グラフ理論で考える近畿地方

４年Ａ組　辻　　春花
４年Ａ組　中尾　邦光
４年Ｂ組　太田　英利
指導教諭　河合　士郎
指導教諭　川口　慎二

1　要約

サイエンス研究会数学班は 3 つのテーマに分かれて研究活動を行っている。4 年生は、グラフ理論について研究しており、身近な事象に関連付けて、グラフの諸性質を考察している。このレポートでは、その一例を紹介したい。

キーワード　　グラフ、頂点、辺、次数、オイラーの一筆書き定理

2　研究の背景と目的

私たちの生活はトラックの輸送に頼りきっている。例えば、近くのスーパーマーケットに出かけると、そこには、生産地が遠方である品物が多くあることに驚かされるだろう。これらの多くは、鉄道による輸送が容易ではなく、トラックによる輸送を余儀なくされているらしい。しかし、これらの輸送ルートは最適だろうか。

この疑問を「グラフ理論」を用いて考えるために、今回はその導入として身近な近畿地方の移動を例に考えよう。

この移動を独自に問題としてとらえ、これを解決するための準備として、このレポートでは、先ずグラフ理論において、有名な定理のひとつである「オイラーの一筆書き定理」の証明をし、近畿地方の移動について考察する。

なお、数学班 4 年生は、グラフ理論に関する研究を進め、様々な現実の問題への応用を考察していく計画である。

3　研究内容

近畿地方の移動を考える前に、グラフ理論に関する基本知識をまとめておく。

■グラフの定義

グラフ(graph)とは、図1のように、いくつかの点があり、それらがいくつかの線で結ばれている図形のことである。

グラフにおいて、それぞれの点のことをグラフの**頂点(vertex)**、それぞれの線のことをグラフの**辺(edge)**という。

また、各頂点から出ている辺の数をその頂点の**次数(degree)**という。図1の頂点 A,B,C の次数は、それぞれ1,2,1となる。

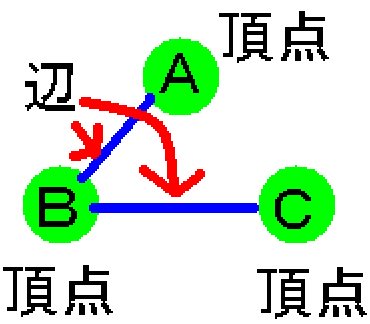


図1

例1　図2の頂点 X の次数を考える。

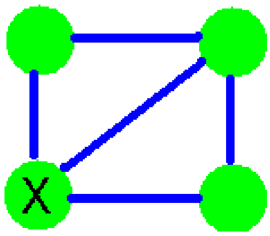


図2

頂点 X からは、辺が3本出ているので、頂点 X の次数は3である。
このグラフは、図3のようにも書き換えられる。

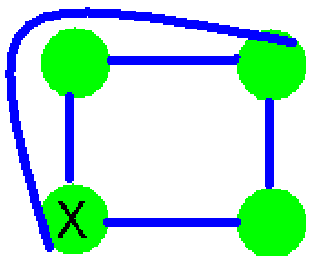


図3

図3が、図2から変形することができるので、図2,3はいずれも同型であることがいえる。ここで、2つのグラフが**同型(equivalent)**であるとは、2つのグラフにおいて、それぞれ対応する各頂点の次数が等しいときをいう。すなわち、グラフにおいては、頂点と頂点の結びつきは、方向や距離を考えず、単に各頂点がどの頂点と結びついているかが重要なのである。

さらに、グラフにおいて、同じ頂点を二度と通らない閉じた道を**サイクル(cycle)**という。

サイクルをもたない、連結されたグラフを**木(tree)**という。また、少なくとも一つの辺をもった木において、一つの辺の終点である頂点を**吊り頂点(pendant vertex)**という。

■グラフの一筆書き

さて、グラフが一筆書きできる場合について考えよう。グラフが一筆書きできるとき、それぞれの頂点から出る辺と入る辺の数が等しい。ただし、始点（出発点）と終点（到着点）は除いて考える。

2つの頂点を除いた頂点の次数がそれぞれ偶数であるとき、このグラフは一筆書きできるといえる。そして、始点と終点が一致する場合には、その頂点の次数も偶数になるが、一致しなければその2つの頂点の次数はそれぞれ奇数となる。

以上のことは、オイラーの一筆書き定理という定理として導かれている。

定理　**（オイラーの一筆書き定理）**

次数が奇数となる頂点が0個か2個であるグラフは、一筆書きができ、それ以外の場合は一筆書きできない。

［証明］

まずは、グラフ G が一筆書きできるとき、G の頂点のうち、次数が奇数であるものは0個か2個であることを示そう。

上述のように、グラフ G が一筆書きできるとき、始点と終点以外の頂点 V では、V に入ってくる辺と V から出て行く辺の数が等しい。つまり、始点と終点の2つの頂点を除いた頂点の次数はすべて偶数である。そして、始点と終点が一致する場合には、その2頂点の次数も偶数になるが、一致しなければその2頂点の次数はそれぞれ奇数となる。

次に、次数が奇数となる頂点が 0 または 2 個であるグラフ G が一筆書きできること

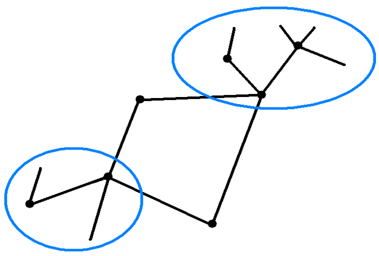
を証明しよう。この証明には、辺の数に関する帰納法を用いる。
(ⅰ) G は次数が奇数である頂点をもたない、即ち、G のすべての頂点の次数が偶数である場合について考える。

まず、辺の数が 0 のとき、即ち始点のみの場合は、明らかに一筆書きできる。

ここで、辺の数が k 本以下のグラフ(ただし、すべての頂点の次数は偶数である)が一筆書きできていると仮定する。

さて、(すべての頂点の次数が偶数であり、) $k+1$ 本の辺からなるグラフ G について考えてみよう。このグラフ G は、始点と終点が一致するので、吊り頂点をもたない。よって、木ではないことがわかる。したがって、G にはサイクル（閉じた道）があることがわかる。ここで、このサイクルに属する辺を一時的にすべて取り除くとグラフはいくつかの部分(これを**連結成分(component)**という)に分けられる（図 4 参照）。

しかし、これらの部分は、一時的に取り除いたサイクルと共通の頂点をもっている。これらの共通する頂点は、サイクルの頂点でもあるため、もともとの次数より 2 だけ小さくなる。よって、もとのグラフ G からサイクルを除いてできる各部分は、すべての頂点の次数が偶数であり、辺の数は k 本以下である。



すると、帰納法の仮定により、これらの各成分は一筆書きできることがわかる。したがって、サイクルを一周して、連結成分と共有する頂点に着いたとき、その成分を一筆で書くことで、次数が奇数の頂点が 0 個の場合は証明できる。
(ⅱ) G は次数が奇数である頂点を 2 つもつ場合について考える。

まず、始点と終点を結ぶグラフ上の辺を取り除く。すると奇数の次数の頂点がなくなることがわかる。

このグラフは（ⅰ）において議論した、次数が奇数である頂点をもたない、即ちすべての頂点の次数が偶数であるグラフになるので、あとは、（ⅰ）と同様に証明できる。

（ⅰ），（ⅱ）より、次数が奇数となる頂点が 0 または 2 個であるグラフ G が一筆書きできる。

以上から、オイラーの一筆書き定理が証明された。■

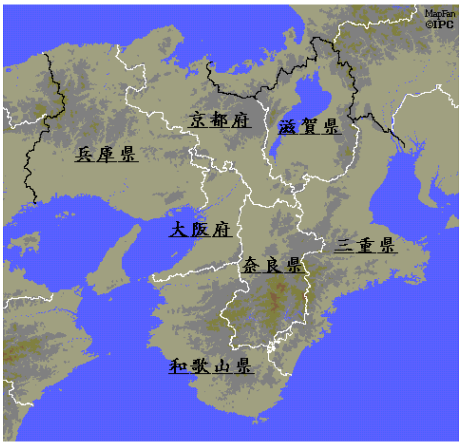
一筆書きできるグラフのことを、**オイラーグラフ（Euler graph）**とも呼ぶ。

4　考察

以上の準備のもと、次の問題を考察してみよう。

■問題

近畿地方の全ての府県境を同じ府県境を通らず通れるか。ただし、始点と終点は一致しなくてもよいものとする。ここで近畿地方は、京都、大阪、滋賀、兵庫、奈良、和歌山、三重の2府5県に属する地域を指す。



(http://www.asahi-net.or.jp/~aq9s-tmng/kinki/kinki.html)

図5

■考察

まず、近畿地方の地図である図5をグラフで表そう。2府5県を点(頂点)で表し、府県境を線(辺)で結ぶと図6のようなグラフを得る。すると、上述の問題は、「図6で表されたグラフが一筆書きできるかどうか」という問題として考えることができる。

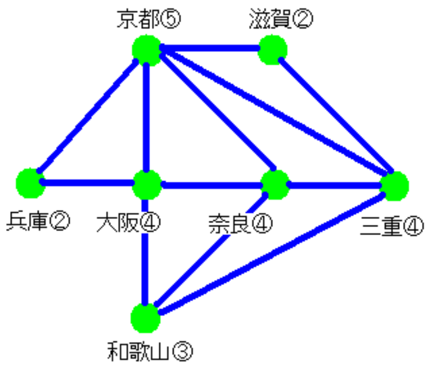


図6

図6において、各頂点の次数を○内に示した。このグラフは、次数が奇数である頂点が2個のみなので、オイラーの一筆書き定理より、一筆書きができるとわかる。

5　今後の課題

このレポートでは、オイラーの一筆書き定理の証明をすることができた。今後は、「結び目理論」にグラフ理論を関連付けた研究を進めたいと考えている。

6　参考文献

[1]「数学のひろば-柔らかい思考を育てる問題集-Ⅰ,Ⅱ」、ドミトリ・フォミーン、セルゲイ・ゲンキン、イリヤ・イテンベルク著、志賀浩二、田中紀子訳、岩波書店(1998)

[2]「NHK 高校講座　数学基礎 2004 年度」、日本放送出版協会編、日本放送出版協会(2004) p. 86-89

[4]「数学とっておきの 12 話」(岩波ジュニア新書 417)、片山孝次、岩波書店(2002)

7　謝辞

本研究およびレポート作成にあたって御指導くださった河合先生と川口先生に深く感謝します。