素数の並びに規則はあるか

２年Ｃ組　田村　拓也
指導教諭　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班２年生は素数について学習している。素数について調べると、ゼータ関数やベルヌーイ数が関係してくることがわかった。その理解のために、ベルヌーイ数に関する参考文献[1]を読みながら、基本事項の習得を行っている。本稿ではベルヌーイ数を中心に紹介する。また、ベルヌーイ数を用いて、べき乗の和の公式について考察した。

キーワード　素数、ベルヌーイ数、ゼータ関数

２．研究の背景と目的

素数とは 2, 3, 5, 7, 11, …のように、1 と自分自身しか約数をもたない数である。この並びには規則性がないように見える。しかし、実際はどうなのか今はまだわかっていない。約 100 年前、リーマンがリーマン予想を発表した。私は、それを理解したいと思ったが、かなり高度な数学の知識を必要とするため、まずはベルヌーイ数を学習した。

３．研究内容

３－１．素数とは

500 までの素数を挙げてみると、
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199,211,223,227,229,233,239,241,251,257,263,269,271,277,281,283,293,307,311,313,317,331,337,347,349,353,359,367,373,379,383,389,397,401,409,419,421,431,433,439,443,449,457,461,463,467,479,487,491,499
となり、規則性はないように思える。

３－２．素数定理

素数の間隔について次のような表を見つけた。

表１　N と N までの素数の個数 $\pi(N)$

N	$\pi(N)$
10^3	168
10^6	78,496
10^9	50,847,534
10^{12}	37,607,912,018
10^{15}	29,844,570,422,669
10^{18}	24,739,954,287,740,860

素数の分布について、この表を見ても分かるように、素数が現れる間隔はどんどん広がっている。しかし、これで N を割りことにより、次のようなことがわかる。

表２　N と $\pi(N)$

N	$N/\pi(N)$
10^3	5.9524
10^6	12.7392
10^9	19.6666
10^{12}	26.5901
10^{15}	33.5069
10^{18}	40.4204

桁が 1000 倍になるごとに、$N/\pi(N)$ は 6 から 7 程度増加する。

そして、$N/\pi(N)$ の値を $\ln N (=\log_e N)$ と比較してみた。

表３　$\ln N$ と $N/\pi(N)$ の誤差

N	$\ln N$	$N/\pi(N)$	誤差(%)
10^3	6.9077	5.9524	16.0490
10^6	13.8155	12.7392	8.4487
10^9	20.7232	19.6666	5.3731
10^{12}	27.6310	26.5901	3.9146
10^{15}	34.5367	33.5069	3.0795
10^{18}	41.4465	40.4204	2.5386

このように、N をどんどん大きくすると、$\ln N$ と $N/\pi(N)$ の比がどんどん小さくなっていくことがわかる。

定理１（素数定理）

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N}$$

定理２

$$(N\text{ が素数である確率}) \sim \frac{1}{\ln N}$$

$$(N\text{ 番目の素数}) \sim N \log N$$

３－３．ゼータ関数

ゼータ関数とは、素数の情報だけで作られた式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

である。また、リーマン予想に用いられる。

リーマン予想

ゼータ関数の非自明な零点の実数部はすべて $\frac{1}{2}$ である。

このゼータ関数を、エラトステネスのふるいと同じ方法で得ることができる。つまり、

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots . \quad \text{—①}$$

である。ここで、①式に $\frac{1}{2^s}$ をかける

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \cdots . \quad \text{—②}$$

①と②の辺々の差をとると、

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) &= \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{10^s}+\cdots\right) \\ &= 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\cdots . \quad \text{—③}\end{aligned}$$

つまり、偶数のべき乗の項が相殺する。次に、③式に $\frac{1}{3^s}$ をかけると

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \cdots . \quad \text{—④}$$

③と④の辺々の差をとると

$$\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$$

$$=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\cdots.$$

同様に$\frac{1}{5^s},\frac{1}{7^s}$をかけ、辺々の差をとる。

$$\frac{1}{5^s}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$$

$$=\frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{35^s}+\frac{1}{55}+\frac{1}{66^s}+\frac{1}{85^s}+\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$$

$$=1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\frac{1}{29^s}+\cdots$$

このように式を展開していくと

$$\cdots\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1$$

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}+\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}+\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}+\cdots$$

となり、

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_{p:prime}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

が成り立つ。ここで

$$\prod_{p:prime}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

を**オイラー積**という。

３－４．ベルヌーイ数

ベルヌーイ数は何かを理解するために、自然数の和を用いた定義を学習した。

（１）自然数の和

１からnまでの自然数の和は

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

で得られる。また、1からnまでの2乗、3乗の和は

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

である。私は、i^4の場合として、

$$\sum_{i=1}^{n}i^4=n\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\sum_{s=1}^{n}s(n-s)\quad\cdots(*)$$

を自力で証明することができた。各辺が$i\ (0\le i\le n)$の立方体を正方形状に並べる方法を用いた。証明のアイデアは次のページで説明する。

（２）自然数の和の公式

$\sum_{i=1}^{n}i^k$ の公式は次のようになった。

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j\frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

$$=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_jn^{k+1-j}$$

ここで、$\binom{k}{j}$は2項係数であり、

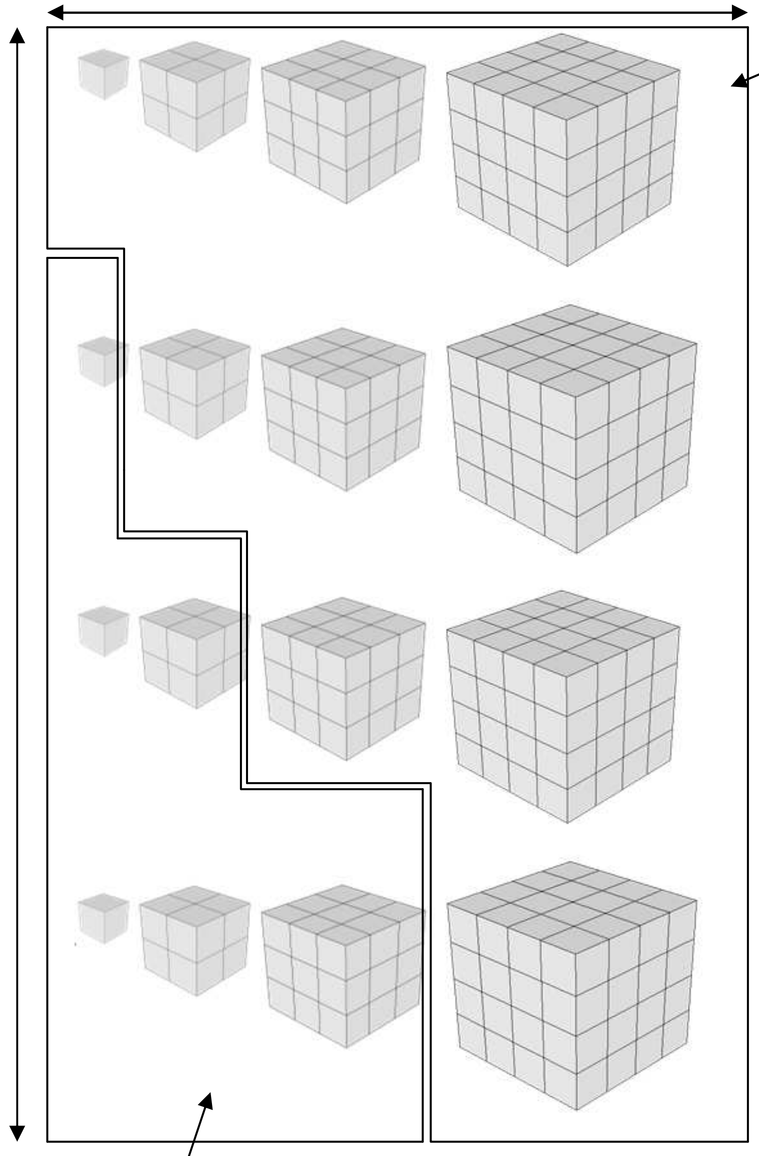
$$\binom{k}{j}={}_kC_j=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k+1-j)}{j!}$$

である。そして、上式で現れるB_jが次に述べる**ベルヌーイ数**である。

$\sum_{i=1}^{n} i^4 = n\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \sum_{s=1}^{n} s(n-s)$ の証明のアイデア

$\sum_{n=1}^{4} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4$ と考える。



この範囲内に囲まれた立方体の体積の和は、

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = n\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

であり、この場合は

1^3 が 1 個：$1^3 \times 1 = 1^4$

2^3 が 1 個：$2^3 \times 2 = 2^4$

3^3 が 1 個：$3^3 \times 3 = 3^4$

4^3 が 1 個：$4^3 \times 4 = 4^4$

よって、$\sum_{i=1}^{4} i^4$ となる。

つまり、

$\sum_{i=1}^{n} i^4$

$= n\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \sum_{s=1}^{n} s(n-s)$

で求めることができる。

この部分が $\sum_{s=1}^{n} s(n-s)$ であり、この場合は

$$4 \times (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 4 \times \left\{\frac{4(4+1)}{2}\right\}^2$$

となる。

（３）ベルヌーイ数について

ベルヌーイ数とは何かについて説明する。

定義１

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}B_i=n+1 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

私は、この定義にしたがってベルヌーイ数を B_{10} まで求めてみた。

[1] $n=0$ のとき、B_0 を求める。

$\sum_{i=0}^{0}\binom{0+1}{i}B_i=0+1$ より、$B_0=1$.

[2] $n=1$ のとき、B_1 を求める。

$\sum_{i=0}^{1}\binom{1+1}{i}B_i=1+1$ より、

$\binom{2}{0}B_0+\binom{2}{1}B_1=2$.

よって、$B_0+2B_1=2$ から、$B_1=\frac{1}{2}$.

[3] $n=2$ のとき、B_2 を求める。

$\sum_{i=0}^{2}\binom{2+1}{i}B_i=2+1$ より、

$\binom{3}{0}B_0+\binom{3}{1}B_1+\binom{3}{2}B_2=3$.

よって、$B_0+3B_1+3B_2=3$ から、

$B_2=\frac{1}{6}$.

[4] $n=3$ のとき、B_3 を求める。

$\sum_{i=0}^{2}\binom{3+1}{i}B_i=3+1$ より、

$\binom{4}{0}B_0+\binom{4}{1}B_1+\binom{4}{2}B_2+\binom{4}{3}B_3=4$.

よって、$B_0+4B_1+6B_2+4B_3=4$ から、

$B_3=0$.

表４　ベルヌーイ数

n	B_n
0	1
1	$1/2$
2	$1/6$
3	0
4	$1/30$
5	0
6	$1/42$
7	0
8	$-1/30$
9	0
10	$5/66$
11	0
12	$-691/2730$
13	0
14	$7/6$
15	0
16	$-3617/510$
17	0
18	$43867/798$
19	0
20	$-174611/330$

（５）自然数の和の公式

まず、$k\ge 0,\ n\ge 1$ となる整数 k,n に対して、自然数の和を

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{n}i^k$$

と定義する。

この式は、ベルヌーイ数を用いて、

$$\sum_{i=0}^{n}i^k=\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{j}B_j\frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

と計算できる。

私が得た式と比較するために、$k=4$ を計算した。

$S_0(n) = n$,

$$S_1(n) = \sum_{j=0}^{1} \binom{1+1}{j} B_j \frac{n^{1+1-j}}{1+1-j} .$$

$S_k(n)$をnの多項式として表すためには、２つのベルヌーイ数$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2}$を用いる。

$$S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} n^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} B_j \frac{n^{1+1-j}}{1+1-j}$$

$$S_1(n) = \binom{1}{0} 1 \times \frac{n^{1+1-0}}{1+1-0} + \binom{1}{1} \frac{1}{2} \times \frac{n^{1+1-1}}{1+1-1}$$

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n(n+1) .$$

また、

$$S_2(n) = \sum_{i-1}^{n} n^2 = \sum_{j-0}^{2} \binom{2}{j} B_j \frac{n^{2+1-j}}{2+1-j}$$

$$\begin{aligned} S_2(n) = &\binom{1}{0} 1 \times \frac{n^{2+1-0}}{2+1-0} \\ &+ \binom{1}{1} \frac{1}{2} \times \frac{n^{2+1-1}}{2+1-1} \\ &+ \binom{1}{2} \frac{1}{6} \times \frac{n^{2+1-2}}{2+1-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) . \end{aligned}$$

さらに、

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} n^3 = \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} B_j \frac{n^{3+1-j}}{3+1-j}$$

$$\begin{aligned} S_3(n) = &\binom{3}{0} 1 \times \frac{n^{3+1-0}}{3+1-0}] \\ &+ \binom{3}{1} \frac{1}{2} \times \frac{n^{3+1-1}}{3+1-1} \\ &+ \binom{3}{2} \frac{1}{6} \times \frac{n^{3+1-2}}{3+1-2} \\ &+ \binom{3}{3} 0 \times \frac{n^{3+1-3}}{3+1-3} \end{aligned}$$

$$S_3(n) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 .$$

最後に、

$$S_4(n) = \sum_{i=1}^{n} n^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} B_j \frac{n^{4+1-j}}{4+1-j}$$

$$\begin{aligned} S_4(n) = &\binom{4}{0} 1 \times \frac{n^{4+1-0}}{4+1-0} \\ &+ \binom{4}{1} \frac{1}{2} \times \frac{n^{4+1-1}}{4+1-1} \\ &+ \binom{4}{2} \frac{1}{6} \times \frac{n^{4+1-2}}{4+1-2} \\ &+ \binom{4}{3} 0 \times \frac{n^{4+1-3}}{4+1-3} \\ &+ \binom{4}{4} - \frac{1}{30} \times \frac{n^{4+1-4}}{4+1-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \end{aligned}$$

となる。

これにより、$\sum_{i=1}^{n} i^4$ を求める公式を得ることができた。また、私が得た(*)と比較するとこちらのほうが簡潔である。また、(*)式を展開すると、上式と一致することが確認できた。

さらにベルヌーイ数に関して次の事実が成り立つ([1])。

定理３

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} . \end{aligned}$$

（証明）

$S_0(n)=n$ は自明である。$k\geq 1$ とする。

2 項展開により得られる式

$$(m+1)^{k+1}-m^{k+1}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}m^j$$

において、$m=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ としたものを辺々加えると

$$(n+1)^{k+1}-1=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}S_j(n)$$

を得る。これより、

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left\{(n+1)^{k+1}-1-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}S_j(n)\right\}.$$

この式において、$k=1,\ 2,\ \cdots$ と代入していくと順に、

$$S_1(n)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

と求まり、帰納的に、

$S_k(n)$ は $\dfrac{1}{k+1}n^{k+1}$ で始まる n の $(k+1)$ 次多項式であることがわかる。また、定義より、

$$S_k(n+1)-S_k(n)=(n+1)^k$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから、

$$S_k(x+1)-S_k(x)=(x+1)^k$$

が成り立つ。$x=0$ とおいて $S_k(1)=1$ を用いると、$S_k(0)=0$.

これで $S_k(x)$ の定数項および最高次係数がわかる。あとの係数は微分係数 $S_k{}^{(j)}(0)$ $(1\leq j\leq k)$ がわかればよい。

そこで、

$$S_k(x+1)-S_k(x)=(x+1)^k$$

を微分した式

$$S_k'(x+1)-S_k'(x)=k(x+1)^{k-1}$$

において、$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ を代入して足し合わせると、

$$S_k'(n+1)-S_k'(0)=kS_{k-1}(n)$$

となる。

これが任意の自然数 n について成り立つので、$S_k'(0)=b_k$ とおくと、

$$b_0=1,\ S_k'(x)=kS_{k-1}(x)+b_k$$

が多項式の間の関係として成り立つ。

これを微分すると

$$S_k''(0)=kS'_{k-1}(x)\ .$$

$x=0$ を代入して、$S_k'''(0)=kb_{k-1}$ となる。

これをさらに微分して、k を $k-1$ に置き換えた式を使うと、

$$S_k'''(x)=kS_{k-1}''(x)=k(k-1)S_{k-2}'(x)\ .$$

ここで、$x=0$ を代入すると、

$$S_k''''(0)=k(k-1)b_{k-2}\ .$$

以下、同様に次々と微分していくと、

$$S_k{}^{(j)}(0)=k(k-1)\cdots(k-j+2)b_{k-j+1}x^j$$
$$(2\leq j\leq k+1)$$

を得る。したがって、$S_k{}^{(0)}(0)=0$ として、

$$S_k(x)=\sum_{j=0}^{k+1}\frac{S_k{}^{(j)}(0)}{j!}x^j$$
$$=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}b_{k-j+1}x^j$$
$$=\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k}\binom{k+1}{j}b_jx^{k+1-j}\ .$$

$S_k(1)=1$ であるから、この式で $x=1$ を代入すれば、

$$k+1=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}b_j$$

これはベルヌーイ数の満たす漸化式であるから、等式

$$\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}=\frac{1}{k+1-j}\binom{k}{j}$$

に注意して、

$$\sum_{i=0}^{n} i^k=\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{j}B_j\frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$
$$=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j n^{k+1-j}$$

が従う。(Q. E. D.)

<u>命題１</u>

n を３以上の奇数とするとき、$B_n=0$.

（証明）

$k\geq 0$ とする。$S_k(x+1)-S_k=(x+1)^k$ において、$x=-1$ を代入すると、$S_k(0)=0$ から、$S_k(-1)=0$ となる。

そこで、定理３の証明中で得られる $S_k(x)$ の公式

$$(k+1)S_k(x)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j x^{k+1-j}$$

において、$x=-1$ を代入すると、

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(-1)^j B_j=0$$

これと、ベルヌーイ数を定義する漸化式

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j=k+1$$

との差をとると奇数番目だけが残り

$$2\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{k+1}{2j+1}B_{2j+1}=k+1$$

となる。ここで、$[x]$ はガウス記号で、x を超えない最大の整数を表す。

左辺において、$j=0$ の項が、$B_1=\frac{1}{2}$ より右辺を打ち消すので、

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{k+1}{2j+1}B_{2j+1}=0 \quad (k\geq 3)$$

を得る。この式で $k=3,5,7,\cdots$ としていくことにより、３ 以上のすべての奇数 k に対して、$B_k=0$ が従う。(Q. E. D.)

したがって、$n\neq 1$, $n\geq 0$ なるすべての整数 n に対して、

$$(-1)^n B_n=B_n$$

となることがわかる。

３．まとめ

B_j をベルヌーイ数とすると、

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}B_j=n+1 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

ゆえに、自然数の累乗の和は

$$\sum_{i=1}^{n} i^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j\frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

で求められる。

４．今後の課題

べき乗和の公式に関するファウルハーバーの定理について、理解をしたい。

５．参考文献

[1]「ベルヌーイ数とゼータ関数」, 荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信著, 星雲

６．謝辞

今回の研究についてご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、数学班の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございました。