

既約なピタゴラス三角形の個数に関する近似式

5年A組 森 宇宏
5年B組 清水 悠平
5年C組 西井 良徳
指導教諭 川口 慎二

1. 要約

私たちサイエンス研究会数学班5年生は、既約なピタゴラス三角形のうち、斜辺以外の2辺の長さが連続している三角形の個数について考察した。また、斜辺が任意の数以下であるピタゴラス三角形の個数について、近似式を得ることができた。

キーワード ピタゴラス三角形、ピタゴラス方程式、漸化式、連分数、近似分数、フェルマー・ペル型不定方程式、ゼータ関数、オイラー定数

2. 研究内容

2-1. ピタゴラス三角形とは

ピタゴラス三角形とは直角三角形のうち、各辺が整数で表される三角形をいう。

このような三角形には、次の定理が成り立つことが知られている。

定理1 (ピタゴラスの定理)

直角を挟む2辺の長さが x, y である直角三角形の斜辺の長さを z としたとき、

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots(1)$$

が成り立つ。

この定理の証明はさまざまなものが知られているが、本稿では省略する。

このとき、等式(1)をピタゴラス方程式という。そして、ピタゴラス三角形の3辺の長さの組み合わせをピタゴラス数という。

また、ピタゴラス三角形の中で、どの2辺も既約であるものを既約なピタゴラス三角形という。既約なピタゴラス三角形は、互いに素である2つの奇数を用いて、次のような生成式から求めることができる。

定理2

y が偶数であるようなすべてのピタゴラス三角形 (x, y, z) は

$$x = kl, \quad y = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

によって表される。ただし、 k と l は互いに素な奇数であり、 $k > l$ を満たす。

さらに y が偶数であるような既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) はこれによって一通りに表される。

2-2. 2辺が連続するピタゴラス三角形

これまでに得られた性質を用い、次の2点について考察を行った。

- ①斜辺と他の一辺の長さが連続している三角形の個数
- ②斜辺以外の2辺の長さが連続している三角形の個数

はじめに、①斜辺を含む2辺が連続する場合について考える。

y を偶数と定めると斜辺を含む2辺が連続するのは y, z のみである。この2つの差は $y < z$ より、

$$\frac{k^2 + l^2}{2} - \frac{k^2 - l^2}{2} = \frac{2l^2}{2} = l^2 = 1$$

となる。ここで、 l は自然数なので $l=1$ となり、 k に順次奇数を代入することにより y, z が連続するピタゴラス三角形を得ることができる。

これにより、 $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, $(9, 40, 41)$, ...を得ることができた。

次に斜辺を含まない2辺が連続する場合について考える。

先程と同様に、

$$x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

が成り立てばよいが、この式から k, l を効率的に求めることができなかった。定理1よりピタゴラス三角形を求め、その中から y, z が連続しているときの k, l について注目すると、 (k, l) は $(3, 1)$, $(7, 3)$, $(17, 7)$, ...となった。実際に (k, l) に対する (x, y, z) を表1に示す。

表 1

| k | l | x | y | z |
|--------|--------|-------------|-------------|-------------|
| 3 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 3 | 21 | 20 | 29 |
| 17 | 7 | 119 | 120 | 169 |
| 41 | 17 | 697 | 696 | 985 |
| 99 | 41 | 4059 | 4060 | 5741 |
| 239 | 99 | 23661 | 23660 | 33461 |
| 577 | 239 | 137903 | 137904 | 195025 |
| 1393 | 577 | 803761 | 803760 | 1136689 |
| 3363 | 1393 | 4684659 | 4684660 | 6625109 |
| 8119 | 3363 | 27304197 | 27304196 | 38613965 |
| 19601 | 8119 | 159140519 | 159140520 | 225058681 |
| 47321 | 19601 | 927538921 | 927538920 | 1311738121 |
| 114243 | 47321 | 5406093003 | 5406093004 | 7645370045 |
| 275807 | 114243 | 31509019101 | 31509019100 | 44560482149 |

表1から (k, l) がわかれば、 (x, y, z) を得ることができる。

表1から以下のことが類推できる。 k_n を n 番目の k の項、 l_n を n 番目の l の項とすると、

(i) k の第 n 項は、 l の第 $n+1$ 項に一致する、つまり、 $k_n = l_{n+1}$ 。

(ii) l の第 n 項は第 $n-1$ 項の2倍したものと第 $n-2$ 項の和となる、つまり、

$$l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2}$$

(iii) $x - y$ の値は1と-1が交互に現れる。

このうち、(ii)の漸化式

$$l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2}$$

つまり、隣接3項間漸化式 $l_{n+2} = 2l_{n+1} + l_n$ を解いてみた。まず(i)の事実より $l = a_n$ とすると、 $k = a_{n+1}$ と表すことができる。

よって、

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \quad \text{ゆえ、}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

となる。

ここで、白銀方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ が現れたが、なぜ白銀(2次)方程式が現れたかについてはわからないので、今後の課題としたい。

さて、 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の2つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ となる。解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1. \dots \textcircled{1}$$

よって、もとの漸化式に代入すると、

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n).$$

ゆえに、

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)$$

$$= \alpha^{n-1}(3 - \beta) \dots \textcircled{2}$$

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$$

$$\begin{aligned} x = kl &= \left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \right) = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta^n}{4} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n \beta^n \times \beta + \alpha^n \beta^n \times \alpha}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n \beta + (-1)^n \alpha}{4} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n (\alpha + \beta)}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n \times 2}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ より、 $x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}$ となる。

また、

$$\begin{aligned} y &= \frac{k^2 - l^2}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \right)^2}{2} = \frac{\alpha^{2n+1} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n}}{4} = \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2 - 1) + \beta^{2n}(\beta^2 - 1) + 2\alpha^n\beta^n(\alpha\beta - 1)}{8} \\ &= \frac{\alpha^{2n}(1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1) + \beta^{2n}(1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1) - 4(-1)}{8} = \frac{2\alpha^{2n}(1 - \sqrt{2}) + 2\beta^{2n}(1 + \sqrt{2}) - 4(-1)}{8} \end{aligned}$$

$$= \beta^{n-1}(3 - \alpha) \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 $\textcircled{3} - \textcircled{2}$ より、

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^{n-1}(3 - \alpha) - \alpha^{n-1}(3 - \beta).$$

ここで、 $\textcircled{1}$ から $3 = \alpha + \beta - \alpha\beta$ とわかるので代入すると、

$$(\beta - \alpha)a_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n$$

となる。また、 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ より、

$$\{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\}a_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n.$$

したがって、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ である。

ゆえに、 $k_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}$, $l_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ と

表せる。よって、 $x = kl$, $y = \frac{k^2 - l^2}{2}$,

$z = \frac{k^2 + l^2}{2}$ 及び、 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -1$ から、

次のように、 x, y, z を表すことができる。

である。ここで、 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ より、

$$y = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - 2(-1)^n}{4} = \frac{\frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} - (-1)^n}{2}.$$

すると、 $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ より、 $y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$ とわかる。最後に、

$$\begin{aligned} z &= \frac{k^2 + l^2}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{\alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2}}{4} + \frac{\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{4}}{2} \\ &= \frac{\alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2} + \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{8} = \frac{-2(-1)^n + 2(-1)^n}{8} = \frac{\alpha^{2n}(1+\alpha) + \beta^{2n}(1+\beta)}{4} \\ &= \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2} \end{aligned}$$

である。以上より、 $x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}$, $y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$, $z = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$ となる。

そこで、以下の2つのことを確かめた。

【1】 x と y の差が1である。

これは上式より明らかである。

【2】 ピタゴラス方程式が成り立つ。

【1】 と 【2】 が成り立つと、 (x, y, z) は、 x, y が連続するピタゴラス三角形であるといえる。

$$x^2 + y^2 - z^2$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2} \right\}^2 - \left(\frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - \alpha^{4n} - \beta^{4n} + 4}{16} + \frac{-2\alpha^{4n+1} - 2\alpha^{2n+1}\beta^{2n} - 2\alpha^{2n}\beta^{2n+1} - 2\beta^{4n+1}}{16} \\ &= \frac{\alpha^{4n}(\alpha^2 - 2\alpha - 1) + \beta^{4n}(\beta^2 - 2\beta - 1) + 4 - 2\alpha - 2\beta}{16} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、ピタゴラス方程式が成り立つことが確認できた。よって、

$$x = \frac{a_{2n+1} + (-1)^n}{2}$$

$$y = \frac{a_{2n+1} - (-1)^n}{2}$$

$$z = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$$

の n に自然数を順次代入していくことにより、 x, y が連続するピタゴラス三角形を求めることができる。

しかし、この式を用いることで x, y が連続しているピタゴラス三角形をすべて求め

られているかどうかは判別することができなかつた。

そこで、最初の条件であった不定方程式

$$x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

についてさらに考察を行った。

不定方程式のすべての解を求めるためにフェルマー・ペル型不定方程式の解法を利用しようと考えた。

定理3 (フェルマー・ペル型不定方程式)

フェルマー・ペル型不定方程式

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \quad \dots (*)$$

ただし、 $d > 0$ であり、 d は平方数でない。

(*)式において、 \sqrt{d} の連分数展開を

$$\sqrt{d} = [k_0; \overline{k_1, k_2, \dots, k_m}]$$

とし、その近似分数を $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ とする。

n が奇数で $n \equiv -1 \pmod{m}$ のような

p_n, q_n は $x^2 - dy^2 = \pm 1$ の解であり、これで尽くされる。

このフェルマー・ペル型不定方程式を用いて、ピタゴラス三角形の斜辺以外の2辺が連続するピタゴラス三角形が上の式ですべて求める方法を次に示す。

$x - y = \pm 1$ において、 $x = kl$,

$y = \frac{k^2 - l^2}{2}$ を代入すると、

$$kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1.$$

この両辺を2倍すると、

$2kl - (k^2 - l^2) = \pm 2$. これを整理すると、

$$2kl - k^2 + l^2 = \pm 2, \quad (l+k)^2 - 2k^2 = \pm 2$$

となる。ゆえに、両辺を $\frac{1}{2}$ 倍すると、

$$\frac{(l+k)^2}{2} - k^2 = \pm 1,$$

$$k^2 - \frac{(l+k)^2}{2} = \pm 1.$$

ここで、 $k = p, k+l = 2q$ とおくと、

$$p^2 - \frac{1}{2}(2q)^2 = \pm 1, \quad \text{つまり、} \quad p^2 - 2q^2 = \pm 1.$$

これは、 $d = 2$ の場合のフェルマー・ペル型不定方程式である。

したがって、 q^2 の係数である $\sqrt{2}$ の近似分数を求めることで、不定方程式

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1$$

の解を得ることができる。

まず $\sqrt{2}$ を連分数展開すると、 $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$,

$$\text{つまり、} \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

である。ゆえに $\sqrt{2}$ の近似分数は、

$$\text{深さを1とすると} \quad \sqrt{2} \doteq 1,$$

$$\text{深さを2とすると} \quad \sqrt{2} \doteq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

深さを3とすると

$$\sqrt{2} \doteq 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

というように求められる。これらの例を見てもわかるように、深さを深くするほど $\sqrt{2}$ に近い値となる。同様にして、さらに $\sqrt{2}$ の近似分数を求めた結果が下表である。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| p | 1 | 3 | 7 | 17 | 41 | 99 | 239 | ... |
| q | 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | ... |

$k = p, k+l = 2q$ であったので、 $k = p, l = 2q - p$ より、 k, l の解は次のようになる。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| k | 1 | 3 | 7 | 17 | 41 | 99 | 239 | ... |
| l | 1 | 1 | 3 | 7 | 17 | 41 | 99 | ... |

ここで、 $k > l > 0$ より、
 $(k, l) = (3, 1), (7, 3), (17, 7), (41, 17),$
 $(99, 41), (239, 99), \dots$

を得ることができた。

フェルマー・ペル型不定方程式よりこれがすべての解である。しかし、この k, l の数列は $\sqrt{2}$ の近似分数の最初のいくつかを計算した結果なので、規則性があることを確かめられていない。そこで $\sqrt{2}$ の近似分数を分母と分子に分け、それぞれについての漸化式を算出しようと試みた。

そこで、まず $\sqrt{2}$ の近似分数の分母・分子の漸化式を推測することによって $\sqrt{2}$ の近似分数の一般項を算出する方法と、連分数展開から考えた漸化式によって算出する方法の2つで考えてみた。

I. $\sqrt{2}$ の近似分数の分母・分子の漸化式を推測

分子の数列を $\{a_n\}$ 、分母の数列を $\{b_n\}$ とすると、

$$\begin{aligned} \{a_n\}: & 1, 3, 7, 17, \dots \\ \{b_n\}: & 1, 2, 5, 12, \dots \end{aligned}$$

なので、

それぞれの漸化式は

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \quad b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$$

と推測される。分子についての特性方程式を解いてみると、 $t^2 - 2t - 1 = 0$ ゆえ、

$$t = 1 \pm \sqrt{2}. \quad \text{したがって、}$$

$$\begin{aligned} \{a_{n+2} - (1 + \sqrt{2})a_{n+1}\} \\ = (1 - \sqrt{2})\{a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n\}. \end{aligned}$$

ここで、 $a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n = c_n$ とおくと、

$$c_{n+1} = (1 - \sqrt{2})c_n. \quad \text{また、}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 - (1 + \sqrt{2})a_1 \\ &= 3 - (1 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} \quad \text{より、} \end{aligned}$$

$$c_n = (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1}.$$

同様に、

$$\begin{aligned} \{a_{n+2} - (1 - \sqrt{2})a_{n+1}\} \\ = (1 + \sqrt{2})\{a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n\}. \end{aligned}$$

ここで、 $a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n = d_n$ とおくと、

$$d_{n+1} = (1 + \sqrt{2})d_n. \quad \text{また、}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2 - (1 - \sqrt{2})a_1 \\ &= 3 - (1 - \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} \quad \text{より、} \end{aligned}$$

$$d_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1}.$$

ゆえに、整理すると、

$$a_{n+1} - (1 - \sqrt{2})a_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$a_{n+1} - (1 + \sqrt{2})a_n = (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。④-⑤を計算すると、

$$\begin{aligned} a_n \{ (1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2}) \} \\ = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} \\ 2\sqrt{2}a_n = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} \\ a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1} \\ a_n = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{同様に、} b_n = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^n.$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) (1 + \sqrt{2})^{n-1} - \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) (1 - \sqrt{2})^{n-1}}{\frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^n} \\ &= \frac{2 \{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \}}{\sqrt{2} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \}} \end{aligned}$$

となる。

このようにして、 $\sqrt{2}$ の近似分数の一般項を算出することができた。

ここで留意しておくべきは、この一般項が、推測された漸化式によって求めた一般項であるため、この一般項自体もまた推測の域を出ていないという点である。

この一般項について極限をとると、

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left\{ (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \right\}}{\sqrt{2} \left\{ (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \right\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left\{ 1 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)^n \right\}}{\sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)^n \right\}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

となり、確かに $\sqrt{2}$ の近似分数である。

II. 連分数展開から考えた漸化式

$\sqrt{2}$ の近似分数は、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \end{aligned}$$

と変形できるので、 $\sqrt{2}$ の近似分数から成る数列を $\{a_n\}$ とすると、

$$\text{その漸化式は、 } a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} = \frac{a_n+2}{a_n+1}$$

となる。ただし、 $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}$ である。特

性方程式 $t = \frac{t+2}{t+1}$ を解いて、 $t = \pm\sqrt{2}$ 。

よって、

$$a_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{(1+\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2})}{a_n + 1} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(1-\sqrt{2})(a_n - \sqrt{2})}{a_n + 1} \quad \dots \textcircled{7}$$

を得る。⑥÷⑦を計算すると、

$$\frac{a_{n+1} + \sqrt{2}}{a_{n+1} - \sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(a_n - \sqrt{2})}$$

$$= -(3+2\sqrt{2}) \frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}}.$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}}$ とおくと、

$$b_{n+1} = -(3+2\sqrt{2})b_n.$$

$$\text{また、 } b_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -(3+2\sqrt{2}).$$

したがって、

$$\begin{aligned} b_n &= -(3+2\sqrt{2}) \times \left\{ -(3+2\sqrt{2}) \right\}^{n-1} \\ &= (-1)^n \cdot (3+2\sqrt{2})^n. \end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}} = (-1)^n (3+2\sqrt{2})^n$ な

ので、

$$a_n + \sqrt{2} = (-1)^n (3+2\sqrt{2})^n \times (a_n - \sqrt{2})$$

ゆえ、

$$\begin{aligned} a_n &\left\{ 1 - (-1)^n (3+2\sqrt{2})^n \right\} \\ &= -\sqrt{2} \times (-1)^n (3+2\sqrt{2})^n - \sqrt{2} \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$a_n = \frac{(-1)^n (3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n (3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2}$$

となる。

このようにして、もう1つの $\sqrt{2}$ の近似分数を求めることができた。また、Iの場合と同じように極限をとってみると、

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(-1)^n (3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n (3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2} \right\} \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}}{(-1)^n - \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

となり、 $\sqrt{2}$ の近似分数であることが確かめられた。

ここまでの結果を整理すると $\sqrt{2}$ の分母分子の数列を類推して得られた一般項は、

分子の数列を $\{\alpha_n\}$, 分母の数列を $\{\beta_n\}$,

$\sqrt{2}$ の数列を $\{\gamma_n\}$ とした場合、

$$\alpha_n = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)(1+\sqrt{2})^{n-1}$$

$$-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)(1-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\beta_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{2\left\{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}}$$

$$\gamma_n \div \delta_n = \frac{2\left\{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}} \div \frac{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2}$$

$$= \frac{\left\{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right\}\left\{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - 1\right\}}{\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}\left\{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + 1\right\}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}$$

$$= \frac{(-1)^n(7+5\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n + (-1)^n(-1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{(-1)^n(7+5\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n - (-1)^n(-1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}$$

$$= \frac{(-1)^n\left\{(7+5\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}}{(-1)^n\left\{(7+5\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}} = 1$$

よって、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の各項が等しいことを確かめられた。

しかし、これでは $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ が一致しているかどうかはわからない。なぜなら、 $\{\delta_n\}$ は既約分数になるまで計算しているが、

である。

また、連分数の漸化式から求めた一般項を $\{\delta_n\}$ とすると、

$$\delta_n = \frac{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n + 1}{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n - 1} \times \sqrt{2}$$

である。

ここで、得られた2つの $\sqrt{2}$ の一般項による数列が一致していることを証明する。

実際には、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の各項が等しいことを確かめる。

$\{\gamma_n\}$ は元々分母と分子の数列を合わせたものなので既約とは限らない。例えば、

$\alpha_n = 6$, $\beta_n = 4$, $\delta_n = \frac{3}{2}$ とする。このとき

$\gamma_n = \frac{3}{2}$ なので、 $\{\gamma_n\}$ と $\{\delta_n\}$ の値は等しいが、 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ によって求めた分母と分子を組み合わせたものである $\frac{6}{4}$ とでは一致していない。そこで、 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ が既約であることを確認し、 $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が既約分数であることを示す。

ここで、

$$\alpha_n - \beta_n - \beta_{n-1} = 0$$

を確かめられた。与式は、

$$\alpha_n - \beta_n = \beta_{n-1} \quad \dots \textcircled{8}$$

に変形できる。

ここから、背理法により証明する。

仮に、 α_n と β_n が約数 k を持つとする。

⑧より、 β_{n-1} も約数 k をもつ。

漸化式 $\beta_{n+2} = 2\beta_{n+1} + \beta_n$ から、 β_{n-2} も約数 k をもっているとわかる。さらにこの作業を続けて行くと、 $\beta_{n-3}, \beta_{n-4}, \dots, \beta_1$ も約数 k をもつ。しかし、 β_n の数列

$$\{\beta_n\}: 1, 2, 5, 12, \dots$$

であるから、明らかに矛盾している。ゆえに、最初の仮定が間違っているので α_n と β_n は既約である。

したがって、 $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が既約分数であることを示すことができたので、2つの数列 $\{\gamma_n\}, \{\delta_n\}$ は一致している。

ゆえに、 $\sqrt{2}$ の近似分数の分母と分子の数列が $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ であることがわかり、 p, q の解が求められる。したがって、今までの類推がすべて正しかったとわかる。

2-3. 斜辺が任意の数以下であるピタゴラス三角形の個数

既約なピタゴラス三角形について、制限された斜辺の長さを n 、その条件を満たすピタゴラス三角形の個数を N とする。斜辺 z は互いに素な奇数の組み合わせ

(k, l) を用いて、 $z = \frac{k^2 + l^2}{2}$ と表せる。こ

こで、 z は n 以下なので、 $z = \frac{k^2 + l^2}{2} \leq n$ となる。この式を変形すると、

$$k^2 + l^2 \leq 2n \quad \dots \textcircled{9}$$

を得る。横軸を k 軸、縦軸を l 軸とすると、図1のように、⑨は中心が原点、半径が $\sqrt{2n}$ の円の内部を表している。

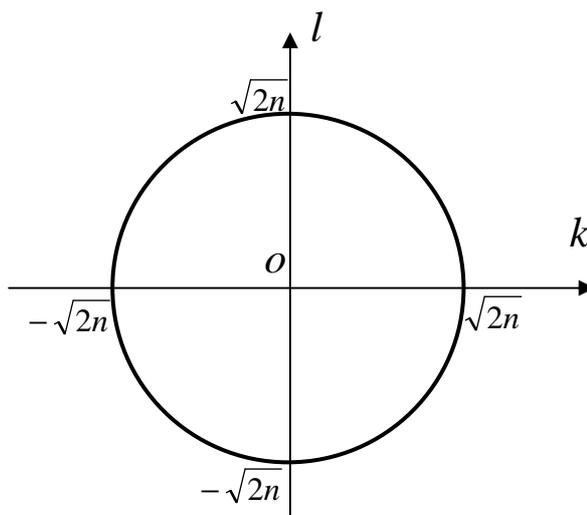


図1

このとき、求めたいピタゴラス三角形の個数 N は⑨の円の内部、および境界上の (k, l) の格子点の数である。さらに、 kl 座標上の一辺が1の正方形は格子点1つに対応しているので、 n を十分大きくすれば、 N は kl 座標上の条件を満たす部分の面積と等しくなると考えてよい。この事実は補題1として、後に証明する。

そこで、⑨の面積 S を求めると、

$$S = (\sqrt{2n})^2 \pi = 2n\pi$$

ここで k, l について、 $k > l > 0$ であるので、この条件を満たすのは図2の影のついた部分であり、面積は S の8分の1なので、

$$\frac{S}{8} = \frac{2n\pi}{8} = \frac{n\pi}{4}$$

となる。

さらに、 k, l はどちらも奇数なので、この条件を満たすのは図2の影のついた部分

の4分の1となり、求める面積は

$$\frac{n\pi}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{n\pi}{16}$$

である。

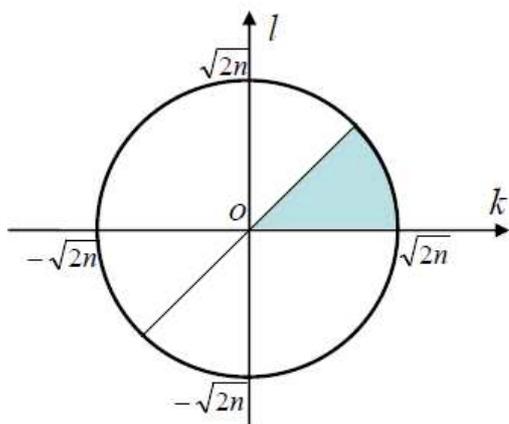


図2

最後に、 k, l は互いに素である奇数であったので、この条件を満たす確率である $\frac{8}{\pi^2}$ (後に証明する)をかけて、

$$\frac{n\pi}{16} \times \frac{8}{\pi^2} = \frac{n}{2\pi}$$

となる。

したがって、条件を満たすピタゴラス三角形の個数 N は

$$N \approx \frac{n}{2\pi}$$

となることが証明された。

補題1

n を十分大きくとる。不等式

$$k^2 + l^2 \leq 2n \quad \cdots (\dagger)$$

が表す領域 D 内に含まれる格子点の数は、領域 D の面積と等しくなる。

(証明)

四分円を考えることにする。

まず、図3のように、頂点が4点

$(p, q), (p, q+1), (p+1, q), (p+1, q+1)$

で囲まれた格子(正方形)を $F_{p,q}$ とおく。

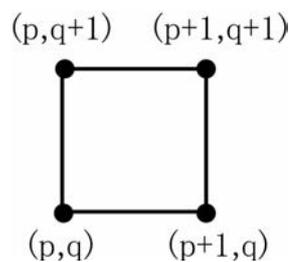


図3

格子点の数を T_n として、 $(p, q) \in D$ となる $F_{p,q}$ をすべて合わせてできる図形の面積を U_n , $F_{p,q} \subset D$ となる $F_{p,q}$ をすべて合わせてできる図形の面積を R_n とする。このとき、 $T_n = U_n$ であることは明白である。さらに、 $R_n < S_n < T_n = U_n$ であることも明らかである。

ここで、 $n \rightarrow \infty$ のとき $R_n \rightarrow T_n$ であることを示し、はさみうちの原理から $S_n \rightarrow T_n$ であることを示す。

まず、 T_n について考える。

$k = p$ ($k \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq [\sqrt{2n}]$)のとき、格子点は

$$(p, 0), (p, 1), \dots, (p, [\sqrt{2n - p^2}])$$

なので、この個数は $[\sqrt{2n - p^2} + 1]$ 個である。

ここで、 p は0から、 $[\sqrt{2n}]$ まで動くので、

$$T_n = \sum_{p=0}^{[\sqrt{2n}]} [\sqrt{2n - p^2} + 1]$$

である。

同様に考えて

$$R_n = \sum_{k=0}^{[\sqrt{2n}]} [\sqrt{2n - k^2}]$$

である。

ここから、 $n \rightarrow \infty$ のとき $R_n \rightarrow T_n$ であることを示す。 $n \rightarrow \infty$ のとき T_n, R_n はどちらも $R_n \rightarrow \infty, T_n \rightarrow \infty$ なのでそれを解消するために T_n, R_n を $n^{\frac{3}{2}}$ で割って考える。

すると、 T_n, R_n はどちらも同じ値に収束する。したがって、はさみうちの原理から

$$R_n = S_n = T_n = U_n \quad (n \rightarrow \infty).$$

ゆえに、格子点の数 T_n はその領域内の面積 U_n によって近似してもよい。

補題 2

奇数の組み合わせ (k, l) が互いに素である確率は $\frac{8}{\pi^2}$ である。

(証明)

まず、2 数 (a, b) が互いに素となる確率を求めよう。 a と b が互いに素であるならば、同じ素数を共通の約数にはもたないということを用いる。

まず、ある素数 p_1 で任意に選んだ整数が割り切れる確率は $\frac{1}{p_1}$ となる。ゆえに、 a と b のうち少なくとも一つが p_1 で割り切れないという事象は、 a と b がどちらも p_1 によって割り切れるという事象の余事象なので、 a と b のうち少なくとも一つが p_1 で割り切れない、つまり素数 p_1 を共通の約数にもたない確率を考える。 a が p_1 で割り切れる確率を p_2 、 b が p_1 で割り切れる確率を p_3 とすると、

$$1 - (p_2 \times p_3) = 1 - \frac{1}{p_1^2}$$

となる。さらに、すべての素数に関して、この確率の積をとったものが a と b が互いに素である確率である。つまり、

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdots \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p:\text{prime}} (1 - p^{-2}) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1 - p^{-2}}\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}. \end{aligned}$$

ここで $\zeta(\cdot)$ はゼータ関数を表す。このゼータ関数に関しては、補題として後述する。

こうして、2 数 (a, b) が互いに素となる確率は $\frac{6}{\pi^2}$ であることが証明された。

では、奇数の組 (k, l) の場合について考えてみよう。 (k, l) はどちらも奇数なので、明らかにどちらも 2 で割ることはできない。

したがって、求める確率は、2 数 (a, b) が互いに素となる確率を求める過程において、素数が 2 の場合を除けばよいので、実際にその確率を求めると、

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdots \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdots \right\} \div \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \\ &= \frac{6}{\pi^2} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{\pi^2}. \end{aligned}$$

このようにして、奇数の組み合わせ (k, l) が互いに素である確率は $\frac{8}{\pi^2}$ であることが示された。(Q.E.D)

補題 3

$$\prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1 - p^{-2}}\right) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

つまり、 $\prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1 - p^{-2}}\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$ が成り立つ。

前述の補題 1 で用いた補題 3 について詳しく説明をしていこう。

まず、ゼータ関数というのは

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

で表される関数のことである。つまり $\zeta(2)$ というのは、

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

のことである。

$$\text{それではまず、} \prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) = \zeta(2) \text{ に}$$

ついて説明する。 $\zeta(2)$ は、次のように無限積の形で表示することができることが知られている。

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots \right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots \right) \\ &\quad \dots \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \dots \right) \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

実際、無限多項式の各項について分母を素因数分解すると、どの項も素数の偶数乗の積によって表されることからこの等式が成り立っていることがわかる。さらに無限積表示の()内は等比数列の和になっているので、

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2^{-2n}}{1-2^{-2}} \right) \left(\frac{1-3^{-2n}}{1-3^{-2}} \right) \left(\frac{1-5^{-2n}}{1-5^{-2}} \right) \\ &\quad \dots \times \left(\frac{1-p^{-2n}}{1-p^{-2}} \right) \dots \\ &= \left(\frac{1}{1-2^{-2}} \right) \left(\frac{1}{1-3^{-2}} \right) \left(\frac{1}{1-5^{-2}} \right) \dots \\ &\quad \dots \times \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) \dots \\ &= \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) \end{aligned}$$

よって、 $\prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) = \zeta(2)$ を示すことができた。

$$\text{次に、} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ を示す。}$$

そのためにまず、 $\sin x$ を無限多項式と無限積の2通りで表す。

[1] 無限多項式

$$f(x) = \sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

とおく。

$$f'(x) = \cos x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = -\sin x = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots$$

$$f'''(x) = -\cos x = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2 + \dots$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = 24a_4 + 120a_5x + 360a_6x^2 + \dots$$

⋮

であるので、

$$f(0) = \sin 0 = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0, \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0, \quad \dots$$

となる。

よって、係数比較をすると、

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{1!} = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3!},$$

$$a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5!}, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = -\frac{1}{7!}, \dots$$

したがって、

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots \end{aligned}$$

となる。

[2] 無限積

$\sin x$ において、整数 k を用いて、 $x = k\pi$ であるときは $\sin x = 0$ であるので、方程式 $\sin x = 0$ は無数個の解 $x = k\pi$ を持っているということになる。よって、 $\sin x$ は次のように無限積表示することができる。

$$\begin{aligned} \sin x &= \dots \left(1 + \frac{x}{2\pi} \right) \left(1 + \frac{x}{\pi} \right) x \left(1 - \frac{x}{\pi} \right) \left(1 - \frac{x}{2\pi} \right) \dots \\ &= x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots \end{aligned}$$

[1], [2]より、 $\sin x$ を下記のように2通りに表すことができた。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots$$

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

ここで、上の2式は x に関する恒等式なので、 x^3 の係数に注目すると、[1]における x^3 の係数は $-\frac{1}{6}$ 。また、[2]における係数は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \times \zeta(2) \end{aligned}$$

となっている。2式は x に関する恒等式であったので、係数は等しく、

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \zeta(2), \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

こうして、

$$\prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{1}{1-p^{-2}} \right) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

を示すことができた。

次に、既約なピタゴラス三角形に限らず、斜辺を2倍、3倍しても n 以下であるものも含めた場合を考察する。

実際に私たちがコンピューターで調べた結果を以下の表に示す。

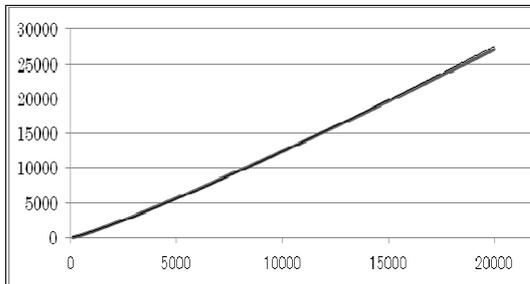


図4 x 軸が n 、 y 軸が個数 N

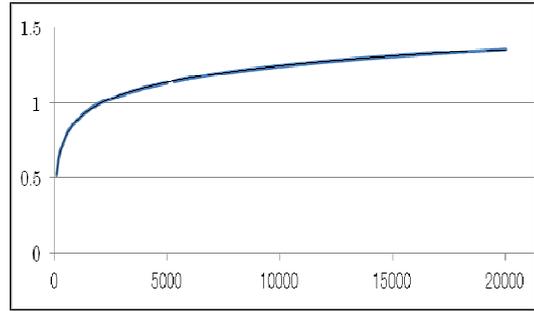


図5 x 軸が n 、 y 軸が比 $\frac{N}{n}$

表2

| ~以下の場合 | ~個 | ~以下の場合 | ~個 |
|--------|------|--------|------|
| 100 | 52 | 3100 | 3291 |
| 200 | 127 | 3200 | 3414 |
| 300 | 210 | 3300 | 3536 |
| 400 | 295 | 3400 | 3665 |
| 500 | 387 | 3500 | 3792 |
| 600 | 486 | 3600 | 3906 |
| 700 | 583 | 3700 | 4026 |
| 800 | 684 | 3800 | 4158 |
| 900 | 781 | 3900 | 4292 |
| 1000 | 886 | 4000 | 4416 |
| 1100 | 989 | 4100 | 4541 |
| 1200 | 1101 | 4200 | 4658 |
| 1300 | 1210 | 4300 | 4789 |
| 1400 | 1318 | 4400 | 4917 |
| 1500 | 1429 | 4500 | 5039 |
| 1600 | 1543 | 4600 | 5173 |
| 1700 | 1658 | 4700 | 5297 |
| 1800 | 1762 | 4800 | 5426 |
| 1900 | 1885 | 4900 | 5557 |
| 2000 | 1994 | 5000 | 5681 |
| 2100 | 2113 | 5100 | 5819 |
| 2200 | 2227 | 5200 | 5950 |
| 2300 | 2348 | 5300 | 6070 |
| 2400 | 2460 | 5400 | 6208 |
| 2500 | 2567 | 5500 | 6333 |
| 2600 | 2690 | 5600 | 6475 |
| 2700 | 2802 | 5700 | 6604 |
| 2800 | 2926 | 5800 | 6742 |
| 2900 | 3054 | 5900 | 6861 |
| 3000 | 3172 | 6000 | 7008 |

| ～以下の場合 | ～個 | ～以下の場合 | ～個 |
|--------|-------|--------|-------|
| 6100 | 7135 | 12100 | 15466 |
| 6200 | 7262 | 12200 | 15618 |
| 6300 | 7396 | 12300 | 15747 |
| 6400 | 7528 | 12400 | 15899 |
| 6500 | 7674 | 12500 | 16041 |
| 6600 | 7797 | 12600 | 16180 |
| 6700 | 7930 | 12700 | 16330 |
| 6800 | 8074 | 12800 | 16466 |
| 6900 | 8207 | 12900 | 16615 |
| 7000 | 8345 | 13000 | 16764 |
| 7100 | 8481 | 13100 | 16903 |
| 7200 | 8602 | 13200 | 17057 |
| 7300 | 8748 | 13300 | 17203 |
| 7400 | 8881 | 13400 | 17343 |
| 7500 | 9009 | 13500 | 17489 |
| 7600 | 9160 | 13600 | 17640 |
| 7700 | 9296 | 13700 | 17781 |
| 7800 | 9437 | 13800 | 17933 |
| 7900 | 9556 | 13900 | 18077 |
| 8000 | 9706 | 14000 | 18227 |
| 8100 | 9837 | 14100 | 18363 |
| 8200 | 9986 | 14200 | 18515 |
| 8300 | 10117 | 14300 | 18664 |
| 8400 | 10245 | 14400 | 18811 |
| 8500 | 10398 | 14500 | 18961 |
| 8600 | 10528 | 14600 | 19093 |
| 8700 | 10672 | 14700 | 19238 |
| 8800 | 10801 | 14800 | 19390 |
| 8900 | 10943 | 14900 | 19535 |
| 9000 | 11077 | 15000 | 19675 |
| 9100 | 11220 | 15100 | 19817 |
| 9200 | 11359 | 15200 | 19977 |
| 9300 | 11504 | 15300 | 20121 |
| 9400 | 11626 | 15400 | 20279 |
| 9500 | 11775 | 15500 | 20424 |
| 9600 | 11908 | 15600 | 20569 |
| 9700 | 12069 | 15700 | 20720 |
| 9800 | 12190 | 15800 | 20862 |
| 9900 | 12345 | 15900 | 21010 |
| 10000 | 12471 | 16000 | 21160 |
| 10100 | 12613 | 16100 | 21310 |
| 10200 | 12751 | 16200 | 21470 |
| 10300 | 12899 | 16300 | 21613 |
| 10400 | 13047 | 16400 | 21759 |
| 10500 | 13185 | 16500 | 21916 |
| 10600 | 13325 | 16600 | 22056 |
| 10700 | 13474 | 16700 | 22194 |
| 10800 | 13602 | 16800 | 22353 |
| 10900 | 13757 | 16900 | 22505 |
| 11000 | 13891 | 17000 | 22662 |
| 11100 | 14022 | 17100 | 22794 |
| 11200 | 14172 | 17200 | 22949 |
| 11300 | 14320 | 17300 | 23105 |
| 11400 | 14457 | 17400 | 23247 |
| 11500 | 14606 | 17500 | 23403 |
| 11600 | 14748 | 17600 | 23553 |
| 11700 | 14895 | 17700 | 23698 |
| 11800 | 15032 | 17800 | 23850 |
| 11900 | 15185 | 17900 | 24007 |
| 12000 | 15320 | 18000 | 24148 |

これまで得られた結果から、各辺が n 以下の既約なピタゴラス三角形の個数を N

とすると、 $N \approx \frac{n}{2\pi}$ が成り立つことがわか

った。では、各辺が n 以下のときに、既約でないものも含めたピタゴラス三角形の個数は、どのような式で表わせるのだろうか。そこで、各辺が n 以下のピタゴラス三角形の個数を N^* として考える。

既約なピタゴラス三角形の個数 N は n の関数

$$N = f(n) = \frac{n}{2\pi}$$

で近似的に表せている。

この関数は既約なピタゴラス三角形のみを考えたものなので、各辺が n を超えない範囲で整数倍して、既約でない三角形も加える必要がある。

そこで、まず 1 倍しても斜辺が n を超えない既約なピタゴラス三角形の個数はそのまま $f(n)$ である。次に 2 倍できるものは、

斜辺が $\frac{n}{2}$ 以下であればよいので、その個数

は $f\left(\frac{n}{2}\right)$ である。同様にして、3 倍、4 倍、

…、 n 倍と考えていく。このとき、それぞれの個数は $f\left(\frac{n}{3}\right)$, $f\left(\frac{n}{4}\right)$, …, $f\left(\frac{n}{n}\right)$ である。

すると、各辺が n 以下のピタゴラス三角形の個数は

$$f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{3}\right) + \dots + f(1)$$

で与えられる。ただし、たとえば 3 倍しても斜辺が n を超えない三角形が $f\left(\frac{n}{3}\right)$ 個あ

ったとする。このとき、これらの三角形は 1 倍、2 倍、3 倍まで拡大することができる

ので、のべ $f\left(\frac{n}{3}\right) \times 3$ 個の三角形を生成す

ることになる。しかし、これは間違いである。これを具体的に説明する。

いま、条件として $n=14$ とする。

まず、この条件を満たす既約なピタゴラス三角形は $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ の 2 つである。ゆえに、 $f(n)=2$ である。

次に、2 倍しても条件を満たすピタゴラス三角形は $(6, 8, 10)$ の 1 つである。

ゆえに、 $f\left(\frac{n}{2}\right)=1$ である。

さらに、3 倍しても条件を満たすピタゴラス三角形は存在しない。

ここで $(6, 8, 10)$ は $(3, 4, 5)$ を 2 倍したものであるので、 $f\left(\frac{n}{2}\right) \times 2$ であるように見えるが、 $(3, 4, 5)$ は $f(n)$ で数えられている。

こういった考えから、各辺が n 以下のピタゴラス三角形の個数は

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(1)$$

であると考えた。

そこで、実際に N^* を計算してみた。

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(1)$$

$$= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{2\pi k} = \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

このように、 N^* を計算する過程で調和数列の有限和が現れた。そこで、次の事実を利用して計算を進めた。

定理 4

n 番目までの調和級数の和と n の自然対数の差はオイラー定数 γ に収束する。つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right\} = \gamma = 0.5772156649 \dots$$

これを利用して、 n が十分大きいときに、 $\sum \frac{1}{k} \doteq \ln n + \gamma$ という近似式を用いて計算すると、

$$N^* = \frac{n}{2\pi} (\ln n + \gamma) \quad \dots (\ddagger)$$

ただし、 $\gamma = 0.5772156649 \dots$

という近似式を導いた。そこで実際にこの近似式を用いて、 N^* を求めてみた。そのデータとグラフを以下に示す。

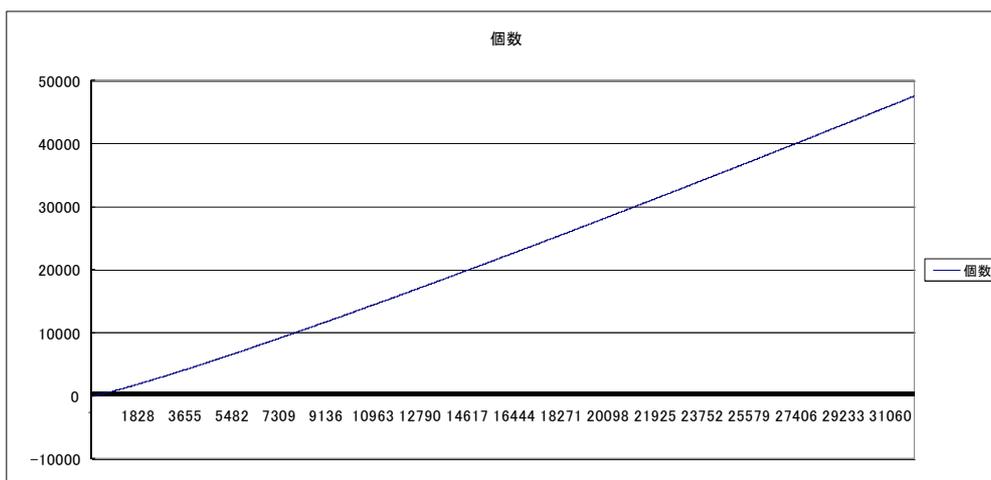


図 6 x 軸は n , y 軸は N

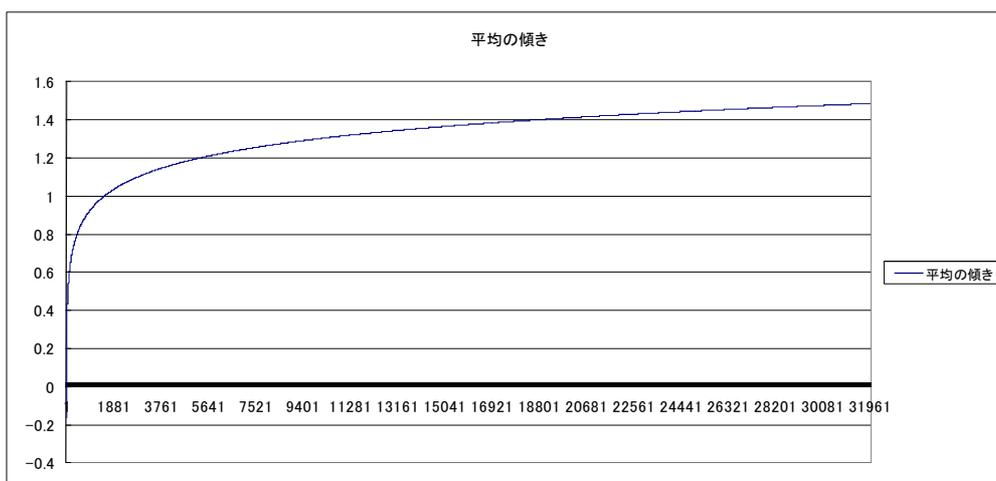


図7 x軸は n 、y軸は $\frac{N}{n}$

このように、今まで私たちが調べてきたグラフと類似していることがわかる。しかし個々のデータ(表3)を見てみると、誤差が大きいことがわかる。たとえば $n=10000$ のとき、 $N^*=15577$ と計算されるが、実際は12471個であり、 $n=20000$ のとき $N^*=33361$ となるが、実際は27175個である。これらの通り、実際の数値よりも大きいことがわかる。そこで、この誤差がなぜ出てきてしまうのかを考えた。レーマーによる既約なピタゴラス三角形の個数を求める近似式の精度は高いことが実際に調べてみてわかっていたので、

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(1)$$

という部分に注目してみた。そして、私たちは次の2つが誤差の理由なのではないかと推測した。

- ①斜辺は少なくとも5以上である。
- ②斜辺は常に整数である。

これまでの考えではこれらの2点は考慮していなかったため、さらにこれらの条件を加えることによって近似式の精度を向上させようと考えた。

まず①についてであるが、これはつまり斜辺が5未満であるピタゴラス三角形は存在しないということである。レーマーの近似式では、

$$f(1) = \frac{1}{2\pi} \doteq 0.16,$$

$$f(2) = \frac{2}{2\pi} \doteq 0.32$$

というようにほとんど0であるが、

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(1)$$

という考えでは、 $f(1)$ は n 回カウントし、

$f(2)$ は $\frac{n}{2}$ 回カウントしている。これだと n が大きくなるにつれて誤差が大きくなるのは明らかである。したがって、斜辺が5未満のものは無視しなければならない。つまり、

$$N^* = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(5)$$

としなければならないということである。

斜辺は整数 k を用いて、 $\frac{n}{k}$ としていたの

で、 $\frac{n}{k} < 5$ 、つまり $k > \frac{n}{5}$ である。そこで、

k が $\frac{n}{5}$ までの値をとると考えて計算してみると、

$$N' = f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + f(5)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} f\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} \frac{n}{2\pi k} = \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} \frac{1}{k} \\
&= \frac{n}{2\pi} \left(\ln \frac{n}{5} + \gamma \right)
\end{aligned}$$

という新たな近似式を求めることができた。この近似式を用いて $n=10000$ のときと $n=20000$ のときを計算してみると、それぞれ

$$N^* = 13014 \quad (\text{実際は } 12471 \text{ 個})$$

$$N^* = 28236 \quad (\text{実際は } 27175 \text{ 個})$$

となり、前述の方法よりも精度が上がっていることがわかる。また、この近似式によって計算した場合の結果を表4に示す。

しかし、これでも誤差はあり、その誤差が徐々に大きくなっている。そこで、②の「斜辺は常に整数である」という条件についても考察してみた。

前述のように、斜辺は整数 k を用いて $\frac{n}{k}$ としていた。ここで、例えば $n=1000$, $k=80$ とする。このとき、斜辺 $\frac{n}{k}$ は $\frac{1000}{80} = 12.5$ である。斜辺が 12.5 以下であるピタゴラス三角形の個数というのは、斜辺が整数であることを考慮すると、斜辺が 12 以下のピタゴラス三角形の個数を考えるということなので、今まで $f(12.5)$ としていたものは、 $f(12)$ とすべきである。こうしなければ、0.5 の分だけ誤差が出てしまう。

つまり、斜辺 $\frac{n}{k}$ 以下の三角形の個数は、斜

辺が $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ 以下の三角形の個数と等しいので

$f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$ としなければならない。ここで、

$\lfloor x \rfloor$ とは x を超えない最大の整数を表す。

これまでの結果を合わせると、

$$N' = \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

と近似式を改良することができた。今回の場合は式中に $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ が出てきてしまったの

で、これ以上計算することはできなかった。この式をより簡単にするのを今後の課題としたい。また、この近似式を用いて、データを作成してみた。その結果が表5である。

表5を見ると $N' = \frac{n}{2\pi} \left(\ln \frac{n}{5} + \gamma \right)$ を用いた場合の値とあまり大きな差はないことがわかる。しかし、 n が大きくなればなるほど、

$N' = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ を用いたときの方が実際

の値に近づくことは明らかである。これからは、この近似式の精度がどれほどのものなのか、正しい近似式なのかを研究していきたい。

また、計算によって求めた個数と実際の個数との比を計算することによって誤差の程度を調べた。その結果は図8に示す。x軸は n ($n \leq 20000$)、y軸は(計算によって求めた個数)/(実際の個数)である。この結果より、 n を 20000 程度まで大きくすると、誤差は 3%以内であることがわかる。

3. 今後の課題

今回既約以外のピタゴラス三角形の個数についての近似式を求めたが、今回求めた近似式の精度を研究したい。また、より近い近似式があるかについても研究したい。

| n | N^* |
|------|----------|
| 100 | 82.48014 |
| 200 | 187.0238 |
| 300 | 299.8953 |
| 400 | 418.1748 |
| 500 | 540.4757 |
| 600 | 665.9813 |
| 700 | 794.1518 |
| 800 | 924.6039 |
| 900 | 1057.051 |
| 1000 | 1191.269 |
| 1100 | 1327.082 |
| 1200 | 1464.344 |
| 1300 | 1602.934 |
| 1400 | 1742.749 |
| 1500 | 1883.701 |
| 1600 | 2025.716 |
| 1700 | 2168.726 |
| 1800 | 2312.673 |
| 1900 | 2457.505 |
| 2000 | 2603.174 |
| 2100 | 2749.64 |
| 2200 | 2896.863 |
| 2300 | 3044.811 |
| 2400 | 3193.451 |
| 2500 | 3342.754 |
| 2600 | 3492.693 |
| 2700 | 3643.245 |
| 2800 | 3794.387 |
| 2900 | 3946.097 |
| 3000 | 4098.356 |
| 3100 | 4251.146 |
| 3200 | 4404.449 |
| 3300 | 4558.25 |
| 3400 | 4712.533 |

| | |
|------|----------|
| 3500 | 4867.284 |
| 3600 | 5022.49 |
| 3700 | 5178.138 |
| 3800 | 5334.217 |
| 3900 | 5490.714 |
| 4000 | 5647.619 |
| 4100 | 5804.923 |
| 4200 | 5962.614 |
| 4300 | 6120.685 |
| 4400 | 6279.125 |
| 4500 | 6437.928 |
| 4600 | 6597.084 |
| 4700 | 6756.586 |
| 4800 | 6916.427 |
| 4900 | 7076.599 |
| 5000 | 7237.096 |
| 5100 | 7397.912 |
| 5200 | 7559.039 |
| 5300 | 7720.473 |
| 5400 | 7882.207 |
| 5500 | 8044.236 |
| 5600 | 8206.554 |
| 5700 | 8369.156 |
| 5800 | 8532.038 |
| 5900 | 8695.194 |
| 6000 | 8858.62 |
| 6100 | 9022.311 |
| 6200 | 9186.263 |
| 6300 | 9350.471 |
| 6400 | 9514.933 |
| 6500 | 9679.643 |
| 6600 | 9844.598 |
| 6700 | 10009.79 |
| 6800 | 10175.23 |
| 6900 | 10340.89 |
| 7000 | 10506.79 |
| 7100 | 10672.92 |

| | |
|-------|----------|
| 7200 | 10839.27 |
| 7300 | 11005.84 |
| 7400 | 11172.63 |
| 7500 | 11339.63 |
| 7600 | 11506.85 |
| 7700 | 11674.27 |
| 7800 | 11841.91 |
| 7900 | 12009.74 |
| 8000 | 12177.78 |
| 8100 | 12346.02 |
| 8200 | 12514.45 |
| 8300 | 12683.08 |
| 8400 | 12851.9 |
| 8500 | 13020.91 |
| 8600 | 13190.1 |
| 8700 | 13359.48 |
| 8800 | 13529.05 |
| 8900 | 13698.79 |
| 9000 | 13868.72 |
| 9100 | 14038.82 |
| 9200 | 14209.09 |
| 9300 | 14379.54 |
| 9400 | 14550.16 |
| 9500 | 14720.95 |
| 9600 | 14891.9 |
| 9700 | 15063.03 |
| 9800 | 15234.31 |
| 9900 | 15405.76 |
| 10000 | 15577.37 |
| 10100 | 15749.14 |
| 10200 | 15921.06 |
| 10300 | 16093.15 |
| 10400 | 16265.38 |
| 10500 | 16437.77 |
| 10600 | 16610.31 |

表3 N^* のデータ

| n | N* |
|------|----------|
| 100 | 56.86514 |
| 200 | 135.7938 |
| 300 | 223.0503 |
| 400 | 315.7148 |
| 500 | 412.4007 |
| 600 | 512.2913 |
| 700 | 614.8469 |
| 800 | 719.6839 |
| 900 | 826.5155 |
| 1000 | 935.1192 |
| 1100 | 1045.317 |
| 1200 | 1156.964 |
| 1300 | 1269.939 |
| 1400 | 1384.139 |
| 1500 | 1499.476 |
| 1600 | 1615.876 |
| 1700 | 1733.271 |
| 1800 | 1851.603 |
| 1900 | 1970.82 |
| 2000 | 2090.874 |
| 2100 | 2211.725 |
| 2200 | 2333.333 |
| 2300 | 2455.666 |
| 2400 | 2578.691 |
| 2500 | 2702.379 |
| 2600 | 2826.703 |
| 2700 | 2951.64 |
| 2800 | 3077.167 |
| 2900 | 3203.262 |
| 3000 | 3329.906 |
| 3100 | 3457.081 |
| 3200 | 3584.769 |
| 3300 | 3712.955 |
| 3400 | 3841.623 |

| | |
|------|----------|
| 3500 | 3970.759 |
| 3600 | 4100.35 |
| 3700 | 4230.383 |
| 3800 | 4360.847 |
| 3900 | 4491.729 |
| 4000 | 4623.019 |
| 4100 | 4754.708 |
| 4200 | 4886.784 |
| 4300 | 5019.24 |
| 4400 | 5152.065 |
| 4500 | 5285.253 |
| 4600 | 5418.794 |
| 4700 | 5552.681 |
| 4800 | 5686.907 |
| 4900 | 5821.464 |
| 5000 | 5956.346 |
| 5100 | 6091.547 |
| 5200 | 6227.059 |
| 5300 | 6362.878 |
| 5400 | 6498.997 |
| 5500 | 6635.411 |
| 5600 | 6772.114 |
| 5700 | 6909.101 |
| 5800 | 7046.368 |
| 5900 | 7183.909 |
| 6000 | 7321.72 |
| 6100 | 7459.796 |
| 6200 | 7598.133 |
| 6300 | 7736.726 |
| 6400 | 7875.573 |
| 6500 | 8014.668 |
| 6600 | 8154.008 |
| 6700 | 8293.589 |
| 6800 | 8433.407 |
| 6900 | 8573.46 |
| 7000 | 8713.743 |
| 7100 | 8854.254 |

| | |
|-------|----------|
| 7200 | 8994.989 |
| 7300 | 9135.945 |
| 7400 | 9277.118 |
| 7500 | 9418.507 |
| 7600 | 9560.109 |
| 7700 | 9701.919 |
| 7800 | 9843.937 |
| 7900 | 9986.158 |
| 8000 | 10128.58 |
| 8100 | 10271.2 |
| 8200 | 10414.02 |
| 8300 | 10557.03 |
| 8400 | 10700.24 |
| 8500 | 10843.63 |
| 8600 | 10987.21 |
| 8700 | 11130.98 |
| 8800 | 11274.93 |
| 8900 | 11419.06 |
| 9000 | 11563.37 |
| 9100 | 11707.85 |
| 9200 | 11852.51 |
| 9300 | 11997.34 |
| 9400 | 12142.35 |
| 9500 | 12287.52 |
| 9600 | 12432.86 |
| 9700 | 12578.37 |
| 9800 | 12724.04 |
| 9900 | 12869.88 |
| 10000 | 13015.87 |
| 10100 | 13162.02 |
| 10200 | 13308.33 |
| 10300 | 13454.8 |
| 10400 | 13601.42 |
| 10500 | 13748.2 |
| 10600 | 13895.12 |

表4 N^* の改良版

表 5

| n | N' |
|------|----------|
| 100 | 56.34085 |
| 200 | 134.0085 |
| 300 | 219.9521 |
| 400 | 311.1479 |
| 500 | 405.6859 |
| 600 | 505.1578 |
| 700 | 605.1071 |
| 800 | 709.1944 |
| 900 | 815.0325 |
| 1000 | 920.8705 |
| 1100 | 1029.732 |
| 1200 | 1141.459 |
| 1300 | 1251.913 |
| 1400 | 1364.117 |
| 1500 | 1478.39 |
| 1600 | 1593.937 |
| 1700 | 1707.733 |
| 1800 | 1826.78 |
| 1900 | 1943.441 |
| 2000 | 2061.375 |
| 2100 | 2181.696 |
| 2200 | 2300.903 |
| 2300 | 2421.702 |
| 2400 | 2544.888 |
| 2500 | 2666.164 |
| 2600 | 2788.713 |
| 2700 | 2912.854 |
| 2800 | 3036.199 |
| 2900 | 3160.499 |
| 3000 | 3285.913 |
| 3100 | 3410.213 |
| 3200 | 3538.969 |
| 3300 | 3665.02 |
| 3400 | 3790.275 |
| 3500 | 3919.031 |
| 3600 | 4048.902 |
| 3700 | 4175.907 |
| 3800 | 4304.664 |
| 3900 | 4434.216 |
| 4000 | 4563.291 |
| 4100 | 4693.638 |
| 4200 | 4825.896 |
| 4300 | 4954.653 |
| 4400 | 5085.955 |
| 4500 | 5219.009 |
| 4600 | 5350.153 |
| 4700 | 5482.41 |
| 4800 | 5616.737 |
| 4900 | 5749.631 |
| 5000 | 5882.367 |

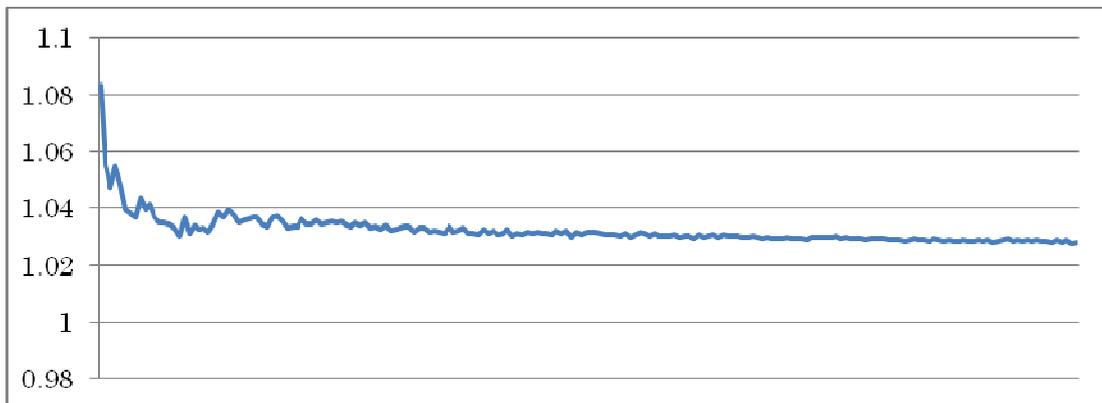


図 8

4. 参考文献

- [1] 「ピタゴラスの三角形」, B. シェルピンスキー著, 銀林 浩訳, 東京図書
- [2] 「数論入門」, 芹沢正三, 講談社ブルーバックス

5. 謝辞

顧問の川口先生には、整数論に関する基

本的な部分を説明していただき、各発表会および本稿について様々なアドバイスをいただきました。また、サイエンス研究会物理班武田君には、データを求める際の基本的なパソコンの使用方法、プログラミングについて説明していただきました。ありがとうございました。