ピタゴラス三角形とピタゴラス数

３年Ａ組　清水　悠平
３年Ｃ組　佐藤　圭
３年Ｃ組　森　宇宏
指導教員　川口　慎二

１．概要

サイエンス研究会数学班３年生は、幾何の授業で「ピタゴラスの定理(三平方の定理)」を学習した。そのとき、この定理の証明が 100 通り以上あることを知った。さらに、顧問の先生から、直角三角形の３辺の関係を代数的に調べることもできるという話を聞いて、ピタゴラス数について興味を持った。その理解のために、参考文献[1]を輪読しながら、基本事項の習得を行った。本稿では、[1]の内容をまとめながら、基本的事実について紹介する。

キーワード　ピタゴラスの定理(三平方の定理)、ピタゴラス三角形、ピタゴラス数、ピタゴラス方程式、既約、互いに素、フェルマーの大定理

２．研究の背景と目的

２－１．ピタゴラス三角形とは

ピタゴラス三角形(Pythagorean triangle)とは、３辺の長さを整数で表すことができる直角三角形である。

B.C.2000 頃のエジプトではすでに辺の長さが 3, 4, 5 のピタゴラス三角形の存在を知られていた。このようにピタゴラス三角形はとてつもなく長い歴史がある。

また、よく知られているように直角三角形の３辺の間には、ピタゴラスの定理(定理１)が成り立つことを授業で学習した。

<u>定理１</u>　(ピタゴラスの定理)

直角を挟む２辺の長さが x, y である直角三角形の斜辺の長さを z としたとき、

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \cdots(1)$$

が成り立つ。

このとき、等式(1)を**ピタゴラス方程式(Pythagorean equation)**という。

また逆に、等式(1)が成り立つ三角形は直角三角形となる(「**ピタゴラスの定理の逆**」と呼ばれる)。 そして、ピタゴラス三角形の３辺の長さの組み合わせを**ピタゴラス数(Pythagorean number)**という。

あるピタゴラス三角形を拡大すると、新しい直角三角形ができる。新しくできた直角三角形は、各辺が自然数であり、もとの三角形に相似なので、これもまたピタゴラス三角形となる。このようにあるピタゴラス三角形を２倍，３倍，４倍…としていくと、次々に新たなピタゴラス三角形ができる。つまり、１つのピタゴラス三角形から無数のピタゴラス三角形が生み出される。これを記号で表現しよう。一般に、３辺が x, y, z であるピタゴラス三角形を (x, y, z) と表すことにする。このとき、(kx, ky, kz)

(ただし、$k=1,2,3,\cdots$)はすべてピタゴラス三角形になる。

例えば、(3, 4, 5)という組み合わせのピタゴラス三角形からは、(6, 8, 10), (9, 12, 15)などのピタゴラス三角形が得られる。

ここで、ピタゴラスの定理の証明をいくつか紹介する。

［証明１］

３辺の長さが x, y, z であり、∠A＝90°である直角三角形 ABC を考える。まず、△ABC と合同な直角三角形を図１のように４枚並べて、正方形 ADEF をつくる。

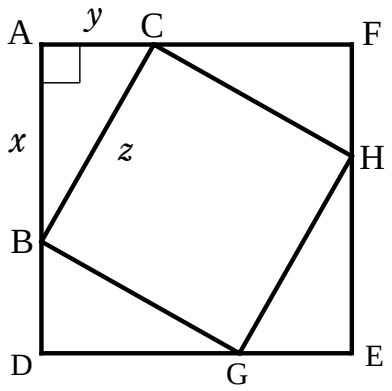

図１

このとき、△ABC, △DGB, △EHG, △FCH はすべて合同である。すると、

AB＝DG＝EH＝FC＝ x ,

AC＝DB＝EG＝FH＝ y ,

BC＝GB＝HG＝CH＝ z

であるから、正方形 BGHC の面積 S は、$S=c^2$ と表すことができる。一方、正方形 BGHC の面積は、一辺が $(x+y)$ の正方形から、４枚分の直角三角形の面積を引いたものなので

$$(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab$$

と表すこともできる。したがって、

$$c^2=(a+b)^2-2ab=a^2+b^2=c^2$$

となる。(Q.E.D.)

［証明２］

図２のように、３辺の長さが x, y, z であり、∠C＝90° である直角三角形 ABC を考える。頂点 C から斜辺 AB へ下ろした垂線の足を D とする。

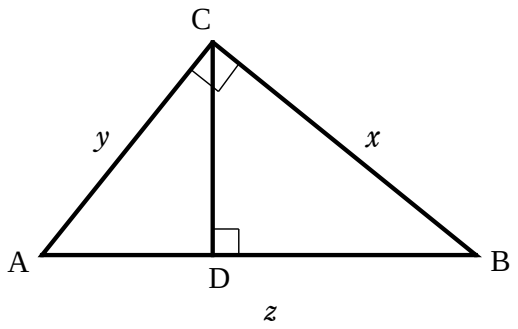

図２

ここで、∠D＝90°より、

△ABC∽△ACD∽△CBD

となる。よって、△ABC と△ACD の相似比は y ：AD＝ z ： y であり、よって、AD ＝$\dfrac{y^2}{z}$ …①である。

同様に、△ABC と△CBD の相似比は x ：BD ＝ z ： x であり、したがって、BD ＝$\dfrac{x^2}{z}$ …②となる。

いま、z ＝AB＝AD+BD であるから、

$$z=\frac{y^2}{z}+\frac{x^2}{z}=\frac{x^2+y^2}{z}$$

が成り立つ。この両辺に z (>0) を掛けると、$z^2=x^2+y^2$ となる。(Q.E.D.)

［証明３］

３辺の長さが x, y, z (BC= x ， CA= y ， AB= z とする)であり、∠A＝90°である直角三角形 ABC を考え、図３のように、各辺を一辺とする正方形を辺上につける。また、点 C から辺 DE におろした垂線の足を L とし、AB との交点を M とする。また、I を通り AB に平行な直線 IJ を引き、線分 AH との交点を J、線分 IJ と辺 BD の延長線との交点を K とする。

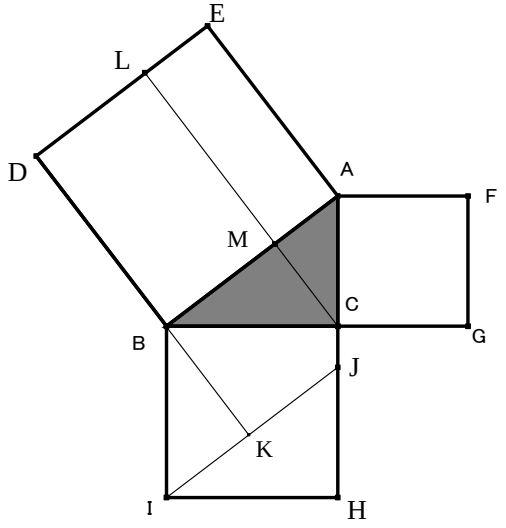

図３

すると、IJ//BA、IB//JA であるため、四角形 ABIJ は平行四辺形である。ここで、▱ABIJ＝BI×BC なので、

▱ABIJ＝□BIHC …①

ここで、▱ABIJ と□BIHC はそれぞれ平行四辺形 ABIJ と正方形 BIHC の面積をそれぞれ表している。

また、△IBK と△CBM において、BI＝BC であり、

∠IBK＝90°－∠KBC＝∠CBM

なので、ともに直角三角形であり、斜辺と１鋭角が等しいので、△IBK≡△CBM である。

よって BK＝BM となり、また KD//CL であるから、

▱ABIJ＝AB×BK=BD×BM

＝▭BMLD …②

ここで、▭BMLD は長方形 BMLD の面積を表している。

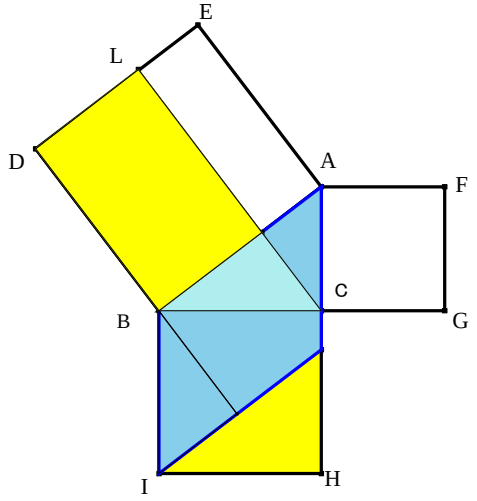

図４

①，②より、

□BIHC＝▭BMLD …③

であり、同様に、

□ACGF＝▭AELM …④

となる。③，④より、

□BIHC＋□ACGF＝□AEDB

つまり、$x^2 + y^2 = z^2$ が成り立つ。

(Q.E.D.)

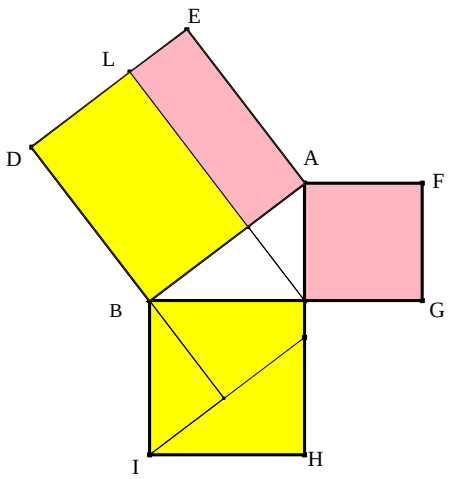

図５

［証明４］

３辺の長さが x, y, z (AB= x ，BC= y ，CA= z とする)であり、∠B＝90°である直角三角形 ABC を考える。

図６のように、直角三角形の１辺 AB の延長上にAD＝BCとなるような点Dをとり、AD⊥DE かつ DE＝AC となるような点 E をとる。E と A，E と C を結ぶ。

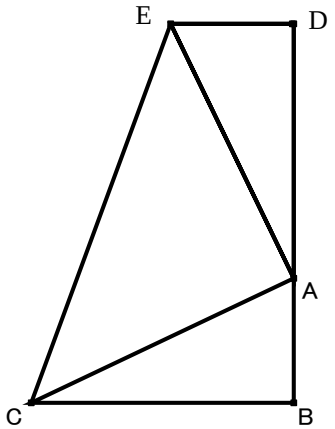

図６

△EDA と△ABC において、AD＝CB であり、DE＝BA，∠ADE＝∠CBA＝90°なので、△EDA≡△ABC となる。よって AE＝CA＝ z である。

ここで、四角形 BDEC は上底が DE＝ x ，下底が BC＝ y ，高さが BD＝AB+AD＝ $x+y$ の台形であるので、その面積は

$$\frac{1}{2}(x+y)^2=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2\right) \quad \cdots①$$

である。また、この台形は△ABC+△ABE＋△EAD と表すことができる。△EAD は一辺が z の直角二等辺三角形なので、

$$\triangle\mathrm{EAD}=\frac{1}{2}^{\ 2} \quad \cdots②$$

である。したがって、この台形 BDEC の面積は、②より、

$$\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}z^2+xy \quad \cdots③$$

となる。ゆえに、①，③から、

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+xy=\frac{1}{2}z^2+xy$$

すなわち、$x^2+y^2=z^2$ が成り立つ。

(Q,E,D)

本稿では、ピタゴラス三角形のもつ幾何的性質と、ピタゴラス数のもつ代数的性質の対応に注目しながら、ピタゴラス数の基本的な性質をまとめたい。

３．研究内容

３－１．既約なピタゴラス三角形

２つの整数 a, b が**既約(irreducible)**であるとは、２数の最大公約数が１であるときをいう。一般に、２数 a, b の最大公約数を (a, b) と表すので、a, b が既約であることを $(a, b)=1$ と表す。このとき、a, b は**互いに素(coprime)**であるともいう。さらに、

$(a,b)=1$ かつ$b \neq 0$であるとき、分数$\dfrac{a}{b}$はこれ以上約分できない。このような分数を**既約分数(irreducible fraction)**という。

ピタゴラス三角形が既約であるとは、３辺の、どの２つの辺の長さも既約になっているときをいう。

既約なピタゴラス三角形を求めるために、まず既約なピタゴラス三角形(x,y,z)について、この３辺の長さの性質を調べていく。

以降、ピタゴラス三角形(x,y,z)を考え、zをその斜辺とする。つまり、$x^2+y^2=z^2$が成り立っているものとする。

まず、斜辺以外の２辺については、それらの偶奇性(パリティ)が決定される。証明のために、次の補題を準備しておく。

<u>補題Ⅰ</u>

奇数の平方を８で割ると、１余る。

［証明］

ある自然数kをもちいて、ある奇数を$2k+1$と表す。この平方は

$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$ となる。このとき、$k(k+1)$は連続２数の積ゆえ偶数なので、$4k(k+1)$は８で割り切れる。ゆえに、$(2k+1)^2$は 8 で割ると 1 余る。(Q.E.D.)

<u>定理２</u>

x,yは(奇数、偶数)または(偶数、奇数)の組合せとなる。

［証明］

まず仮定として、x,yが互いに素であるとする。

(i) どちらも偶数である場合

$x=2m, y=2n$ （m,nは自然数)と表すことができるので、どちらも 2 で割ることができ、2 数が互いに素であるという仮定に反するため、起こり得ない。

(ii) どちらも奇数である場合

補題Ⅰから、２つの奇数の平方の和を 8 で割ると 2 余ることがわかります。したがって、２つの奇数の平方の和は４で割り切ることができない。奇数の平方は奇数なので、２つの奇数の平方の和は偶数になる。つまり、z^2は偶数になる。ゆえに、zも偶数であるとわかる。

ここで$z=2k$とすると、$z^2=4k^2$となり 4 の倍数になる。つまり、x^2+y^2が 4 の倍数である。これは、２つの奇数の平方の和を 4 で割り切ることができないという事実に反するので、２数が両方奇数ということはあり得ない。

(i), (ii)から、x,yは一方が奇数であり、一方が偶数でなければならないことが示された。(Q.E.D.)

x,y,zをより具体的に求めるためには、次の補題が必要である。この補題は、２数を因数分解して考えれば、直感的には正しく思える。しかし、数学的に正確な証明をするためには、素因数分解の一意性を認めておく必要がある。ここでの証明は行わないので、参考文献[2]などを参照せよ。

<u>補題Ⅱ</u>

２つの互いに素である数の積が平方数のとき、この２数はどちらも平方数でなければならない。

定理３

x, y, z は互いに素な２数 m, n を用いて、それぞれ

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2$$

と表すことができる。

［証明］

定理２から、x, y の組の一方が奇数で、もう一方が偶数であることは証明された。ここで、x を奇数、y を偶数とおいく（すると z は奇数となる）。

ピタゴラス方程式を変形させ、

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x) \quad \cdots①$$

としたとき、$z + x$ と $z - x$ は、x, z がともに奇数であることから、どちらも偶数となる。よって整数 a, b を用いて、

$$z + x = 2a,\ z - x = 2b \quad \cdots②$$

と表すことができる。ゆえに、

$$z = a + b,\ x = a - b \quad \cdots③$$

となる。この等式から a, b が互いに素であることが導かれる。

なぜならば、背理法を用いて、a, b が 1 より大きな公約数 d をもつとすると、③から d は x, z の公約数となる。ゆえに、$z + x$ と $z - x$ も公約数 d をもつことになる。ここで①から、d^2 は y^2 の約数になり、d は y の約数ともなる。このとき、d は x, y の公約数となり、x, y が互いに素であるという仮定に反する。したがって、a, b は互いに素でないといけない。

また、自然数 c を用いて $y = 2c$ と表すことができるので、①, ②から、$4c^2 = 2a \times 2b$, つまり、$c^2 = ab$ …④となる。ここで、補題Ⅱと④から、$a = m^2,\ b = n^2$ と表せる。いま、a と b が互いに素であるので、m と n も互いに素であることが分かる。③から x, z は、

$$x = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$

となる。さらに、$c^2 = ab = m^2 n^2$ より、,

$$y = 2c = 2mn$$

である。こうして、互いに素な２数 m, n を用いて、x, y, z はそれぞれ

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2 \quad \cdots⑤$$

と表すことができた。(Q.E.D.)

ちなみに、m, n がともに偶数または奇数のとき、$x = m^2 - n^2$ から、x が偶数となり、最初の仮定に反するので、m, n の一方が偶数、他方が奇数でないといけないことがわかる。

このことからわかるように、ピタゴラス三角形の斜辺でない２辺のうちどちらかは４で割りきることができる。したがって、３辺がすべて素数であるピタゴラス三角形は存在しないことになる。

これまでをまとめると、次の定理のように記述できる。

定理４

辺 y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形は、すべて

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2$$

$(m > n)$から求められる。ただし、m, n は一方が偶数で他方が奇数であるような既約な任意の２数である。また、y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) は、このような２数 m, n によって一意的に定まる。

［証明］

m, n は互いに素な整数で、$m > n$ とし、

さらに一方が偶数、もう一方が奇数であるとする。⑤によって、これらの数から既約なピタゴラス三角形(x, y, z)の辺が決まる。恒等式

$$(m-n)^2+(2mn)^2=(m+n)^2$$

から、ピタゴラス方程式が成り立つことは明らかである。

次に、⑤のように定めたx, yが互いに素になることを示そう。そこで、x, yが公約数d （$d>1$)をもつとする。xは奇数なので、dも奇数となる。また、dはzの約数にもなる。すると、⑤からm^2+n^2とm^2-n^2が公約数dを持つことになり、$2m^2$と$2n^2$がdで割り切れる。ゆえにm^2とn^2もdで割り切れる。

しかし、これはm, nが互いに素であるという最初の条件に反するので、x, yが互いに素であることになる。

最後に、m, nが異なる(x, y, z)の組み合わせには、異なったピタゴラス三角形が対応するということを確かめる。これは、⑤から

$$2m^2=x+z, \quad 2n^2=x+z$$

となるためx, y, zが一致した場合m, nも一致する。したがって、m, nが異なるとx, y, zも異なることが示された。(Q.E.D.)

<u>定理５</u>

yが偶数であるようなすべてのピタゴラス三角形(x, y, z)は式

$$x=kl, \quad y=\frac{k^2-l^2}{2}, \quad z=\frac{k^2+l^2}{2}$$

によって表される。ここでkとlは互いに素なすべての奇数の組を動く。しかもyが偶数であるような既約なピタゴラス三角形(x, y, z)はこれによって一通りに表される。

［証明］

ピタゴラス方程式$x^2+y^2=z^2$は、因数分解により、$x^2=(z+y)(z-y)$と表すことができる。

ここで、yは偶数、x, zは奇数である。よって、$u=z+y$と$v=z-y$はともに奇数で互いに素である。すると、$x^2=uv$と表すことができる。

したがって、$u=k^2$、$v=l^2$をみたすような互いに素な２数k, lが存在する。つまり、$x=kl$であり、

$$y=\frac{u-v}{2}=\frac{k^2-l^2}{2}, \quad z=\frac{u+v}{2}=\frac{k^2+l^2}{2}$$

となる。したがって、

$$x=kl, \quad y=\frac{k^2-l^2}{2}, \quad z=\frac{k^2+l^2}{2} \quad \cdots ⑦$$

と表される。一意性については、定理４と同様に証明できる。(Q.E.D.)

yが偶数であるような既約なピタゴラス三角形を無限に求めたければ、まずkに奇数の値3, 5, 7, 9, …を順に当てはめ、lにkより小さくkと互いに素な奇数の値を順に当てはめる。最後に公式⑦によってx, y, zの値を計算しればよい。

公式⑦によって最初の 20 個の既約なピタゴラス三角形を次ページの表１に示す。

あらゆるピタゴラス三角形を求めるには、既約なピタゴラス三角形をなす自然数を次々にかけていけばよい。このようにして、yが偶数であるようなあらゆるピタゴラス三角形を得ることができる。さらに、xとyを入れ替えたピタゴラス三角形を追加すれば、すべてのピタゴラス三角形が

得られる。

このような性質を用いて、特別な場合のピタゴラス三角形を調べていく。

表１　既約なピタゴラス三角形

（はじめの 20 個）

k	l	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65
11	1	11	60	61
11	3	33	56	65
11	5	55	48	73
11	7	77	36	85
11	9	99	20	101
13	1	13	84	85
13	3	39	80	89
13	5	65	72	97
13	7	91	60	109
13	9	117	44	125
13	11	143	24	145

３－２．100 以下の辺をもつピタゴラス三角形

３辺の長さがいずれも 100 を超えないようなピタゴラス三角形をすべて求めるには、斜辺の長さが 100 以下であるような三角形を見つければ十分である。

表１をみると、条件を満たすものはたった 16 個しかない。なぜなら $k \geqq 15$ とすると、

$$z = \frac{k^2 + l^2}{2} > \frac{15^2}{2} > 100$$

となってしまい、100 を超えてしまうからである。

また、表１の最初の７個は辺を２倍することができ（そうしても辺の長さは 100 を超えない）、同様に最初の５個は 3 倍、最初の３個は４倍または５倍、最初の２個は６倍または７倍、最初の１個は８倍から 19 倍までできることができ、合計 50 個のピタゴラス三角形を求めることができる。最後に x, y の値を入れ替えることによってできた 50 個を加えて、辺がすべて 100 以下であるピタゴラス三角形を合計 100 個求めることができた。

３－３．連続する整数を２辺にもつピタゴラス三角形

表１に挙げた既約なピタゴラス三角形を見ると、(3, 4, 5)というペアは連続する３数からできている。このようなピタゴラス三角形はこれしかない。この事実は、簡単に証明することができる。

<u>定理６</u>

連続する３数を辺としてもつピタゴラス三角形は(3, 4, 5)のみである。

［証明］

ある自然数 n（$n \geqq 2$)を用いて、連続する３数を $n-1, n, n+1$ と表す。この３数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1$$

から、$n^2=4n$，$n(n-4)=0$ となり、n ≧2 なので、n ＝4 である。

よって、この条件を満たすものは(3, 4, 5)のみである。(Q.E.D.)

また、辺の長さが等差数列となるものを求めることも簡単である。

<u>定理７</u>

等差数列である３数を辺としてもつピタゴラス三角形は(3, 4, 5)に相似である。

［証明］

定理６と同じように自然数kを公差として、３辺を$n-k, n, n+k$とする。

この３数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-k)^2+n^2=(n+k)^2$$

$$n^2-2kn+k^2+n^2=n^2+2kn+k^2$$

から、$n^2=4kn$，$n(n-4k)=0$ となり、n ≧2 なので、$n=4k$ である。

この条件を満たすものは$(3k, 4k, 5k)$であり、これらはすべて(3, 4, 5) と相似なものである。(Q.E.D.)

次に２辺の長さが連続する自然数で表せるようなピタゴラス三角形を考える。このとき、x, zは奇数としたので、$z-x=1$とはならない。したがって、$z-y=1$となるものを考える。定理５によって、$l=1$とわかるので、(x, y, z)は

$$x=k,\ \ y=\frac{k^2-1}{2},\ \ z=\frac{k^2+1}{2}\quad\cdots(2)$$

となる。

この公式によって、$z-y=1$であるすべてのピタゴラス三角形が求められ、最初のいくつかを挙げると次のようになる。

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), …

ここで、この公式以外でこのような三角形を求める方法を２つ紹介する。

１つ目は、次のメスネーラ(Moessnera)の恒等式を用いる方法である。

<u>定理８</u>(メスネーラの恒等式)

すべての自然数nに対して、

$$(10n-5)^2+\{50n(n-1)+12\}^2$$

$$=\{50n(n-1)+13\}^2$$

が成り立つ。

これによって求められるものの例として、nに１から５を代入すると、(5, 12, 13), (15, 112, 113), (35, 612, 613), (45, 1012, 1013)などが挙げられる。

もうひとつの方法は、まずkが奇数であることから、$k=2n+1$とおき、さらにsを整数とし、$n=10^s$とおくと、(2)から

$$x=2\times10^s+1=2\overbrace{0\cdots0}^{s-1}1$$

$$y=2\times10^{2s}+2\times10^s=2\overbrace{0\ldots0}^{s-1}2\overbrace{0\ldots0}^{s}$$

$$z=2\times10^{2s}+2\times10^s+1=2\overbrace{0\ldots0}^{s-1}2\overbrace{0\ldots0}^{s-1}1$$

が得られる。

例えば、$s=1,2,3,4$を代入すると下表２を得る。

表２　$s=1,2,3,4$ の場合

x	y	z
21	220	221
201	20200	20201
2001	2002000	2002001
20001	200020000	200020001

このように、機械的にいくらでもピタゴラス三角形を求めることができる。

次に、直角をはさむ２辺の長さが連続する自然数で表せるピタゴラス三角形を考えよう。まず、次の事実はすぐに証明される。

補題Ⅲ

直角をはさむ２辺の長さが連続する自然数で表せるピタゴラス三角形は無数に存在する。

［証明］

ある２つの自然数 x, z によって表されるピタゴラス三角形 $(x, x+1, z)$ があるとき、$(3x+2z+1,\ 3x+2z+2,\ 4x+3z+2)$ もピタゴラス三角形になる。

実際に、

$$(3x+2z+1)^2+(3x+2z+2)^2$$
$$=18x^2+24xz+8z^2+18x+12z+5 \quad \cdots(3)$$

である。ここで、$(x, x+1, z)$ はピタゴラス三角形なので、$x^2+x^2-2x+1=z^2$、つまり $2x^2+2x+1=z^2$ である。したがって(3)から、

$$18x^2+24xz+8z^2+18x+12z+5$$
$$=(2x^2+2x+1)+16x^2+24xz+8z^2+16x+12z+4$$
$$=16x^2+24xz+9z^2+16x+12z+4$$
$$=(4x+3z+2)^2$$

となり、

$(3x+2z+1,\ 3x+2z+2,\ 4x+3z+2)$

がピタゴラス三角形であることがわかる。

直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形を、この式に当てはめることでできた三角形は、これもまた直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形である。この操作を繰り返すと、次々に、直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形が求められる。(Q.E.D.)

このようにして求められるもので、最初の４つを挙げると次のようになる。(3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169), (696, 697, 985)である。

次に、上の方法によって直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形がすべて求められることを証明しよう。

定理９

直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるようなピタゴラス三角形は、必ず三角形の無限列 $(3,4,5),\ f(3,4,5),\ ff(3,4,5)\cdots$ の中に現れる。ただし、$f(x, x+1, z)$ はピタゴラス三角形

$(3x+2z+1,\ 3x+2z+2,\ 4x+3z+2)$

を表すと定める。

この定理９を証明するために、次の補題を証明する。

補題Ⅳ

$x>3$ のとき、$(x, x+1, z)$ がピタゴラス三角形ならば、$f(p, p+1, q)=(x, x+1, z)$ を満たす $(p, p+1, q)$ もピタゴラス三角形

であり、$q<z$ である。さらに、

$$(p,p+1,q)$$
$$=(3x-2z+1,3x-2z+2,3z-4x-2)$$

である。

［証明］

まず、

$$(p,p+1,q)$$
$$=(3x-2z+1,3x-2z+2,3z-4x-2)$$

となることを示す。つまり、$(p,p+1,q)$ が

$$f(p,p+1,q)=(x,x+1,z)\cdots①$$

を満たすことを確かめればよい。

$$3p-2q+1$$
$$=3(3x-2z+1)+2(3z-4x-2)+1=x,$$
$$4p+3q+2$$
$$=4(3x-2z+1)+3(3z-4x-2)+2=z$$

となることから、$(p,p+1,q)$ は①を満たす。

次に、$p>0$，$0<q<z$ となることを示す。$x>3$ ゆえ、

$$x^2>3x=2x+x>2x+1$$

である。ところが、$(x,x+1,z)$ がピタゴラス三角形なので、$x^2+(x+1)^2=z^2$ であるから、

$$4z^2=8x^2+4-(2x+3)$$
$$=9x^2+8x+4-x^2$$
$$<9x^2+8x+4-(2x+3)$$
$$=9x^2+6x+1=(3x+1)^2$$

であるから、$2z<3x+1\cdots②$，つまり、

$$p=3x-2z+1>0$$

となる。ここで、$x>0$ に注意すると、不等式②を弱めて、$2z<4x+2$ とすることができる。ゆえに、$z<2x+1$ となり、さらに、

$x^2+(x+1)=z^2$ かつ $x>0$ であるから、

$$9z^2=18x^2+18x+9$$
$$>16x^2+16x+4=(4x+2)^2$$

つまり、$3z>4x+2$ となる。したがって、$0<3z-4x-2=q$ である。一方、

$$q=3z-4x-2<3z-2z=z$$

ゆえ、$0<q<z$ となり、これで不等式は証明された。

最後に、$(p,p+1,q)$ がピタゴラス三角形になることを証明する。

$$p^2+(p+1)^2=(3x-2z+1)^2+(3x-2z+2)^2$$
$$=18x^2+8z^2-24xz+18x-12z+5$$
$$q^2=(3z-4x-2)^2$$
$$=16x^2+9z^2-24xz+16x-12z+4$$

であるが、$z^2=2x^2+2x+1$ であるので、

$$16x^2+9z^2-24xz+18x-12z+5$$
$$=18x^2+8z^2-24xz+18x-12z+5$$

となる。したがって、$q^2=p^2+(p+1)^2$ が成り立ち、補題は証明された。(Q.E.D.)

ここで、ピタゴラス三角形 $(x,x+1,z)$ に対して、

$$f(p,p+1,q)=(x,x+1,z)$$

を満たすピタゴラス三角形 $(p,p+1,q)$ を対応させる操作を g として表すことにすると、g は f の逆操作になる。つまり、

$$g(x,x+1,z)=(p,p+1,q)$$
$$=(3x-2z+1,3x-2z+2,3z-4x-2)$$

となる。

［定理９の証明］

補題Ⅳによって、小さい２辺が連続する自然数になっているピタゴラス三角形 $(x,x+1,z)$（$x>3$）から、また新たに、条件を満たすピタゴラス三角形 $(p,p+1,q)$ ができる。

そこでさらに $x>3$ ならば、再び補題Ⅳ

によって新たなピタゴラス三角形ができる。しかし、また同様に操作を続けたからといって、無限に新たな三角形ができることはない。この操作をするごとに斜辺の長さは短くなっていくからである。だから必ず、ある整数nに対して、ピタゴラス三角形　$(x_n x_n+1, z_n)=g^n(x, x+1, z)$（ただし、$x_n=3$)に行きつくだろう。すると、

$$x_n^2+(x_n+1)^2=z_n^2$$

から、$z_n=5$でなければならない。したがって、ある整数nに対して、

$$g^n(x, x+1, z)=(3, 4, 5) \quad \cdots①$$

が成り立たなければならない。

ここで、$x>3$である任意のピタゴラス三角形$(x, x+1, z)$に対して、

$$\begin{aligned} &fg(x, x+1, z) \\ &=f(3x-2z+1, 3x+2z+2, 3z-4x-2) \\ &=(x, x+1, z) \quad \cdots② \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$ffgg(x, x+1, z)=(x, x+1, z)$$

であり、一般に$k=1,2,3\cdots$に対して

$$f^k g^k(x, x+1, z)=(x, x+1, z) \quad \cdots③$$

が導かれる。したがって、①より、ある整数nに対して、$(x, x+1, z)=f^n(3,4,5)$となり、定理９は証明された。（Q.E.D.）

３－４．辺が３または５で割り切れるピタゴラス三角形

３－１節で述べたように、すべてのピタゴラス三角形では直角をはさむ２辺のうち少なくとも一つは４で割りきれなくてはならない。

さらに、次の事実が成り立つ。

<u>定理 10</u>

任意のピタゴラス三角形について、直角をはさむ２辺のうち少なくとも一つは３で割り切れなければならない。

［証明］

この定理を証明するために、あるピタゴラス三角形(x, y, z)が存在して、直角をはさむ２辺x, yはどちらも３で割り切れないと仮定する。このとき、

$$x=3k\pm1, \quad y=3l\pm1$$

(k, lは整数)とおく。

すると、ピタゴラスの定理において、

$$x^2+y^2=3(3k^2+3l^2\pm2k\pm2l)+2 \cdots①$$

となる。ところが、この式①の右辺は平方数にはなりえない。まず、この数は３では割り切れないので、３の倍数の平方でないことは明らかである。また、３で割り切れない数　$3t\pm1$（tは整数)の平方は

$$(3t\pm1)^2=3(3t^2\pm2t)+1$$

であり、3 で割ると１余る。しかし、x^2+y^2は３で割ると２余る。したがって、３で割り切れない数の平方にもなり得ない。

こうして、直角をはさむ２辺のいずれもが、３で割り切れないという仮定は矛盾を引き起こす。

ゆえに、x, yのうち一方は３で割り切れないといけない。(Q.E.D.)

実例を見ると、(5, 12, 13)のように３で割り切れる数と、４で割り切れる数が一致することもあり、また、(3, 4, 5)のように３で割り切れる数と、４で割り切れる数が一致しないこともある。

すべてのピタゴラス三角形について、直角をはさむ２辺の少なくとも一方がnで

割り切れるとき、このような自然数nは、1, 2, 3, 4 に限られることがすぐわかる。なぜなら、ピタゴラス三角形(3, 4, 5)をとると小さい２辺のどちらをとっても 4 より大きい自然数では割り切れないからである。

ピタゴラス三角形の３辺については、次の事実がある。

<u>定理 11</u>

任意のピタゴラス三角形について、３辺のうち少なくとも一つは 5 で割り切れなければならない。

［証明］

この定理を証明するために、数nは 5 で割り切れないと仮定する。すると、整数kを用いて、nは $n=5k\pm1$ あるいは $n=5k\pm2$ の形をしている。

$n=5k\pm1$ の場合には

$$n^2=5(5k^2\pm2k)+1,$$

$n=5k\pm2$ の場合には

$$n^2=5(5k^2\pm4k)+4$$

が成り立つ。

以上から、5 で割り切れない数の平方は、5 で割ると 1 または 4 あまることが分かる。

もし、ピタゴラス三角形(x,y,z)のx,yがどちらも 5 で割り切れないとすると、上の式からx^2,y^2はいずれも 1 または 4 余るため、その結果x^2+y^2を 5 で割った余りは 2，3，0 のどれかになる。ここで、上で示したように、z^2は 5 で割って 2 または 3 で余ることはない。したがって、z^2は 5 で割ると 0 あまるという最後の条件のみに当てはまることが分かる。つまり、z^2が 5 で割り切れるので、zも 5 で割り切れるということが分かった。(Q.E.D.)

よって、直角をはさむ２辺がいずれも 5 で割り切れない場合は、斜辺が 5 で割り切れないといけない。

また、既約なピタゴラス三角形では明らかに 5 で割り切れる辺はただ１つしかない。次の三角形

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (21, 20, 29)

を見てわかるように、5 で割ることのできる辺は、直角をはさむ 2 辺のうち偶数のものであったり、奇数のものであったり、または斜辺であったりする。

以上からわかるように、すべてのピタゴラス三角形において、３辺のうち１つがnで割り切れるとき、このような自然数nは 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかに限られる。

３－５．ピタゴラス三角形の辺の値

ここで、どのような自然数nを与えたら、直角をはさむ２辺のうち、一方がnに等しいピタゴラス三角形を作ることができるのだろうか。

これに対して次の定理を証明しよう。

<u>定理 12</u>

直角をはさむ２辺のうち小さい方がnに等しいピタゴラス三角形が存在するための必要十分条件は、nが 2 より大きい整数となることである。

［証明］

この定理を証明するために、まず次のことに注意しよう。つまり、ピタゴラス三角形(a,b,c)において

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$$

が成り立ち、また$c>b$なので、$b \geqq 1$, $c \geqq 2$である。したがって、$c-b \geqq 1$, $c+b \geqq 3$であるため、$a^2 \geqq 3$ となり、$a=1$とはならない。

また、$a=2$ともならない。なぜなら、$a=2$とすると、

$$4=(c+b)(c-b)$$

が成立しなくてはならず、$c-b \geqq 1$, $c+b \geqq 3$ であるため、$c-b=1$, $c+b=4$となる。しかし、この式から$2c=5$が導かれ、cが自然数でなくなってしまう。したがって、$a=2$ともなり得ない。

このように、ピタゴラス三角形の小さい２辺はどちらも 2 より大きいことがわかった。

さて、ここで逆に、nが 2 より大きい奇数だとする。すると、

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

が成り立ち、また$\frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$はどちらも自然数になるため、ピタゴラス三角形

$$\left(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}\right) \quad \cdots①$$

ができる。

同様に、nが 2 より大きい偶数だとすると、

$$n^2+\left(\frac{n^2}{4}-1\right)^2=\left(\frac{n^2}{4}+1\right)^2$$

が成り立ち、ピタゴラス三角形

$$\left(n, \frac{n^2}{4}-1, \frac{n^2}{4}+1\right) \quad \cdots②$$

ができる。(Q.E.D.)

この２つの式①，②を利用し、直角をはさむ辺が 3, 4, …, 10 のピタゴラス三角形の例は

(3, 4, 5), (4, 3, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10),
(7, 24, 25), (8, 6, 10), (9, 40, 41),
(10, 24, 26)

などである。

しかし、$t>2$を満たすすべての整数tに対して、直角をはさむ辺がtとなる既約なピタゴラス三角形がいつも存在するわけではない。例えば、$t=6$のとき、そのピタゴラス三角形は既約にはならない。なぜなら、定理３から $2mn=6$であるが、$mn=3$となるため、m, nの一方が偶数でなければならないという事実に反するので、$t=6$となる既約なピタゴラス三角形は存在しない。

次に、斜辺が自然数nと一致するピタゴラス三角形は存在するのだろうか。この問題を解くの困難なので、ここでは証明なしで次の定理を紹介する。

<u>定理 13</u>

nを斜辺とするピタゴラス三角形が存在するための必要十分条件は、nが$4k+1$という形の素因数を少なくとも 1 つ持つことである。

したがって、$n \leqq 50$に対して、以下のnを斜辺とするピタゴラス三角形が存在する。

n＝5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 26, 29, 30,
34, 35, 37, 41, 39, 40, 45, 50

つまり、これらの数は素因数 5, 13, 17, 29, 37, 41 を持つ。

斜辺の長さが連続する２つの自然数n, $n+1$で表される２つのピタゴラス三角形の組合せが無数にあることは、次の恒等式からすぐに導かれる。

$$(25+65k)^2=(15+39k)^2+(20+52k)^2$$
$$(26+65k)^2=(10+25k)\ \ +(24+60k)^2$$

（ただし、$k=1,2,3,\cdots$）

また、次の事実も成り立つことがわかっている。

<u>定理 14</u>

任意の自然数mに対して、斜辺の長さがm個の連続する自然数

$$n,n+1,n+2,\cdots n+m-1$$

(nは適当な自然数)で表されるm個のピタゴラス三角形が存在する。

例えば、$m=3$に対しては、$n=39$とすることができ、ピタゴラス三角形

(15, 36, 39), (24, 32, 40), (9, 40, 41)

が求められる。

また、$m=4$に対しては、$n=50$とすることができ、ピタゴラス三角形

(30, 40, 50), (24, 45, 51), (20, 48, 52), (28, 45, 53)

が求められる。

３－６．共通する辺をもつピタゴラス三角形

ある自然数aを、直角をはさむ１辺とするピタゴラス三角形は有限個しか存在しない。なぜなら、ピタゴラス三角形(a,b,c)において、

$$a^2=(c+b)(c-b)$$

から$b+c$がa^2の約数になるため、$b<a^2$, $c<a^2$であり、このようなb,cな組み合わせは有限個しかないからである。

簡単に証明できるように、次のことが成り立つ。

<u>定理 15</u>

任意の自然数nに対して、直角をはさむ辺を共有している少なくともn個のピタゴラス三角形が存在する。

［証明］

これを示すため、$k=0,1,2,\cdots,n-1$として、

$$b_k=2^k(2^{2n-2k}-1),\ c_k=2^k(2^{2n-2k}+1)$$

とおく。このとき、$c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}$は2^nで割るといつも異なった余り2^kが生じるので、明らかにすべて違っている。

さらに、${c_k}^2-{b_k}^2=(2^{n+1})^2$ が成り立つので、ここで$a=2^{n+1}$とおくとピタゴラス方程式が成り立ち、n個のピタゴラス三角形(a,b_k,c_k)（$k=0,1,2,\cdots,n-1$）を得るが、これらはみな共通辺aを持ち、斜辺はすべて異なっているので、これらの中に同じピタゴラス三角形は存在しない。

(Q.E.D.)

たとえば、$n=2$のときには、共通辺 8 をもった 2 つのピタゴラス三角形

(8, 15, 17), (8, 6, 10)

が求められ、$n=2$の時には、共通辺 16 をもった３つのピタゴラス三角形

(16, 63, 65), (16, 30, 34), (16, 12, 20)
が求められる。

また、少し複雑なので証明などは加えないが、次が成り立つことも知られている。

<u>定理 16</u>

任意の自然数nに対して、直角をはさむ辺を共有する、少なくともn個の既約なピタゴラス三角形が存在する。

例えば、$n=2$のときには、三角形
(5, 12, 13), (35, 12, 37)
が求められ、$n=4$のときには、三角形
(105, 88, 137), (105, 208, 233),
(105,608, 617), (105, 5512, 5513)
が求められる。

共通な斜辺cを持つピタゴラス三角形は有限個しかない。これは簡単に示すことができる。なぜなら、直角三角形(a,b,c)において、$a<c$，$b<c$なので、与えられたcに対するa,bの組み合わせが有限だからである。それと同時に次のことも成り立つ。

<u>定理 17</u>

任意の自然数nに対して、共通の斜辺を持つ少なくともn個の異なったピタゴラス三角形が存在する。

［証明］

まず、自然数nに対して、
$c=(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)\cdots\{(n^2+2)+1\}$
とおく。このとき、$k=3,4,\cdots,n+2$とする
と、$\dfrac{c}{k^2+1}$はいつも自然数となる。

したがって、同様に$k=3,4,\cdots,n+2$としたとき、

$$a_k=\frac{k^2-1}{k^2+1}c,\ b_k=\frac{2kc}{k^2+1}$$

はどちらも自然数になる。

よって、恒等式

$$c^2=\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}c\right)^2+\left(\frac{2kc}{k^2+1}\right)^2$$

から$c^2={a_k}^2-{b_k}^2$が成り立ち、(a_k,b_k,c)がピタゴラス三角形であることがわかる。

ここで、$k=3,4,\cdots,n+2$に対してa_kは

$$a_k=\frac{k^2-1}{k^2+1}c=c-\frac{2c}{k^2+1}$$

と変形することができ、kが増えればa_kも増えていることがわかる。したがってピタゴラス三角形（a_k ,b_k ,c）が共通の斜辺をもつn個の異なった三角形が得られることがわかった。(Q.E.D.)

３－７．等しい周を持つピタゴラス三角形

まず次の定理を紹介する。

<u>定理 18</u>

任意に自然数nに対して、共通の周を持つn個のピタゴラス三角形が存在する。

［証明］

この定理は容易に示される。

まず、n個の異なった既約なピタゴラス三角形(a_k,b_k,c_k)　$(k=1,2,3,\cdots,n)$をと

り、

$$a_k + b_k + c_k = s_k \quad (k = 1,2,3,\cdots,n)$$

とおく。さらに、$s = s_1 s_2 \ldots s_n$,

$$a'_k = \frac{a_k s}{s_k},\ b'_k = \frac{b_k s}{s_k},\ c'_k = \frac{c_k s}{s_k}$$

$$(k = 1,2,3,\cdots,n)$$

とおく。このとき、任意のkに対して、$a'_k + b'_k + c'_k = s$となり、このうち、どのピタゴラス三角形をとっても相似になる組み合わせはない。

よって、元の三角形(a_k, b_k, c_k)によって、共通の斜辺を持つn個のピタゴラス三角形ができた。(Q.E.D.)

例を挙げると、$n = 3$として、元のピタゴラス三角形を

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17)

とすると

$$s_1 = 3 + 4 + 5 = 12$$
$$s_2 = 5 + 12 + 13 = 30$$
$$s_3 = 8 + 15 + 17 = 40$$
$$s = 12 \times 30 \times 40 = 1440$$

したがって、

$$a'_1 = \frac{3 \times 1440}{12} = 360$$

$$b'_1 = \frac{4 \times 1440}{12} = 480$$

$$c'_1 = \frac{5 \times 1440}{12} = 600$$

となる。つまり、三角形(a'_1, b'_1, c'_1)は(360, 480, 600)である。同様に

(a'_2, b'_2, c'_2) =(240, 576, 624)

(a'_3, b'_3, c'_3) =(288, 540, 612)

となり、これらの周は 1440 と等しくなる。

上の証明ではsの値を$s_1, s_2, \cdots, s_n$の積としたが、これは$s_1, s_2, \cdots, s_n$の公倍数をとっても良い。そのようにすると、先程使った既約なピタゴラス三角形(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17)を用いて周の長さが 120 に等しい３つのピタゴラス三角形ができる。これは先ほどの三角形よりも簡単なものになっている。

ちなみに周の長さが平方数である既約なピタゴラス三角形も存在する。その中でも最も小さい三角形が(16, 63, 65)である。この三角形では周の長さが 144 のため、12^2に等しくなっている。

３－８．等しい面積を持つピタゴラス三角形

前節は三角形の周に注目したが、次は面積について注目しよう。

既約なピタゴラス三角形の面積に注意してみると、(21, 20, 29)と(35, 12, 37)の面積が 210 と等しく、この１組のみである。実際これと同じ面積を持ち、しかも斜辺の異なる既約なピタゴラス三角形で、これより小さなものは存在しない。そこで、斜辺が 37 以下の既約でないピタゴラス三角形を挙げてみると、つぎの様になる。

表３　斜辺が 37 以下の既約でないピタゴラス三角形

x	y	z	面積
6	8	10	24
9	12	15	54
12	16	20	96
15	20	25	150
18	24	30	216
21	28	35	296
10	24	26	120
30	16	34	240

この表３を見てもわかるように、斜辺が37以下の直角三角形の中で、同じ面積をもつものの組み合わせは(21, 20, 29)と(35, 12, 37)以外に無い。つまり、異なった斜辺で、同じ面積を持つ既約なピタゴラス三角形の組で最小なものは(21, 20, 29), (35, 12, 37)の組である。

<u>定理 19</u>

斜辺が同じで、面積も等しいピタゴラス三角形は一致する。

［証明］

まず、このようなピタゴラス三角形を(a_1,b_1,c_1)，(a_2,b_2,c_2)とし、$a_1 \geqq a_2$，$b_1 \geqq b_2$とする。

すると、面積が等しいことと、斜辺が等しいことから、$a_1b_1 = a_1b_2$，$c_1 = c_2$となる。加えて、ピタゴラス方程式が成り立つので、

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = a_2{}^2 + b_2{}^2$$

である。これらの式から

$$a_1{}^2 - 2a_1b_1 + b_1{}^2 = a_2{}^2 - 2a_2b_2 + b_2{}^2$$

より、$(a_1 - b_1)^2 = (a_2 - b_2)^2$ …①

$$a_1{}^2 + 2a_1b_1 + b_1{}^2 = a_2{}^2 + 2a_2b_2 + b_2{}^2$$

より、$(a_1 + b_1)^2 = (a_2 + b_2)^2$ …②となる。したがって、①，②から、連立方程式

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \\ a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

を解くと、$a_1 = a_2$，$b_1 = b_2$ が導かれ、斜辺が同じで、面積も等しい三角形は一致することが証明された。(Q.E.D.)

ここで、面積の等しいピタゴラス三角形の他の例をいくつか挙げよう。

ピタゴラス三角形(15, 112, 113)の面積は840に等しい。またこれは、三角形(21, 20, 29), (35, 12, 37)の面積である210の４倍に等しいため、三角形(21, 20, 29), (35, 12, 37)の各辺を２倍した三角形(42, 40, 58), (70, 24, 74)の面積に等しいことがわかる。つまり、３つの三角形

(15, 112, 113), (42, 40, 58), (70, 24, 74)

の面積が等しいということである。

しかし、これらがみな既約なピタゴラス三角形というわけではない。３つの既約なピタゴラス三角形に共通な最小の面積は13123110であり、その三角形は

(4485, 5852, 7373), (19019, 1380, 19069), (3509, 8580, 9109)

である。

次に、周のときと同様に、条件を満たす任意個のピタゴラス三角形が存在するかどうかである。この問題は次のフェルマーの定理によって証明される。

<u>定理 20</u>

任意の自然数nに対して、異なった斜辺で等しい面積を持つピタゴラス三角形がn個存在する。

定理20は次の補題Ｖを用いて、帰納法で証明される。

<u>補題Ｖ</u>

異なった斜辺で等しい面積を持つn個($n \geqq 1$)のピタゴラス三角形が存在し、そのうち１つが奇数の斜辺を持つと仮定すれば、

やはり異なった斜辺で等しい面積を持つ$(n+1)$個のピタゴラス三角形が存在し、そのうち１つは奇数の斜辺を持つ。

［証明］

$n \geqq 1$をある自然数とし、異なった斜辺で同じ面積を持つn個のピタゴラス三角形(a_k, b_k, c_k)　$(k=1,2,3\ldots n)$を考える。また、$a_k < b_k < c_k$であり、c^2は奇数であるとする。

$k=1,2,3\ldots n$　に対して、

$$\begin{aligned} a'_k &= 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)c_1 a_k \\ b'_k &= 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)c_1 b_k \qquad \cdots① \\ c'_k &= 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)c_1 c_k \end{aligned}$$

とおき、さらに、

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= (b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 \\ b'_{n+1} &= 4a_1 b_1 c_1{}^2 \qquad \cdots② \\ c'_{n+1} &= 4a_1{}^2 b_1{}^2 + c_1{}^4 \end{aligned}$$

とおく。

すると、三角形(a'_k, b'_k, c'_k)はピタゴラス三角形になる。なぜなら、これらの三角形の辺は自然数で表され、しかもピタゴラス三角形(a_k, b_k, c_k)に相似だからである。また三角形$(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$もピタゴラス三角形である。これは、②と等式

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = c_1{}^2$$

から導かれる。

さて、これらの三角形(a'_k, b'_k, c'_k) $(k=1,2,3\ldots n)$が必要な条件を満たしていること示そう。

三角形(a_k, b_k, c_k)　$(k=1,2,3\ldots n)$に共通な面積をΔとすると、$k=1,2,3\ldots n$に対して、

$$a_k b_k = 2\Delta$$

が成り立つ。一方、三角形(a'_k, b'_k, c'_k)の面積は、①から

$$\frac{1}{2}a'_k b'_k = 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 c_1{}^2 a_k b_k$$

$$= 4(b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 c_1{}^2 \Delta$$

となる。また、$(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$の面積は②から、

$$\frac{1}{2}a'_{n+1} b'_{n+1} = 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 a_1 b_1 c_1{}^2$$

$$= 4(b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 c_1{}^2 \Delta$$

と、互いに面積は等しくなる。したがって、三角形はすべて同じ面積を持ち、さらに$k=1,2,3\ldots n$に対して、三角形(a_k, b_k, c_k)の斜辺はすべて異なっているから、三角形(a'_k, b'_k, c'_k)の斜辺もみな異なっている。それらの斜辺はどれも①からわかるように偶数である。

一方、c'_{n+1}は②によって、奇数で表されている。だから、$k=1,2,3\ldots n$に対して斜辺c'_kはみな異なっている。

これで補題は証明された。(Q.E.D.)

［定理 20 の証明］

この補題Ｖに対して、最も簡単なnの値、$n=1$を考えよう。補題Ｖが適応できる最も小さいピタゴラス三角形は、辺の長さが

$$a_1 = 3,\ b_1 = 4,\ c_1 = 5$$

のピタゴラス三角形である。このピタゴラス三角形から始めて、同じ面積を持つ２つのピタゴラス三角形$(a'_1, b'_1, c'_1), (a'_2, b'_2, c'_2)$が求められる。

$$2(b_1{}^2 - a_1{}^2)c_1 = 2 \times 7 \times 5 = 70$$

より、①から

$$a_1' = 70 \times 3 = 210$$
$$b_1' = 70 \times 4 = 280$$
$$c_1' = 70 \times 5 = 350$$

となり、②から

$$a_2' = (4^2 - 3^2)^2 = 49$$
$$b_2' = 4 \times 3 \times 4 \times 5^2 = 1200$$
$$c_2' = 4 \times 3^2 \times 4^2 + 5^2 = 1201$$

となる。

これら２つのピタゴラス三角形は、異なった斜辺をもち、そのうち一方の辺が奇数となっている、面積が 29400 に等しいピタゴラス三角形である。

また、こうして求められた２つの三角形に同じ操作を行えば、新たに３つの同じ面積を持つピタゴラス三角形ができる。このようにしてできたピタゴラス三角形の各辺は 10 桁以上になる。

以前にも別の方法で３つの同じ面積を持つピタゴラス三角形を求めた。このときの三角形は、上とは違い各辺が３桁程度だった。同様にしてもとめられた、同じ面積を持つ簡単なピタゴラス三角形の例で、４つの組み合わせと、５つのものを挙げよう。

４つのピタゴラス三角形の組み合わせは、

(518, 1320, 1418), (280, 2442, 2458)
(231, 2961, 2969), (111, 6160, 6161)

であり、これらの三角形の面積は 341880 に等しく、三角形の各辺は４桁程度で表されている。

５つのピタゴラス三角形の組み合わせは

(2805, 52416, 52491),
(3168, 46410, 46518),
(5236, 28080, 28564),
(6006, 24480, 25206),
(8580, 17136, 19164)

であり、これらの三角形もまた、面積が 73513440 に等しく、各辺は５桁程度になっている。

面積が Δ に等しいピタゴラス三角形は明らかに有限個である。なぜなら、このような三角形の直角をはさむ辺は 2Δ の約数だからである。しかし、例えば面積が 6 に等しく、有理数辺をもつ異なった直角三角形は無数に存在する。この事実を示そう。

まず、補題Ｖから、異なった斜辺を持ち、面積が同じ Δ であるピタゴラス三角形が n 個($n \geqq 1$)存在するとして、そのうち１つの三角形の斜辺が奇数であると考える。このとき、異なった斜辺をもち、面積が同じ Δd^2 (d は整数) であるピタゴラス三角形は $(n+1)$ 個存在し、そのうち１つの三角形の斜辺が奇数である。

ピタゴラス三角形(3, 4, 5)を考えよう。この三角形に補題を $(n-1)$ 回適用すると、異なる斜辺を持ち、面積が $6m^2$（m は①，②から求められる）と等しい n 個のピタゴラス三角形が求められる。このときできたピタゴラス三角形の各辺を m で割ると、その三角形の面積は 6 になり、また各辺は有理数になる。つまり、各辺が有理数で面積が 6 の異なったピタゴラス三角形が求められたということである。

また、n は任意の自然数であるから、上の方法でできた三角形は無数にあるとわかる。よって定理は証明された。(Q.E.D.)

３－９．平方数を辺とするピタゴラス三角形

この節ではまず、斜辺を平方数とするピタゴラス三角形について、次を示そう。

定理 21

斜辺を平方数とするピタゴラス三角形は無数にある。

［証明］

まず、$n < p < m$ であるピタゴラス三角形 (m, n, p) を適当にとる。すると、２数 m, n は一方が奇数、他方が偶数であり、この２数は互いに素である。ここで、定理３から新たなピタゴラス三角形 (x, y, z) を作ることができる。この x, y, z は公式

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2$$

によって求められる。このとき斜辺 z は

$$z = m^2 + n^2 = p^2$$

となり、自然数の平方数になっている。同様に、x, y は

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$

となる。これを繰り返して、斜辺を平方数とするピタゴラス三角形を無数に作ることができる。(Q.E.D.)

例えば、既約なピタゴラス三角形(3, 4, 5)からは、既約な三角形(7, 24, 25)が求められる。このとき斜辺は 5^2 になっている。また、既約なピタゴラス三角形(5, 12, 13)からは、既約な三角形(119, 120, 169)が求められ、斜辺は 13^2 になっている。ちなみに、斜辺が立方数になる三角形も存在し、その例には（117,44,125）があり、斜辺は 5^3 である。

次に、直角をはさむ辺に注目しよう。

定理 22

直角をはさむ一方の辺が平方数であるような既約なピタゴラス三角形は無数に存在する。

［証明］

まず、既約なピタゴラス三角形 (q, n, m) で n が偶数、q, m が奇数であり、m, n が互いに素なものを考える。

斜辺のときと同様に、定理３を使って、直角をはさむ辺のうち奇数の方である x は

$$x = m^2 - n^2 = p^2$$

となり、自然数の平方数になっている。同じく y, z は

$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

となる。したがって、この方法で新たな既約なピタゴラス三角形で、かつ直角をはさむ辺の奇数の方(＝x)が平方数であるものが求められる。(Q.E.D.)

この方法を使うと、既約なピタゴラス三角形(3, 4, 5)からは、既約な三角形(9, 40, 41)が求められ、x の値は 3^2 になっている。また、既約な三角形(5, 12, 13)からは、既約な三角形(25, 312, 313)が求められる。この三角形の x の値も 5^2 であり、自然数の平方数になっている。

上の x は、直角をはさむ辺のうち奇数のものだったが、次にこれが偶数であるものを考えよう。

定理 23

直角をはさむ偶数辺が平方数であるような既約なピタゴララス三角形は無数に存在する。

［証明］

この証明には、次の恒等式

$$(k^4-4)^2+(2k)^4=(k^4+4)^2$$

を用いる。ただしこのとき、 k^4-4 と $4k^2$ は互いに素でないといけないので、k は奇数でないといけない。したがって、無数に存在する。(Q.E.D.)

例えば、

$k=1$ のときは、$(3,2^2,5)$

$k=3$ のときは、$(77,6^2,85)$

$k=5$ のときは、$(621,10^2,629)$

が求められる。

さて、２辺が平方数で表せるピタゴラス三角形は存在するのだろうか。この問題については、次のフェルマーによる定理によって解決される。

<u>定理 24</u>

少なくとも２つの辺が平方数であるようなピタゴラス三角形は存在しない。

［証明］

直角をはさむ２辺が平方数であるようなピタゴラス三角形が存在すると仮定する。このようなピタゴラス三角形の中には、斜辺が最も小さいものがあり、その三角形を (x,y,z) とする。そこで、$x=a^2$，$y=b^2$ (a,b は自然数)とおく。まず a,b が互いに素であることを示す。

数 a,b が整数 $d>1$ で割り切れるとすると、$a=da_1$，$b=db_1$ より、a_1,b_1 は整数になる。すると、

$$z^2=d^4(a_1{}^4+b_1{}^4)$$

が成り立つ。

この等式から z^2 が d^4 で割り切れることがわかり、したがって、z が d^2 で割り切れて、$z=d^2z_1$（z_1 は整数)となることがわかる。ここで、等式 $z^2=d^4(a_1{}^4+b_1{}^4)$ の両辺を d^4 で割ると、

$$a_1{}^2+b_1{}^2=z_1{}^2,\quad z_1<d^2z_1=z$$

の形になる。つまり、ピタゴラス三角形 $(a_1{}^2,b_1{}^2,z_1)$ は斜辺 $z_1<z$ をもち、直角をはさむ２辺は平方数である。

しかしこのとき、最初の仮定である最も小さい斜辺 z をもつピタゴラス三角形 (x,y,z) であるということに反するので、矛盾している。

したがって、数 a,b は互いに素であり、ピタゴラス三角形

$$(x,y,z)=(a^2,b^2,z)$$

は既約でなければならない。

そこで、このピタゴラス三角形に定理３を適用し、２数 a^2,b^2 のうち一方が偶数(ここでは b^2 を偶数とする）であり、３数 a^2,b^2,z は

$$\begin{aligned} a^2&=m^2-n^2\\ b^2&=2mn \qquad \cdots①\\ z^2&=m^2+n^2 \end{aligned}$$

と表せることがわかる。

このとき、m,n は互いに素であり、そのうち一方が偶数で、他方が奇数である。さらに、$m>n$ である。

ここでもし、m が偶数で n が奇数であるとすると、①のはじめの等式を変形させた $a^2+n^2=m^2$ から a^2 が奇数であるとわかる。ところが、この等式から (a,n,m) はピタゴラス三角形になるから、a と n がどち

らも奇数であるということはありえない。

なぜなら、以前示したようにピタゴラス三角形において、直角をはさむ辺のうち一方は偶数でないといけないからである。

したがって、m が奇数で、n が偶数でないといけない。そこで、k を整数として、$n=2k$ とおける。また、m と n が互いに素なので、m と k も互いに素である。①の第２式によって

$$b^2=2m\times 2k=2^2mk$$

となる。b は偶数としたから、l を自然数として、$b=2l$ とおく。すると、上の式から $l^2=mk$ となる。

ここで、m,k が互いに素であることを考えると、m も k も平方数でなければいけないことが分かる。だから整数 r,s を用いて

$$m=r^2,\ k=s^2$$

と表すことにする。

さらに、今までの式から

$$b^2=4l^2=4mk,\quad b^2=2mn$$

である。したがって

$$4mk=2mn,\ n=2k=2s^2$$

となる。

また、m と n が互いに素なので、①から a と n は互いに素である。だからピタゴラス三角形 (a,m,n) は既約である。

ここで、定理３から n が偶数であることを考えると、一方が偶数で互いに素な２数 m_1 と n_1 が存在し、

$$n=2m_1n_1,\ m={m_1}^2+{n_1}^2$$

という式が作れる。ところで、$n=2s^2$ であったから、

$$s^2=m_1n_1$$

とおくことができる。したがって、２数 m_1,n_1 はそれぞれ平方数であり、自然数 a_1 と b_1 を用いて、

$$m_1={a_1}^2,\quad n_1={b_1}^2$$

と表すことができる。

そこで、等式 $m={m_1}^2+{n_1}^2$ に m,m_1,n_1 の値を代入すると、

$${a_1}^4+{b_1}^4=r^2$$

となる。上式の r は

$$r\le r^2=m<m^2+n^2=z$$

を満たす。つまり、ピタゴラス三角形 $({a_1}^2,{b_1}^2,r)$ は、直角をはさむ２辺が平方数で、斜辺 r は z よりも小さい。したがって、この三角形は最初の三角形 (x,y,z) も小さく、仮定に反している。

だから、直角をはさむ辺が平方数となるピタゴラス三角形があると仮定すると矛盾が生じる。したがってこのような三角形は存在しない。

次に、斜辺と他のもう一辺が平方数となる三角形を考えよう。

まず、三角形 (x,y,z) が、上のような三角形の中で最も小さな斜辺を持つものであるとする。したがって、自然数 a と c を用いて $x=a^2$, $z=c^2$ と表す。

最初に三角形 (x,y,z) が既約であることを示そう。それには x と z が既約であることを証明するだけで十分である。そこで、x と z に公約数 d があると仮定する。すると a,c が公約数 d を持つことになり、自然数 a_1,b_1 を用いて、

$$a=da_1,\ c=dc_1$$

と表せる。したがって、３数 x,y,z は

$$x = a^2 = d^2 a_1{}^2$$
$$y^2 = x^2 - z^2 = d^4 (c_1{}^4 - a_1{}^4)$$
$$z = c^2 = d^2 c_1{}^2$$

である。これから、y^2 は d^4 で割り切れ、したがって、y は d^2 で割り切れる。よって y は、自然数 y_1 を用いて、

$$y = d^2 y_1$$

と表すことができる。

ここで、三角形 (x, y, z) の等式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

にこれまでの式を代入し、d^4 でわると

$$d^4 a_1{}^4 + d^4 y_1{}^4 = d^4 c_1{}^4$$
$$a_1{}^4 + y_1{}^4 = c_1{}^4$$

が得られる。

さらに、$z = d^2 c_1^2$ で $d > 1$ のため、$c_1^2 < z$ である。つまり、ピタゴラス三角形 $\left(a_1^2, y_1, c_2^2\right)$ は斜辺と、もうひとつの辺も平方数であり、その斜辺の長さは z よりも小さい。これは最初の仮定である、ピタゴラス三角形 (x, y, z) が最も小さい斜辺をもち、斜辺ともうひとつも辺が平方数であるということに反している。

次に、y は偶数ではないことを示そう。なぜなら、y が偶数であるとすると、定理３によって、互いに素な２数 m, n（$m > n$）が存在して、

$$a^2 = x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$c^2 = z = m^2 + n^2$$

と表すことができる。これから、

$$c^2 < m^2,\ (ac)^2 = m^4 - n^4$$

であり、$n^4 + (ac)^2 = m^4$ となる。

したがって、ピタゴラス三角形 (n^2, ac, m^2) では、直角をはさむ１辺が平方数で、斜辺は $m^2 < z$ である。しかし、これは最初の仮定に反する。

これにより、y は奇数でなければならず、$x = a^2$ が偶数でなければならない。また、$a^4 + y = c^4$ となり、a は偶数、y は奇数であるから、c は奇数で、

$$y^2 = c^4 - a^4 = (c^2 + a^2)(c^2 - a^2)$$

が成り立つ。

次に、２つの奇数 $c^2 + a^2, c^2 - a^2$ は互いに素であることを示す。

ここで、$c^2 + a^2$ と $c^2 - a^2$ の公約数は $2c^2$ と $2a^2$ の約数であるが、それは奇数でなければならないから、実は互いに素な２数 a^2, c^2 の公約数でなければならない。だから、２数 $c^2 + a^2, c^2 - a^2$ は互いに素である。

つまり、y^2 は２つの素な因数に分解されるから

$$c^2 - a^2 = r^2, c^2 + a^2 = s^2$$

でなければならない。これから、

$$2c^2 = r^2 + s^2$$

となるが、ここで r, s は互いに奇数であるから数 $\dfrac{s+r}{2}$ と $\dfrac{s-r}{2}$ は整数になる。

この２数は、それらの和と差が互いに素だから、それら自身も互いに素である。

だから、定理３によって互いに素な２数 m, n が存在して、一方は偶数であり、

$$\frac{s+r}{2} = m^2 - n^2,\ \frac{s-r}{2} = 2mn,$$
$$c = m^2 + n^2$$

あるいは、

$$\frac{s-r}{2} = m^2 - n^2,\ \frac{s+r}{2} = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

が成り立つ。

ここから、どちらの場合も

$$2a^2 = s^2 - r^2 = 8mn(m^2 - n^2) \quad \cdots②$$

が得られる。a は偶数だから、$a = 2a_1$ とおけて、

$$a_1{}^2 = mn(m^2 - n^2) \quad = mn(m+n)(m-n)$$

が成り立つ。数 m, n は互いに素でそのうち一方は偶数である。２数 $m-n, m+n$ も互いに素で、m と $m-n$，m と $m+n$ もそれぞれ互いに素である。

ゆえに、②の右辺にある４つの因数どの２つを組み合わせても、互いに素である。したがって、等式②の右辺の各因数はそれぞれ平方数でなければならない。つまり、

$$m = k, \quad n = l, \quad m - n = p,$$
$$m + n = q$$

となる。ここから、

$$k^4 - l^4 = m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(pq)^2$$

で、さらに

$$k^4 = m^2 < m^2 + n^2 = c < c^2 = z$$

ゆえに、$k^2 < z$ でもある。つまり、ピタゴラス三角形 (l^2, pq, k^2) は、斜辺と一方の辺が平方数で、斜辺 k^2 は z よりも大きい。しかし、これは前の仮定に反する。

したがって、ピタゴラス三角形の斜辺と一方の辺が平方数であるようなものが存在するという仮定により矛盾が生じる。よって、このような三角形は存在しない。これで定理 24 は証明された。(Q.E.D.)

この定理から３辺が平方数であるピタゴラス三角形はもちろん存在しないことが分かる。また、これを代数学的に言い直すと、次の定理のような命題になる。

<u>定理 25</u>

不定方程式 $x^4 + y^4 = z^4$ は自然数解をもたない。

この定理は、有名な「フェルマーの大定理」(定理 26)の特別な場合である。

<u>定理 26</u> (フェルマーの大定理)

任意の整数 $n > 2$ に対して、不定方程式 $x^n + y^n = z^n$ は自然数の解をもたない。

「フェルマーの大定理」は、数学者**フェルマー(Pierre de Fermat)**がディオファントスの著書『数論』の余白に命題のみを記述し、証明を付していなかったエピソードで有名であり、その後、「フェルマー予想」として、数論の未解決問題となった。多くの数学者が証明に挑戦し、失敗を重ねてきた。しかし、少しずつ進歩を重ねていき、ついに、1995 年アメリカの数学者**アンドリュー・ワイルズ(Andrew John Wiles)**によって、完全な証明が与えられた。その過程には、志村五郎、谷山豊という２人の日本人数学者による「志村－谷山予想」が大きな役割を果たしたことも有名である。このような深遠な理論にまで達することは、数学の世界の広がりと深さを実感できる。

４．今後の課題

本年度は、参考文献[1]を輪読し、ピタゴラスの定理をきっかけとして、ピタゴラス三角形の分類を、ピタゴラス数という整数の組の特徴を調べることにより学習することができた。テキストの内容をすべて理解することが困難であったので、今後、さらなる学習を進めていきたい。

５．参考文献

[1]「ピタゴラスの三角形」， B. シェルピンスキー著，銀林浩訳，東京図書 (1993)

[2] 「はじめての数論」，J. H. シルヴァーマン著，鈴木治郎訳，ピアソン・エデュケーション(2007)

[3]「数論入門」, 北村泰一著, 槙書店(1965)

６．謝辞

顧問の川口先生には、わからない部分を解説していただき、整数論に関する基本的な部分を説明していただきました。また、公開研究会でのポスターや本稿についても、いろいろなアドバイスをいただきました。ありがとうございました。