

惑星運動シミュレータの開発

5年C組 前澤俊哉

指導教諭 末谷健志

1. 要約

私は、複数物体の放物運動と衝突のシミュレーションを行う、物理シミュレータの制作に成功した。また、その制作知識を元に、惑星運動シミュレータを開発した。

キーワード シミュレーション、斜方投射、万有引力

2. 研究の背景

学校で学ぶ物理の力学分野の各公式は、簡潔ではあるものの、イメージがし辛いという一面を持っている。そこで、物理現象のシミュレーションを行うことにより、より物理が理解しやすくなるのではないかと考え、研究するに至った。

3. 研究の目的

研究 I

複数物体の衝突をシミュレートし、反発係数が1のとき、物体全体での力学的エネルギー保存則が成り立つことを確認する。

研究 II

研究 I で学んだ知識をもとに、惑星運動シミュレータを制作し、太陽系の惑星の誕生をシミュレートする。

4. 研究内容

(1) 仮説

<研究 I 物体衝突シミュレータ>

シミュレータを制作し、複数の同質量の物体が反発係数1で衝突し続けるとき、物体全体の力学的エネルギーの和が一定となることを確認できる。

<研究 II 惑星運動シミュレータ>

シミュレータを制作し、惑星運動のシミュレーションを行うことにより、太陽系の誕生を確認できる。

(2) 研究方法

<研究 I 物体衝突シミュレータ>

物体の衝突シミュレータをC++言語を用いて制作する。シミュレータは、壁に囲まれた空間の中で物体を斜方投射し、物体と壁、または物体同士の衝突判定を行う。斜方投射の公式は以下の通りである。

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y} - gt$$

$$x = v_{0x}t, \quad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

(v:速度、g:重力加速度、t:時間)

物体と壁あるいは物体同士の衝突後、衝突後の物体の速度を反発係数の公式と運動量保存則に基づいて決定する。

$$e = -(v'_A - v'_B) / (v_A - v_B)$$

$$m_A v'_A + m_B v'_B = m_A v_A + m_B v_B$$

(e:反発係数、v:速度、m:質量、' :衝突後)

また、物体全体の力学的エネルギーの和を以下の式により算出し、グラフ化する。

$$w = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 + m_k g h_k \right)$$

(m:質量、v:速度、h:高さ)

なお、物体のXY平面上の初期位置と初速度は乱数を用いて決定した。

<研究II 惑星運動シミュレータ>

研究Iと同様、C++言語を用いてシミュレータを制作する。シミュレータは、ある一定の範囲内に大量の物体をランダムに配置し、物体に初速度を与えたのち万有引力の法則に基づいて各物体を運動させる。万有引力の法則の公式は、以下の通りである。

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

(F:万有引力、G:万有引力定数、M,m:質量、r:物体間の距離)

物体の初速度は、上記の万有引力の式と向心力の式を連立させて求められる。以下に向心力の式と物体の初速度を求める式を示す。物体と太陽の距離が小さいほど物体の初速度は大きくなる。

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

$$v_{0x} = -\sqrt{G_s / r} \frac{y}{r}, \quad v_{0y} = \sqrt{G_s / r} \frac{x}{r}$$

(F:向心力、m:質量、v:速度、r:太陽との距離、G_s:日心重力定数)

各物体は、太陽との万有引力により太陽の周りを円運動するが、物体間に働く万有

引力により軌道がずれ、他の物体と衝突する。衝突後、物体は衝突してきたもう一方の物体を吸収し、質量を増す。その物体はまた別の物体と衝突し、さらに質量を増していく。この過程を幾重にも得ることにより、莫大な質量を持つ惑星が誕生するはずである。

(3) 研究の結果

<研究I 物体衝突シミュレータ>

物体衝突シミュレータの制作に成功した(図1)。このシミュレータでは、 Δt 、重力加速度、物体の半径と個数、反発係数の値を自由に変えることができる。

これを用いて反発係数が1のときのシミュレーションを行い、横軸に時間、縦軸に力学的エネルギーをとったグラフを表示した(図2)。このグラフから、全物体の力学的エネルギーの和が一定となることを確認できた。また、反発係数が1未満のとき力学的エネルギーの和が徐々に減少し(図3)、反発係数が1より大きいとき力学的エネルギーの和が徐々に増加することもわかった(図4)。

<研究II 惑星運動シミュレータ>

実際にシミュレータを制作した(図5)。このシミュレータでは、物体の衝突回数を視覚的に把握するため、物体の半径を衝突分だけ変更させ、物体を表示している。

このシミュレータを用いて、約二週間をかけてシミュレーションを行った。シミュレーションの条件は図6のとおりである。シミュレーションの結果を図7、図8、図9に示す。

5. 考察

<研究Ⅰ 物体衝突シミュレータ>

シミュレーションを通じて、反発係数と力学的エネルギーの和の関係を確認できた。ここでは、この関係について数式の面から考察したい。

反発係数の式と運動量保存則の式を連立すると、

$$v'_A = \{v_A m_A + v_B m_B + e m_B (v_B - v_A)\} / (m_A + m_B)$$
$$v'_B = \{v_A m_A + v_B m_B + e m_A (v_A - v_B)\} / (m_A + m_B)$$

となる。この式から、 $m_A = m_B$ かつ $e = 1$ であるとき、 $v'_A = v_B$ かつ $v'_B = v_A$ となることがわかる。よって、全体で見た物体の運動エネルギーは変化せず、力学的エネルギーの和が一定に保たれるのである。

$e > 1$ 、 $e < 1$ のときも同じように考えることができる。

<研究Ⅱ 惑星運動シミュレータ>

図 10 は、太陽からの距離 r を横軸に、その太陽からの距離 r から $r+10$ の間に存在するすべての物体の平均半径を縦軸にとったグラフである。なお、グラフの横軸の単位は 10^9 m であり、150[Pixel]付近が地球、780[pixel]付近が現在の太陽系の木星の位置にあたる。ここでは、最下部のグラフからシミュレーションで 50000 ターンごとのグラフを表示している。このグラフから、各物体は衝突を繰り返して成長しているものの、ピークは分散的であり、惑星系は誕生していないと言える。

惑星系を誕生させるためには、このグラフのピークを収束させ、さらに大きな質量を持った物体を点在させることが必要だ。

そのためには、物体の数を増やすことが重要である。

6. まとめと今後の課題

今回の研究において、複数物体の放物運動と衝突のシミュレーションを行う、物理シミュレータの制作に成功し、力学的エネルギー保存則が成り立つことを確認できた。しかし、惑星運動シミュレータによる太陽系の形成は確認できなかった。

今回の惑星運動シミュレータの研究では、物体の個数を 2 万個にしてシミュレーションを行ったが、物体の個数を多くすることにより、形成される太陽系がより現実のものに近づくと予想される。この場合、計算量が莫大になってくるため、計算量を削減し処理速度を向上することが課題となる。

7. 参考文献・サイト

- [1]物理のエッセンス、(河合出版)
- [2]ゲーム開発のための物理シミュレーション入門、(オーム社)

8. 謝辞

今回の研究を指導してくださった末谷先生とサイエンス研究会物理班メンバーに深くお礼申し上げます。

9. 資料

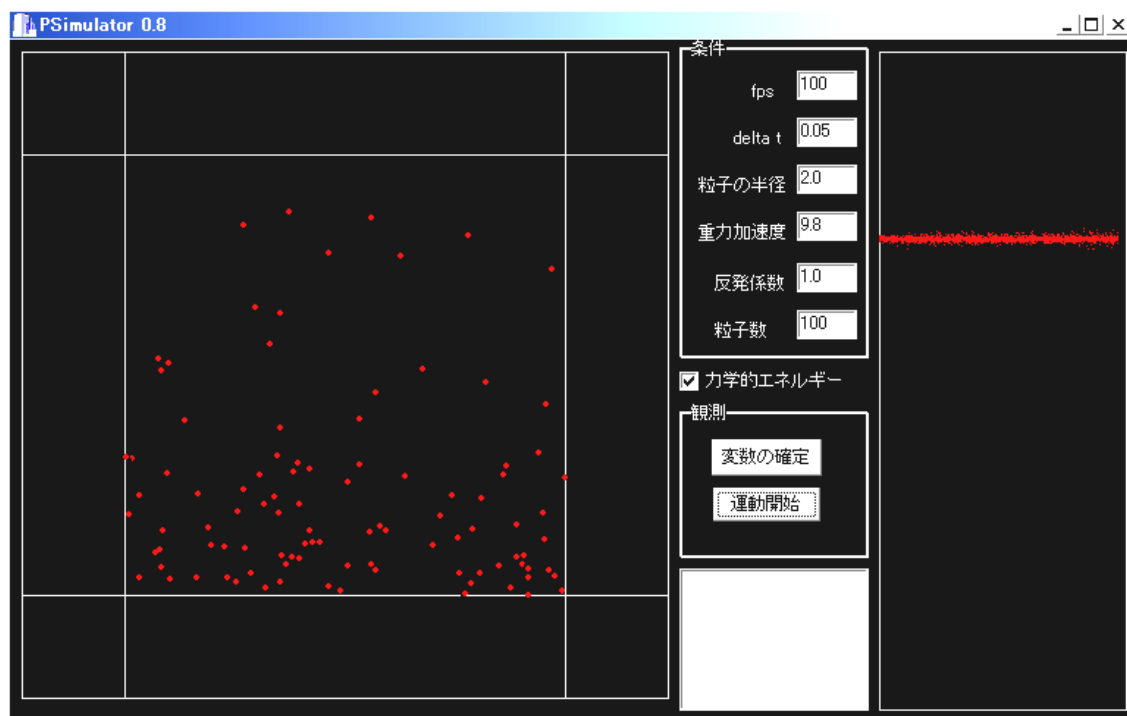


図1 物体衝突シミュレータ

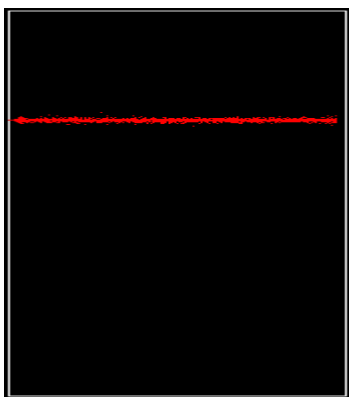


図2 $e = 1$

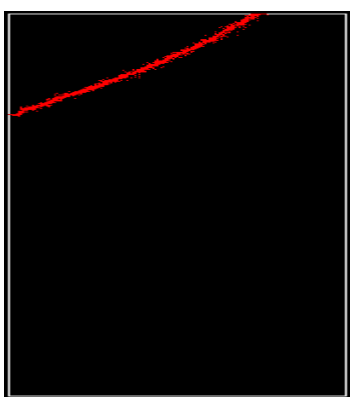


図3 $e = 1.01$

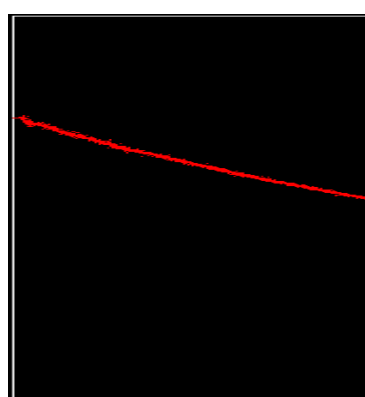


図4 $e = 0.99$

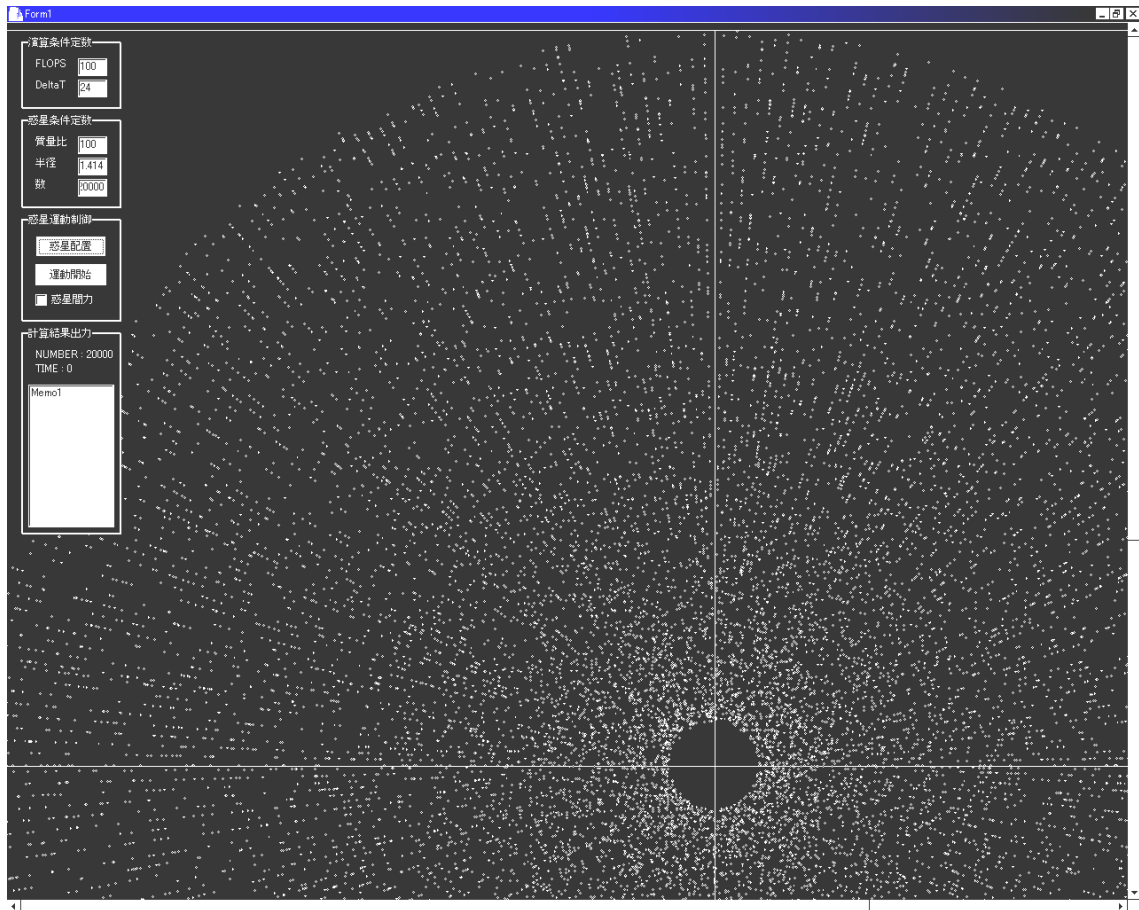


図5 シミュレータ

<時間>

1 ターンあたりの時間 24 [h]

<宇宙>

サイズ 1680×1680[pixel]

10^9 m/pixel

<物体>

物体の質量 3.51×10^{10}

(イトカワと同じ質量)

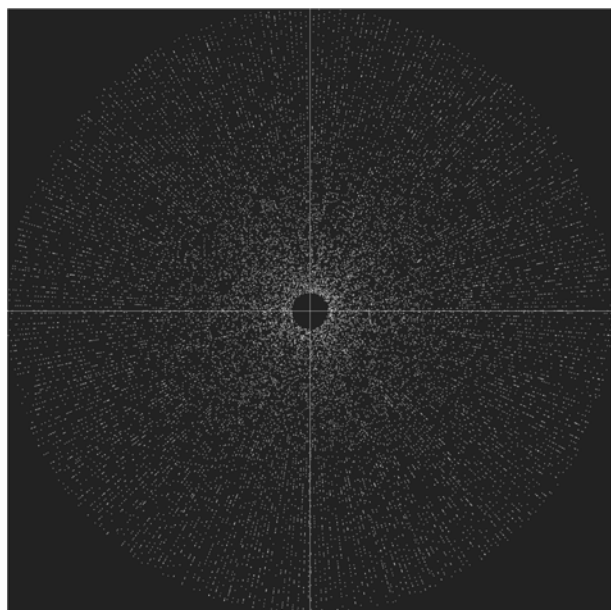


図7 0ターン目 (粒子数 20000)

図6 条件

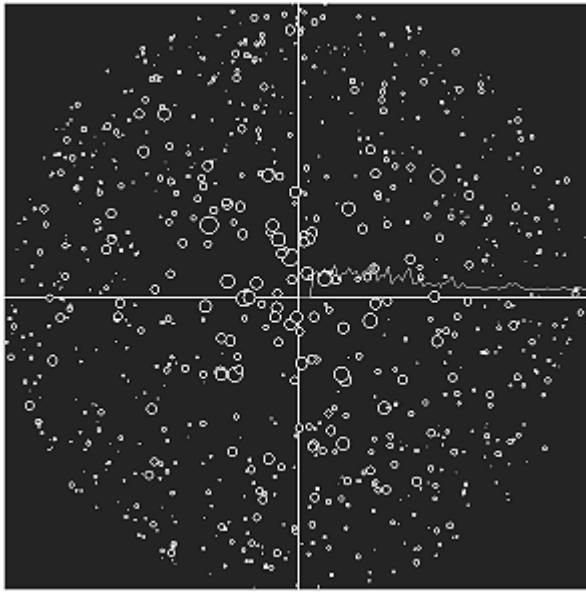


図 8 950000 ターン目 (粒子数 5000)

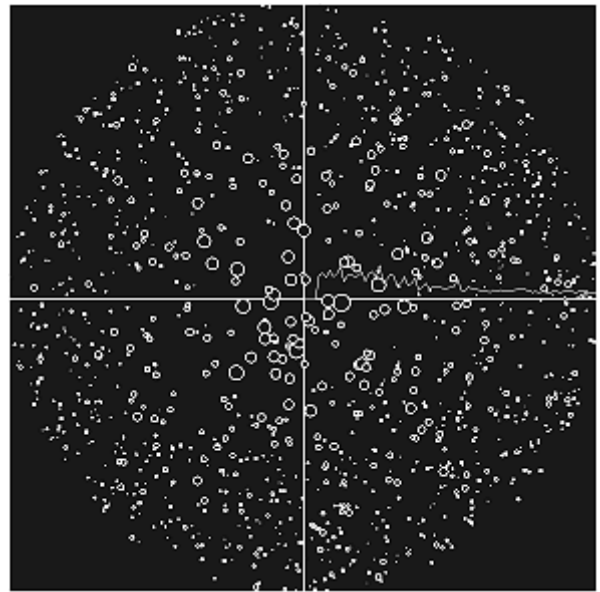


図 9 1900000 ターン目 (粒子数 2000)

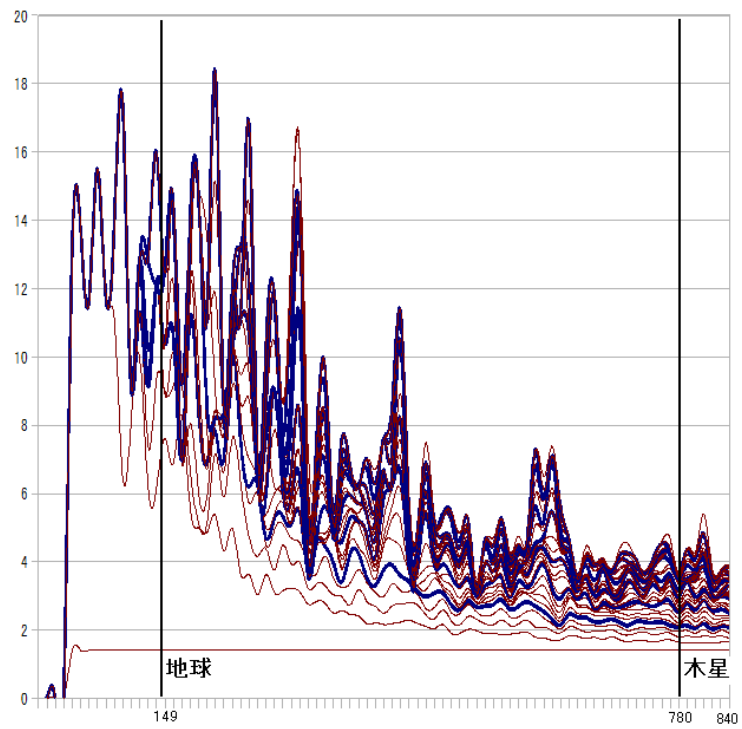


図 10 太陽からの距離と物体の平均半径