n次元における中線定理

6年D組　井上　友裕
指導教員　川口　慎二

１．概要

余弦定理の対象をn次元図形に拡張した定理を用いることにより、中線定理をn次元図形へと一般化した。また、n次元中線を定義して、n次元図形の重心の関係を明らかにした。

２．研究の背景と先行研究

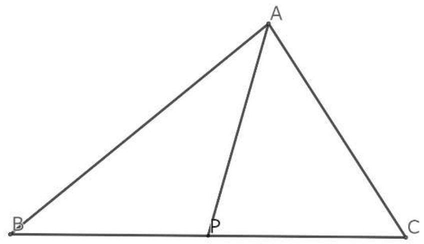
２－１．研究の背景

三平方の定理の応用として、次の中線定理はよく知られている。

中線定理

△ABC と辺 BC の中点 P について次のような式が成り立つ。

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2=2\left(\mathrm{BP}^2+\mathrm{AP}^2\right)$$



中線定理は三平方の定理だけでなく余弦定理を用いても証明できる。

余弦定理

△ABC において、

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-2\mathrm{BC}\times\mathrm{CA}\cos\angle\mathrm{ACB}$$

が成り立つ。

２－２．先行研究

三平方の定理を 3 次元に拡張した「四平方の定理」が存在する。

四平方の定理（デカルト・グアの定理）
（[1]）

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90°$ である三角錐 OABC においては、

$$|\mathrm{ABC}|^2=|\mathrm{OAB}|^2+|\mathrm{OBC}|^2+|\mathrm{OCA}|^2$$

が成り立つ。

先行研究[2]は余弦定理を 3 次元に拡張したものとして次の主張を掲載している。

主張（[2]）

四面体 ABCD において、
平面 ABC と平面 ACD のなす角をθ_{12},
平面 ACD と平面 ABD のなす角をθ_{23},
平面 ABC と平面 ABD のなす角をθ_{13},
平面 ABC と平面 BCD のなす角をθ_{14},
平面 ACD と平面 BCD のなす角をθ_{24},
平面 ABD と平面 BCD のなす角をθ_{34},
とすると、

$$\begin{aligned}|\mathrm{BCD}|^2 = |\mathrm{ABC}|^2 + |\mathrm{ACD}|^2 + |\mathrm{ABD}|^2 \\ -2|\mathrm{ABC}|\times|\mathrm{ACD}|\cos\theta_{12} \\ -2|\mathrm{ACD}|\times|\mathrm{ABD}|\cos\theta_{23} \\ -2|\mathrm{ABC}|\times|\mathrm{ABD}|\cos\theta_{31}\end{aligned}$$

が成り立つ。

先行研究[2]において、主張に誤りがあることに気付いた。実際に、平面と平面のなす角は必ず 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下であるから、四面体 ABCD において点 A から平面 BCD におろした垂線の足が三角形 BCD の外部にあるとき、主張は成り立たない。

そこで面と面のなす角を四面体の内部で測ることにより、主張を修正した。

<u>定義 1</u>（面と面が立体の内部でなす角）

四面体 $P_1P_2P_3P_4$ において点 P_1 から辺 P_3P_4 におろした垂線の足を H_1，点 P_2 から辺 P_3P_4 におろした垂線の足を H_2 とおくとき、$\overrightarrow{P_1H_1}$ と $\overrightarrow{P_2H_2}$ のなす角を面 $P_1P_3P_4$ と面 $P_2P_3P_4$ が立体の内部でなす角という。

<u>定理 1</u>（主張の修正）

四面体 ABCD において
面 ABC と面 ACD が内部でなす角を θ_{12}，
面 ACD と面 ABD が内部でなす角を θ_{23}，
面 ABC と面 ABD が内部でなす角を θ_{13}，
面 ABC と面 BCD が内部でなす角を θ_{14}，
面 ACD と面 BCD が内部でなす角を θ_{24}，
面 ABD と面 BCD が内部でなす角を θ_{34}，
とすると

$$\begin{aligned}|\mathrm{BCD}|^2 = |\mathrm{ABC}|^2 + |\mathrm{ACD}|^2 + |\mathrm{ABD}|^2 \\ -2|\mathrm{ABC}|\times|\mathrm{ACD}|\cos\theta_{12} \\ -2|\mathrm{ACD}|\times|\mathrm{ABD}|\cos\theta_{23} \\ -2|\mathrm{ABC}|\times|\mathrm{ABD}|\cos\theta_{31}\end{aligned}$$

が成り立つ。

（証明）

まず、一般的に

$$\begin{aligned}|\mathrm{BCD}| = |\mathrm{ABC}|\cos\theta_{14} + |\mathrm{ACD}|\cos\theta_{24} \\ + |\mathrm{ABD}|\cos\theta_{34}\end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、

$$\begin{aligned}|\mathrm{BCD}|^2 = |\mathrm{ABC}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{14} \\ + |\mathrm{ACD}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{24} \\ + |\mathrm{ABD}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{34} \quad \cdots①\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}|\mathrm{ABC}|^2 = |\mathrm{ABC}||\mathrm{ACD}|\cos\theta_{12} \\ + |\mathrm{ABC}||\mathrm{ABD}|\cos\theta_{13} \\ + |\mathrm{ABC}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{14},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{ACD}|^2 = |\mathrm{ABC}||\mathrm{ACD}|\cos\theta_{12} \\ + |\mathrm{ACD}||\mathrm{ABD}|\cos\theta_{23} \\ + |\mathrm{ACD}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{24},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{ABD}|^2 = |\mathrm{ABC}||\mathrm{ABD}|\cos\theta_{13} \\ + |\mathrm{ACD}||\mathrm{ABD}|\cos\theta_{23} \\ + |\mathrm{ABD}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{34}\end{aligned}$$

が成り立つ。

式を変形すると、それぞれ

$$|\mathrm{ABC}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{14}$$
$$=|\mathrm{ABC}|^2$$
$$-|\mathrm{ABC}||\mathrm{ACD}|\cos\theta_{12}$$
$$-|\mathrm{ABC}||\mathrm{ABD}|\cos\theta_{13} \cdots ②$$

$$|\mathrm{ACD}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{24}$$
$$=|\mathrm{ACD}|^2$$
$$-|\mathrm{ABC}||\mathrm{ACD}|\cos\theta_{12}$$
$$-|\mathrm{ACD}||\mathrm{ABD}|\cos\theta_{23} \cdots ③$$

$$|\mathrm{ABD}||\mathrm{BCD}|\cos\theta_{34}$$
$$=|\mathrm{ABD}|^2$$
$$-|\mathrm{ABC}||\mathrm{ABD}|\cos\theta_{13}$$
$$-|\mathrm{ACD}||\mathrm{ABD}|\cos\theta_{23} \cdots ④$$

ここで、②，③，④を①に代入すると、

$$|BCD|^2=|ABC|^2+|ACD|^2+|ABD|^2$$
$$-2|ABC|\cdot|ACD|\cos\theta_{12}$$
$$-2|ACD|\cdot|ABD|\cos\theta_{23}$$
$$-2|ABC|\cdot|ABD|\cos\theta_{31}$$

を得る。　(Q.E.D.)

四平方の定理は定理 1 の特別な場合である。また、定理 1 は余弦定理を三次元に拡張した定理といえる。そこで、本論文では「余弦定理」を n 次元に拡張することにより、「中線定理」を n 次元に拡張することを目指す。

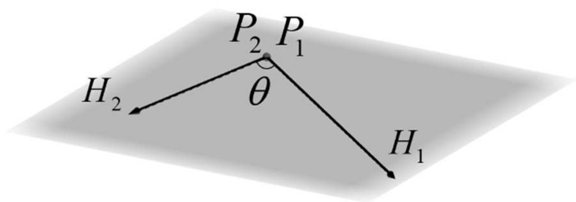
３．研究内容

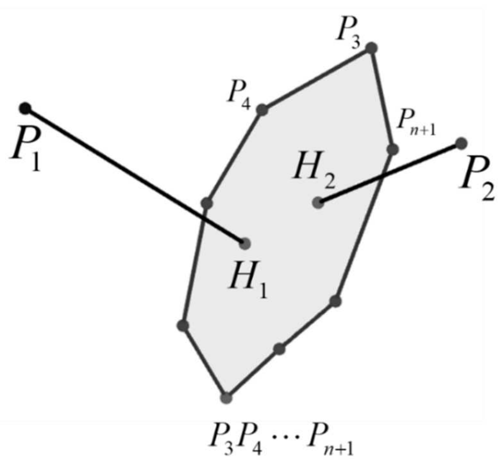
ここでは、「n 次元図形」は n 次元空間で $(n+1)$ 個の点を線分で結んだ図形であり、各頂点の位置ベクトルは一次独立であるものを指す。

定義 2（n 次元図形の内部でなす角）

点 P_1, P_2 から $(n-2)$ 次元図形 $P_3P_4\cdots P_{n+1}$ へ下した垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とするとき $\overrightarrow{P_1H_1}$ と $\overrightarrow{P_2H_2}$ がなす角 θ を $(n-1)$ 次元図形 $P_1P_3P_4\cdots P_{n+1}$ と $(n-1)$ 次元図形 $P_2P_3\cdots P_{n+1}$ が n 次元図形 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$ の内部でなす角という。

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{P_1H_1}\cdot\overrightarrow{P_2H_2}}{|\overrightarrow{P_1H_1}||\overrightarrow{P_2H_2}|}$$

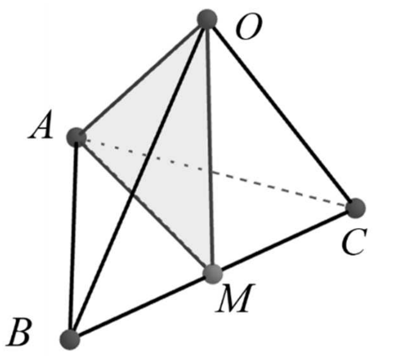




定義 3（n 次元中線）

n 次元図形のある 2 つの頂点の組に対し、その 2 本を結んだ線分の中点と、残り $(n-1)$ 個の頂点を含む面を、n 次元中線という。

下図の場合、辺 BC の定める 3 次元中線（中面）は面 OAM である。



<u>定義 4</u>（符号付き n 次元体積）

$\mathrm{U_n}$ を点 $\mathrm{P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}}$ によって一意に定められる n 次元空間、$\mathrm{W_k}$ を点 $\mathrm{P_k}$ 以外のすべての点によって一意に定められる $(n-1)$ 次元空間、$\mathrm{D_k}$ を $\mathrm{U_n}$ が $\mathrm{W_k}$ により分割されて生ずる 2 つの領域のうち点 $\mathrm{P_k}$ を含むものとする。

$\mathrm{U_n}$ 上の任意の図形 F について、$\mathrm{D_k}$ に含まれる部分の n 次元体積を正，$\mathrm{D_k}$ に含まれない部分の n 次元体積を負と定める。これを F の点 $\mathrm{P_k}$ に関する符号付き n 次元体積という。

<u>定理 2</u>

V_n を n 次元図形 $\mathrm{P_1P_2\cdots P_{n+1}}$ の n 次元体積、$\mathrm{sgnVQ_k}$ を $\mathrm{U_n}$ 内の n 次元図形 $\mathrm{QP_1P_2\cdots P_{k-1}P_{k+1}\cdots P_{n+1}}$ の点 $\mathrm{P_k}$ に関する符号付き n 次元体積とすると、

$$V_n = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{sgn\,VQ_k} \quad \cdots(*)$$

が成り立つ。

（証明）

$n=1$ のときは明らかである。

$n \geq 2$ のとき、ベクトル方程式

$$\sum_{t=1}^{n+1} a_t \overrightarrow{\mathrm{QP}_t} = 0 \ \cdots ① \quad (a_t \in \mathbb{R})$$

を考える。

$$① \Leftrightarrow -a_s \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{Q}} + \sum_{t=1, t\neq s}^{n+1} a_t \left(\overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t} - \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{Q}} \right) = 0$$

$$\left(s \in \mathbb{N}, 1 \leq s \leq n+1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t-1}^{n+1} a_t \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{Q}} = \sum_{t=1, t\neq s}^{n+1} a_t \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{Q}} = \frac{\sum_{t=1, t\neq s}^{n+1} a_t}{\sum_{t=1}^{n+1} a_t} \cdot \frac{\sum_{t=1, t\neq s}^{n+1} a_t \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t}}{\sum_{t=1, t\neq s}^{n+1} a_t}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{Q}} = \frac{\sum_{t=1, t\neq s}^{n+1} a_t}{\sum_{t=1}^{n+1} a_t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{R}}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{R}} = \frac{\sum_{t=1, t\neq s}^{n+1} a_t \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t}}{\sum_{t=1, t\neq s}^{n+1} a_t} \right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \frac{a_s}{\sum_{t=1}^{n+1} a_t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_s\mathrm{R}}$$

$n=1$ のときも(*)が成り立つので、

$$① \Leftrightarrow \mathrm{sgn\,VQ}_s = \frac{a_s}{\sum_{t=1}^{n+1} a_t} \cdot V_n$$

ゆえに、$\displaystyle \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{sgn\,VQ}_k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{\sum_{t=1}^{n+1} a_t} \cdot V_n = V_n$.

よって、題意は示された。　(Q.E.D.)

定理 2 を用いて、次の定理 3 を導くことができる。

定理 3

Hをn次元図形 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$ において点 P_k から C_k へ下した垂線の足、C_k を点 P_k 以外のすべての点を頂点とする $(n-1)$ 次元図形、S_k を C_k の $(n-1)$ 次元体積として、$\theta(l,m)$ を C_l と C_m がn次元図形の内部でなす角とすると、

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{H}}=\sum_{t=1,t\neq k}^{n+1}\frac{S_t}{S_k}\cos\theta(k,t)\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_t}$$

が成り立つ。

（証明）

定理 2 より、

$$\sum_{t=1,t\neq k}^{n+1}\operatorname{sgn}\mathrm{VH}_t\overrightarrow{\mathrm{HP}_t}=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{t=1,t\neq k}^{n+1}\operatorname{sgn}\mathrm{VH}_t\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_t}=\sum_{t=1,t\neq k}^{n+1}\operatorname{sgn}\mathrm{VH}_t\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{H}}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{t=1,t\neq k}^{n+1}\operatorname{sgn}\mathrm{VH}_t\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_t}=S_k\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{H}}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{H}}=\sum_{t=1,t\neq k}^{n+1}\frac{\operatorname{sgn}\mathrm{VH}_t}{S_k}\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_t}$$

$$=\sum_{t=1,t\neq k}^{n+1}\frac{S_t}{S_k}\cos\theta(k,t)\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_t}$$

となる。 (Q.E.D.)

また，定理 2 から直ちに次の定理が導出できる。

定理 4

$$S_t=\sum_{k=1,k\neq t}^{n+1}S_k\cos\theta(t,k)$$

$$\left(t\in\mathbb{N},\ 1\le t\le n+1\right)$$

定理 5（n次元余弦定理）

n次元図形 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$ において、C_k を点 P_k 以外のすべての点を頂点とする $(n-1)$ 次元図形、S_k を C_k の $(n-1)$ 次元体積、$\theta(l,m)$ を C_l と C_m がn次元図形の内部でなす角とすると、

$$2S_k^2=\sum_{t=1}^{n+1}S_t^2-2\sum_{\substack{l<m\\ l\neq k\\ m\neq k}}S_lS_m\cos\theta(l,m)$$

が成り立つ。

（証明）

正射影を用いると、

$$S_k=\sum_{\substack{1\le l\le n+1\\ l\neq k}}S_l\cos\theta(l,k)\cdots①$$

が成り立つ。両辺に S_k をかけると

$$S_k^2=\sum_{\substack{1\le l\le n+1\\ l\neq k}}S_kS_l\cos\theta(l,k)\cdots②$$

①と同様に考えると、

$$S_kS_l\cos\theta(k,l)$$
$$=S_l^2-\sum_{\substack{1\le m\le n+1\\ m\neq k,m\neq l}}S_lS_m\cos\theta(l,m)$$

②に代入して、

$$S_k^2=\sum_{\substack{1\le l\le n+1\\ l\neq k}}\left\{S_l^2-\sum_{\substack{1\le m\le n+1\\ m\neq k,m\neq l}}S_lS_m\cos\theta(l,m)\right\}$$
$$=\sum_{\substack{1\le l\le n+1\\ l\neq k}}S_l^2-2\sum_{\substack{1\le l<m\le n+1\\ l\neq k,m\neq k}}S_lS_m\cos\theta(l,m)$$

すなわち、

$$2S_k^2=\sum_{l=1}^{n+1}S_l^2-2\sum_{\substack{l<m\\l\neq k\\m\neq k}}S_lS_m\cos\theta(l,m)$$

を得る。　(Q.E.D.)

　n 次元余弦定理の特殊な形として、次の定理が導かれる。

<u>定理 6</u>（n 平方の定理）

　点 O まわりのどの角も直角であるような n 次元図形 $OP_1P_2\cdots P_n$ について、S を $(n-1)$ 次元図形 $P_1P_2\cdots P_n$ の $(n-1)$ 次元体積、S_k を $(n-1)$ 次元図形 $OP1\cdots P_{k-1}P_{k+1}\cdots P_n$ の $(n-1)$ 次元体積とすると、

$$S^2=\sum_{k=1}^{n}S_k^2$$

が成り立つ。

（証明）

　$(n-1)$ 次元空間 $P_1P_2\cdots P_n$ の長さ 1 の法線ベクトルを $(E_1, E_2, \cdots, E_n)$ とおく。$(n-1)$ 次元空間 $P_1P_2\cdots P_n$ と $(n-1)$ 次元空間 $OP1\cdots P_{k-1}P_{k+1}\cdots P_n$ が n 次元図形 $OP_1P_2\cdots P_n$ の内部でなす角を θ_k とおくと、$(n-1)$ 次元空間 $OP_2P_3\cdots P_n$ の法線ベクトルは(1, 0, 0, …, 0)なので、

$$\cos\theta_1=E_1$$

となる。

　さらに、$S\cos\theta_1=S_1$ ゆえ、$SE_1=S_1$. 同様に $SE_k=S_k$ であるので、

$$\sum_{k=1}^{n+1}S_k^2=\sum_{k=1}^{n+1}S^2E_k^2=S^2$$

を得る。　(Q.E.D.)

　そして、n 次元余弦定理により n 次元中線定理が示される。

<u>定理 7</u>（n 次元中線定理）

n 次元図形 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$ において、$M_{k,l}$ を線分 P_kP_l の中点、$CM_{k,l}(r,s)$を $(n+2)$ 個の点 $P_1P_2\cdots P_{n+1}M_{k,l}$ のうち P_r と P_s 以外を頂点とする $(n-1)$ 次元図形とする。

$SM_{k,l}(r, s)$　$SM_{k,l}(r,s)$で $CM_{k,l}(r,s)$の $(n-1)$ 次元体積を、$\theta_r(s,t)$ で $CM_{k,l}(r,s)$ と $CM_{k,l}(r,t)$が内部でなす角を表すと、

$$S_i^2+S_j^2=2\sum_{m\neq i}SM_{i,j}^2(i,m)-4\sum_{\substack{g<h\\g\neq i,j\\h\neq i,j}}SM_{i,j}^2(i,g)SM_{i,j}^2(i,h)\cos\theta_i(g,h)$$

が成り立つ。

（証明）

　n 次元図形 $P_1P_2\cdots P_{i-1}P_{i+1}\cdots P_{n+1}M_{i,j}$ について、n 次元余弦定理より、

$$S_i^2=\sum_{\substack{1\le t\le n+1\\t\neq i}}SM_{i,j}^2(t,i)-2\sum_{\substack{1\le g<h\le n+1\\g\neq i,h\neq i}}SM_{i,j}(i,g)\cdot SM_{i,j}(i,h)\cos\theta_i(g,h)\quad\cdots①$$

　次に、n 次元図形 $P_1P_2\cdots P_{j-1}P_{j+1}\cdots P_{n+1}M_{i,j}$ について n 次元余弦定理より

$$S_j^2=\sum_{\substack{1\le t\le n+1\\t\neq j}}SM_{i,j}^2(t,j)-2\sum_{\substack{1\le g<h\le n+1\\g\neq j,h\neq j}}SM_{i,j}(j,g)\cdot SM_{i,j}(j,h)\cos\theta_j(g,h)\quad\cdots②$$

①＋②を計算すると、

$S_i^2+S_j^2$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{\substack{1\le t\le n+1\\ t\ne i}} SM_{i,j}^2(t,i)\\
&\quad+\sum_{\substack{1\le t\le n+1\\ t\ne j}} SM_{i,j}^2(t,j)\\
&\quad-2\sum_{\substack{1\le g<h\le n+1\\ g\ne i,h\ne i}} SM_{i,j}(i,g)\cdot SM_{i,j}(i,h)\cos\theta_i(g,h)\\
&\quad-2\sum_{\substack{1\le g<h\le n+1\\ g\ne j,h\ne j}} SM_{i,j}(j,g)\cdot SM_{i,j}(j,h)\cos\theta_j(g,h)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=2\sum_{m\ne i} SM_{i,j}^2(i,m)\\
&\quad-4\sum_{\substack{g<h\\ g\ne i,j\\ h\ne i,j}} SM_{i,j}^2(i,g)SM_{i,j}^2(i,h)\cos\theta_i(g,h)
\end{aligned}
$$

となる。　(Q.E.D.)

また、平面において三角形の重心は三本の中線の交点である。したがって、n 次元においても中線と重心には関係があると考えた。

定義 4（n 次元図形の重心）

点 P_k $(1\le k\le n+1, k\in\mathbb{N})$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{p_k}$ とおくと、n 次元図形 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$ の重心の位置ベクトルは $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\overrightarrow{p_k}$ と定義される。

定理 8

(1) n 次元図形 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$ の ${}_{n+1}C_2$ 個の n 次元中線は重心を共有する。

(2) ${}_{n+1}C_2$ 個の n 次元中線はただ 1 点を共有する。

（証明）

(1) 点 P_1 を含まない n 個の n 次元中線が重心を含むことを示せばよい。

線分 P_1P_k の中点を $\mathrm{M}_k\left(\overrightarrow{q_k}\right)$ とおくと、n 次元中線 $P_2P_3\cdots P_{k-1}P_{k+1}\cdots P_{n+1}M_k$ 上の任意の点 $\mathrm{Q}_k\left(\overrightarrow{q_k}\right)$ は

$$\overrightarrow{q_k}=\sum_{\substack{t=2\\ t\ne k}}^{n+1} s(k,t)\overrightarrow{p_t}+s_k\overrightarrow{m_k}\quad\cdots①$$

$$\left(0\le s(k,t)\le 1, 0\le s_k\le 1, \sum_{\substack{t=2\\ t\ne k}}^{n+1} s(k,t)+s_k=1\right)$$

と表せる。

ここで、$s(k,t)=\dfrac{1}{n+1}$， $s_k=\dfrac{2}{n+1}$ とすると、$\sum_{\substack{t=2\\ t\ne k}}^{n+1} s(k,t)+s_k=\dfrac{n-1}{n+1}+\dfrac{2}{n+1}=1$

を満たし、$\overrightarrow{q_k}=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\overrightarrow{p_k}$.

よって，題意は示された。

(2) $\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2},\cdots,\overrightarrow{p_{n+1}}$ は一次独立である。

点 P1 を含まない n 個の n 次元中線について考えればよい。

いま、点 $R\left(\vec{r}\right)$ がすべての n 次元中線の上にあるとき、

$$\vec{r}=\sum_{t=1}^{n+1}\alpha_t\overrightarrow{p_t}\quad\cdots②$$

$$0\le\alpha_t\le 1,\ \sum_{t=1}^{n+1}\alpha_t=1\quad\cdots③$$

①，②からベクトルの一次独立性より、

$$\sum_{t=1}^{n+1}\alpha_t\overrightarrow{p_t}=\sum_{\substack{t=2\\t\neq k}}^{n+1}s(k,t)\overrightarrow{p_t}+s_k\overrightarrow{m_k}$$

$$\Leftrightarrow\left(\alpha_1-\frac{s_k}{2}\right)\overrightarrow{p_1}+\left(\alpha_k-\frac{s_k}{2}\right)\overrightarrow{p_2}+\sum_{\substack{t=2\\t\neq k}}^{n+1}\left(\alpha_t-s(k,t)\right)\overrightarrow{p_t}=0$$

$$\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_k=\frac{s_k}{2},\ \ \alpha_t=s(k,t).$$

これが、すべての$2\leq k\leq n+1$について成立するため、③より

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

したがって、すべてのn次元中線の上にある点Rは1つである。　(Q.E.D.)

４．結果・考察

n次元余弦定理、n次元中線定理、n平方の定理を証明し、またn次元中線が重心を共有することを示した。今後はn次元中線と重心の関係をn次元図形の計量などに応用したい。

５．参考文献

[1] 井上友裕,「中線定理の高次元への拡張」, 奈良女子大学附属中等教育学校令和四年度SSHサイエンス研究会生徒研究論文集(2023)

[2] 「余弦定理の拡張」, http://www25.tok2.com/home/toretate/cos01.html

[3] 高校数学の美しい物語,「四平方の定理(図形の面積と正射影)」, https://manabitimes.jp/math/1003

[4] 高校数学の美しい物語,「四面体の重心の存在証明と応用例」, https://manabitimes.jp/math/1123

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。