ルービックキューブへの群論

6年B組　福本　佳泰
指導教諭　河合　士郎
指導教諭　川口　慎二

1　要約

サイエンス研究会数学班は3つのテーマに分かれて研究活動を行っている。6年生は、ルービックキューブの操作と群論の関連について研究している。このレポートでは、その研究の一端を紹介したい。

キーワード　　ルービックキューブ、群、正規部分群、商群、置換、交代群、対称群

2　研究の背景と目的

ルービックキューブが好きだったので始めた。ルービックキューブ群の群構造を解析するための土台となる群論の基礎部分を学習し、実際にルービックキューブの操作に関する考察を行う。ルービックキューブ群 G について、その正規部分群や商群を考慮することにより、$|G|$ を求めたい。その過程において、コーナーキューブの方向の値に基づいて、エッジキューブに対しても同様の値を新たに定義して考察を行った。

3　研究内容

3−1. 群論の基礎

■群の定義

ある集合 G について、次の4つの条件が成り立てば、G は**群(group)**である。

（1）　$a,b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G$

※集合の中で演算「・」が定義される。つまり、演算を行った結果も元の集合に属していなければならない。また、便宜上、演算の記号・を省略することがある。

（2）　$\forall a,b,c \in G$ に対して、

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

※（1）で定義された演算・について、**結合法則(associative law)**が成立する。したがって、$a(bc) = (ab)c = abc$ と書くことができる。

（3）　$ae = ea = a$ を満たす、**単位元(unit element)** $e \in G$ が存在する。

※実数の掛け算における「1」に相当する。

（4）　$\forall g \in G$ に対して,
$gg^{-1} = g^{-1}g = e$ となる g の**逆元(inverse　element)** $g^{-1} \in G$ が存在する。

■群の基本性質

群 G について、それが有限集合なら**有限群(finite group)**、無限集合なら**無限群**

(infinite group)という。群Gが有限群のとき、Gの元の個数をGの**位数(order)**という。以下, Gの位数を$|G|$と表す。

群において、交換法則$ab = ba$は、一般には成立するとは限らない。交換法則$ab = ba$が常に成立する群のことを、**可換群(commutative group)**または**アーベル群(abelian group)**という。

■置換群の定義

置換(permutation)とは、ある有限集合の中で、それらの要素の並び方を変えるということを意味する。n個のものを「$a_1 \to b_1, a_2 \to b_2, \cdots, a_n \to b_n$」のようにうつす置換は、

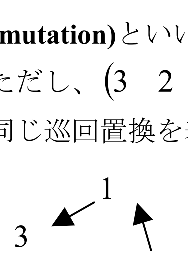
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

と表す。

さらに、例えば4つの文字1,2,3,4の置換のうち、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

は「1→3→2→4→1」と置換されているといえる。このような置換のことを**巡回置換(cyclic permutation)**といい、$(1 \quad 3 \quad 2 \quad 4)$と表す（ただし、$(3 \quad 2 \quad 4 \quad 1)$のように書いても同じ巡回置換を表している）。



また、2個のものの巡回置換、例えば$(1 \quad 2)$のような置換を**互換(transposition)**という。

また、すべての置換は、互換の積（置換を続けて施すということを意味する）として表わされる。例えば、

$$(1 \quad 3 \quad 2 \quad 4) = (1 \quad 3)(1 \quad 2)(1 \quad 4)$$

となる。また、巡回置換でなくても、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 5 \quad 4)(2 \quad 3)$$
$$= (1 \quad 5)(1 \quad 4)(2 \quad 3)$$

などと表される。さらに、

$$(1 \quad 2)(1 \quad 3) = (1 \quad 2 \quad 3),$$
$$(1 \quad 3)(1 \quad 2) = (1 \quad 3 \quad 2)$$

であるように、置換の積では一般には交換法則は成り立たない。

また、「どの要素もそのまま並べ替えない」という置換のことを**恒等置換(identity permutation)**といい、id_nと表す。そして、置換σによって並べ替えられたものを元に戻すような置換は、必ず存在し、これをσ^{-1}と表す。

■奇置換と偶置換

互換の積に関して、次の性質が成り立つ。

<u>命題1</u>　すべての置換は、互換の積で表される。その表し方は1通りには定まらないが、偶数個の互換の積、奇数個の互換の積のどちらで表されるかは、一定である。

<u>証明</u>

はじめに、同じ互換を2回繰り返すと元の並び方に戻ることに注意せよ（例えば、$(1 \quad 2)(1 \quad 2) = id_n$）。即ち、$id_n$は2個の互換の積で表される。置換$\sigma, \rho$がそれぞ

れ偶数個、奇数個の互換の積で表されるとする。

このとき、σ の後に ρ^{-1} を続けて行う置換 $\rho^{-1}\sigma$ を考えると、これは偶数回の互換の後に奇数回の互換を施しているので、全部で奇数個の互換の積として表される。したがって、$\rho^{-1}\sigma$ は id_n にはなり得ない。

つまり、互換の個数の偶奇が一致しないならば、2 つの置換は一致し得ない。したがって、1 つの置換に対しては、互換の積は何通りか表せても、その互換の個数の偶奇は一致する。∎

このように、偶数個の置換の積で表される置換のことを**偶置換(even permutation)**、奇数個の置換の積で表される置換のことを**奇置換(odd permutation)**という。例えば、上で見たように、

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$$

であるので、巡回置換 $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$ は 3 個の互換の積であらわせる。したがって、この巡回置換は奇置換である。一般に n 個の巡回置換は、$n-1$ 個の互換の積であらわされる。よって、偶数個の巡回置換は、奇置換であり、奇数個の巡回置換は、偶置換であるといえる。

■対称群(置換群)

n 個の要素からなる集合に施す置換全体の集合 S_n に対して、演算を「置換を続けて行う」と定めたときに、この置換全体の集合は、群の定義（1）～（4）をすべて満たし、群となっていることを確認する。

（1） $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ とする。$\sigma_1\sigma_2$ は置換 σ_2 を行った後で、置換 σ_1 を行うことを意味しているが、続けて置換を施すことは、結局はもとあった n 個の要素を並べ替えていることには変わりないので、明らかに $\sigma_1\sigma_2\in S_n$ である。

（2） $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in S_n$ に対して、結合法則 $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3=\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$ は明らかに成り立つ。

（3） 恒等置換 id_n が単位元に相当する。

（4） $\sigma\in S_n$ に対して、置換 σ によって並べ替えられたものを元に戻すような置換 σ^{-1} が σ の逆元に相当する。

このような群 S_n を、n 次の**対称群(symmetric group)** または**置換群(permutation group)**という。例えば、

$$S_3=\left\{\begin{matrix}e,\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

である。

対称群(置換群)の性質として、次が挙げられる。

<u>命題 2</u>　$|S_n|=n!$ である。

<u>証明</u>

n 個の置換は一般に

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

と表される。$|S_n|$ は n 個の置換の個数を意味しており、$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ は n 個の整数 $1,2,\cdots,n$ を並べ替えたものであるから、そ

の並べ方は $n!$ 通りである。したがって、

$|S_n| = n!$ となる。■

さらに、偶置換のみからなる S_n の部分集合も群となる。これを、n 次の**交代群(alternating group)**といい、A_n と表す。

交代群の性質として、対称群と同様に、次が成立する。

<u>命題 3</u>　$|A_n| = \dfrac{|S_n|}{2} = \dfrac{n!}{2}$ である。

<u>証明</u>

S_n の中から奇置換 σ を任意に選び、固定する。任意の偶置換 $\rho \in S_n$ について、$\varphi = \sigma\rho$ となる奇置換 $\varphi \in S_n$ が対応して唯一つ存在する。さらに、$\rho = \sigma^{-1}\varphi$ より、奇置換 φ についても、偶置換 ρ が唯一つ対応する。このことから、S_n の中において、偶置換と奇置換とは 1 対 1 に対応するので、それらは同数だけ存在する。したがって、

$|A_n| = \dfrac{|S_n|}{2} = \dfrac{n!}{2}$ となる。■

■部分群

G を演算・で定義された群とする。H が G の部分集合でありかつ、G と同じ演算・で定義された群である（即ち、H の任意の元 h_1, h_2 について、それらを演算した $h_1 \cdot h_2$ もまた、H の要素である）とき、H は G の**部分群(subgroup)**であるといい、$H \subset G$ とあらわす。

■正規部分群

H が G の部分群であるとともに、$\forall g \in G, \forall h \in H$ に対して、$ghg^{-1} \in H$ が成立するとき、H は G の**正規部分群(normal subgroup)**であるといい、$H \triangleleft G$ と表す。また、$b = xax^{-1}$ であるとき、b は a と**共役(conjugate)**であるという。つまり、H の元と共役な元がすべて H の元となるとき、H は G の正規部分群であるといえる。

■剰余類の定義

群 G の部分群のひとつを H として、$g \in G$ とする。$gH = \{gh | h \in H\}$（つまり H の各々の元について左側から g をかけたもの全体の集合）を**左剰余類(left coset)**、$Hg = \{hg | h \in H\}$（つまり、H の各々の元について右側から g をかけたもの全体の集合）を**右剰余類(right coset)**という。

※ gH や Hg は、群ではなく、単なる集合である。なぜなら、その中で演算が定義されるとは限らないからである。

■剰余類の性質

<u>命題 4</u>　H を群 G の部分群とする。$a, b \in G$ に対して、$aH = bH$ または、$aH \cap bH = \phi$ である。

※つまり、aH と bH は集合として全く一致しない限り、共通部分は空である。

<u>証明</u>

$aH \cap bH \neq \phi$ と仮定すると、$ah_1 = bh_2$ となる $h_1, h_2 \in G$ が存在する。このとき、

$a = bh_2h_1^{-1}, h_2h_1^{-1} \in H$ より、$a \in bH$ である。したがって、$aH \subset bH$ が導かれる。

一方、$b = ah_1h_2^{-1}, h_1h_2^{-1} \in H$ より、$b \in aH$ となる。ゆえに、$bH \subset aH$ が導かれる。よって、このとき、$aH = bH$ となる。∎

<u>**命題 5**</u>　H を群 G の部分群として、$g \in G$ とする。このとき、$|gH| = |H|$ が成立する。

<u>**証明**</u>

H と $gH = \{gh | h \in H\}$ を比較すると、

$$h_1, h_2 \in H, h_1 \neq h_2 \Rightarrow gh_1 \neq gh_2$$

であるから、写像 $f : H \to gH (h \mapsto gh)$ は全単射である。したがって、$|gH| = |H|$ である。∎

命題 4、命題 5 から、集合 G は、互いに異なる左剰余類のいくつかの直和として表されるとともに、$|G|$ は $|H|$ で割り切れることがわかる。実際に、

$$G = \bigcup \{gH | g \in G\}$$

と表すことができるのは明らかである。一方、$gH (g \in G)$ は、同じものを除くと、どの 2 つも互いに素であり、更にどれも位数が $|H|$ に等しいことから、$|G| = n|H|$ と表すことができる。ここで、n は、左剰余類のうち、互いに素であるもの全部の個数を表す。この n は H によって決まる。この $n = \dfrac{|G|}{|H|}$ を、H の**指数(index)**といい、$(G : H)$ と表す。

今まで、左剰余類のみについて言及してきたが、右剰余類についても、全く同様のことが成り立つ。

さて、左剰余類 gH と右剰余類 Hg について、$gh = hg$ ($h \in H$)とは限らないので、$gH = Hg$ とも限らない。だがここで、すべての $g \in G$ について、左剰余類と右剰余類が一致、つまり $gH = Hg$ である場合を考える。これはつまりどういうことかというと、

$$gH = Hg \Leftrightarrow gHg^{-1} = H,$$

即ち、H は G の正規部分群 $(H \triangleleft G)$ であるということと同値である。

また、$gH = Hg$ である場合、異なる左剰余類全体の集合を G/H とすると、これは G と同じ演算により定義された群となる。そこで、群の定義（１）～（４）を確認する。

（１）$g_1, g_2 \in G$ に対して、

$$\begin{aligned} g_1Hg_2H &= g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H \\ &= g_1g_2HH = g_1g_2H \end{aligned}$$

であり、$g_1g_2 \in G$ ゆえ、g_1H と g_2H の積 g_1Hg_2H は、$g_1Hg_2H \in G/H$ を満たしている。

（２）$g_1, g_2, g_3 \in G$ に対して、

$$\begin{aligned} (g_1Hg_2H)g_3H &= (g_1g_2H)g_3H \\ &= g_1g_2(Hg_3)H \\ &= g_1g_2(g_3H)H \\ &= g_1g_2g_3HH \\ &= g_1g_2g_3H \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_1H(g_2Hg_3H) &= g_1H(g_2g_3H) \\
&= g_1(Hg_2g_3)H \\
&= g_1(g_2g_3H)H \\
&= g_1g_2g_3HH \\
&= g_1g_2g_3H
\end{aligned}
$$

したがって、結合法則

$$(g_1Hg_2H)g_3H = g_1H(g_2Hg_3H)$$

が成立する。

（３）単位元は、$H(=eH)$ である。

（４）逆元は、$gH \in G/H$ に対して $g^{-1}H$ である。実際に、

$$(gH)(g^{-1}H) = gg^{-1}H = eH$$
$$(g^{-1}H)(gH) = g^{-1}gH = eH .$$

したがって、G/H は群になっている。この群のことを、G の H による**商群(quotient group)**または**剰余群(residue class group)**という。さらに、H の指数は $|G/H|$ に等しい。即ち、$|G| = |G/H||H|$ が成り立つ。

3-2. ルービックキューブと群論

以上の準備のもと、ルービックキューブについて考察していくことにする。

■ルービックキューブ群

以下、ルービックキューブは、3×3×3 のものを考える。また、ルービックキューブの**基本操作**とは、ある面を$\pm 90^\circ$回転させる操作を、ルービックキューブの**操作**とは、基本操作を何回か繰り返し行ったものをいう。

いま、G はルービックキューブの操作全体の集合、H は 8 個の角のキューブ（これらを**コーナーキューブ**と呼ぶ）の位置を変えない操作全体の集合、J はコーナーキューブの位置も方向も変えない操作全体の集合、K はコーナーキューブの位置も方向も変えず、かつ 12 本の辺に接するキューブ（これらを**エッジキューブ**と呼ぶ）の位置を変えない操作全体の集合とする。集合として、$G \supset H \supset J \supset K$ という包含関係が成り立っている。

ここで、演算・を「ルービックキューブの操作を続けて行う」こととして定義とすると、G は群になる。実際に、a,b,c はそれぞれ、ルービックキューブの操作である（つまり $a,b,c \in G$）とすると、

(1) 2 個の操作を続けて行ったときもまた、「ルービックキューブの操作全体の集合」に含まれている。（つまり、$a \cdot b \in G$ である。以降 $a \cdot b$ を単に ab と表す。）

(2) 操作 a の後に続いて操作 bc を行った場合も、操作 ab の後に続いて操作 c を行った場合も、操作の結果が等しいのは当然である。従って、結合法則 $a(bc) = (ab)c$ が成立する。

(3) 単位元 e は、「操作を行わない」という操作である。

(4) 操作 a の逆操作を行うと、ルービックキューブは元の状態に戻る。操作 a の逆操作を a の逆元 a^{-1} とする。すると、

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

が成り立つ。

さて、8 個のコーナーキューブの位置を変えない操作全体の集合 H は G の部分集合であったが、さらには G の部分群になる。実際、

(1) a,b をコーナーキューブの位置を変えない操作(つまり、$a,b \in H$)とすると、このような操作を2回続けて行っても、それは依然としてコーナーキューブの位置を変えない。よって、$ab \in H$ である。

(2)結合法則は、G の元に対して成立しているから、当然 H の元に対しても成立する。

(3) G の単位元 e は、明らかにそのまま H の単位元でもある。

(4)「コーナーキューブの位置を変えない操作」の逆操作も、コーナーキューブの位置を変えない。よって、$a \in H$ であれば、$a^{-1} \in H$ である。

いま、$g \in G$ とする。すべての $h \in H$ に対して、h はコーナーキューブの位置を変えないので、g と gh のコーナーキューブの位置の変え方は等しく、同様に、g と hg のコーナーキューブの位置の変え方も等しい。よって、gH と Hg はともにコーナーキューブの位置の動き方が g と同じである操作を全て集めた集合であるから、$gH = Hg$ となる。つまり、H は G の正規部分群である。

H の左剰余類と右剰余類が一致するので、その商群を考えることができる。そこで、

H の $g \in G$ による商群

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

H を考える。ここで、gH はコーナーキューブの位置の動き方が g と同じである操作を全て集めた集合であったことから、G/H は、コーナーキューブの位置の動き方のパターンを集めたものということになる。

定理1 S_8 を8次対称群とするとき、$|G/H| = |S_8|$ である。

図1のような任意の隣接した2個のコーナーキューブを入れ替え、残りの6個のコーナーキューブは動かないという操作がある。

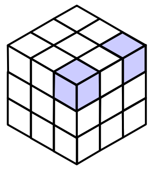


図1

次の手順で操作を行えばよい。

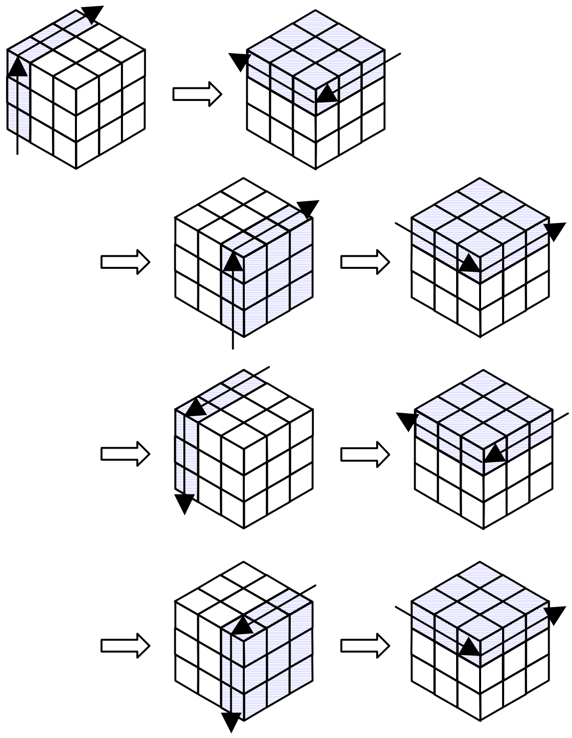


図2

向きを変えたりしてこの操作を連続して行うと、コーナーキューブの位置を任意に入れ替えることができる。つまり、写像 $f: G/H \to S_8$ が全射になる。例えば、図3の2つの状態の間に上の操作を施すと、図4で示したコーナーキューブの位置が入

れ替わる(つまり、共役な置換を行うことに相当する)。

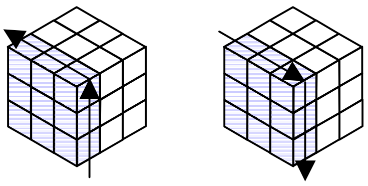


図 3

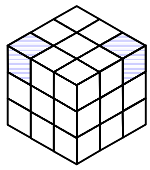


図 4

このように、図 2 の操作を連続して行うと、すべての、S_8 の要素に対応する G/H の要素がそれぞれ存在するということがわかる。

また、明らかにこの写像は単射でもある。したがって、$|G/H| = |S_8|$ であり、

$|S_8| = 8!$ より定理 1 から、$|G/H| = 8!$ を得る。

また、H の場合と同様の議論から、8 個のコーナーキューブの位置も方向も変えない操作全体の集合 J は H の正規部分群であり、商群 H/J は、コーナーキューブの位置と方向の動き方のパターンを集めたものということになる。

ここで、コーナーキューブの方向の決め方について、説明しておく。各コーナーキューブの色 A の面は、センターキューブの色を基準にして、次の図 5 のように 3 通りある。

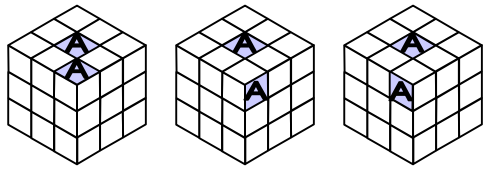


図 5

図 5 の各場合について、**コーナーキューブの方向の値**を左から順に、0, +1, −1 と定める。つまり、コーナーキューブが時計回りに 120°回転するとコーナーキューブの方向の値は+1 され、反時計回りに 120°回転するとコーナーキューブの方向の値は−1 されるということである。ただし、120°回転を 3 回繰り返すと元に戻るので、コーナーキューブの方向の値は 3 を法として合同である。例えば、時計回りに 240°ずれている状態のものは−1 とも 2 とも考えることができる。

一般にはコーナーキューブの位置が合っていないとその方向を決定することはできない点に注意が必要である。しかし、コーナーキューブの位置が合っていなくてもコーナーキューブの方向を考えられるような方法がある。そのために、上面と底面をすべて同じ色（＝色 A）だと考え、残りの側面はすべて別の色(＝色 B)で塗られていると考える。こうすることで、各コーナーキューブには色 A の面が 1 つ、色 B の面が 2 つあることになり、全てのコーナーキューブが同じものとしてみなすことができる。つまり、もとは位置が違っていても、あたかも位置が合っているかのように扱うことができ、方向を考えることができるようになるわけである。

定理 2　8 個のコーナーキューブの番号をそれぞれ1,2,…,8として、それぞれの方向の値を、$r_1, r_2, \ldots, r_8$ とすると、

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_8 \equiv 0 \pmod 3$$

が成り立つ。

最初の状態では、$r_1 = r_2 = \cdots = r_8 \equiv 0$ であるから、明らかに成立する。まず、上面あるいは底面を回転する基本操作では、明らかに $r_1 + r_2 + \cdots + r_8$ の値は、3 を法として変わらない。次に、図 6(a)のように 1, 2, 3, 4 と番号を付け、(b)のような基本操作をしたときの方向の値を考える。

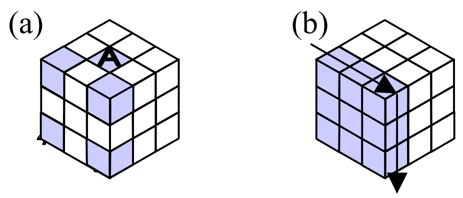


図 6

このとき、3 を法として、r_1 は+1、r_2 は −1、r_3 は+1、r_4 は −1 が加えられ、$r_5 \sim r_8$ は、変わらない。つまり、どんな面に基本操作を行っても、$r_1 + r_2 + \cdots + r_8$ の値は 3 を法として変わらない。したがって、基本操作を何回行っても、$r_1 + r_2 + \cdots + r_8 \equiv 0 \pmod 3$ の関係が崩れることは無い。

よって、7 個のコーナーキューブの方向までは自由に変えることができるが、残りの 1 個の方向は、$r_1 + r_2 + \cdots + r_8 \equiv 0 \pmod 3$ の関係を成り立たせるような方向に、決定されてしまう。つまり、コーナーキューブの方向の変え方は、3^7 通りあることが分かる。

さらに、任意の 2 個のコーナーキューブの方向を自由に変えられる操作がある（手順は省略）。G/H のときと同様に、向きを変えながらその操作を連続して行うことで、コーナーキューブの方向を自由に変えることができる。即ち、基本操作のみで（分解することなく）、コーナーキューブの方向の 3^7 通り全ての状態を作ることができる。つまり、H/J の各要素をコーナーキューブの方向の値を並べた列 $(r_1, r_2, \ldots, r_8)$ の 1 種類ずつと対応させることができる。したがって、$|H/J| = 3^7$ を得る。

さらに、これまでと同様の議論から、8 個のコーナーキューブの位置も方向も変えず、12 個のエッジキューブの位置をも変えない操作全体の集合 K は J の正規部分群になり、商群 J/K は、エッジキューブの位置の動き方のパターンを集めたものといえる。

一般に、1 回の基本操作は、コーナーキューブの位置について 4 次の巡回置換（＝奇置換）を引き起こし、エッジキューブの位置についても 4 次の巡回置換（＝奇置換）を引き起こす。さらに、任意の $k \in K$ について、jk がコーナーキューブの位置を変えないことに注目すると、jk はコーナーキューブの位置について偶置換（並び替えないという置換は偶置換）を引き起こすので、基本操作を偶数回行ったものということが分かる。つまり、jk はエッジキューブの位置についても、偶置換を引き起こしているということが分かる。言い換えると、J/K は（エッジキューブの位置について）偶置換のみからなる群であるといえる。

<u>**定理 3**</u>　A_{12} を 12 次交代群とするとき、

$\left| J/K \right| = \left| A_{12} \right|$ である。

まず、図 7 のような任意の 3 個のエッジキューブの位置を入れ替える操作がある（手順は省略）。G/H のときと同様に、向きを変えながらこの操作を連続して行うと、エッジキューブの位置を任意に入れ替え可能となる。

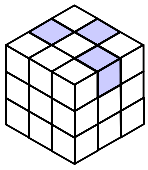
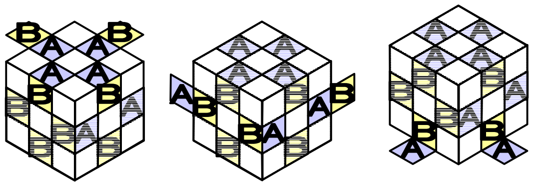


図 7

よって、写像 $f : J/K \to A_{12}$ は全単射になり、$\left| J/K \right| = \left| A_{12} \right|$ を得る。以上から、K とは、エッジキューブの方向のみを動かす操作全体による群であるともいえる。

一般には、エッジキューブの位置が合っていないと、エッジキューブの方向を考えることができない。そこで、コーナーキューブの方向を考えた場合と同様に、エッジキューブの位置が合っていなくても、エッジキューブの方向を考える方法を以下のように考案した。6 面完成した状態で各エッジキューブに次のように（色は全て無視して）ラベル A, B を付ける（図 8 参照）。



（1）上段にある 4 つのエッジキューブの上面には A を、側面には B をつける。

（2）中段にある 4 つのエッジキューブの右手前と左奥の面に A を、左手前と右奥の面に B をつける。

（3）下段にある 4 つのエッジキューブの底面に A を、側面に B をつける。

このようにして、元の 6 色を無視することで、コーナーキューブの方向を考えたときと同様に、<u>各エッジキューブを全て同じものとしてみなすことができる</u>。つまり、もとの位置が違っていても、あたかも位置が合っているかのように扱うことができ、方向を考えることができるようになる。

ここで、**エッジキューブの方向の値**について説明しておく。ある位置にあるエッジキューブのラベル A, B が、最初と同じところにあった場合にはエッジキューブの方向の値を+1、異なっていた場合には−1 とする。例えば図 9 でいうと、左のエッジキューブの位置の値は+1、右のエッジキューブの位置の値は−1 である。

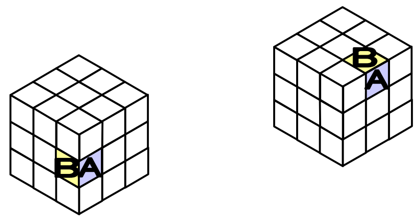


図 9

このとき、次の関係を得た。

<u>**定理 4**</u>　12 個のエッジキューブの番号をそれぞれ $1, 2, \ldots, 12$ として、それぞれの方向の値を、$t_1, t_2, \ldots, t_{12}$ とすると、

$$t_1 \times t_2 \times \cdots \times t_{12} = 1$$

が成り立つ。

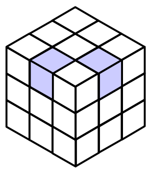
6 面完成した状態では、

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_{12} = 1$$

であるから、明らかに成立する。上面や底面、あるいは右手前や左奥の面を回転する基本操作を行っても $t_1 \sim t_{12}$ の値はいずれも変わらない。一方、左手前や右奥の面を回転する基本操作を行った場合については、考察が必要であるが、一回の基本操作ではどの面を回しても $t_1 \times t_2 \times \cdots \times t_{12}$ の値は変化せず、基本操作を何回行っても、$t_1 \times t_2 \times \cdots \times t_{12} = 1$ の関係は崩れることはないとわかる。

言い換えると、11 個のエッジキューブの方向までは自由に変えることができるが、残りの 1 個の方向は、$t_1 \times t_2 \times \cdots \times t_{12} = 1$ の関係を成り立たせるような方向に決まってしまい、エッジキューブの方向の変え方は、2^{11} 通りあることが分かる。

さて、図 10 のような隣接した 2 個のエッジキューブの方向を反転し、他のエッジキューブの向きや、全てのピースの位置は変えない操作がある（手順は省略）。G/H のときと同様、向きを変えながらその操作を連続して行うと、エッジキューブの方向を自由に変えることができる。即ち、基本操作のみで（分解せずに）エッジキューブの方向の 2^{11} 通りすべての状態を作れるので、$|K| = 2^{11}$ である。



以上から、$|G|$ を計算すると、

$$\begin{aligned} |G| &= |G/H||H| = |G/H||H/J||J| \\ &= |G/H||H/J||J/K||K| \\ &= 8! \times 3^7 \times \frac{12!}{2} \times 2^{11} \\ &= 43{,}252{,}003{,}274{,}489{,}856{,}000 \end{aligned}$$

という結果が得られた。

このように、ルービックキューブ群の代数的構造を解析することにより、群論のごく簡単な部分を用いて、ルービックキューブの手数(つまりルービックキューブ群の位数)を求めることができた。

4　今後の課題

群論の基礎部分およびルービックキューブ群の基本的性質についてレポートにまとめることはできた。また、ルービックキューブ群の部分群を考察することにより、その位数を効率よく計算することができた。また、ルービックキューブ群の部分群と具体的な操作を対応付けて考察することができた。

今後は、このようなルービックキューブ群に関する考察をさらに深め、その構造を研究することにより、ルービックキューブの解法を得ることができないかという観点から研究してみたい。

5　参考文献

[1]「ルービック・キューブによる群論入門」、数学セミナー1981 年 8 月号、島内剛一、日本評論社（1981）p.2-9

[2]「群論演習のひとこま」、数学セミナー1981 年 8 月号、国吉秀夫、日本評論社（1981）p.11-16

[3]「2*2*2 ルービック・キューブで遊ぼう」、井川治、プレプリント

6　謝辞

　本研究およびレポート作成にあたって御指導くださった河合先生と川口先生に深く感謝します。

平成16年度　奈良県立奈良高等学校全日制課程普通科

学科 年次(学級数) (新課程)				普 共通 1	普 共通 2	学科 年次(学級数) (旧課程)		普 共通 3
区分	教科	科　目	標準単	(10)	(9)	科　目	標準単位	(9)
各教科	国　語	国語総合	4	5		国語Ⅰ	4	
		現代文	4		※2･3	国語Ⅱ	4	※2
		古典	4		※2･4	現代文	4	※3
		国語表現Ⅱ	2			古典Ⅰ	3	
		古典講読	2			古典Ⅱ	3	※2･4
						国語表現	2	※2
						古典講読	2	※2
	地理歴史	世界史A	2	2		世界史A	2	※2
		日本史A	2	♯2　2		日本史A	2	※2
		地理A	2	♯2		地理A	2	※2
		世界史B	4		※2	世界史B	4	※2･4
		日本史B	4		※2	日本史B	4	※2･4
		地理B	4		※2	地理B	4	※2･4
	公　民	現代社会	2		2	倫　理	2	
		倫理	2			政治・経済	2	2
		政治・経済	2			現代社会	4	
		探究社会	2◇			探究社会	2◇	※2
	数　学	数学Ⅰ	3	3	※2	数学Ⅰ	4	
		数学Ⅱ	4		※2･3	数学Ⅱ	3	※3
		数学Ⅲ	3			数学Ⅲ	3	※5
		数学A	2	2		数学A	2	
		数学B	2		※2	数学B	2	※2
		数学C	2			数学C	2	※2･4
		ｺﾝﾋﾟｭｰﾀ基	2◇		※2	ｺﾝﾋﾟｭｰﾀ基	2◇	※2
	理　科	理科総合A	2	2		物理ⅠA	2	
		理科総合B	2	2		化学ⅠA	2	
		物理Ⅰ	3		※2･3	生物ⅠA	2	
		化学Ⅰ	3		※2･3	地学ⅠA	2	
		生物Ⅰ	3		※2･3	物理ⅠB	4	※3
		地学Ⅰ	3		※2･3	化学ⅠB	4	※3
		物理Ⅱ	3			生物ⅠB	4	※3
		化学Ⅱ	3			地学ⅠB	4	※3
		生物Ⅱ	3			物理Ⅱ	2	※4
		探究物理	2◇			化学Ⅱ	2	※4
		探究化学	2◇			生物Ⅱ	2	※4
		探究生物	2◇			探究物理	2◇	※2
						探究化学	2◇	※2
						探究生物	2◇	※2
	保健体育	体育	7～8	2	3	体育	9	3
		保健	2	1	1	保健	2	
	芸　術	音楽Ⅰ	2	♯2		音楽Ⅰ	2	
		美術Ⅰ	2	♯2　2		美術Ⅰ	2	
		書道Ⅰ	2	♯2		書道Ⅰ	2	
		音楽Ⅱ	2		※2	音楽Ⅱ	2	
		美術Ⅱ	2		※2	美術Ⅱ	2	
		書道Ⅱ	2		※2	書道Ⅱ	2	
		音楽Ⅲ	2			音楽Ⅲ	2	※2
		美術Ⅲ	2			美術Ⅲ	2	※2
		書道Ⅲ	2			書道Ⅲ	2	※2
	外国語	英語Ⅰ	3	4		英語Ⅰ	4	※2
		英語Ⅱ	4		※5	英語Ⅱ	4	※2
		ﾘｰﾃﾞｨﾝｸﾞ	4			ﾘｰﾃﾞｨﾝｸﾞ	4	※3
		ﾗｲﾃｨﾝｸﾞ	4			ﾗｲﾃｨﾝｸﾞ	4	※3
		ｵｰﾗﾙ･ｺﾐｭﾆ	2	2	※2	ｵｰﾗﾙｺﾐｭﾆ	2	
		英語ﾆｭｰｽﾞ	2◇			英語ﾆｭｰｽﾞ	2◇	※2
	家　庭	家庭基礎	2	2		家庭一般	4	
		生活文化	2◇		※2			
	情　報	情報B	2					
	必修･選択必修科目計			31	6	必修･選択必修科目計		5
	選　択　科　目　計			0	28	選択科目計		25～29
	各教科･科目計			31	34	各教科･科目計		30～34
SSP(ｽｰﾊﾟｰｻｲｴﾝｽ ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ)				*3*				
C.C.(総合的な学習の時間)						総合的な学習の時間（C.		※2
各　教　科･科　目　等　計				34	34	各教科･科目等計		30～34
特別活動	ホームルーム活動			1	1	ホームルーム活動		1
合　　計				35	35	合　計		31～35