グラフ理論で最短路問題を考える

５年Ａ組　太田　英利
５年Ａ組　辻　春花
５年Ｂ組　中尾　邦光
指導教諭　川口　慎二
指導教諭　佐藤　大典

１．要約

サイエンス研究会数学班（以下、数学班）は２つのテーマに分かれて研究活動を行っている。５年生は、グラフ理論について研究しており、身近な事象に関連付けて、グラフの諸性質を考察している。このレポートでは、その一例を紹介したい。

キーワード　　グラフ、重み、重みつきグラフ、経路、最短路問題

２．研究の背景と目的

グラフ理論は、美しい。その美しさは、単に、グラフ理論そのものがわかりやすいからではなく、それ以上に、数学以外の場面でもグラフ理論がよく用いられることに由来するもいえるのではないかと考える。

このグラフ理論の美しさを知ることを目的とし、このレポートにおいては最短路問題を考えることを目標としたい。そのために、この問題の考え方を用いることによって解決できる、JR 西日本の移動も考えたい。

なお数学班では、これまでオイラーの一筆書き定理などのグラフの性質を研究してきたが、これ以降もグラフ理論に関する研究をさらに進めようと考えている。

３．研究内容

最短路問題を考える前に、問題の考察に必要となるグラフ理論に関する基礎知識をはじめにまとめておく。

＜グラフの定義＞

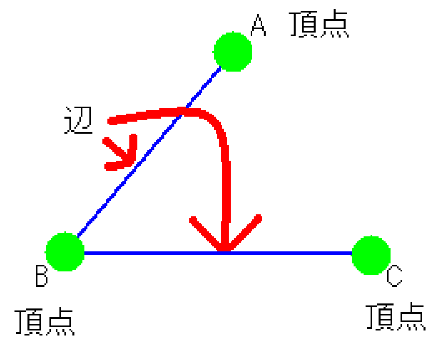

図１

グラフ(graph)とは、図１のように、いくつかの点があり、それらがいくつかの線で結ばれている図形のことである。

グラフにおいて、それぞれの点のことをグラフの**頂点(vertex)**、それぞれの線のことをグラフの**辺(edge)**という。

また、各頂点から出ている辺の数をその頂点の**次数(degree)**という。例えば図１の頂点A,B,Cの次数は、それぞれ1,2,1となる。

それでは次に、最短路問題を紹介しよう。この問題は、後に紹介するある種の**アルゴリズム(algorithm)**を用いて考えることができる。言い換えると、効率のよいアルゴリズム、つまり、有限回の着実な方法で、問題の解決にたどり着くことができる。

＜最短路問題＞

図2のような始点Aから終点Lへいたる経路を示した地図において、AからLへいたる最短の経路（最短路）を求めたい。ただし、それぞれの経路についている数字は、その2点間の距離を表している。

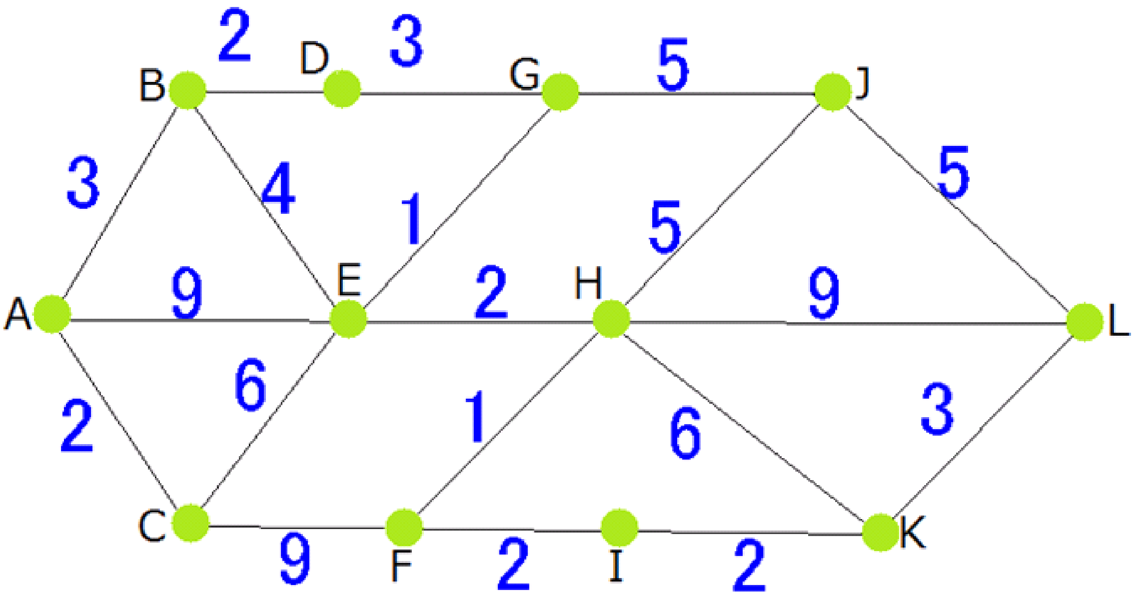

図2（参考文献[4]より作成）

図2の中の数字を、グラフの各辺の**重み(weight)**といい、このようなグラフを**重みつきグラフ(weighted graph)**という。ただし、一般にこの重みがいつも2点間の距離を表しているとは限らない点に注意が必要である。2点間を移動するのに必要な時間や費用を表している場合も想定できるわけである。

このグラフにおいて、AからLにいたる最短路を考えたい。そのためには、始点Aから各頂点までの最短距離を、Aに近い点から順番に、次の順序で各頂点につけていけばよい。

最短路の決定方法

①始点Aに最も近い頂点Cを考え、頂点Cにラベル2をつける。

②始点Aから次に近い頂点Bとその次に近い頂点Eを考え、仮のラベル3と9をそれぞれにつける。

③ところが、頂点Eは始点Aから頂点Bを経由した方が近いので、頂点Eのラベルを7に訂正する。

④この作業を繰り返す。すると、図3のように各頂点にラベルをつけることができる。

⑤終点から、さかのぼって最短路を考えていくと、図3のような最短路が得られる。

＜なぜ、終点から考えるのか＞

さて、上の⑤において、最短路を求める際に、我々は終点から順番に考えていった。番号(ラベル)をつけるときには始点から付けていったのに、最短路決定のときにはどうして始点から考えることをしないのだろうか。

始点から考えることをしない理由は、ひとつの頂点から、複数の頂点に向かう辺に同じラベルがついている可能性もあるからである。もしそうであれば、経路が何通りも考えられるが、それらのいずれもが最短であると言い切ることができない。一方、終点から考えれば、その問題が生じることはないため、終点から考えたわけである。

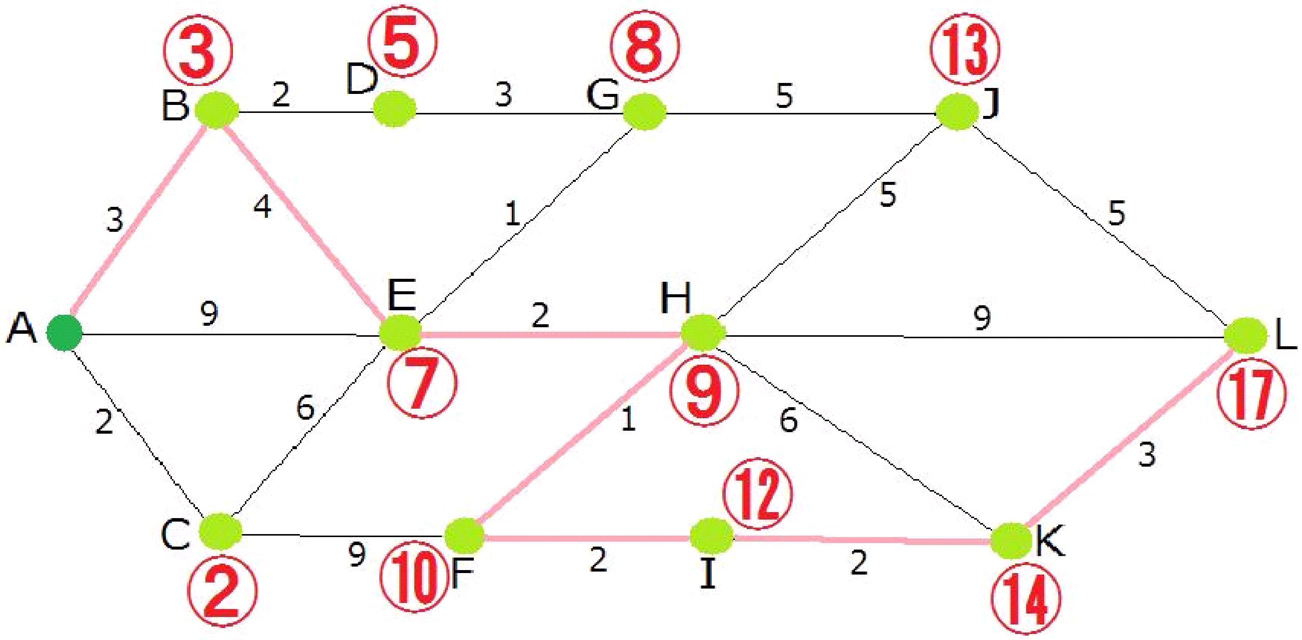

図3（参考文献[4]より作成）

4．　考察

以上の準備のもと、実際の事例として、次の問題を考察してみよう。

＜奈良から姫路までの移動問題＞

$\boxed{\text{問題}}$　JRの路線を用いて、奈良から姫路まで移動したい。どの経路が最も効率的だろうか。ただし、ここで効率的であるとは、通る駅数が最も少ない経路であることと考える。

＜解法＞

まず、JRの路線（次ページ図4）をグラフで表そう。グラフは下の図5のようにな

る。ただし、グラフの簡略化のために、一部の路線を省略している。

このグラフにラベルをつけ、最短路を求めると図 6 のようになる。以上より、問題に対する答えとして、最短路は 57 の駅を通過する「奈良→王寺→天王寺→大阪→尼崎→加古川→姫路」という経路である。

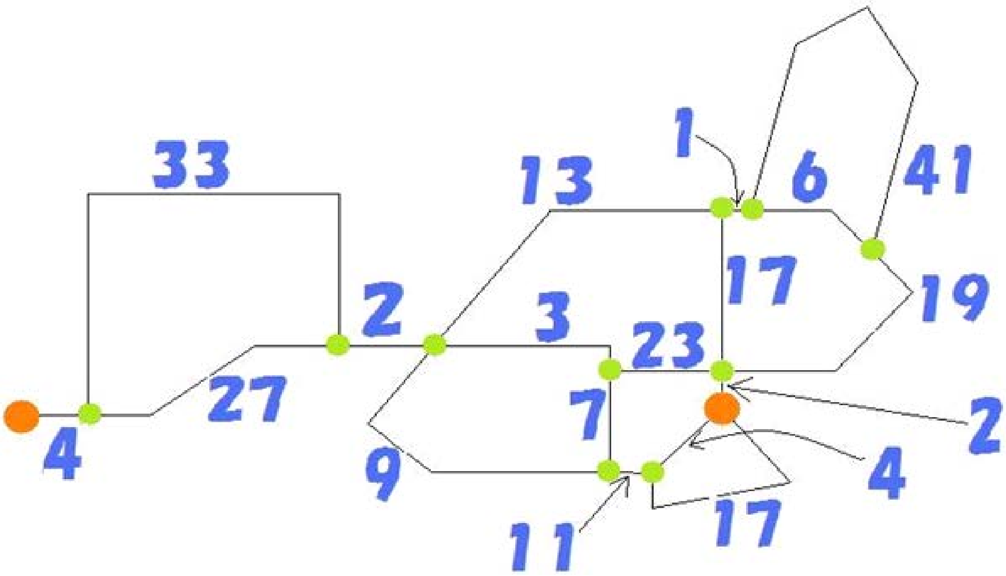

図 5　重みつきグラフ

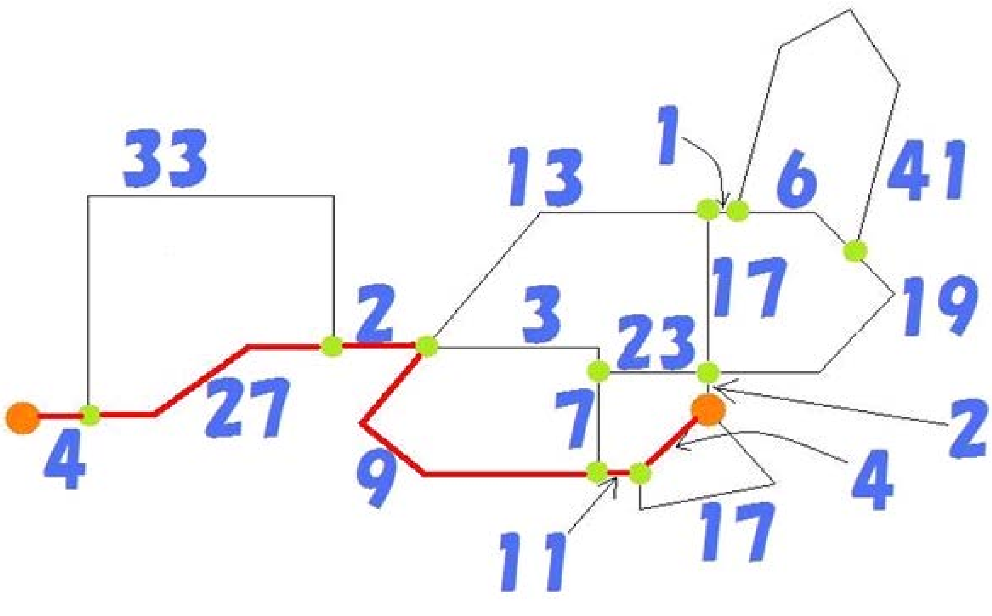

図6　奈良－姫路間の最短路

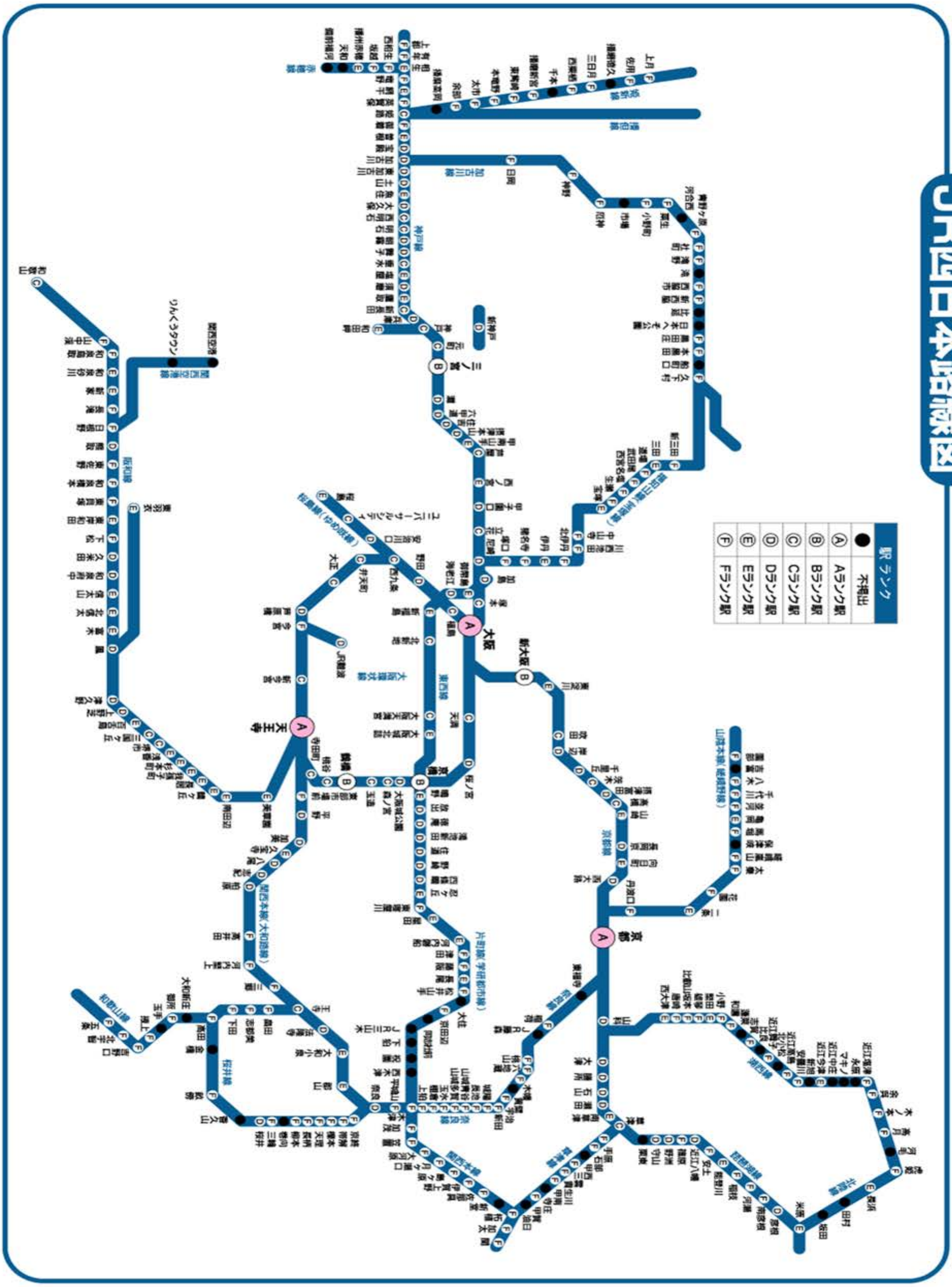

図4（http://www.nihonsenkousha.co.jp/railmap/jr.gif）

ここでは、グラフの重みとして、「通過する駅数」を採用している。

５．今後の課題

この論文では、最短路問題を考えることができた。最短路問題を解決するためには、着実に最短路を決定していく方法として、アルゴリズムというものを知る機会となった。

今後は、さらにグラフ理論の研究を進めたいと考える。

６．参考文献

[1] 「数学とっておきの 12 話」(岩波ジュニア新書 417)、片山孝次、岩波書店(2002)

[2] 「数学のひろば−柔らかい思考を育てる問題集−Ⅰ・Ⅱ」、ドミトリ・フォミーン、セルゲイ・ゲンキン、イリヤ・イテンベルク著、志賀浩二、田中紀子訳、岩波書店 (1998)

[3]「NHK 高校講座　数学基礎 2004 年度」、日本放送協会、日本放送出版協会編、日本放送出版協会（2004）p.86-89

[4] 「グラフ理論入門　原書第４版」、R.J.ウィルソン著、西関隆夫・西関裕子共訳、近代科学社(2002)

７．謝辞

サイエンス研究会数学班の活動において、川口先生と佐藤先生に、多大なご指導を賜りました。

また、もうひとつのサイエンス研究会数学班(６年生)の先輩方には、多くのアドバイスをいただきました。

この場で、深く感謝申し上げます。