フラクタル図形

４年Ｃ組　金池　綾夏
指導教員　川口　慎二

１．概要

私はフラクタル図形とフラクタル次元について、その定義や簡単な性質を学んだ。自然界にも多く見られるというフラクタル図形について、学習したいくつかの事例を紹介しながら、フラクタル図形の意味について考えてみた。その経過を報告する。

キーワード　　自己相似性、フラクタル図形、フラクタル次元、非整数次元

２．緒言

自然に存在する植物の葉脈や巻貝の殻などには同じ形を繰り返していくものが多いことを知った。私はそれらに興味を持ったので、フラクタル図形について学ぶことにした。

３．研究内容

■フラクタルとは

1975 年にマンデルブロが「砕けた石」という意味のラテン語から命名した非整数次元を持った図形や構造のことをいう。このような図形は、**自己相似性**という特徴がある。

■フラクタル次元

フラクタル図形は、そのミクロな部分を見ると、非常に複雑な形をしている。この複雑さのレベルを定量化するために用いられている量が**フラクタル次元**である。

■直線、平面、立体からわかる次元の性質

１辺の長さが 1 の線分、正方形、立方体の各辺をそれぞれ５等分した場合、１次元では$5^1=5$（個)の線分ができ、２次元では$5^2=25$（個)の正方形ができる。また、３次元では$5^3=125$（個)の立方体ができる。

このように、１辺を$\dfrac{1}{n}$に分割すると、線分、正方形、立方体ではそれぞれn^1，n^2，n^3個の相似な図形ができる。この指数が「次元」の数字を表している。

■フラクタル図形の事例

［１］**カントール集合**

カントール集合は次のように構成される。

①線分$C_0=[0,1]$から$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$を取り除き、これを$C_1=[0,1]\setminus\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$とする。

②このC_1から

$$\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)$$

を取り除き、C_2とする。つまり、

$$C_2=\left\{[0,1]\setminus\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}\setminus\left\{\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)\right\}$$

$$=[0,1]\setminus\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)\right\}$$

となる。

③このC_2から

$$\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right)\cup\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right)\cup\cdots\cup\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)$$

を取り除く。これをC_3とする。つまり、

C_3

$$=C_2\setminus\left\{\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right)\cup\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right)\cup\cdots\cup\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)\right\}$$

$$=[0,1]\setminus\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)\right.$$
$$\left.\cup\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right)\cup\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right)\cup\cdots\cup\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)\right\}$$

となる。

④以下、この操作を繰り返していく。

⑤このとき、$C_\infty=\bigcap_{k=0}^{\infty}C_k$を**カントール集合**という。

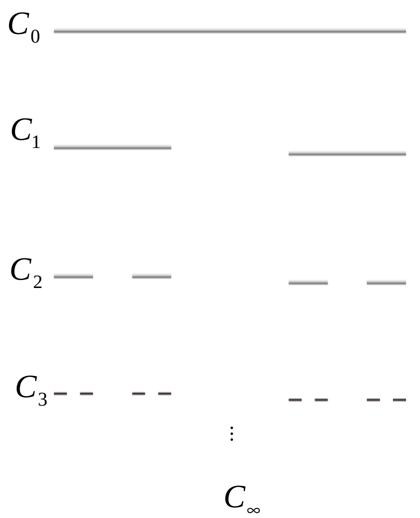

図１　カントール集合

さて、C_kの長さをL_k、C_kを構成する線分の本数をn_kとすると、

C_0のとき、$L_0=1$，$n_0=1$,

C_1のとき、$L_1=\frac{1}{3}$，$n_1=2$,

C_2のとき、$L_2=\frac{1}{3^2}$，$n_2=4$，

C_3のとき、$L_3=\frac{1}{3^3}$，$n_3=8$，…

となるため、

C_kのとき、$L_k=\frac{1}{3^k}=\left(\frac{1}{3}\right)^k$，$n_k=2^k$

となることがわかる。

すると、カントール集合C_∞の構成方法から、

$$L_\infty=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=0$$

となる。この式の意味は、kを∞まで大きくしていくと、$\left(\frac{1}{3}\right)^k$の値は限りなく０に近づくということである。また、線分の本数については、

$$n_\infty=\lim_{k\to\infty}2^k=\infty$$

と限りなく大きくなることがわかる。

［２］**コッホ曲線**

コッホ曲線の構成は次のようである。

①線分$K_0=[0,1]$を用意する。

②中央の$\frac{1}{3}$を取り除いた上に、１辺が$\frac{1}{3}$のテントを貼り付ける。これをK_1とする。

③次に、長さが$\dfrac{1}{3}$であるK_1の各辺に同じ操作を繰り返し、長さが$\dfrac{1}{3^2}$のテントをそれぞれ貼り付けて、K_2とする。
④この作業を無限回くりかえす。
⑤このとき、得られた曲線をK_∞を**コッホ曲線**という。

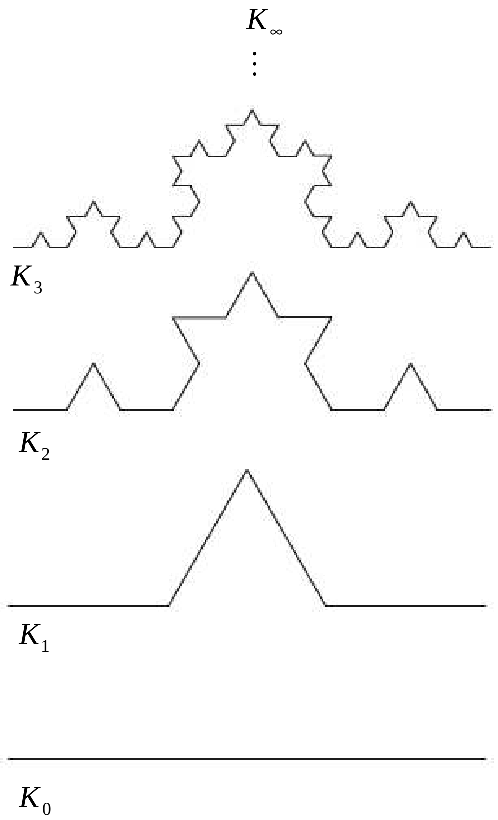

図２　コッホ曲線

ここで、K_jの長さをL_j、K_jを構成する辺の本数をN_jとすると、

K_0のとき、$L_0=1$,　$N_0=1$,

K_1のとき、$L_1=\dfrac{4}{3}$,　$N_1=4$,

K_2のとき、$L_2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$,　$N_2=16$,

K_3のとき、$L_3=\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$,　$N_3=64$, $\cdots$

となるため、

K_jのとき、$L_j=\left(\dfrac{4}{3}\right)^j$,　$N_j=4^j$

となることがわかる。したがって、

$$N_\infty=\lim_{j\to\infty}N_j=\infty,$$

$$L_\infty=\lim_{j\to\infty}L_j=\infty$$

となる。

［３］**シェルピンスキーのギャスケット**

シェルピンスキーのギャスケットは次のように構成される。
①１辺の長さが 1 である正三角形を用意し、これをS_0とする。
②この正三角形S_0の３辺の中点を結んでできた、辺の長さがS_0の$\dfrac{1}{2}$である４個の正三角形のうち、中央の正三角形のみを取り除く。これをS_1とする。
③この操作をもう一度繰り返すと、S_1を構成する３個の正三角形の３辺の中点を結んでできた、辺の長さがS_1の$\dfrac{1}{2}$、つまりS_0の$\dfrac{1}{4}$である 12 個の正三角形のうち、それぞれの中央にある正三角形３個を取り除く。これをS_2とする。
③この作業を無限回繰り返す。

④このとき、得られた曲線を$S_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ を**シェルピンスキーのギャスケット**という。

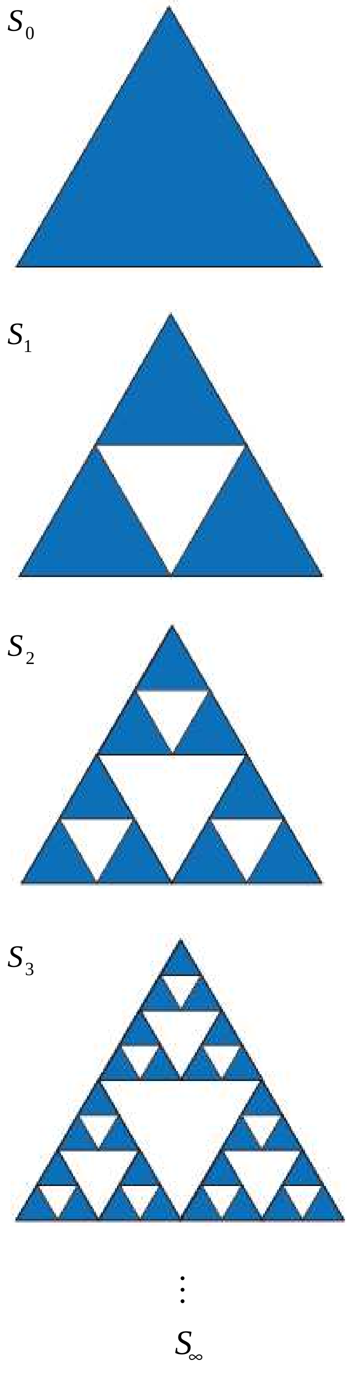

図３　シェルピンスキーのギャスケット

ここで、S_kの周の長さをl_k、面積をΔ_kとすると、

S_0のとき、$l_0 = 3$，$\Delta_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$，

S_1のとき、$l_1 = \frac{3^2}{2}$，$\Delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{4^2}$，

S_2のとき、$l_2 = \frac{3^3}{2^2}$，$\Delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{4^3}$，

S_3のとき、$l_3 = \frac{3^4}{2^3}$，$\Delta_3 = \frac{\sqrt{3}}{4^4}$，…

となるため、

S_kのとき、$l_k = \frac{3^{k+1}}{2^k}$，$\Delta_k = \frac{\sqrt{3}}{4^{k+1}}$

となることがわかる。したがって、

$$l_\infty = \lim_{k\to\infty} l_k = \infty,$$

$$\Delta_\infty = \lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$$

となる。

■フラクタル次元

フラクタル図形は一般に「**非整数次元**」をもち、これがフラクタル図形の複雑さを表しているといえる。

元の図形をn個に分割し、できた同じ図形の個数をmとするとき、**相似次元**Dを

$$D = \log_n m = \frac{\log_{10} m}{\log_{10} n}$$

$$= \frac{\log(\text{元の図形と相似な同じ図形の数})}{\log(\text{等分割した数})}$$

と定める。相似次元などを総称して、**フラクタル次元**ともいう。

そこで、実際に上述のフラクタル図形のフラクタル次元を計算してみよう。

まずは、カントール集合C_∞のフラクタル次元をD_Cとすると、

$$D_C = \log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \fallingdotseq \frac{0.301}{0.477} = 0.6310$$

となる。これより、カントール集合は、０次元(点)よりは複雑であるが、 １次元(線分)よりは単純ということができる。

次に、コッホ曲線K_∞のフラクタル次元をD_Kとすると、

$$D_K = \log_3 4 = \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \fallingdotseq \frac{0.602}{0.477} = 1.262$$

となり、非整数次元になることがわかる。これは、コッホ図形の複雑さが「２次元に近い直線的な性質」をもっているが、直線のように単純ではなく、「２次元的な複雑さ」もあわせてもっているということを示している。

また、シェルピンスキーのギャスケットS_∞のフラクタル次元D_Sは、

$$D_S = \log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \fallingdotseq \frac{0.477}{0.301} = 1.585$$

となり、コッホ図形より複雑であるが、２次元までの複雑さをもたないような図形であるといえる。

このように、フラクタル次元は図形の複雑さをはかる指標となっている。

また、コッホ図形において、コッホ図形を描く操作を繰り返すと、長さは無限大になる。ギャスケット図形において、図形を描く操作を繰り返すと、面積は無限小になる。このことから、フラクタル図形の見かけの大きさは有限であっても、長さが無限大、面積がゼロという状態が生じることがわかった。これはフラクタル図形の重要な性質であるといえる。

４．今後の課題

今後はさらにフラクタル図形の性質を学習するとともに、なぜ自然界にフラクタル図形の構造をもつものが多く存在するのかについても考察していきたい。

また、フラクタル次元のなかには、ハウスドルフ次元というものもあると知った。かなり計算が難しいようであるが、調べてみたいと考えている。

５．参考文献

[1]「フラクタル」、本田勝也、朝倉書店

[2]「フラクタル幾何学」、Kenneth Falconer 著、服部久美子、村井浄信訳、共立出版

６．謝辞

顧問の川口先生には、さまざまな面でご指導いただきました。ありがとうございました。