

# “ビュフォンの針”の高次元への拡張

—図形を用いた確率の計算理論と幾何への応用—

## ビュフォンの針とは

平均をとる

$$p = \int_0^{\pi/2} \frac{r \sin \theta}{d} d\theta \div \frac{\pi}{2} = \frac{2r}{\pi d}$$

面積 幅 平均の高さ

**定理**  $p = \frac{2r}{\pi d} \quad (r \leq d)$

## I - ii 凸図形への拡張

長方形 $n$ $1$ $p = \frac{2(n+1)}{\pi d}$	円 $r$ $p = \frac{2r}{d} \times \frac{\pi}{\pi}$	ルーローの三角形 $r$ $p = \frac{r}{d} \times \frac{\pi}{\pi}$	半円 $r$ $p = \frac{(\pi+2)r}{\pi d}$
---	---	---	---

**予想**  $p = \frac{L}{\pi d}$  (Lは周長)

### 凸多角形での証明

平行線

周長 L

$$p_{k+1} = p(3 \cup k) = p_3 + p_k - p(3 \cap k)$$

$$= \frac{l_1+l_2}{\pi d} + \frac{L-l_1+l_2}{\pi d} - \frac{2l_2}{\pi d}$$

$$= \frac{L}{\pi d}$$

**証明済み**  
3...k, k+1...  
**仮定**

### 凸図形での証明

周長  $f(x)$  周長  $f(x+1)$  周長  $g(x)$  周長  $g(x+1)$

三角不等式より  $f(x) < f(x+1)$   
 凸図形より  $f(x) < L$   
 上に有界な単調増加列は上限に収束するので  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

三角不等式より  $g(x) > g(x+1)$   
 凸図形より  $g(x) > L$   
 下に有界な単調減少列は下限に収束するので  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow \infty} p_l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \dots \textcircled{1}$   
 $p_l < p < p_o \dots \textcircled{3}$   
 $p = \frac{L}{\pi d}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_o = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \dots \textcircled{2}$

**定理 2**  $p = \frac{L}{\pi d} \quad (L \ll d)$

## I 平面図形への拡張

### I - i 正n角形への拡張

(正n角形の一辺をrとし、平行線と交わる確率を  $p_n$  とする。)

正三角形 $p_3 = \frac{3r}{\pi d}$	正四角形 $p_4 = \frac{4r}{\pi d}$	正五角形 $p_5 = \frac{5r}{\pi d}$	正六角形 $p_6 = \frac{6r}{\pi d}$
----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

**予想**  $p_n = \frac{nr}{\pi d}$

$n = 2m$  のとき 対称性よりその他の場合でも同様

Max  $\{Im(\alpha_1), Im(\alpha_2), \dots, Im(\alpha_m)\} = Im(\alpha_m)$  のとき

余弦定理  $l = r \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \frac{\pi}{m}}}$

$h = l \sin(\theta + \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{m}))$

$\bar{h} = \int_0^{\frac{\pi}{m}} h d\theta \div \frac{\pi}{m} = \frac{2m}{\pi}$

$p_{2m} = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{2mr}{\pi d}$

**定理 1**  $p_n = \frac{nr}{\pi d} \quad (r \ll d)$

$n = 2m - 1$  のときも同様に計算すると  $p_{2m-1} = \frac{(2m-1)r}{\pi d}$  が得られた。

## II 高次元空間への拡張

**定義** n次元格子空間内において、m次元の図形Aがk次元の領域を動くとき、Aが格子と共有点をもつ確率を  $p(n,m,k)$  と表す。 ( $m \leq k$ )

ビュフォンの針  $p(1,1,2) = \frac{2r}{\pi d}$

単位1次元格子空間 ( $n=1$ )  $k=2$

言い換え  
針を落とす方向を変える

$m=1$   $r$   $p(1,1,2) = \frac{2r}{\pi d}$

重力  $n=1$   $k=2$

格子空間の次元を拡張 ( $n,m,k$  を+1)

$m=2$   $p(2,2,3) = ?$

単位2次元格子空間 ( $n=2$ ) 格子平面  $k=3$

**定理 2**  $p(1,2,2) = \frac{L}{\pi d}$

周長 L  $m=2$   $n=1$   $k=2$

言い換え  
図形を落とす方向を変える

周長 L  $m=2$   $p(1,2,2) = \frac{L}{\pi d}$

重力  $n=1$   $k=2$

格子空間の次元を拡張 ( $n,m,k$  を+1)

$m=3$   $p(2,3,3) = ?$

$n=2$   $k=3$

周長に比例する

表面積に比例するのでは?

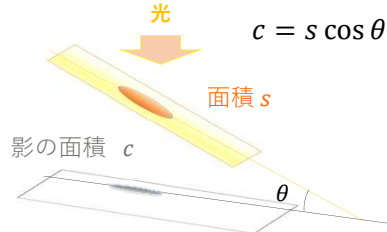
## II - i 3次元空間への拡張

$p(2,2,2)$ について

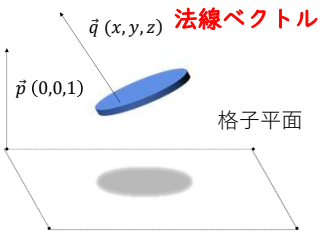
- 単位正方形の面積を  $s$
- 図形の面積を  $c$

$$p(2,2,2) = \frac{c}{s}$$

正射影について



$p(2,2,3)$ の計算



$$p = \frac{c \cos \theta}{s} = \frac{c}{s} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \frac{cz}{s}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (\text{単位ベクトル})$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \sin \varphi \\ y &= \cos \theta \cos \varphi \\ z &= \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{球面の媒介変数表示})$$

$\theta, \varphi$  を一様乱数 ( $\theta, \varphi$  は独立)

$$E[x] = E[\cos \theta] E[\sin \varphi] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}$$

$$E[y] = E[\cos \theta] E[\cos \varphi] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}$$

$$E[z] = E[\sin \theta] = \frac{2}{\pi}$$

期待値が一致しない。

$\sin \theta, \varphi$  を一様乱数

(球面の一様分布)

$$E[x] = E[\cos \theta] E[\sin \varphi] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$E[y] = E[\cos \theta] E[\cos \varphi] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}$$

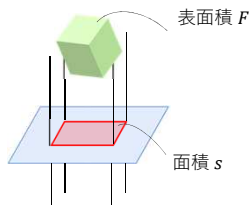
$$E[z] = E[\sin \theta] = \frac{1}{2}$$

期待値が一致

$$\bar{p} = \frac{cE[z]}{s} \quad E[z] = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$p(2,2,3) = \frac{c}{2s}$$

$p(2,3,3)$ の計算



定理2と同様に計算 ( $F$  は表面積)

$$p = \frac{F}{4s} \quad (F \leq s)$$

## II - ii n次元空間への拡張

目標

定理3を定理2と比較したとき、円周率  $\pi$  が分母に存在しないことが分かった。その理由を一般的な  $n$ 次元空間に着目して解き明かす。

定義

- $V^{(n)}$  ... 対象とする  $n$ 次元図形の体積  $V_n$  ...  $n$ 次元球の体積
- $S^{(n)}$  ... 対象とする  $(n+1)$ 次元図形の表面積  $S_n$  ...  $(n+1)$ 次元球の表面積
- $d^{(n)}$  ... 単位  $n$ 次元格子空間の体積

定数に着目した定理2, 定理3の一般化

$p(2,2,3)$ で利用した正射影の理論は帰納的に  $n$ 次元空間でも成り立ち、 $p(n, n+1, n+1) = \frac{k_n S^{(n)}}{d^{(n)}}$  が成立すると考えられる。 ( $k_n$  は  $n$  に依存する定数)

正射影が  $n$ 次元球で一定である  $(n+1)$ 次元球を代入

$p(n, n+1, n+1) = p(n, n, n)$  が成立して  $k_n$  を決定できる!!

$$\left. \begin{aligned} V^{(n)} &= V_n & p(n, n, n) &= \frac{V^{(n)}}{d^{(n)}} \\ S^{(n)} &= S_n & p(n, n+1, n+1) &= \frac{k_n S^{(n)}}{d^{(n)}} \end{aligned} \right\} \text{ のとき}$$

$$k_n = \frac{V_n}{S_n}$$

$$p(n, n+1, n+1) = p(n, n, n)$$

## 主な結果

本研究で発見した公式 (定理4) とウォリスの積分公式 (定理5) を用いて  $n$  による定数  $k_n$  を明らかにする。

$$V_{2n+2} = \frac{2\pi}{2n+2} V_{2n} \quad V_1 = 2 \quad V_2 = \pi$$

$$S_{2n+2} = \frac{2\pi}{2n+1} S_{2n} \quad S_1 = 2\pi \quad S_2 = 4\pi$$

数学的帰納法で証明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{V_n}{S_n} \pi$$

定理5 (ウォリスの積分公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} & n: \text{even} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n: \text{odd} \end{cases}$$

定理6

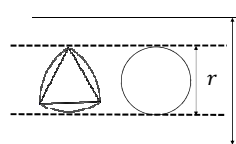
$$p(n, n+1, n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{S^{(n)}}{d^n} & n: \text{even} \\ \frac{1}{\pi} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{S^{(n)}}{d^n} & n: \text{odd} \end{cases}$$

周期数列であることから円周率  $\pi$  が定理2の分母に存在し、定理3には存在しないことの理由を説明できた。

## III 応用

バルビエの定理の別証明

定理7 (バルビエの定理) 定幅図形の周長は一定である。



$$\begin{aligned} \text{定幅図形より} & \quad p = \frac{r}{d} \\ \text{定理2より} & \quad p = \frac{L}{\pi d} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad L = \pi r \quad (\text{一定})$$

命題 定積図形の表面積は一定である。

どこから見ても面積が一定に見える立体図形を定積図形と呼ぶ

期待値の利用 (非凸図形の場合の考え方)

確率を用いて、 $r \geq d$  の場合や非凸図形の場合を考えると難しい。しかし期待値の加法性を利用すれば考えることができた。

多角形の一辺の長さ  $r_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) に対して平行線と交わる点の個数の期待値を  $E_k$  とすると、 $E_k = \frac{2r_k}{\pi d}$  が成り立つ。

期待値の加法性より

$$E \left[ \sum_{k=1}^n r_k \right] = \sum_{k=1}^n E_k = \frac{2}{\pi d} \sum_{k=1}^n r_k = \frac{2L}{\pi d}$$

定理8

$$E = \frac{2L}{\pi d}$$

周長、面積、表面積の測定

モンテカルロ法で測定することができる。

周長 ... 定理2      面積 ...  $p(2,2,2)$       表面積 ... 定理3

$$p = \frac{\bar{h}}{d} \quad \leftrightarrow \quad p = \frac{L}{\pi d} \quad \quad p = \frac{c}{s} \quad \quad p = \frac{\bar{c}}{s} \quad \leftrightarrow \quad p = \frac{F}{4s}$$

$\bar{h}$ : 平面図形を直線に投影したときにできる影の平均の長さ

$\bar{c}$ : 立体図形を平面に投影したときにできる影の平均の面積

## IV 今後の課題

- 1 等周不等式、ヘロンの公式等への応用。
- 2  $p(1,2,3)$  を求める。
- 3 周長が発散する図形 (フラクタル図形など) での考察。

参考文献

- [1] 「数学超絶難問」 小野田博一 (日本実業出版社)
- [2] 「曲線と曲面の微分幾何」 小林昭七 (裳華房)
- [3] webサイト「高校数学の美しい物語」