結び目について

４年Ｂ組　東　美弦
指導教員　川口　慎二

１．概要

サイエンス研究会数学班４年は、日常生活でよく使われる結び目を数学的に取り扱う方法を学習した。この論文では、その内容を報告する。

キーワード　　結び目、同値、不変量、斜影図、ライデマイスター移動、交点条件、階数

２．研究の背景と目的

生物の研究において、DNA が超螺旋状態になっていることを知り、また数学の分野で「結び目理論」というのがあり、DNA とも関係があるということを聞いた。数学の視点から生物の分野を見ることに興味を抱いたので、今回は結び目について学習した。

３．研究内容

３－１．結び目の定義

図１のように、同じ「結び目ができている」状態でも、ひもの両端を引っ張ると、ほどけるものとほどけないものがある。

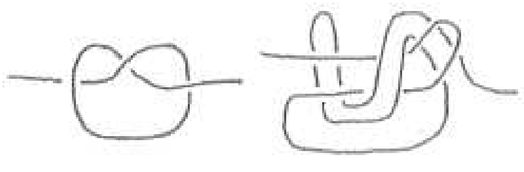


図１　２つの「結び目」

ここで、「ほどけない」という概念をはっきりさせておく。図１のひもの端と端をつなぎ、結び目を左右に引っ張ってみる。すると、一方はきれいな円周になるが、もう一方はならない。両端をつないできれいな円周ができないとき「ほどけない」ということにする。

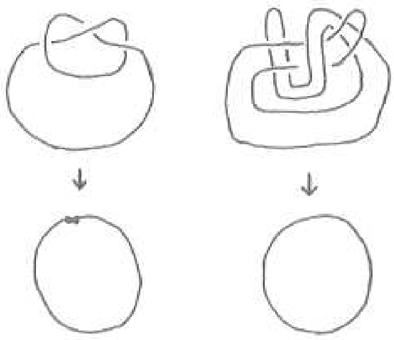


図２　「ほどける」と「ほどけない」

空間の中にある輪のことを「結び目」とよぶことにする。ただし、輪を空間の中でどのように動かしてもきれいな円周ができない輪を「ほどけない結び目」といい、また２つの結び目に対して、一方を許された範囲の空間の中で変形をすると他方が得られるとき、２つの結び目は「同値である」という。

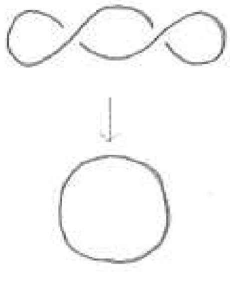


図３　同値な結び目

空間内の結び目を平面の上で表したものを結び目の「射影図」という。

３－２．同値と不変量

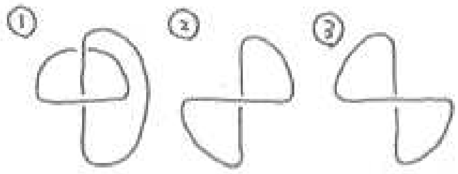
ある集合の中の要素がいくつかのグループにはっきり分類されているとき、その集合に「同値関係」が与えられたといい、同じグループに属するグループのことを「同値類」ともいう。同じ同値類に属するものに共通する性質のことを、その同値関係に関する「不変量」と呼ぶ。

つまり「結び目の同値」というのは、空間内の結び目全体の集合に対して、「結び目を切らないように動かす」変形と「拡大したり縮小したりする」変形を「同値変形」と考えたときの同値関係を考えているのである。

３－３．結び目の個数

交点数が１個の結び目を考える。まず交点を１個用意し、その１つの端と他の３つの端をつなぐ。これは次の３通りが考えられる。

次に、残りの２点をつなぐ。



①は２つのきれいな円周になってしまう。②③もひねるときれいな円周になるので交点が０個になってしまう。よって交点が１個の結び目は存在しない。

交点が２個の結び目を考える。上と同じ考え方で「２つの円ができる」ことと「交点数が変わる」ことが起こらないように端と端をつなぐ。すると次の４通りが考えられる。

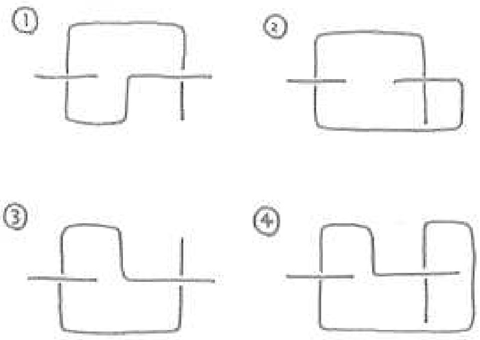
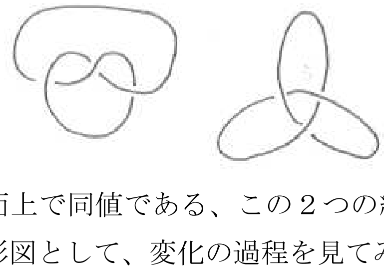


図４　交点数が２個の場合を考える

しかし、ここから交点を増やさずに端と端をつなぐことはできない。よって交点数が２個の結び目は存在しない。

３－４．ライデマイスター移動



平面上で同値である、この２つの結び目を射影図として、変化の過程を見てみる。

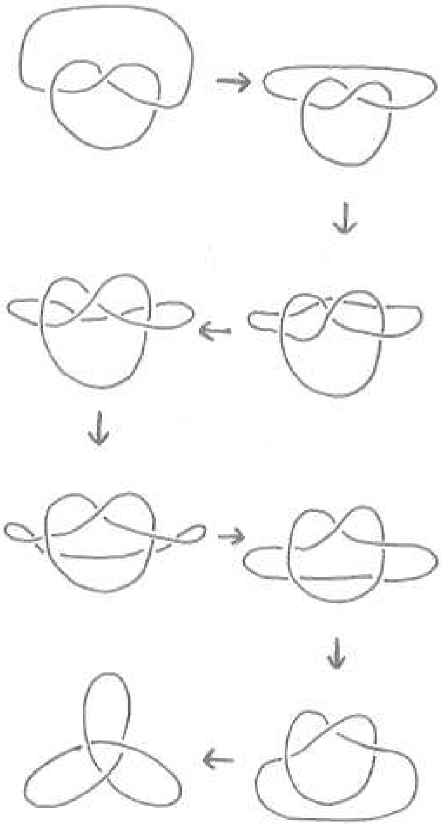
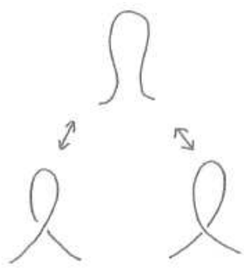
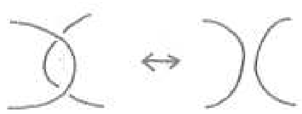


図５　射影図の変形過程

この変形は、平面上の図形としての同値変形ではないが、空間内の結び目としての同値変形であり、一定のパターンがある。



①ライデマイスター移動Ⅰ



②ライデマイスター移動Ⅱ

③ライデマイスター移動Ⅲ

図６　ライデマイスター移動

空間内の同値な変形はすべて、このライデマイスター移動の組み合わせで実現できる。つまり、「結び目の空間内の同値変形」は、「結び目の射影図の平面上の同値変形」と「ライデマイスター移動」によって可能になるのである。

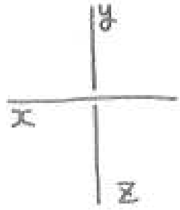
３－５．階数

交点の数が n の結び目の射影図では、n 個の曲線ができる。これらの曲線のことを結び目の「射影図の定める弧」という。

(交点数)＝1　　　(交点数)＝3

図７　交点数と弧の本数

p を自然数として、１つの弧に 0 から $p-1$ までの整数のうちの１つを対応させたものをその弧の「重み」といい、すべての弧に重みがついた射影図を「重みのついた射影図」とよぶ。また、p を２以上の整数とする。整数 a と b に対して、$a-b$ が p で割り切れるとき、a と b は「p を法として合同である」といい、$a \equiv b \pmod{p}$ と表す。重みのついた射影図において１つの交点の周りに着目したとき、



となっている(x, y, zは重み)。ここで、条件 $2x \equiv y+z \pmod{p}$ を考える。図を180度回転させると y, z が入れ替るが、この条件は y と z のどちらを選んでも矛盾なく定義されている。これを「交点条件」という。

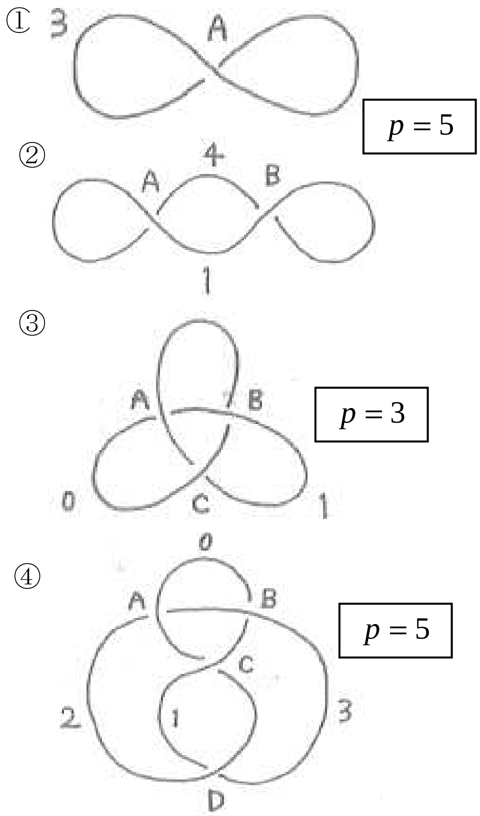


図８　さまざまな結び目の事例

図８①の交点 A では、$x=y=z=3$ であるから、$2\times3\equiv3+3 \pmod{5}$ となり、交点条件をみたす。図８②の交点 A では $x=1$, $y=4$, $z=1$ なので $2\times1\not\equiv4+1 \pmod{5}$ となり、交点条件をみたさない。

③では、交点 A：$2\times2\equiv1+0 \pmod{3}$、交点 B ： $2\times1\equiv2+0 \pmod{3}$、交点 C ： $2\times0\equiv2+1 \pmod{3}$ となっている。さらに④では、交点 A：$2\times0\equiv2+3 \pmod{5}$、交点 B ： $2\times3\equiv0+1 \pmod{5}$、交点 C ： $2\times1\equiv0+2 \pmod{5}$ であり、交点 D ： $2\times2\equiv1+3 \pmod{5}$ となっている。

また、これらの図はすべての交点で交点条件をみたす結び目の射影図である。このような重みのことを「適切な重み」という。そして、結び目の斜影図に対して、適切な重みのついた斜影図の個数のことを(p を法とした)「階数」と呼ぶ。

交点のない斜影図に対しては交点条件が存在しないので、適切な重みとして 0 から $p-1$ までのどれを選んでもよく、p 個の値をとることができる。だから、階数は p である。また、交点が１個の斜影図に対する交点条件は $2x\equiv x+x \pmod{p}$ であり、これはすべての x について成り立つ。だから、斜影図の階数は p であるとわかる。

４．今後の課題

本年度は、参考文献を輪読し、結び目を数学的にみることについて考えたので、今後は「結び目の斜影図の階数が結び目の不変量となっている」ことを証明し、また、結び目を生物分野まで広げて DNA にも関連づけていきたい。

５．参考文献

[1]「結び目のはなし」、村上斉、遊星社(1990)

６．謝辞

顧問の川口先生には、さまざまな面でご指導いただきました。ありがとうございました。