ピタゴラス三角形の辺の長さに関する考察

４年Ａ組　清水　悠平
４年Ｂ組　森　宇宏
４年Ｃ組　佐藤　圭
４年Ｃ組　西井　良徳
指導教員　川口　慎二

１．概要

サイエンス研究会数学班は、昨年度に続けてピタゴラス三角形に関する研究を行ってきた。今年度は、ピタゴラス三角形の辺々や面積に条件を加えた場合、どのように条件を満たす三角形を生成できるかについて考察した。特に、２辺の長さが連続する自然数である場合について、興味深い結果を得ることができたので報告する。

キーワード　ピタゴラスの定理(三平方の定理)、ピタゴラス三角形、ピタゴラス数
既約、平方数、フェルマーの定理

２．緒言

私たちははじめに、既約なピタゴラス三角形の生成方法を数式によって求めることができた。またこの数式を用いて、「辺が連続している」や「面積が等しい」などの条件を満たすピタゴラス三角形をどのようにすれば求められるかを考えた。

３．研究内容

３－１．ピタゴラス三角形とは

ピタゴラス三角形とは、３辺の長さを整数で表すことができる直角三角形である。 また、よく知られているように直角三角形の３辺の間には、次の**ピタゴラスの定理**(定理１)が成り立つ。

定理１　(ピタゴラスの定理)

直角を挟む２辺の長さが x, y である直角三角形の斜辺の長さを z としたとき、

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \cdots(1)$$

が成り立つ。

このとき、等式(1)を**ピタゴラス方程式**という。そして、ピタゴラス三角形の３辺の長さの組み合わせを**ピタゴラス数**という。

あるピタゴラス三角形を自然数倍に拡大すると、新しい直角三角形ができる。新しくできた直角三角形は、各辺が自然数であり、もとの三角形に相似であるから、これもまたピタゴラス三角形となる。このように、あるピタゴラス三角形を２倍，３倍，４倍，…としていくと、次々に新たなピタゴラス三角形ができる。つまり、１つのピタゴラス三角形

から無数のピタゴラス三角形が生み出される。これを記号で表現しよう。一般に、３辺が x, y, z（z を斜辺とする)であるピタゴラス三角形を組 (x, y, z) と表すことにする。このとき、(kx, ky, kz)（k は自然数)はすべてピタゴラス三角形になる。

例えば、(3, 4, 5)という組み合わせのピタゴラス三角形からは、$k=2$ とした場合は(6, 8, 10), $k=3$ とした場合は (9, 12, 15)というピタゴラス三角形がそれぞれ得られる。

このように、ある１つのピタゴラス三角形から、無限に多くのピタゴラス三角形を生成することができる。

３－２．既約なピタゴラス三角形

２つの整数 a, b が**既約**であるとは、これらの最大公約数が１であるときをいう。このとき、a, b は**互いに素**であるともいう。また、ピタゴラス三角形が既約であるとは、３辺のうち、どの２つの辺の長さも既約になっているときをいう。

例えば、(3,4,5), (5,12,13), (15,8,17) などである。これらは既約なピタゴラス三角形である。そこで、既約なピタゴラス三角形を求めるために３辺の性質を調べた。

定理２

辺 y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形は、すべて

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

$(m > n)$から求められる。ただし、m, n はパリティー(偶奇性)が異なり、既約な任意の２数である。また、y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) は、このような２数 m, n によって一意的に定まる。

定理３

y が偶数であるようなすべてのピタゴラス三角形 (x, y, z) は

$$x = kl,\ y = \frac{k^2 - l^2}{2},\ z = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

によって表される。ただし、k と l は互いに素な奇数であり、$k > l$ を満たす。

さらに y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) はこれによって一通りに表される。

y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形を無限に求めたければ、まず k に奇数 3, 5, 7, 9, …を順に当てはめ、l に k よりも小さく k と互いに素な奇数を順に当てはめる。そして、定理３によって x, y, z の値を計算すればよい。

定理３によって求められた最初の 20 個の既約なピタゴラス三角形を表１に示す。

表１　既約なピタゴラス三角形(一部)

k	l	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65
11	1	11	60	61
11	3	33	56	65
11	5	55	48	73
11	7	77	36	85
11	9	99	20	101

あらゆるピタゴラス三角形を求めるためには、既約なピタゴラス三角形に自然数を次々にかけていけばよい。このようにして、

y が偶数であるようなあらゆるピタゴラス三角形を得ることができる。さらに、x と y を入れ替えたピタゴラス三角形を追加すれば、すべてのピタゴラス三角形が得られる。

次節以降では、このような性質を用いて、特別な条件を満たすピタゴラス三角形を調べていく。

３－３．100 未満の辺をもつピタゴラス三角形

３辺の長さがいずれも 100 を超えないようなピタゴラス三角形をすべて求めるためには、斜辺の長さが 100 以下であるような三角形を求めれば十分である。なぜなら、斜辺は直角三角形の中で最も大きな辺だからである。

また、ここでいうピタゴラス三角形とは、定理２のような y が偶数である三角形のみを指す。表１をみると、条件を満たす k はたった 16 個しかない。なぜなら $k \geqq 15$ とすると、

$$z=\frac{k^2+l^2}{2}>\frac{15^2}{2}>100$$

となってしまい、100 を超えてしまうからである。

さらに、表１の最初の７個は辺を２倍することができる（そうしても斜辺の長さは 100 を超えない）。よって、新たに７個のピタゴラス三角形が得られる。同様に最初の５個は３倍、最初の３個は４倍または５倍、最初の２個は６倍または７倍、最初の１個は８倍から 19 倍までをすることができるため、合計 50 個のピタゴラス三角形を求めることができる。

そこで、私たちは得られる辺の長さの制限とピタゴラス三角形の個数の間に規則性があるのではと考え、同様の方法で斜辺が 200 未満の場合、300 未満の場合、とさらに調べてみた。結果は表２の通りである。

表２　各辺に制限を付けた場合の
ピタゴラス三角形の個数

100未満の場合	50個
200未満の場合	93個
300未満の場合	182個
400未満の場合	270個
500未満の場合	384個
600未満の場合	491個
700未満の場合	588個
800未満の場合	688個
900未満の場合	796個
1000未満の場合	827個

また、その結果をグラフにしたものが下の図１である。

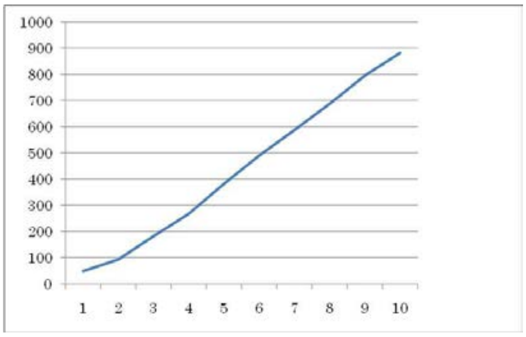

図１　各辺に制限を付けた場合の
ピタゴラス三角形の個数のグラフ

表２と図１のグラフから、得られる辺の長さの制限とピタゴラス三角形の個数は比例関係にあるのではないかと考えた。そこで便宜上、「未満」を「以下」に変更し、さらに大きな数についても調べた。その結果が、表３である。

ここで、n を制限した辺の長さとし、$P(n)$ をピタゴラス三角形の個数とする。

表３　各辺に制限を付けた場合の
ピタゴラス三角形の個数

～以下	～個
100	52
200	127
300	210
400	295
500	387
600	486
700	583
800	684
900	781
1000	886
1100	989
1200	1101
1300	1210
1400	1318
1500	1429
1600	1543
1700	1658
1800	1762
1900	1885
2000	1994
2100	2113
2200	2227
2300	2348
2400	2460
2500	2567
2600	2690
2700	2802
2800	2926
2900	3054
3000	3172
3100	3291
3200	3414
3300	3536
3400	3665
3500	3792
3600	3906
3700	4026
3800	4158
3900	4292
4000	4416
4100	4541
4200	4658
4300	4789
4400	4917
4500	5039
4600	5173
4700	5297
4800	5426
4900	5557
5000	5681
5100	5819
5200	5950
5300	6070
5400	6208
5500	6333
5600	6475
5700	6604
5800	6742
5900	6861
6000	7008
6100	7135
6200	7262
6300	7396
6400	7528
6500	7674
6600	7797
6700	7930
6800	8074
6900	8207
7000	8345
7100	8481
7200	8602
7300	8748
7400	8881
7500	9009
7600	9160
7700	9296
7800	9437
7900	9556
8000	9706
8100	9837
8200	9986
8300	10117
8400	10245
8500	10398
8600	10528
8700	10672
8800	10801
8900	10943
9000	11077
9100	11220
9200	11359
9300	11504
9400	11626
9500	11775
9600	11908
9700	12069
9800	12190
9900	12345
10000	12471
10100	12613
10200	12751
10300	12899
10400	13047
10500	13185
10600	13325
10700	13474
10800	13602
10900	13757
11000	13891
11100	14022
11200	14172
11300	14320
11400	14457
11500	14606
11600	14748
11700	14895
11800	15032
11900	15185
12000	15320
12100	15466
12200	15618
12300	15747
12400	15899
12500	16041
12600	16180
12700	16330
12800	16466
12900	16615
13000	16764
13100	16903
13200	17057
13300	17203
13400	17343
13500	17489
13600	17640
13700	17781
13800	17933
13900	18077
14000	18227
14100	18363
14200	18515
14300	18664
14400	18811
14500	18961
14600	19093
14700	19238
14800	19390
14900	19535
15000	19675
15100	19817
15200	19977
15300	20121
15400	20279
15500	20424
15600	20569
15700	20720

ここで、先程と同様に、x 軸を n 、y 軸を個数 $P(n)$ としたグラフにしてみた。

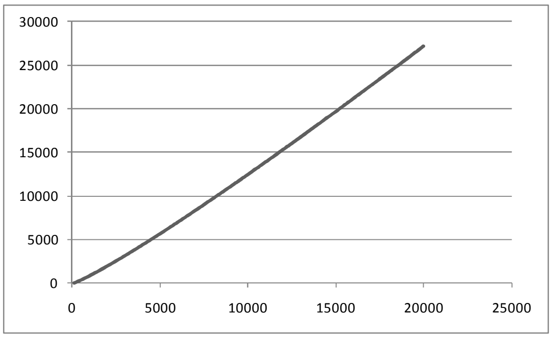

図２　x 軸を n 、y 軸を $P(n)$ としたグラフ

ここでも、n と個数 $P(n)$ との関係は比例になると推測した。そこで、$\dfrac{P(n)}{n}$ を計算し、図２のグラフの傾きについて調べた。

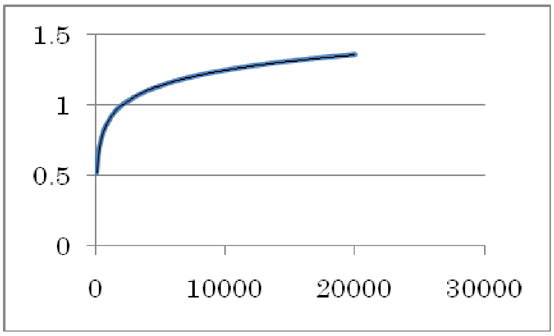

図３　表２のグラフの傾き

この結果より、$\dfrac{P(n)}{n}$ の値が一定ではないため、比例関係でないことがわかった。また、図３のグラフが対数関数のグラフを平行移動したものと一致することもわかった。

表３及び図２，図３からは明確な規則性を見つけることはできなかったので、今後の課題としたい。

３－４．連続する整数を２辺にもつピタゴラス三角形

定理２において x, y はどちらも奇数であるため連続することはない。よって、以下の２つの場合が考えられる。

①y, z が連続するピタゴラス三角形

②x, y が連続するピタゴラス三角形

まず①の場合について考える。y, z は、定理３より

$$y=\frac{k^2-l^2}{2},\ z=\frac{k^2+l^2}{2}$$

である。ここで、z は斜辺であるので $y<z$ が成り立つ。つまり

$$\frac{k^2+l^2}{2}-\frac{k^2-l^2}{2}=\frac{2l^2}{2}=l^2=1$$

が成り立てばよい。l は自然数であるため、$l=1$ となる。したがって、定理３において $l=1$ とすれば、y, z が連続するピタゴラス三角形を得ることができる。

実際に y, z が連続するピタゴラス三角形を表４に示す。

表４　y, z が連続するピタゴラス三角形

k	l		x	y	z
3	1		3	4	5
5	1		5	12	13
7	1		7	24	25
9	1		9	40	41
11	1		11	60	61
13	1		13	84	85
15	1		15	112	113
17	1		17	144	145

次に②の場合について考える。先程と同様にして、定理１の式から考える。

$$x-y=kl-\frac{k^2-l^2}{2}=\pm1$$

が成り立てばよい。しかし、この式からk,lを効率的に求めることはできなかった。そこで先程の表１より、y,zが連続しているときのk,lについて注目すると、(k,l)は$(3,1),(7,3),(17,7),\cdots$となった。

実際に(k,l)に対する(x,y,z)を表５に示す。

表５　y,zが連続しているときのk,l

k	l		x	y	z
3	1		3	4	5
7	3		21	20	29
17	7		119	120	169
41	17		697	696	985
99	41		4059	4060	5741
239	99		23661	23660	33461
577	239		137903	137904	195025
1393	577		803761	803760	1136689
3363	1393		4684659	4684660	6625109
8119	3363		27304197	27304196	38613965
19601	8119		159140519	159140520	225058681
47321	19601		927538921	927538920	1311738121
114243	47321		5406093003	5406093004	7645370045
275807	114243		31509019101	31509019100	44560482149

表５から(k,l)がわかれば、(x,y,z)を得ることができる。表５から以下のことが類推できる。ここで、k_nをn番目のkの項、l_nをn番目のlの項とする。

（ⅰ）kの第n項は、lの第$n+1$項に一致する。つまり、$k_n=l_{n+1}$.

（ⅱ）lの第n項は第$n-1$項の２倍したものと第$n-2$項の和となる。つまり、$l_n=2l_{n-1}+l_{n-2}$.

（ⅲ）$x-y$の値は１と−１が交互で出てくる。

このうち、（ⅱ）の漸化式

$$l_{n+2}=2l_{n+1}+l_n$$

を解いてみた。まず（ⅰ）の事実より$l=a_n$とすると、$k=a_{n+1}$と表すことができる。

よって、特性方程式は、

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$
$$a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$$

から、$x^2-2x-1=0$　となる。

ここで、白銀２次方程式　$x^2-2x-1=0$が現れているが、なぜ白銀２次方程式が現れたかについてはわからないので、今後の課題としたい。

さて、ここで　$x^2-2x-1=0$の２つの解をα,β　$(\alpha<\beta)$とおくと、

$$\alpha=1-\sqrt{2}\,,\ \beta=1+\sqrt{2}$$

となる。解と係数の関係より、

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1 \quad \cdots①$$

よって、もとの漸化式に代入すると、

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$$
$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$
$$a_{n+1}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

より、

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$$
$$=\alpha^{n-1}(3-\beta)\cdots②$$

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n+1}(a_2-\alpha a_1)$$
$$=\beta^{n-1}(3-\alpha)\cdots③$$

となる。ここで、②－③より、

$$(\beta-\alpha)a_n=\alpha^{n-1}(3-\beta)-\beta^{n-1}(3-\alpha)$$
$$=3(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+\alpha^{n-1}\beta-\alpha\beta^{n-1}$$
$$\cdots④$$

ここで、①から、$3=\alpha+\beta-\alpha\beta$ を④に代入すると、

$$(\beta-\alpha)a_n=(\alpha+\beta-\alpha\beta)(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})$$
$$+\alpha^{n-1}\beta-\alpha\beta^{n-1}$$
$$=\alpha\beta^{n-1}-\alpha^n+\beta^n-\alpha^{n-1}\beta$$
$$-\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\alpha^{n-1}\beta-\alpha\beta^{n-1}$$
$$=\beta^n-\alpha\beta^n-\alpha^n+\alpha^n\beta$$
$$=\beta^n(1-\alpha)-\alpha^n(1-\beta)$$

となる。

さらに、$\alpha=1-\sqrt{2},\ \beta=1+\sqrt{2}$ より、

$$\left\{1+\sqrt{2}-\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}a_n$$
$$=\beta^n\left\{1-\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}-\alpha^n\left\{1-\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$$

$2\sqrt{2}a_n=\sqrt{2}\beta^n+\sqrt{2}\alpha^n$ となる。

したがって、$a_n=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$ とわかる。

ゆえに、

$$k_n=\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\ ,\ l_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}$$

と表せる。よって、

$$x=kl,\ y=\frac{k^2-l^2}{2},\ z=\frac{k^2+l^2}{2}$$

さらに、解と係数の関係①から、次のように、x,y,z を表すことができる。

$$x=kl=\left(\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+\alpha^n\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^n}{4}$$
$$=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+\alpha^n\beta^n\times\beta+\alpha^n\beta^n\times\alpha}{4}=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+(-1)^n\beta+(-1)^n\alpha}{4}$$
$$=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+(-1)^n(\alpha+\beta)}{4}=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+(-1)^n\times2}{4}=\frac{\dfrac{\alpha^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}}{2}+(-1)^n}{2}$$

ここで、$a_n=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$ より、$x=\dfrac{a_{2n+1}+(-1)^n}{2}$ となる。また、

$$y=\frac{k^2-l^2}{2}=\frac{\left(\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2}{2}=\frac{\dfrac{\alpha^{2n+1}+2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}}{4}-\dfrac{\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{4}}{2}$$

$$=\frac{\alpha^{2n+1}+2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}-\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n-\beta^{2n}}{8}=\frac{\alpha^{2n}\left(\alpha^2-1\right)+\beta^{2n}\left(\beta^2-1\right)+2\alpha^n\beta^n\left(\alpha\beta-1\right)}{8}$$

$$=\frac{\alpha^{2n}\left(1-2\sqrt{2}+2-1\right)+\beta^{2n}\left(1+2\sqrt{2}+2-1\right)-4(-1)}{8}=\frac{2\alpha^{2n}\left(1-\sqrt{2}\right)+2\beta^{2n}\left(1+\sqrt{2}\right)-4(-1)^n}{8}$$

$\alpha=1-\sqrt{2},\quad \beta=1+\sqrt{2}$ より、$y=\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}-2(-1)^n}{4}=\dfrac{\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}-(-1)^n}{2}$.

ゆえに、$a_n=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$ より、$y=\dfrac{a_{2n+1}-(-1)^n}{2}$ とわかる。さらに、

$$z=\frac{k^2+l^2}{2}=\frac{\left(\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2}{2}=\frac{\dfrac{\alpha^{2n+2}+2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}}{4}+\dfrac{\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{4}}{2}$$

$$=\frac{\alpha^{2n+2}+2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}+\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{8}=\frac{-2(-1)^n+2(-1)^n}{8}=\frac{\alpha^{2n}(1+\alpha)+\beta^{2n}(1+\beta)}{4}$$

$$=\frac{a_{2n}+a_{2n+1}}{2}$$

とわかる。

以上より、$x=\dfrac{a_{2n+1}+(-1)^n}{2}$, $y=\dfrac{a_{2n+1}-(-1)^n}{2}$, $z=\dfrac{a_{2n}+a_{2n+1}}{2}$ となる。

そこで、以下の２つのことを確かめた。

【１】 x と y の差が１である。

【２】 ピタゴラス方程式が成り立つ。

【１】と【２】が成り立つと、(x,y,z) は、x,y が連続するピタゴラス三角形であるといえる。

【１】については、x と y の差をとると、

$$x-y=\frac{a_{2n+1}+(-1)^n}{2}-\frac{a_{2n+1}-(-1)^n}{2}$$

$$=(-1)^n$$

より、x と y の差は１と−1 とを振動することがわかった。つまり、x と y の絶対値は

$|x-y|=1$となる。

【２】について、$x^2+y^2-z^2$に先程のx,y,zを代入すると、

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-z^2 &= \left\{\frac{a_{2n+1}+(-1)^n}{2}\right\}^2+\left\{\frac{a_{2n+1}-(-1)^n}{2}\right\}^2-\left(\frac{a_{2n}+a_{2n+1}}{2}\right) \\
&= \frac{\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}-\alpha^{4n}-\beta^{4n}+4}{16}+\frac{-2\alpha^{4n+1}-2\alpha^{2n+1}\beta^{2n}-2\alpha^{2n}\beta^{2n+1}-2\beta^{4n+1}}{16} \\
&= \frac{\alpha^{4n}\left(\alpha^2-2\alpha-1\right)+\beta^{4n}\left(\beta^2-2\beta-1\right)+4-2\alpha-2\beta}{16} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり、ピタゴラス方程式が成り立つことがわかった。

よって、$x=\dfrac{a_{2n+1}+(-1)^n}{2}$，$y=\dfrac{a_{2n+1}-(-1)^n}{2}$，$z=\dfrac{a_{2n}+a_{2n+1}}{2}$ に、nを順次代入していくことにより、x,yが連続するピタゴラス三角形を求めることができる。

３－５．メスネーラの恒等式

前節で求めたy,zが連続するピタゴラス三角形を他の方法でも求めることができる。その方法のうち、メスネーラの恒等式を用いるものがある。

<u>定理４</u>（メスネーラの恒等式）

すべての自然数nに対して、$(10n-5)^2+\{50n(n-1)+12\}^2=\{50n(n-1)+13\}^2$ が成り立つ。

証明

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (10n-5)^2+\{50n(n-1)+12\}^2=100n^2-100n+25+\left(50n^2-50n+12\right)^2 \\
&= 100n^2-100n+25+2500n^4+2500n^2+144-5000n^3-1200n+1200n^2 \\
&= 2500n^4-5000n^3+3800n^2-1300n+169
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \left(50n^2-50n+13\right)^2=2500n^4+169-5000n^3-1300n+1300n^2 \\
&= 2500n^4-5000n^3+3800n^2-1300n+169
\end{aligned}
$$

（左辺）＝（右辺）より、この恒等式は成り立つといえる。■

メスネーラの恒等式に$n=1, 2, 3, \cdots$を順次代入していくと、y, zが連続するピタゴラス三角形が生成されていく。実際にメスネーラ恒等式を用いて、y, zが連続するピタゴラス三角形を求めた結果が表６である。

表６　メスネーラの方程式により求めたピタゴラス三角形

n		x	y	z
1		5	12	13
2		15	112	113
3		25	312	313
4		35	612	613
5		45	1012	1013
6		55	1512	1513
7		65	2112	2113
8		75	2812	2813

すべてのピタゴラス三角形のy, zが連続していることがわかる。よってy, zが連続するピタゴラス三角形を求める方法が２つ示すことができた。

３－６． $x-y=\pm 1$ が成り立つときの三角比

まず、図４のようなピタゴラス三角形(x_n, y_n, z_n)を考える。

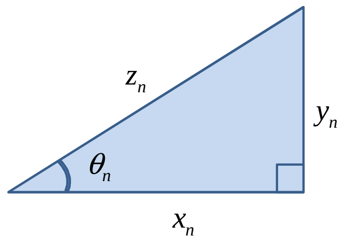

図４

図４の三角形について、

①$n\to\infty$としたときのθ_nの三角比

②y, zが連続する、つまりx, y, zが連続するピタゴラス三角形

の２つについて考察する。

①$n\to\infty$としたときの三角比を考える。ここで、私たちはこの三角形が直角二等辺三角形に近づくのではないかと考えた。なぜなら、三角形が大きくなるにつれてx, yの差の絶対値１が無視できるようになると考えたからである。

実際にθ_nの正弦、余弦、正接をそれぞれ求めてみると、

$$\sin\theta_n=\frac{y_n}{z_n},\ \cos\theta_n=\frac{x_n}{z_n},\ \tan\theta_n=\frac{y_n}{x_n}$$

となる。そこで、それぞれの極限をとると、次のようになった。

$$\lim_{n\to\infty}\sin\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-(-1)^n}{a_{2n+1}+a_{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}-(-1)^n}{\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}+\dfrac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}-2(-1)^n}{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+\alpha^{2n}+\beta^{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{2n+1}}{\beta^{2n}}+\beta-\frac{2(-1)^n}{\beta^{2n}}}{\frac{\alpha^{2n+1}}{\beta^{2n}}+\beta+\frac{\alpha^{2n}}{\beta^{2n}}+1}$$

$$=\frac{\beta}{\beta+1}=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}+(-1)^n}{a_{2n+1}+a_{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+2(-1)}{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+\alpha^{2n}+\beta^{2n}}$$

$$=\frac{\beta}{\beta+1}=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-(-1)^n}{a_{2n+1}+(-1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{-(-1)^n}{a_{2n+1}}}{1+\frac{-(-1)^n}{a_{2n+1}}}=1$$

$$=\tan\frac{\pi}{4}$$

これらの結果から、θ_n は $45°$ に近づいていくということがわかり、$n\to\infty$ とした三角形は直角二等辺三角形となる。

②について考察する。定理１の条件のもと３辺が連続するピタゴラス三角形について考える。主に方法は２つある

[方法１] 新たな文字を用いて求める。

[方法２] ３－４節で求めた、式をもとに生成する。

[方法１]

x, y, z は連続しているので、

$$x=n-1,\quad y=n,\quad z=n+1$$

(n は $n>1$ を満たす自然数)とおく。この３数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-1)^2+n^2=(n+1)^2$$

$$n^2-2n+1+n^2=n^2+2n+1$$

から、

$n^2=4n$, $n(n-4)=0$ となり、

$n>1$ なので、$n=4$ である。

よって、この条件を満たすものは(3, 4, 5)のみであることがわかる。

[方法２]

３辺が連続しているとは、３－４節の x, y が連続するとき、かつ y, z が連続するときと言い換えることができる。

３－４節より、

$$x=\frac{a_{2n+1}+(-1)^n}{2},$$

$$y=\frac{a_{2n+1}-(-1)^n}{2},$$

$$z=\frac{a_{2n}+a_{2n+1}}{2}$$

と表すことができる。y, z は連続するので、$y+1=z$ である。したがって、

$$\frac{a_{2n+1}-(-1)^n}{2}+1=\frac{a_{2n}+a_{2n+1}}{2}$$

となる。

これを解くと、$a_{2n}=-(-1)^n+2$ となる。

（ｉ）nが奇数のとき

$a_{2n}=3$ である。a_nの一覧(表７)において、２番目が３なので、$2n=2$より、$n=1$.

これはnが奇数であるという、仮定を満たす。

表７

n	a_n
1	1
2	3
3	7
4	17
5	41
6	99

（ⅱ）nが偶数のとき

$a_{2n}=1$である。a_nの一覧(表８)において１番目が１なので、$2n=1$ より $n=\dfrac{1}{2}$.

表８

n	a_n
1	1
2	3
3	7
4	17
5	41
6	99

これはnが偶数(自然数)であるという仮定に反するので不適。

（ｉ),（ⅱ)より、$n=1$ のみである。すなわち $(x_n,y_n,z_n)=(3,4,5)$ のときのみであることがわかった。

［方法１］,［方法２］のどちらの方法であっても、３辺が連続するピタゴラス三角形は(3, 4, 5)のみであるとわかる。

また、辺の長さが等差数列となるものを求めることも容易である。上述の[方法１]と同じように、自然数kを公差として、３辺を

$$n-k,\ n,\ n+k$$

とする。この３数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-k)^2+n^2=(n+k)^2$$

$$n^2-2kn+k^2+n^2=n^2+2kn+k^2$$

から、

$$n^2=4kn,\quad n(n-4k)=0$$

となり、$n>k$から、$n=4k$である。

この条件を満たすものは$(3k,4k,5k)$であり、これらはすべて(3, 4, 5) と相似なものである。

以上から、３辺が連続するものは(3,4,5)のみであり、３辺が等差数列となるのは(3,4,5)に相似なものに限る。

３－７．面積が等しいピタゴラス三角形

ピタゴラス三角形の面積は$x\times y$ $(=xy)$によって容易に求めることができる。

実際に小さいものからその面積を求めた結果を下の表９に示す。

表９

x	y	z	ΔABC
3	4	5	6
5	12	13	30
15	8	17	60
7	24	25	84
21	20	29	210
35	12	37	210
9	40	41	180
45	28	53	630
63	16	65	504

表９から（21,20,29）と（35,12,37）は面積が等しく 210 であることがわかる。

そこで、斜辺が 37 以下のものについて考える。実際に斜辺が 37 以下のものの面積を求めた結果を表 10 に示す。

表 10 から、異なった斜辺の長さで同じ面積となる最小の三角形は(21,20,29) と(35,12,37)であることがわかる。

表 10

x	y	z	ΔABC
3	4	5	6
6	8	10	24
5	12	13	30
9	12	15	54
15	8	17	60
12	16	20	96
7	24	25	84
15	20	25	150
10	24	26	120
21	20	29	210
30	16	34	240
35	12	37	210

また、ピタゴラス三角形$(15,112,113)$の面積は840と$(21,20,29)$,および$(35,12,37)$の面積の４倍に等しい。面積が４倍であることから、$(21,20,29)$,$(35,12,37)$の辺を２倍した$(42,40,58)$,$(70,24,74)$と面積が等しいことがわかる。よって、$(15,112,113)$, $(42,40,58)$, $(70,24,74)$の３つはどれも異なる斜辺をもつ、同じ面積のピタゴラス三角形であるいえる。ちなみに、３つの既約なピタゴラス三角形のうち異なる斜辺をもち、同じ面積であるもののうち最小なものの組み合わせは

$$(4485,5852,7373)$$
$$(19019,1380,19069)$$
$$(3059,8580,9109)$$

であり､いずれも面積Sは$S=13123110$となる。

３－８. ヘロン三角形、有理三角形

これまで、各辺が整数で表される直角三角形について考えてきたが、この章では各辺が整数の直角三角形とは限らない三角形を考える。

このような三角形を**ヘロン三角形**という。また明らかに、ピタゴラス三角形はヘロン三角形の一部である。

ここで、ヘロン三角形を求める方法をいくつか紹介する。

[方法１] **三角不等式**

$$|b-c|<a<b+c$$

を満たす３数a,b,cを選び、三角形(a,b,c)を与えるという方法である。

例えば$a=2,b=3,c=4$　とすると

$|2-3|<4<2+3$であり、またこの３数は三角形を作ることができる。ちなみにこの三角形の内角はすべて整数値ではなく、その面積は$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$となった。この例では、各辺は整数であるが内角と面積は整数にならなかった。

この方法では、内角はどれも整数ではなかった。そこで、ある 1 つの角が整数であり、各辺が整数である三角形を計算で求める方法を紹介する。

[方法２] 次の定理がある([2]参照)。

<u>定理５</u>([2])

$$\begin{cases} a=m^2+n^2+mn \\ b=m^2-n^2 \\ c=2mn+n^2 \end{cases} \quad \cdots(2)$$

これらの式(2)を満たす△ABC(これを(a,b,c)とする)は$\angle A=120°$であり、各辺が整数である三角形を表す。

（証明）図５のような三角形 ABC を考える。

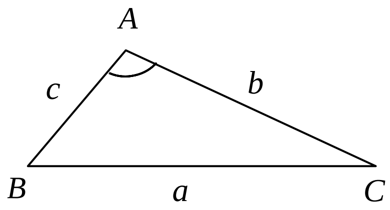

図５

余弦定理から

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(2)式より、

$\cos A$

$$= \frac{\left(m^2 - n^2\right)^2 + \left(2mn + n^2\right)^2 - \left(m^2 + n^2 + mn\right)^2}{2\left(m^2 - n^2\right)\left(2mn + n^2\right)}$$

$$= \frac{\left(m^4 - 2m^2n^2 + n^4\right) + \left(4m^2n^2 + 4mn^3 + n^4\right)}{2\left(2m^3n + m^2n^2 - 2mn^3 - n^4\right)}$$

$$- \frac{\left(m^4 + n^4 + m^2n^2 + 2m^2n^2 + 2mn^3 + 2m^3n\right)}{2\left(2m^3n + m^2n^2 - 2mn^3 - n^4\right)}$$

$$= \frac{2m^3n - m^2n^2 + 2mn^3 + n^4}{-2\left(-2m^3n - m^2n^2 + 2mn^3 + n^4\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

よって、$0° < A < 180°$ より $\angle A = 120°$ となる。■

例えば、定理５において、$m = 5,\ n = 3$ とすると、

$$\begin{cases} a = 5^2 + 3^2 + 5 \times 3 = 49 \\ b = 5^2 - 3^2 = 16 \\ c = 2 \times 5 \times 3 + 3^2 = 39 \end{cases}$$

こうして、$\angle A = 120°$ で各辺が整数の三角形(49,16,39)を求めることができた。

[方法３] 図６のように２つのピタゴラス三角形(5,12,13)と(35,12,37)を用意する。ここで、長さが 12 である辺同士を合わせると、新たに各辺が整数ではある鈍角三角形(13,40,37)を作ることができる。

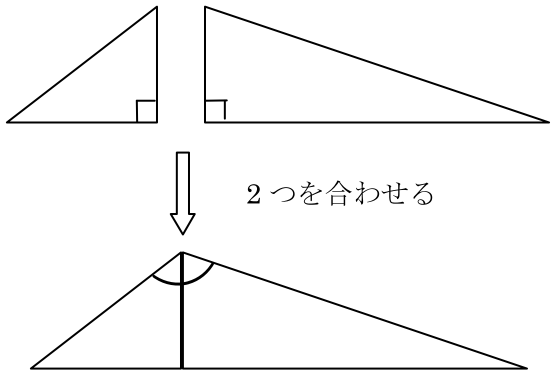

図６

ちなみに、この場合の鈍角はおよそ

$$23° + 71° = 94°$$

となっている。また、その面積は、(5,12,13)と(35,12,37)の面積をあわせたもの、つまり $30 + 210 = 240$ となる。[方法３]で求めると、各辺だけでなく面積も整数となる。

ここで[方法３]について注目する。[方法３]のように、直角を挟む辺が等しいピタゴラス三角形はいくらでも求めることができる。

２つのピタゴラス三角形 (a_1, b_1, c_1) と (a_2, b_2, c_2) を考える。このとき、b_1 と b_2 が

その最小公倍数になるように、２つのピタゴラス三角形を拡大すると、b_1とb_2が対応する辺が等しいピタゴラス三角形の組を作り出すことができる。

このようにして、各辺と面積が整数で表される三角形を、２つのピタゴラス三角形を用意することで無限に求められることがわかった。

しかし、各辺と面積が整数で表される三角形が、すべて２つの直角三角形によってできているわけではない。

例えば、(65,119,180)を考える。この３数は

$$|65-119|<180<65+119$$
$$54<180<184$$

を満たし、またこの三角形の面積はヘロンの公式を用いて、

$$S=\sqrt{182(182-65)(182-119)(182-180)}$$
$$=\sqrt{2683044}$$
$$=1638$$

となった。確かに面積は整数となっている。

ここで、(65,119,180)がピタゴラス三角形の組み合わせでないことを示す。

もし、(65,119,180)がピタゴラス三角形の組み合わせだとすると、その三角形の高さが整数となるはずである。

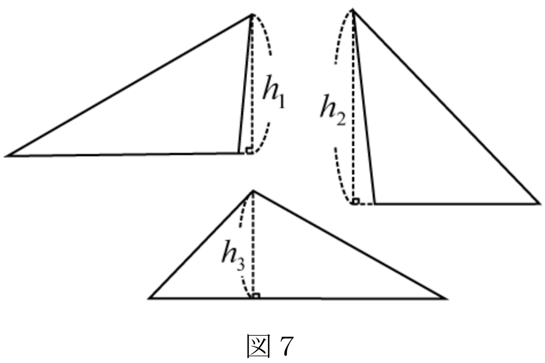

図７

図７のようにそれぞれの辺を底辺とすると、その高さは

・底辺が 65 のとき$3276\div65=50.4$

・底辺が 119 のと$3276\div119=27.5294\ldots$

・底辺が 180 のとき$3276\div180=18.2$

となって、どの場合も高さが整数でないことがわかった。すなわち、(65,119,180)が２つのピタゴラス三角形の組み合わせではない。

では、ここから３辺が連続してかつ面積と各辺の長さが整数である三角形を考える。まず、その性質として、それが直角をはさむ１辺を共有する２つのピタゴラス三角形によってできているという点が挙げられる。それを証明する。

定理６

３辺が連続しかつ面積と各辺の長さが整数である三角形は、直角をはさむ１辺を共有する２つのピタゴラス三角形によってできている。

(証明)

まず、このような三角形のうち最小の辺が奇数であることを示す。

背理法を用いる。最小の辺が偶数$2k$であるとすると三角形は$(2k,\ 2k+1,\ 2k+2)$となる。ヘロンの公式から、三角形の面積は

$$s=\frac{2k+2k+1+2k+2}{2}=\frac{6k+3}{2}$$

となる。ヘロンの公式を変形して、

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$16S^2=2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)$$

下の式に、Sと３辺を代入して、

$$4(4S^2)=(6k+3)(2k+3)(2k+1)(2k-1)$$
$$=4(3k^2+8k+2)(4k^2-1)+4k^2-1$$

ここで、左辺は４で割り切れるが、右辺は４で割ると１余り、矛盾が生じる。したがって、三角形の最小の辺は奇数である。

そこで、最小の辺を$2k-1$とすると、三角形は$(2k-1,\ 2k,\ 2k+1)$となる。このとき上と同様に三角形の面積の平方は

$$S^2=3k^2(k^2-1)$$

となる。この等式からk^2はS^2の約数であることがわかる。よって、背理法を用いてkがSの約数であることがわかる。すると、Sは整数hを用いて、$S=kh$と表せる。

一方、辺$2k$に対する高さをh_1とすると、$S=kh_1$と表すことができる。

これらの２式を比べると、$h=h_1$であることがわかる。つまり、辺$2k$に対する高さは整数となることがわかる。

さらに、$S^2=3k^2(k^2-1)$と$S=kh$を比べると、

$$3k^2(k^2-1)=k^2h^2$$

ここで、

$$h^2=3(k^2-1)=(2k+1)^2-(k+2)^2$$
$$h^2=3(k^2-1)=(2k-1)^2-(k-2)^2$$

より

$$(2k+1)^2=h^2+(k+2)^2$$
$$(2k-1)^2=h^2+(k-2)^2$$

つまり、ピタゴラス方程式が成り立ち、$(2k+1,\ h,\ k+2)$と$(2k+1,\ h,\ k+2)$がピタゴラス三角形であることがわかる。これらのピタゴラス三角形をはり合わせると、$(2k-1,\ 2k,\ 2k+1)$という三角形ができる。したがって、３辺が連続する三角形がピタゴラス三角形の組み合わせによってできていることがわかった。■

ところで、

$$(2k+h\pm2, 3k+2h, 4k+2h\pm1)$$

(複号同順)という２つの三角形を考える。

次の計算から、これらの三角形がピタゴラス方程式を満たすことがわかる。

$$(2k+h\pm2)^2+(3k+2h)^2-(4k+2h\pm1)^2$$
$$=4k^2+h^2+4+4kh+\pm4h\pm8k$$
$$+9k^2+4k^2+12kh$$
$$-16k^2-4h^2-1-16kh\mp4h\mp8k$$
$$=-3k^2+h^2+3.$$

ここで、上の証明より、

$$3(k^2-1)=h^2$$
$$3k^2=h^2+3$$

とわかるので、

$$(2k+h\pm2)^2+(3k+2h)^2-(4k+2h\pm1)^2$$
$$=-3k^2+h^2+3$$
$$=0$$

となり、ピタゴラス方程式が成り立つことがわかる。

ここで、これらの三角形は$(3k+2h)$という辺を共有している。そこで、２つのピタゴラス三角形を組み合わせると、

$$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$$

という三角形ができる。この三角形は明らかに、３辺が連続する整数で表せる三角形である。

このことから、ある３辺が連続する整数である三角形があれば、新たに同じ性質を持つ三角形を求めることができるということがわかる。

例えば$(3,4,5)$という三角形を考える。こ

のとき、$(2k-1,\ 2k,\ 2k+1)=(3,4,5)$ となるのは、$k=2$ のときである。また、$S=6$ から $h=3$ である。

これらの数を

$$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$$

に代入して、(13,14,15)という三角形ができる。この三角形の面積はヘロンの公式から、

$$S=\sqrt{21\times 8\times 7\times 6}=84$$

より、確かに面積が整数になっている。

さらに、(13,14,15)から新たな三角形を作る。この場合、　である。

よって、$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$ から(51,52,53)が得られた。この三角形の面積は、

$$S=\sqrt{78\times 27\times 26\times 25}=1170$$

となり、面積も確かに整数になっている。

また、この方法によって３辺が連続する整数である三角形を無限に求められることがわかった。

では、３辺の長さと面積が整数である三角形を求めるにはどうすればよいかを考える。この問題は、各辺と面積が有理数である三角形を求めることと同値である。このように、各辺と面積が有理数で表せる三角形を**有理三角形**とよぶ。

有理三角形は、別の２つの有理三角形の組み合わせであることを証明する。

<u>定理７</u>

有理数の辺をもつどんな三角形においても、三角形の内部に引いた高さは、それに垂直な辺を２つの有理数比に分ける。

(証明）図８のような三角形 (a,b,c) を考える。そして、$a,\ b$ の正射影をそれぞれ $a_1,\ b_1$ とする。

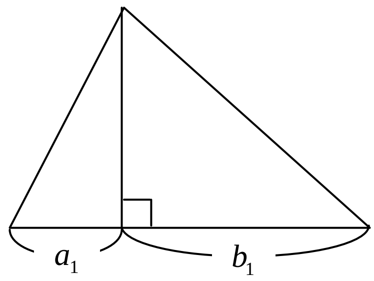

図８

まず仮定から、$a_1+b_1=c \quad \cdots(3)$ であることがわかる。高さ h は、三角形 (a,b,c) を２つの直角三角形に分ける。その三角形は (a_1,h,a) と (b_1,h,b) であるので、ピタゴラス方程式から、

$$a_1{}^2=a^2-h^2,\ \ b_1{}^2=b^2-h^2.$$

よって、$a_1{}^2-b_1{}^2=a^2-b^2$. ここで(3)式から、

$$\begin{aligned} c(a_1-b_2)&=(a_1+b_1)(a_1-b_1)\\ &=a_1{}^2-b_1{}^2=a^2-b^2 \end{aligned}$$

$$a_1-b_1=\frac{a^2-b^2}{c}$$

となる。一方、(3)から

$$a_1=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c},\quad b_1=\frac{b^2-a^2+c}{2c}.$$

この等式から、$a_1,\ b_1$ は有理数である。

したがって、有理数の辺をもつ三角形において、三角形の内部に引いた高さは、それに垂直な辺を２つの有理数比に分けるということが証明された。

ここで、もし各辺だけでなく面積も有理数ならば、すべての高さも有理数になるということがわかる。

なぜなら、辺 c に対する高さを h とする

と、$S=\dfrac{ch}{2}$ から $h=\dfrac{2S}{c}$ である。

したがって、辺と面積が有理数ならば高さも有理数になることがわかる。

すると、ある有理三角形を考えたとき、辺cに対する高さをhとすると、上の証明から、分けられる２つの直角三角形は各辺が有理数となり、有理三角形はそれとは別の２つの有理三角形の組み合わせによってできているということが証明された。■

次に、各辺と中線が有理数である三角形について考える。

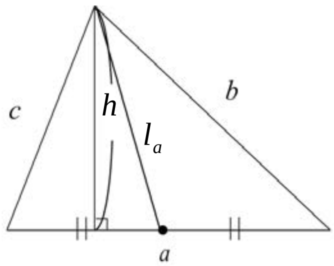

図９

辺aへおろした中線をl_aとする。すると、中線定理より、

$$b^2+c^2=2\left(l_a+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$4{l_a}^2=2(b^2+c^2)-a^2$$

この公式から、各辺と中線が有理数である三角形が求められる。

例えば、(68,85,87)が中線と各辺が有理数である三角形であることがわかる。実際、

$$l_a=79,\ l_b=\frac{131}{2},\ l_c=\frac{127}{2}$$

とすべての中線が有理数になっている。

他にも、(127,131,158)や(204,255,261)という三角形も中線と各辺が有理数になっている。

３－９．ピタゴラス三角形と平面上の点

(a,b,c)を既約なピタゴラス三角形とする。この三角形にx座標$\dfrac{a}{c}$、y座標$\dfrac{b}{c}$をもつ平面上の点$\left(\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}\right)$を対応させる。するとピタゴラス方程式$a^2+b^2=c^2$から

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$$

となる。よって、点$\left(\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}\right)$は原点を中心とした半径１の円、つまり単位円上に存在する。

つまり、１つのピタゴラス三角形について、単位円$x^2+y^2=1$上の正の有理数座標を持つ点、つまり、単位上の有理点が対応する。逆に、点(x,y)を円$x^2+y^2=1$上の正の有理数座標をもつ、つまりx,yが方程式$x^2+y^2=1$を満たす正の有理数であると仮定すると、

$$x^2+y^2=1=\frac{c^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}$$

$x=\dfrac{a}{c},\ y=\dfrac{b}{c}$ とみなすことができる。

よって、この点(x,y)と既約なピタゴラス三角形(a,b,c)を対応することができた。

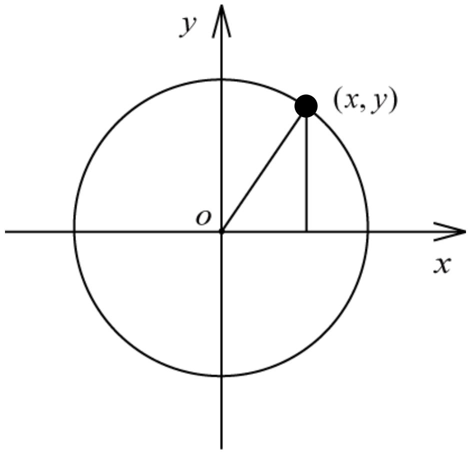

図 10

こうして、既約なピタゴラス三角形と、単位円上の有理点で第一象限にあるものとの間に１対１の対応がつけられる。

<u>定理８</u>

２つの任意の実数 x_1, x_2 を $0 < x_1 < x_2 < 1$ と定める。この２数 x_1, x_2 に対して、既約なピタゴラス三角形 (a, b, c) がただ１つ存在して、それに対応する単位円上の点 (x, y) は $x_1 < x < x_2$ を満たす。

（証明）　$0 < x_1 < x_2 < 1$ であることから、

$$1 < \frac{1+x_1}{1-x_1} < \frac{1+x_2}{1-x_2}.$$

これより、$1 < \sqrt{\dfrac{1+x_1}{1-x_1}} < \sqrt{\dfrac{1+x_2}{1-x_2}}$.

有理数の稠密性から、$\sqrt{\dfrac{1+x_1}{1-x_1}}$ と $\sqrt{\dfrac{1+x_2}{1-x_2}}$ の間には有理数 $\dfrac{m}{n}$ はいくらでも存在するので、m, n は互いに素で、m が奇数、n が偶数とおくことができる。よって、

$$\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}} < \frac{m}{n} < \sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}} \qquad \cdots①$$

ここで、

$$1 - \frac{2}{1+\left(\dfrac{m}{n}\right)^2} = 1 - 2 \times \frac{n^2}{n^2+m^2}$$

$$= \frac{n^2+m^2-2n^2}{n^2+m^2}$$

$$= \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

であるから、①より、

$$x_1 < \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} < x_2$$

となる。

定理２より、

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2$$

とおくと、既約なピタゴラス三角形が得られ、$x_1 < \dfrac{a}{c} < x_2$ になる。

よって、この三角形に対して単位円上の点 (x, y) が対応し、$x = \dfrac{a}{c},\ y = \dfrac{b}{c}$ であり、$x_1 < x < x_2$ となる。■

この結果から、第一象限の単位円上にある２点を取ると、その間には必ず既約なピタゴラス三角形に対応する点があることがわかった。言い換えると、$0° \leqq \alpha \leqq 90°$ を満たす任意の角 α に対して、角 α にいくらでも近い鋭角を持つ有理数辺の直角三角形を得ることできる。すべての辺が有理数なので、うまく拡大するとピタゴラス三角形を得ることができる。

このようにして、任意の角に近いものを作ることができる。その中で角が $45°$ に限

りなく近いピタゴラス三角形を作ることはできるが、45°のピタゴラス三角形は存在しない。理由は以下の通りである。

まず、ピタゴラス三角形に限らず各辺が整数の任意の三角形 ABC について考える。この三角形について、余弦定理を適用すると、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

である。

ここで a, b, c は整数なので、$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ は有理数となる。これより、$\cos A, \cos B, \cos C$ のうち１つでも無理数となると、a, b, c のうち少なくとも１つは無理数となる。

$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より、45°のときは a, b, c のうち少なくとも１つが無理数である。よって、１つの角が 45°であり、各辺が整数であるような三角形は存在しない。

３－10. 自然数の逆数を辺としてもつ直角三角形

まず $\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}\right)$ の直角三角形について考える。三平方の定理より、

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2} \quad \cdots①$$

となる。これを変形した $x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$ より、$x^{-2} < z^{-2}$ とわかる。これを解くと、$z < x$ となる。

ここで、z, x の最大公約数 d と互いに素な２数 a, c を用いて、$x = da,\ z = dc$ と表すことができる。

すると、①より、

$$y^2 z^2 + x^2 y^2 = x^2 y^2$$
$$y^2\left(x^2 - z^2\right) = x^2 z^2$$

$$y^2\left(a^2 - c^2\right) = (dac)^2 \quad \cdots②$$

このことから、y^2 が $(dac)^2$ の約数である。

よって、y は dac の約数であるといえる。したがって、整数 b が存在して、

$$yb = dac \quad \cdots③$$

とできる。これを②に代入すると、

$$y^2\left(a^2 - c^2\right) = y^2 b^2$$
$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \cdots④$$

a, c は互いに素な数なので、b, c も互いに素である。よって、④を変形すると、

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \cdots⑤$$

となる。つまり、三角形 (b, c, a) は既約なピタゴラス三角形である。だから、定理２より、互いに素な整数 m, n $(m < n)$ によって、

$$b = m^2 - n^2,\ c = 2mn,\ a = m^2 + n^2 \quad \cdots⑥$$

$$b = 2mn,\ c = m^2 - n^2,\ a = m^2 + n^2 \quad \cdots⑦$$

のどちらかが成り立つ。

また a, b, c は互いに素であり、⑤から b と ac は互いに素でなければばらない。すると、③より、d は b で割り切れなければならない。だから、自然数 δ が存在し、$d = b\delta$ が成り立つ。

$$x = da = \delta ab,\ y = \delta ac,\ z = dc = \delta bc$$

が成り立つので、⑥より、

$$x = \left(m^2 + n^2\right)\left(m^2 - n^2\right)\delta$$
$$y = 2mn\left(m^2 + n^2\right)\delta$$

$$z = 2mn\left(m^2 - n^2\right)\delta$$

⑦より、

$$x = 2mn\left(m^2 + n^2\right)\delta$$
$$y = \left(m^2 + n^2\right)\left(m^2 - n^2\right)\delta$$
$$z = 2mn\left(m^2 - n^2\right)\delta$$

を得る。

一方、任意の自然数 m, n, δ $(n < m)$ に対して上の等式により、x, y, z を定義し、等式⑥および⑦により b, c, a を定義すると、

$x = \delta ab,\ y = \delta ac,\ z = \delta bc$

になる。こうして、得られた x, y, z の値は、先程の方程式 $y^2\left(x^2 - z^2\right) = x^2z^2$ および $b^2 + c^2 = a^2$ を満たすから、$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$ も満たす。

したがって、方程式 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$ のあらゆる正の整数解は、等式

$$x = \left(m^4 - n^4\right)\delta$$
$$y = 2mn\left(m^2 + n^2\right)\delta$$
$$z = 2mn\left(m^2 - n^2\right)\delta$$

あるいは、

$$x = 2mn\left(m^2 + n^2\right)\delta$$
$$y = \left(m^4 - n^4\right)\delta$$
$$z = 2mn\left(m^2 - n^2\right)\delta$$

から得られる。ここで δ は任意の自然数であり、m, n をみたす $m > n$ は互いに素な整数である。

実際に直角三角形を求める。最も小さい整数解を求めるために、$m = 2, n = 1, \delta = 1$ とおく。すると上の式より、$x = 15$, $y = 20$, $z = 12$ となる。よって、

$$\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} = \frac{1}{12^2}$$

が得られる。ちなみに、$m = 3, n = 1, \delta = 1$ のときは、$x = 80, y = 60, z = 48$, つまり、

$$\frac{1}{80^2} + \frac{1}{60^2} = \frac{1}{48^2}$$

が得られる。また、$m = 3, n = 2, \delta = 1$ のときは、$x = 65, y = 156, z = 60$, よって

$$\frac{1}{65^2} + \frac{1}{156^2} = \frac{1}{60^2}$$

が得られる。

また、３辺の長さが平方数の逆数の場合について考える。

同様に、ピタゴラスの定理より、

$$\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = \frac{1}{z^4}$$

が成り立つ。

しかし、フェルマーの定理より上の式を満たす x, y, z は存在しない。よって、３辺の長さが平方数の逆数であるような直角三角形は存在しない。

３－11. フェルマーの問題

ここで１つの問題を紹介する。フェルマー(Fermat)は 1643 年に、メルセンヌ(Mersennne)へある手紙を送った。その内容とは、

> 直角をはさむ２辺の和と斜辺とが平方数であるようなピタゴラス三角形をみつけよ。

というものである。この問題は、ピタゴラス三角形 (x, y, z) において、$x^2 + y^2 = z^2$, $x + y = p^2$ が成り立つ整数解を求めることと同じである。フェルマーはこのような三角形の中で最小なものは、

456548602776

1061652293520

4687298610289

を辺とする三角形であると述べていて、実際にこれは正しいことがわかっている。

３－12. 各辺と対角線が自然数になる直方体

１つのピタゴラス三角形があれば、そこから各辺及び、対角線が自然数である長方形を得ることができる。

また逆に、そのような長方形からピタゴラス三角形を得ることができる。この問題を３次元空間と認識すると各辺と対角線が自然数で表せられる直方体をどのように見つけるかという問題になる。直方体の各辺を x, y, z , また対角線を t とすると

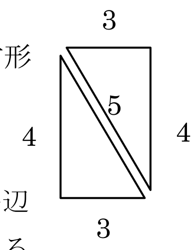

図 11

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

が成り立つ。逆に x, y, z および t が上の方程式を満たすと、x, y, z は直方体の辺の長さとなり、t はその対角線の長さとなる。

他に、各辺と対角線が自然数で表すことができる直方体を求めることは、上の方程式を満たす整数解を求めることと同値である。

はじめに、x, y, z のうち少なくても２つは偶数であることを示す。まず、すべてが奇数であると仮定する。奇数の２乗は 4 で割ると 1 余るため、$x^2 + y^2 + z^2$ を 4 で割ると 3 余ることがわかる。しかし、t^2 は平方数であるため、等号は成り立たない。

次に、x, y, z の１つだけが偶数であるとすると $x^2 + y^2 + z^2$ は 4 で割ると 2 余る。しかし、t^2 は平方数であるためこちらも等号が成り立たない。よって x, y, z のうち少なくとも２つは偶数であることがわかった。

さらに、x, y, z, t のうち少なくても１つは 3 の倍数であることを示す。

x, y, z のうち、１つも 3 の倍数でないと仮定すると t は 3 で割り切れないといけないことを示す。

まず、3 の倍数でない数を２乗すると、3 で割ったときに 1 余る。x, y, z のいずれも 3 で割り切れないのだから、それらの平方の和、つまり t^2 は 3 で割り切れる。したがって、t は 3 の倍数でなければならない。

よって、x, y, z, t のうち少なくとも１つは 3 の倍数であることがわかった。

任意の自然数 x に対して、方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

を満たすような３数 y, z, t の組が無数に存在することを示す。

n が任意の自然数のとき、x が奇数ならば、

$$x,\ y = 2n,\ z = \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2,$$

$$t = \frac{x^2 - 1}{2} + 2n^2 + 1$$

は明らかに自然数であり、方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

を満たす。

また、n が任意の自然数のとき x が偶数ならば、

$$x,\ y = 2n + 1,\ z = \frac{x^2}{2} + 2n^2 + 2n,$$

$$t = \frac{x^2}{2} + 2n^2 + 2n + 1$$

は明らかに自然数であり、方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

が成り立つ。

任意の偶数の組 x, y に対して方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ を成り立たすような整数 z, t が存在する。

数 x, y がともに偶数のとき、x^2+y^2 は 4 で割り切れるから、

$$z=\frac{x^2+y^2}{4}-1,\ t=\frac{x^2+y^2}{4}+1$$

は自然数で、x, y, z, t は方程式

$$x^2+y^2+z^2=t^2$$

を満たす。

数 x, y のうち一方が偶数、もう一方が奇数であるときも、方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ を成り立たすような整数 z, t が存在する。

数 $x^2+y^2\pm1$ は偶数となり、

$$x,\ y,\ z=\frac{x^2+y^2-1}{2},\ t=\frac{x^2+y^2+1}{2}$$

は方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ を満たす。

そこで、これまでの式を用いて直方体を求めてみよう。ここでは、x が奇数の場合を考える。よって、$x=3$，$n=4$ としてみよう。

$x,\ y=2n,$

$$z=\frac{x^2-1}{2}+2n^2,\ t=\frac{x^2-1}{2}+2n^2+1$$

この等式より、

$x=3$

$y=2\times4=8$

$$z=\frac{3^2-1}{2}+2\times4^2=4+32=36$$

$$t=\frac{3^2-1}{2}+2\times4^2+1=4+32+1=37$$

となり、$(x, y, z, t)=(3,8,36,37)$ が求められた。実際、この４数は

$$x^2+y^2+z^2=t^2=1369$$

を満たしている。

よって、ここまでを整理すると、直方体の２辺を表す数は両方ともが奇数であるという場合以外は、他の辺と対角線を表す残りの z, t も与えることができる。

次に、対角線が自然数で表されて、３辺が連続するような直方体は存在しないことを示す。ここで、直方体の 3 辺を $(y-1,\ y,\ y+1)$，対角線を整数 t で表すとすると、

$$(y-1)^2+y^2+(y+1)^2-t^2$$

$$3y^2+2=t^2$$

が成り立つ。

ここで、y が奇数のときは、y^2 を 8 で割ると 1 余り、左辺 $3y^2+2$ を 8 で割ると 5 余る。しかし、8 で割って 5 余る数は平方数にはなりえない。また、y が偶数のときは、左辺 $3y^2+2$ は 4 で割ると 2 余る。しかし、そのような数も平方数にはなり得ない。

各辺が自然数で表せるような直方体の対角線は 2^k または $2^k\times5$ の形にはならないことを示す。ここでは $k\geqq0$ となる整数である。

実際、負でない整数 k が存在して、$t=2^k$ とするとき、方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ が自然数の解を持つと仮定する。

このような k の中には最小のもの m が存在する。しかも方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ の左辺の和 $x^2+y^2+z^2$ は x, y, z が正の整数のときは 3 より小さくはなり得ないから、$m>2$ である。$x^2+y^2+z^2=2^{2m}$ で、3 数 x, y, z のうち少なくとも２つは偶数であることを考えると、残りの１つも偶数でなければならないことがわかる。よって、整数 x_1, y_1, z_1 が存在して、$x=2x_1$，$y=2y_1$，$z=2z_1$ とかける。

すると、$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = \left(2^{m-1}\right)^2$ となる。

このとき、最初の仮定であった、不定方程式 $x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = \left(2^k\right)^2$ において、m の最小性に反するため、直方体の対角線は $t = 2^k$ という形にはならないことが証明された。

次に、$t = 2^k \times 5$ という形にはならないことを証明する。そこで、上と同様に $t = 2^k \times 5$ とするとき、このような k の中には最小のもの m が存在する。

まず、$m = 0$ のときを考える。このとき、x, y, z について、$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ が成り立つことがわかる。　ここで、上述のように x, y, z, t のうち１つは 3 の倍数でなければならず、t は 3 の倍数ではない。そこで x が 3 の倍数であると仮定する。すると、

$$y^2 + z^2 = t^2 - x^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$$

が成り立ち、$(y, z, 4)$ がピタゴラス方程式を満たす。しかし、このとき 4 が斜辺となっているが、斜辺が 4 であるピタゴラス三角形は存在しないので矛盾する。したがって、$m = 0$ のときは成り立たない。

次に、$m > 0$ の場合を考えよう。$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ より、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2m} \times 5$$

が成り立つ。ここで、右辺は偶数なので、x, y, z はすべて偶数でなければならない。

よって、x_1, y, z という整数が存在して $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ を満たすことがわかる。したがって、x_1, y, z の３数は

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = \left(2^{m-1} \times 5\right)^2$$

を満たす。しかしこれは、m が不定方程式

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = \left(2^k \times 5\right)^2$$

を満たす最小の値であるということに反する。したがって、直方体の対角線は $t = 2^k \times 5$ という形にもならないことが証明された。

直方体の対角線について、上述とは逆に、辺が整数表すことができる直方体の対角線の長さになり得ないのは、2^k という形と $2^k \times 5$ という形のみであるということを、フレヴィッツ（Hurwitz）が証明している。つまり、100 以下の整数について考えると、

1,2,4,5,8,10,16,20,32,40,64,80

のような数が直方体の対角線の長さになり得ないのである。

４．今後の課題

本年度は、研究の中で直角をはさむ辺と斜辺が連続するピタゴラス三角形について深く考えた。特に三角形の個数に関する研究を進めていきたい。また、この研究に伴い、整数論などの分野も学んでいきたい。

５．参考文献

[1]「ピタゴラスの三角形」，B. シェルピンスキー著，銀林　浩訳，東京図書(1993)

[2]「１つの角の大きさが決まっていて、３辺の長さがすべて整数である三角形のつくり方」，山田　潤

[3] Rational triangles, D.N. Lehmer, Amer. J. of Math.22, (1900)

６．謝辞

顧問の川口先生には、各発表会および本稿についてさまざまなアドバイスをいただきました。ありがとうございました。