程発電量が少ないため、将来の実用化に向け、電流発生菌の増殖や、有機物の投与など発電効率の向上により、長期発電可能にするための研究を進めていきたい。

6. 参考文献

- 1)水田土壤の微生物を用いた発電の研究,
山形県立鶴岡南高等学校科学生物班
www.kk-tohoku.or.jp
- 2)田んぼ発電、微生物のエネルギーを利用せよ <https://www.nippon.com>
- 3)橋本光エネルギー変換システムプロジェクト
科学技術振興機構
<https://www.jst.go.jp>
- 4)国立大学 56 工学系学部ホームページ、広島大学工学部 微生物が燃料を作る微生物燃料電池！
<https://www.mirai-kougakubu.jp/laboratory/pages/18012.php>

7. 謝辞

最後に、本研究を進めるにあたり、顧問の松原先生をはじめ、研究に関してご指導やアドバイスを頂いた本校の先生方に深く

粘菌の糖に対する反応と行動選択について

3年B組 大城 彩奈

2年A組 大竹 凜央

指導教員 松原 俊二

1. 要約

粘菌とは「変形体」と呼ばれる状態の時にスライム状の体で、オートミール(餌)を周りに撒いておくと体を広げたり伸ばしたりして最短距離でエサまで移動するという生き物である。粘菌には化学走性があり、エサとなる物質に正の走性を、光などの忌避物質には負の走性を示すことが知られている。私たちはその性質に興味を持ち、今回は糖に対する化学走性に関する実験及び粘菌に迷路を解かせる実験を行った

キーワード 動物、行動、真性粘菌、変形体、イタモジホコリ、迷路、化学走性、糖

2. 変形菌とは

粘菌とは、アメーバゾア門コノーサ網変形菌亜綱に属する単細胞生物で、真性粘菌と細胞性粘菌の2種類がある。一般的に暗くてじめじめしたところを好み、森や藪、花壇などに生息している。そして、環境に合わせて、胞子、細胞、変形体、子実体と様々な形態になる(図1)。

粘菌は自由自在にからだを伸ばしたり、縮めたりできる。また好き嫌いがあり、オートミールなどの好物には近づき、光などの嫌いなものは遠ざかる。これは、前者は正の走性、後者は負の走性を示しているからだと言われている。走性はある特定の物質に寄っていったり(正の走性)、避けたり(負の走性)する性質のことである。オートミールは別名えん麦とも言い、シリアルなどに入れて食べる穀物であり、粘菌のエサになる。

また、粘菌には、正の走性を示す物質には最短ルートで向かっていくという興味深

い特徴がある。

さらに、粘菌にはタマゴルリホコリやシロウツボホコリなどの様々な種類がある。本研究で使用したのは真性粘菌イタモジホコリ(学名 *Physarum rigidum*)の変形体である(図2)。以下、「イタモジホコリの変形体」を「粘菌」と表記する。

3. 研究内容

3. 1 研究の背景と目的

私たちは粘菌の生態に興味を持ち研究を開始した。先行研究から、粘菌は糖に対して正の走性を示すことがわかっている。「糖に対する走性を示す際に、濃度が粘菌の行動にどのような影響を及ぼすのだろうか?」と疑問を抱き、実験によって明らかにしようとしました。また、先行研究より粘菌は「行動の選択」を行うことが示されている。そこから、粘菌は難しい選択を強いられた時、どのような判断をし、どのような行動を選択するのかに興味をもち、次のような実験

を行うことにした。

3. 2 粘菌の糖に対する反応について

3.2.1 仮説

粘菌は糖に対して糖液の濃度に関わらず正の走性を示す。

3.2.2 実験方法

まず、0.02%、0.1%、1%の濃度の砂糖水を用意した。次に、ろ紙にキッチンペーパーや粘菌を置く位置を記入した（図3）。記入した印の位置に、砂糖水をしみこませたキッチンペーパーや粘菌を配置し、21℃の恒温室に3日間放置し、1時間ごとにカメラで定点撮影して粘菌の動きをとらえた。

3.2.3 判定方法

糖に粘菌が密集し完全に集まるまでにかかった時間を「到達にかかる時間」とし、各濃度における到達時間を比較した。

3.2.4 実験結果

砂糖水の濃度と到達にかかる時間の関係は（表1）のようになった。0.02%、0.1%、1%の濃度の砂糖水に反応し、近づくまでの時間はほとんど変わらなかった。よって、濃度の違いによって反応の差異はなかった。

3. 3 粘菌の行動選択について

3.3.1 仮説

粘菌は、自らにとって生存確率が高く、餌を得られる道を選択し通る

3.3.2 実験方法

まず、ろ紙に寒天培地のくり抜く部分を描き、ろ紙の上に寒天培地を重ねて置いて、寒天培地からその部分をくり抜いた（図4）。完全にくり抜いたものを2枚、粘菌が通れる橋を残したものを作った。

次に、くり抜いた部分に蒸留水を張り、

真ん中に粘菌、外側にオートミールを置いた。（橋のあるものには、橋の反対側にオートミールを置いた。）

橋の有無と、餌の有無の条件を組み合わせて、①餌あり橋あり、②餌あり橋なし、③餌なし橋あり、④餌なし橋なし、の4つの条件を作り出した。（※）

その後、培地上に粘菌を配置し、恒温室に3日間放置して、1時間に1度カメラで定点撮影を行った。この実験を2回繰り返した。

（※）粘菌は一般的に最短ルートでエサに近づく。そしてエサを摂取しなければ粘菌は死ぬ。しかし粘菌は水に完全に漬かった状態で数時間経過すると死ぬ為、この実験中に粘菌はエサの摂取、水没する危険、エサへの最短経路などを考慮し、行動を選択する（=最適なルートを通る）必要があると考えている。

3.3.3 判定方法

粘菌が橋やエサの有無の条件によって、異なる選択（異なるルートを通った）をした場合、その差異を比較する。このように、粘菌は難しい選択を強いられた時、どのような判断をし、どのような行動を選択するのかを考察する。

3.3.4 実験結果

図5に示すように、粘菌は橋と餌の条件の違いによって異なるルートを選択した。

条件①（エサも橋もある）に置かれた粘菌は、水の中を通らず橋を通り、エサに到達した。一方、条件②（エサはあるが橋がない）に置かれた粘菌は、内側の寒天の隅を少し通って水の中を通るか迷うシグナルを示した。その後、水の中を通ってエサに到達した。

条件③（エサはないが橋はある）に置かれた粘菌は、内側の寒天の隅をなぞるように通りエサを探すシグナルを示した後、橋を通り、えさを探し続けた。条件④（エサも橋もない）に置かれた粘菌は、条件③の結果と同様に内側の寒天の隅をなぞるように通りエサを探すシグナルを示した。その後、粘菌は水の中を通ったが、しばらくすると死んでしまった。

4. 考察

糖の実験(実験 3.2)より、0.02%、0.1%、1%のどの濃度の砂糖水を用いても、粘菌が近づくまでの時間はほとんど差がないことがわかった。したがって、今回の条件では、粘菌はどの濃度であっても糖に反応する速度は変わらないといえる。

また行動選択の実験(実験 3.3)では、橋のないものは餌までの最短ルート（水の中）を通って餌まで辿りついた。それに対して橋のあるものは、橋を渡って餌までたどり着いた。この結果より、粘菌は自らにとつて一番生存確率の高いルートを進むのではないかと考えられた。それに加えて、粘菌は餌の探知、到達にもっとも強い行動を示したり、水の中を通る選択に迷うシグナルを示したことから「餌の摂取>安全性>最短経路」という行動判断の優先順位があると考えられた。

5. 今後の課題と展望

5.1 今後の課題

実験の再現性を高めるために、今回と同様の実験を、以下の改善点を加えて再度行うことが必要である。

(1) 粘菌を多く殖やして、実験回数を重ね、

より多くのデータを収集する。

- (2) 糖の濃度は水の蒸発によって変わってしまうため、質量パーセント濃度以外での糖に対する反応の評価を行う。
- (3) 行動選択の優先順位を決定する指標を増やし、再度実験を行う。

5.2 今後の展望

粘菌の生態を解明するため、今後は、どこまで濃度を低くしても、粘菌が糖に反応できるか研究し、その定量化を行いたい。また、粘菌の行動選択において優先順位を決定する指標を増やし、再度実験したい。

6. 参考文献

- [1] 「粘菌変形体の化学走性を利用した高校生物実験の開発」高橋和成
- [2] 「粘菌はいかにして餌を見つけるか」内田瀬奈
- [3] 粘菌 その驚くべき知性 中垣俊之
- [4] 真性粘菌モジホコリカビの光走性に関する研究 岡山県立津山高等学校
http://www.tuyama.okayama-c.ed.jp/2016/blog/0517_poster.pdf

7. 謝辞

この研究を進めるにあたり、顧問の松原先生、松本純子さん、西口慧多郎さんを始め様々な方にご協力やアドバイスを頂きました。この場を借りて深く感謝申し上げます。

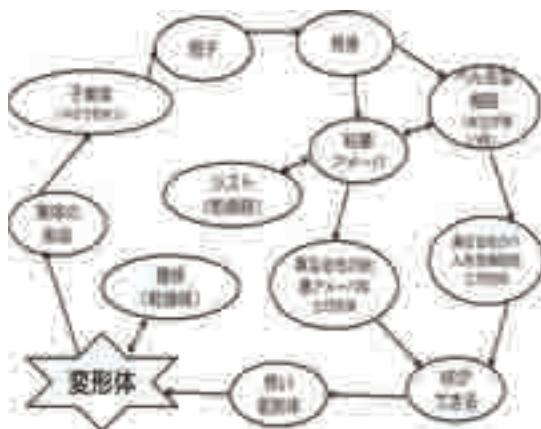


図 1. 粘菌の一生



図 2. イタモジホコリの変形体

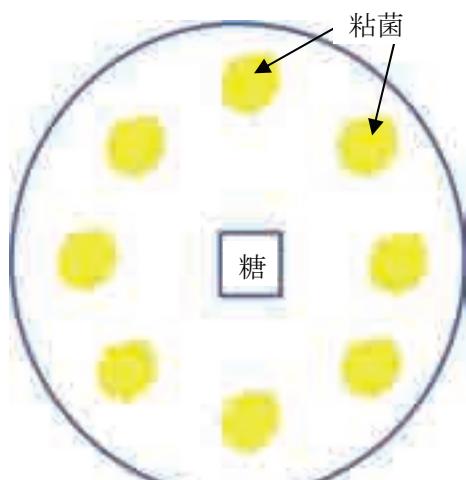


図 3. 実験 3.2 の粘菌の配置

表 1. グルコース溶液の濃度と到達にかかる時間の関係(単位:時間)

砂糖水の濃度(%)	1回目(時間)	2回目(時間)	平均(時間)
0.02	54	52	53
0.1	52	63	57.5
1	52	49	50.5

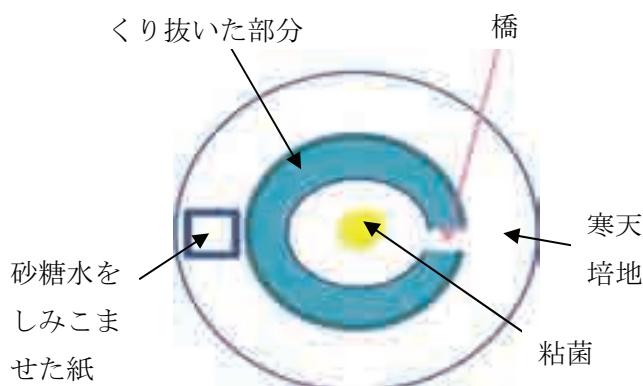


図 4. 実験 3.3 での粘菌の配置



図 5. 実験 3.3 の結果写真
(赤線は通ったルートを示す)

S S H ベトナム生物研修参加報告

4年C組 佐藤 葵

(参加メンバー：4年 井関天羅、小野澤詩音、佐藤葵、初田葵)

1. 要約

2019年11月11日(月)～15日(金)にかけてベトナムを訪問し、ベトナム国家大学ハノイ校自然科学大学附属英才高校(HSGS)との交流プログラムを通してHSGSの生徒とともに、生物実験や野外調査を行ってきた。5日間の研修において学んだ内容について報告する。

キーワード ベトナム 薄層クロマトグラフィー クロロフィル 食物連鎖 水質調査

2. 講義内容

—2日目—

《実験1：葉（シソなど）の成分の分析》

緑色、紫色、黄色の3種類の葉を用意し、それらをそれぞれエタノールとともに乳鉢ですりつぶし、すりつぶしたものろ紙で濾して葉の成分を抽出した。その後、抽出液を薄層クロマトグラフィーを用いて成分（クロロフィルやカロテンなど）に分離させた。



写真1：分離させた葉の成分

《結果と考察》

葉の色によって、含まれているカロテンやクロロフィルの量に差があった。このことから、葉の色が違って見えるのは葉の中にある成分の配合量が異なっているからではないかと考えた。

《実験2：クロロフィルの不思議》

試験管に以下の表のA～Dを用意し、以下の表に示した条件で比較を行い、どのような色の変化があらわれるのかを調査した。

表1：実験2の条件

A. 実験1の抽出液 + ビタミンC + メチルレッド + 光
B. 実験1の抽出液 + ビタミンC + メチルレッド + 光無し
C. エタノール + ビタミンC + メチルレッド + 光
D. 実験1の抽出液 + 銅の粉末 + ビタミンC + メチルレッド + 光

《結果》



写真2：実験後の試験管

- (A) 暗い色（赤と緑の混色）から鮮やかな緑色に変化した。
- (B) 暗い色（赤と緑の混色）から変化しなかった。
- (C) 明るい赤色から変化しなかった。
- (D) 赤紫色（ワイン色）から変化しなかつた。

《考察》

- (A) 光を当てたことで、葉の成分であるクロロフィルが活性化し、ビタミン C が出した電子を受け取り手のメチルレッドまで運ぶことができる。メチルレッドは電子を受け取ると透明になるため、緑色と赤色が混じった暗い色から、赤色が抜け鮮やかな緑色になったと考えられる。
- (B) 光を当てなかったため、A のような電子のやり取りが起こらず、色の変化が生じなかつた。
- (C) そもそもクロロフィルが入っていないなかつたため、電子の受け渡しが起こらなかつた。
- (D) クロロフィルは中心が Mg で構成されているが、銅が入ったことによって Mg が Fe に置き換わつた。そのため、クロロフィルが別の物質に変化してその働きを失つたため、光を当てても色の変化が起きなかつた。

—3日目—

《National park にてフィールドワーク》



写真 3 : National park の森の様子

森での植物間の相互関係（共生や寄生など）や食物連鎖の種類、植物と動物の関係（擬態など）について実際に森を歩きながら学んだ。高温多湿の環境でたくましく生きる姿がたくさん見られた。

《実験 3 : 水質調査》

森の中の沢と森から少し離れた池の水を表面から採取する。それぞれの水に栄養となり多すぎるとアオコ等の原因になる NO_3^- （硝酸イオン）と PO_4^{3-} （リン酸塩）がどのくらい含まれているかを調べるために、試薬を用いて、含有量を調査した。

《結果》



写真 4: 水質調査の結果(どちらも左が沢、右が池)

	NO_3^- (mg/L)	PO_4^{3-} (mg/L)
沢	10	1.5
池	0	0.5

《考察》

色から含量を判断しているため、多少の誤差があると考えられるが、沢の方が池よりも NO_3^- 、 PO_4^{3-} ともに多く含まれていた。その理由として、森では窒素循環や餌などの分解が活発に行われているため、池よりも沢の方が、より多くの栄養分が水に溶け込むことが考えられる。

3. 感想

英語でコミュニケーションや授業を受けたため、理解をするのが難しいことも多かつたが、日本では見られない自然や、日本とは異なるアプローチ方法の実験など、普段とは異なる体験ができるとても新鮮だった。ベトナムで学んだことを活かし、自分の研究を深めていきたい。

2019年度
スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会 研究論文集

2020年(令和2年) 3月1日 発行

国立大学法人 奈良女子大学附属中等教育学校
〒630-8305 奈良市東紀寺町一丁目60番1号
TEL. 0742-26-2571
FAX 0742-20-3660
<http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/>