黄金分割

４年Ｂ組　今江　菜摘
指導教員　川口　慎二

１．概要

私は黄金分割について、その定義や簡単な性質を学んだ。黄金分割が見られるものとして、正五角形とペンタグラムの関係や黄金長方形について学習した。その結果を報告する。

キーワード　　黄金分割、黄金比、正五角形、ペンタグラム、黄金長方形

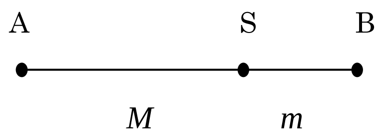
２．緒言

数学ではもちろん、それ以外の分野、例えば音楽や美術、建築、さらには自然界でも見られる黄金分割に私は興味を持った。そして、本年度はまず、黄金分割の多様な性質について学んだ。

３．研究内容

３－１．黄金分割の定義

１つの線分ABを大きい方の切片と小さい方の切片の比が、線分全体と大きい方の切片の比に等しいように点Sで分けることを**黄金分割**という。



線分ABの長さをa、大きい方の切片の長さをM、小さい方の切片の長さをmとすると、黄金分割の値が計算で求められる。

定理１

Sが黄金分割になるのは、

$$M : m = \left(1+\sqrt{5}\right) : 2$$

となる場合である。

（証明）

黄金分割の定義より、

$$a : M = M : m,$$

$$am = M^2.$$

$a = M + m$ なので、代入すると

$$(M+m)m = M^2.$$

両辺をm^2 で割ると、

$$\frac{M}{m} + 1 = \left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{M}{m} - 1 = 0$$ から、

$$\frac{M}{m} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$M > 0$，$m > 0$ より、$\frac{M}{m} > 0.$

ゆえに、$\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

したがって、Sが黄金分割になるとき、

$$M : m = \left(1+\sqrt{5}\right) : 2. \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.618$ である。この比 $\dfrac{M}{m} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のことを、**黄金比**という。

３－２．正五角形

［１］正五角形の対角線

黄金分割は、正五角形のいろいろな場所に現れる。五角形ABCDEを正五角形とする。このとき、次の定理が成り立つ。

定理２

(a) 正五角形ABCDEの頂点を共通の端点としない２本の対角線は互いに他を黄金分割する。

(b) 対角線の長さの一辺の長さに対する比率は $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

（証明）

(a) 対角線ACと対角線BEの交点Qに注目する。正五角形の一辺ABと対角線CEは平行なので、

QC：QA＝CE：AB.

AB＝DE，CE＝ACより、

QC：QA＝AC：DE. …①

DE∥AC，CD∥BEより、四角形QCDEは平行四辺形である。

ゆえに、QC＝DE　…②

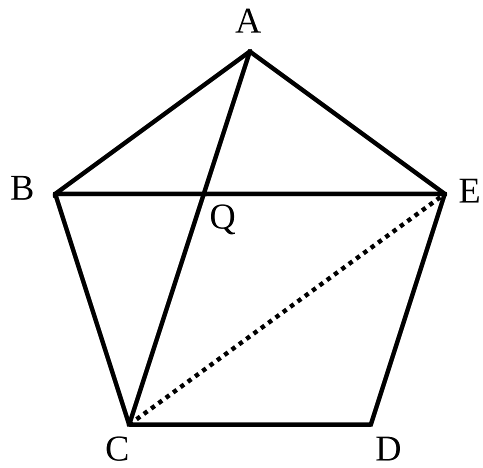
①，②より、QC：QA＝AC：QC.

ゆえに、Qは線分ACを黄金分割しているとわかる。対角線ACは任意の対角線より、(a)は証明された。

(b) (a)から、$\dfrac{AC}{QC} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

ここで、QC＝DEなので、

$$AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times DE$$ (Q.E.D.)

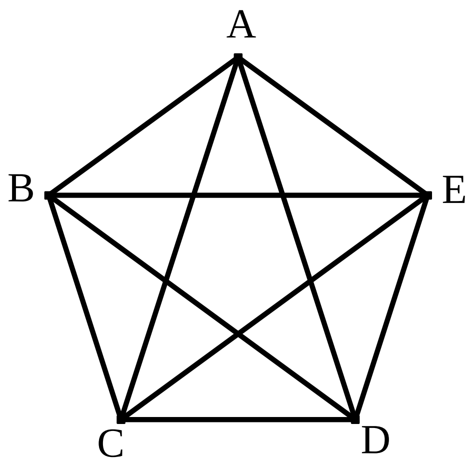


［２］黄金三角形

二等辺三角形において、斜辺と底辺の長さの比が $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ：1 であるとき、この三角形を**黄金三角形**という。五角形ABCDEを、一辺が１である正五角形とすると、△ACD，△BDE，△CEAはいずれも黄金三角形である。

定理３

黄金三角形の底角は 72°であり、頂角は 36°である。



（証明）

黄金三角形ACDが正五角形ABCDEにはめ込まれていて、その頂角は$\angle\alpha$、底角は$\angle\beta$であるとすると、

$$\angle EBD=\angle ACE=\angle BDA=\angle CEB=\angle\alpha.$$

AB∥CEより、$\angle BAC=\angle ACE=\angle\alpha$.

同様に考えると、他の９つの角も$\angle\alpha$となる。ここで、$\angle\beta=\angle ACD=2\angle\alpha$

したがって、△ACDの内角の和は、$2\angle\beta+\angle\alpha=5\angle\alpha$ となるから、

$$\angle\alpha=\frac{180°}{5}=36°$$

$$\angle\beta=36°\times2=72°$$ となる。

(Q.E.D.)

［３］ペンタグラム

正五角形の各辺を互いに交わるまで延長してできた図形を**ペンタグラム(星型五角形)**という。

定理４

ペンタグラムにできる５つの小三角形がそれぞれ黄金三角形になっている。

（証明）

正五角形ABCDEの各辺を延長して、交わった交点をそれぞれF, G, H, I, Jとする。

△FAEと△FHIにおいて、

$\angle AFE=\angle HFI$（共通）…①

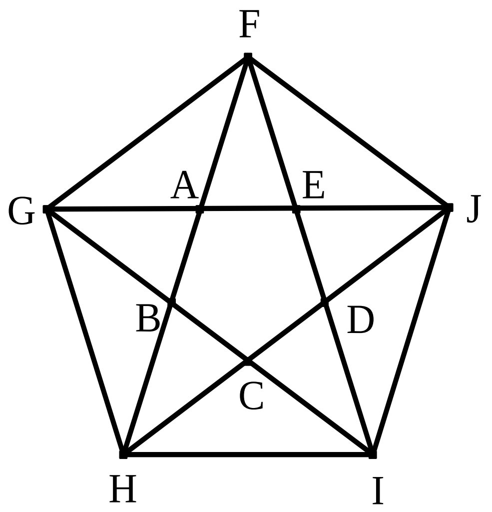
GJ∥HIより、同位角は等しいので、

$\angle FAE=\angle FHI$，$\angle FEA=\angle FIH$ …②

①，②より、△FAE∽△FHI.

ゆえに、３辺の比が等しく、△FHIは斜辺と底辺の長さの比が $\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1$ の黄金三角形なので、△FAEも黄金三角形である。△GBA，△HCB，△IDC，△JDEも同様である。

(Q.E.D.)



３－３．黄金長方形

縦と横の辺の長さの比が、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1$ の長方形を**黄金長方形**という。

定理５

正方形ABCDにおいて、各辺の黄金分割点をとることによって、黄金長方形を内接させることができる。

（証明）

正方形ABCDの各辺を下図のように点P, Q, R, Sで黄金分割する。

三角形における辺と平行線の定理(またはその逆)より、PS∥BD, QR∥BD.

よって、PS∥QR である。

同様に、PQ∥PS であることもわかる。

したがって、四角形 PQRS は平行四辺形である。さらに、四角形 PQRS の辺は正方形 ABCD の対角線に平行なので、それらは互いに直交する。

つまり、PQRS は長方形である。

いま、△APS と△BQP において、

$$\angle PAS = \angle QBP = 90^\circ \quad \cdots ①$$

$$AP : BQ = AP : PB = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$$

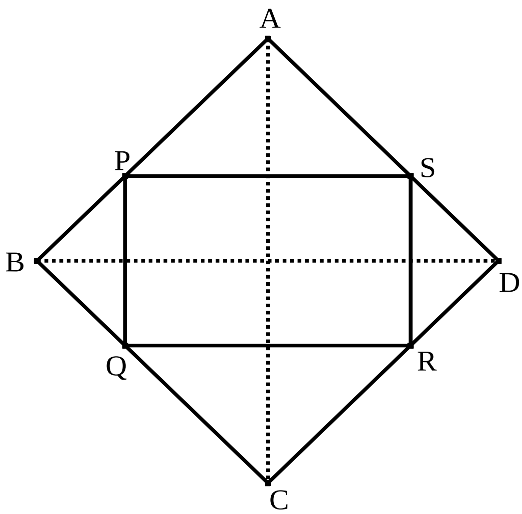
$$= AS : BP \quad \cdots ②$$

①, ②より、２辺の比とその間の角が等しいので、△APS∽△BPQ である。

ゆえに、②より、$PS : PQ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1.$

したがって、正方形 ABCD の各辺の黄金分割点をとると、黄金長方形が内接する。

(Q.E.D.)



４．今後の課題

本年度は、この研究の手始めとして、黄金分割の基本的な性質や定理を学んだ。来年度は、黄金長方形とプラトン立体の関係から調べていきたい。そして、最初に興味を持った数学以外の分野での黄金分割についても研究していきたい。

５．参考文献

[1]「黄金分割」、アルブレヒト・ベルンハルト著、柳井浩訳、共立出版

６．謝辞

顧問の川口先生には、さまざまな面でご指導いただきました。ありがとうございました。