折り紙における無理数の折り方

5年C組　坂本 悠
指導教員　石賀 勇樹

１. 概要

折り紙を用いて円周率を折る方法について２通り述べていく。

２. 研究目的

以前の研究で$\sqrt{2}$～$\sqrt{8}$を折り紙で折る研究を行っており，他の無理数も折ることが可能なのではないかと考え、円周率πを折ろうと考えた。

３. 研究内容

折り紙上で円周率の長さを表すために，円周率を式で表し，nの式で表し，円周率の近似値を求める。

また，式の導出には，直径１の円に内接する正多角形の周の長さを用いた方法と，同様の円に対して外接する正多角形の周の長さを用いた方法の二つを使用した。

３-１. 円に内接している正多角形の周の長さを用いた場合の式の導出

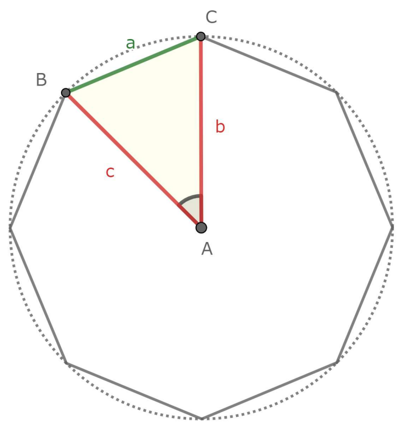


図１

定理１

直径１の円において，その円に内接する正n角形の周の長さをLとすると，

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{n})}$$

が成立する。

定理１の証明）

図１の△ABCに余弦定理を用いると，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{2\pi}{n}$$

$$b = \frac{1}{2},\ \ c = \frac{1}{2}$$

より

$$a^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{n})$$

$a > 0$より

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{n})}$$

よって

$$L = n\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{n})}$$

$N=\frac{2\pi}{n}$とすると，三角関数の極限の公式

$\lim_{n\to 0}\frac{\sin}{n}=1$ より，

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\frac{(1-\cos\frac{2\pi}{n})}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\frac{(1-\cos\frac{2\pi}{n})}{2}\cdot\frac{(1+\cos\frac{2\pi}{n})}{(1+\cos\frac{2\pi}{n})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\frac{(1^2-\cos^2\frac{2\pi}{n})}{2(1+\cos\frac{2\pi}{n})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\frac{\sin^2\frac{2\pi}{n}}{2(1+\cos\frac{2\pi}{n})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{2(1+\cos\frac{2\pi}{n})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{2+2\cos\frac{2\pi}{n}}}$$

$$=\lim_{N\to 0}\frac{\pi}{2N}\cdot\sin N\sqrt{\frac{1}{2+2\cos N}}$$

$$=\lim_{N\to 0}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin N}{N}\sqrt{\frac{1}{2+2\cos N}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\pi$$

以上より，

$$\pi=\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{n})}$$

が成り立つ。 ■

３－２．円に外接している正多角形の周の長さを用いた場合の式の導出

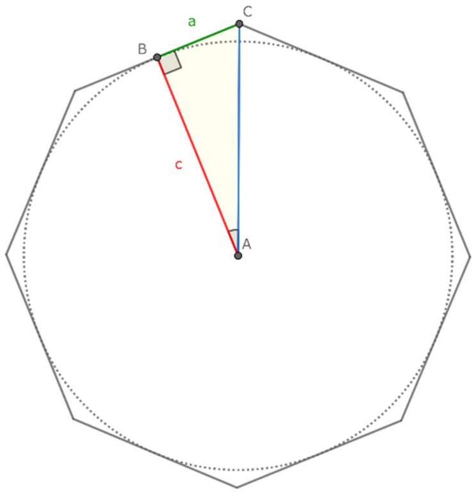


図２

定理２

直径１の円において，その円に外接する正n角形の周の長さをLとすると，

$$\pi=\lim_{n\to\infty} n\cdot\tan\frac{\pi}{n}$$

が成立する。

定理２の証明）

図２の△ABC について，

$$a=\frac{1}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{n}$$

$$L=n\cdot 2\left(\frac{1}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{n}\right)$$

$$L=n\cdot\tan\frac{\pi}{n}$$

$N=\frac{\pi}{n}$とすると，三角関数の極限の公式

$\lim_{n\to 0}\frac{\tan n}{n}=1$より

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\tan\frac{\pi}{n}$$

$$\lim_{N\to 0}\frac{\pi}{N}\cdot\tan N$$

$$=\lim_{N\to 0}\pi\cdot\frac{\tan N}{N}$$

$$=\pi$$

以上より，

$$\pi=\lim_{n\to\infty} n\cdot\tan\frac{\pi}{n}$$

が成立する。■

３‐３．折り紙でのそれぞれの式の表し方

前述にて導出した式を折り紙で表す。

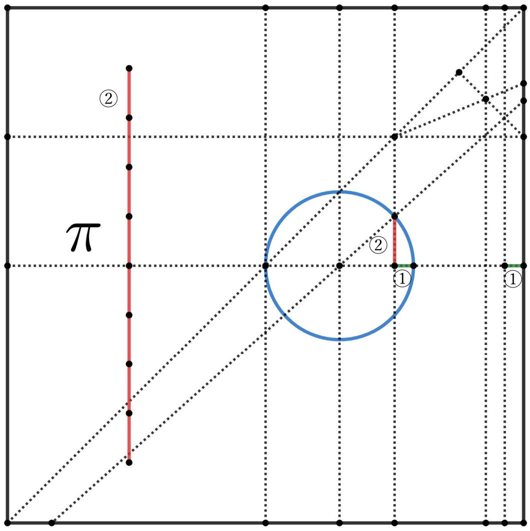
その際での折る上の条件は以下の４つとする

- A)　N に 2^n を代入する
- B)　折り紙公理で示されている操作である
- C)　コンパス，分度器等の道具を使用しない
- D)　折り紙の一辺を４とする

A の条件においてN に代入する値として2^nに限定するのは，どちらの式においても角度をN等分することになり，その際折り紙を用いた角の2^nは操作が行いやすいためである。

３－１にて導出した式の折り図

（$N=2^3=8$）



①の線分の長さは

$$\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{N})$$

のため、②の線分の長さは

方べきの定理を用いると

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{N}\right)}$$

②の線分をN倍したものが

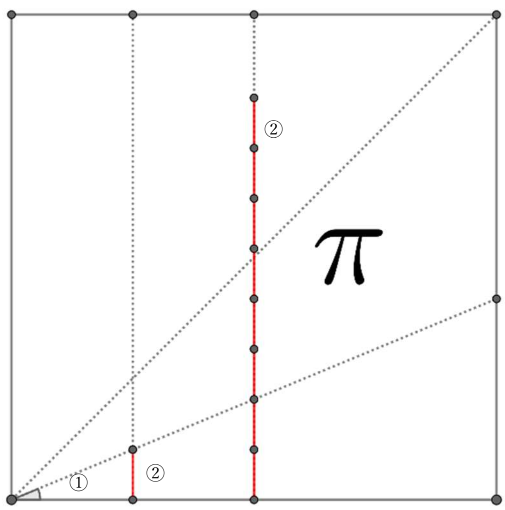
$$N\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{N}\right)}$$

となる。

この時Nの値を大きくしていくほどπに近づく。

３－２にて導出した式の折り図

（$N = 2^3 = 8$）



①の角度の大きさは

$$\frac{\pi}{N}$$

のため

②の線分の長さは

$$\tan\frac{\pi}{N}$$

②の線分をN倍したものが

$$N\tan\frac{\pi}{N}$$

となる。

この時Nの値を大きくしていくほどπに近づく。

４. 考察

今回は円周率の近似値を折ることが出来た。しかし，$\sqrt{2}$～$\sqrt{8}$のように正確な値を折ることはできなかった。これについては、πが超越数であることが関係していると考えられる。

５. 今後の展望

今後は他の無理数（ネイピア数，対数等）の折り方を考えていきたい。

また、超越数とそれ以外の数について折り紙で折ることにより生じる違いを考えていきたい。

６. 参考文献

西村　保三(2014).「コンパスと折り紙による作図公理 」.『福井大学教育地域科学部紀要 』. 4.67-79