素数の並びに規則はあるかⅡ

３年Ａ組　田村　拓也

指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 3 年生は素数について学習している。今回は算術級数定理の証明を理解することを目標とし、その理解のためにリーマン予想やラマヌジャン予想を学習した。また、ラマヌジャンのτ関数、及び完全数に関する考察することができたので紹介する。

キーワード　素数、ゼータ関数、L 関数、τ関数、完全数

２．研究の背景と目的

素数とは 1 自分自身以外に正の約数を持たない１以外の自然数であり、$2,3,5,7,11,\cdots$と続く。この並びは一見規則性がないように見える。しかし、実際はどうなのか現在でもまだわかっていない。

私は、素数の並びに規則はあるのか、ということに興味をもった。すると、素数の並びの背景には深い代数世界が広がっていることを知った。そこで、基礎的な内容に加えて、L 関数やτ関数といった内容について、本稿にまとめておくことにした。

■包除原理

$\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$を$n$個の有限集合としたとき、

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i,j:i<j}|A_i \cap A_j|$$

$$= \sum_{\substack{i,j,k\\ i<j<k}}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \pm |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

が成り立つことを**包除原理**という。ここで$|A|$は集合Aの濃度を表す。

３．研究内容

３－１．基本事項

■素数

素数とは 1 自分自身以外に正の約数を持たない１以外の自然数のことをいう。以降、n以下の素数の個数を$\pi(n)$とあらわす。もっとも簡単で、最古の素数を生成する方法として知られているのが、**エラトステネスのふるい**である。これには包除原理を用いる。

■全射、単射とは

２つの集合X, Y間の写像$f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$について、$f(X)=Y$が成り立つとき、$f$を**全射**いう。

つまり、$\forall y\in Y,\exists x\in X\ \ s.t.\ f(x)=y$ が成り立つときである。

写像$f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$において$x,x'\in X$について$x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x')$が成り立つとき写像$f$は**単射**であるという。対偶をとって、$f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$とも言い換えられる。全射かつ単射である写像を**全単射**とよぶ。

■濃度

集合Aから集合Bへの全単射が存在するとき、「AとBは**濃度**が等しい」といい、$|A|=|B|$と表記する。自然数全体の集合Nと同じ濃度をもつ集合を**可算集合**といい、可算集合の濃度を$\aleph_0$で表す。つまり、$|N|=\aleph_0$である。

$\boxed{\text{定理}}$（カントールの定理）

実数全体の集合Rは非可算集合である。

$\boxed{\text{証明}}$（カントールの**対角線論法**）

左半開区間$(0,1]=\{x\in R\,|\,0<x\leq 1\}$に含まれる実数の集合が可算であるとすると、$x\in(0,1]$のそれぞれの実数は次のように表すことができる。$a_{mn}\in\{0,1,2,\cdots,9\}$として、

$$
\begin{aligned}
A_1&=0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots a_{1n}\cdots\\
A_2&=0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots a_{2n}\cdots\\
A_3&=0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots a_{3n}\cdots\\
&\vdots\\
A_m&=0.a_{m1}a_{m2}a_{m3}a_{m4}\cdots a_{mn}\cdots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

このうちa_{kk}に対して、$b_k\in\{0,1\}$を

$$
b_k=\begin{cases}1\ (a_{kk}\neq 1)\\ 0\ (a_{kk}=1)\end{cases}
$$

と定めると、数$B=0.b_1b_2b_3b_4\cdots b_k\cdots$は区間$(0,1]$に含まれるが、$B$はどの$A_k$とも小数第$k$桁目が異なり先ほどのいずれの$\mathrm{A}_k$とも一致しない。ゆえに、背理法により左半開区間$(0,1]$は非可算である。$(Q.E.D.)$

また、NからRへの単射は存在するので、$|N|<|R|$である。

$\boxed{\text{定理}}$（ユーグリッドの補題）

素数pが自然数の積mnを割り切るのであれば、pは少なくともmもしくはnの一方を割り切ることができる。

■テイラー展開・マクローリン展開

1変数関数$f(x)$に対して

$$
f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
$$

を関数$f(x)$の$x=a$のまわりでの**テイラー展開**という。特に、$a=0$のとき、つまり、

$$
f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n
$$

を関数$f(x)$の**マクローリン展開**という。

■複素数

２次方程式$x^2+1=0$の解を考え、その内の一つを$\sqrt{-1}$あるいはiで表し、**虚数単位**という。実数a,bを用いて、**複素数**は$a+bi$で表す。a,bがともに整数のときガウス整数、有理数のときガウス有理数という。$z=a+bi$に対してaを**実部**、bを**虚部**といい、それぞれを$\Re,\Im$とも表す。

［考察］

２乗してiになる数は複素数の中に存在するのか

２乗してiになる数は複素数を$a+bi$とすると、$(a+bi)^2=i$.

よって、$a^2+2abi-b^2=i$,

$$a^2-b^2+(2ab-1)i=0.$$

ここで、a,bが実数であることに注意す

ると、$a^2-b^2=0$かつ$2ab-1=0$となる。後者より$b=\dfrac{1}{2a}$.これを前者に代入する。

$$a^2-\left(\frac{1}{2a}\right)^2=0,\quad (2a^2+1)(2a^2-1)=0$$

$a\in R$より$2a^2+1>0$.

ゆえに、$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

したがって、２乗してiになる数は

$$a+bi=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \quad \text{である。}$$

■群

空集合でない集合Gとその上の二項演算$*:\mathrm{G}\times\mathrm{G}\to\mathrm{G}$の組$(\mathrm{G},*)$が、

(G1) **結合律**：$a*(b*c)=(a*b)*c$

(G2) **単位元**の存在：

$$\exists 1\in G\ s.t.\ a*1=1*a=a$$

(G3) **逆元**の存在：$\forall a\in G, \exists a^{-1}\in G$

$$s.t.\ a*a^{-1}=a^{-1}*a=1$$

を満たすとき、$(\mathrm{G},*)$を**群**であるという。結合律のみを満たすものを**半群**、結合律および単位元の存在を満たすものを**モノイド**という。また、交換法則 $a*b=b*a$

を満たす群を**アーベル群**または**可換群**という。

■同型と準同型

写像φが群G_1からG_2への**同型写像**であるとは、φが条件

$$\forall x,y\in G_1, \varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)$$

を満たす全単射であるときをいう。また、このとき$\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2$は**同型**であるという。写像$\varphi$が群$\mathrm{G}_1$から$\mathrm{G}_2$への**準同型写像**であるとは、$\forall x,y\in G_1, \varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)$が成り立つ場合をいい、同型の定義を弱くしたものである。同様にこのとき$\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2$は**準同型**であるという。

■環

集合Rとその上の二項演算である加法$+:R\times R\to R$および乗法$*:R\times R\to R$の組$(R,+,*)$で、以下の条件を満たすものを**環**という。

(R1) 加法群$(R,+)$はアーベル群である。

つまり、結合律、零元の存在、マイナス元の存在、交換律を満たす。

(R2) 乗法半群$(R,*)$はモノイドである。

つまり、結合律、単位元の存在を満たす。

(R3) **左分配律**

$$(\forall a,b,c\in R)(a*(b+c)=(a*b)+(a*c))$$

および、**右分配律**

$$(\forall a,b,c\in R)((a+b)*c=(a*c)+(b*c))$$

が成り立つ。左分配律と右分配律がともに成り立つとき、単に**分配律**が成り立つという。

■体

集合Fとその上の二項演算である加法＋および乗法$*$の組$(\mathrm{F},+,*)$が**体**であるとは、集合Fが加法に関してアーベル群、$\mathrm{F}\setminus\{0\}$が乗法に関してアーベル群を満たすときをいう。

３―２．算術の基本定理

■素因数分解の一意性の証明

背理法を用いる。仮定として、少なくとも２通りの素数の積で表すことのできる自然数が存在すると仮定し、そのうちの最小のものをnとする。

$$n=p_1p_2p_3\cdots p_k=q_1q_2q_3\cdots q_m$$

のように異なる別の素数の積に表わされるとすると、ユーグリッドの補題より、p_1はq_1または$q_2,\cdots,q_m$のいずれかを割り切ることができる。しかし、nの最小性からq_1および$q_2,\cdots,q_l$においてはいずれも素因数分解の一意性が成り立つので、$p_1=q_j$となるようなjがとれる。ここで、

$$n'=p_2p_3\cdots p_k=q_1\cdots q_{(j-1)}q_{(j+1)}\cdots q_n$$

が異なる素数の積として表せるとすると、nの最小性に反するので、素因数分解の一意性は証明される。

３－３．２個の任意に選んだ整数が互いに素である確率

ゼータ関数は自然数の調和数列

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty$$

を拡張したものであり、

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

$$=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots$$

である。

$$\zeta(1)=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{5^1}+\cdots=\infty$$

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots<\infty$$

より、ゼータ関数$\zeta(s)$（ただし、$s\in N$）の絶対収束範囲は$s\geq 2$であることがわかる。また、ゼータ関数に似た級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

は$\log 2$へ収束することが知られている。

これは、$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$を変形することにより、以下のように求められる。

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=[\log(1+x)]_0^1=\log 2$$

ゼータ関数は、次のようにオイラー積に変形できる。

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots$$

（これを**ディリクレ級数**という。）

$$\zeta(s)=\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{2^{3s}}+\frac{1}{2^{4s}}+\cdots\right)$$

$$\times\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{3^{3s}}+\frac{1}{3^{4s}}+\cdots\right)\cdots$$

ここで、

$$1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\cdots$$

（pは素数）は初項 1，公比$\frac{1}{p^s}$の無限等比級数なので、この値は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

となる。それぞれのp因子が$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$になるので、$\zeta(s)$は

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_{p:prime}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

と表すことができる。また、この右辺を**オ**

イラー積と呼ぶ。

■互いに素

２つの整数a,bが 1 と−1 以外に共通の約数を持たないとき、a,bは**互いに素**であるという。

$\boxed{\text{定理}}$

２個の任意に選んだ整数が互いに素である確率は$\zeta(2)^{-1}=\dfrac{6}{\pi^2}$である。

$\boxed{\text{証明}}$

任意の２つの整数a,bにおいてaがpで割り切ることができる確率は$\dfrac{1}{p}$であり、同様にbも考えると、a,bがpで割り切れる確率は$\dfrac{1}{p^2}$であるとわかる。

また互いに素であるとは、言い換えれば、任意の素数pに対して、少なくとも一方は割り切れないということである。ここでn番目の素数をp_nとすると、a,bが互いに素である確率は$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)$となる。またこれは、$\displaystyle\prod_{p:prime}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$と書き換えられるので、

$$\left(\prod_{p:prime}^{\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^2}}\right)^{-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{-1}=\zeta(2)^{-1}$$

と等しいことがわかった。

実際の$\zeta(2)$の値を求めることはできなかったので文献[2]を参照した。（$\zeta(2)$の値については**バーゼル問題**という）。

いま、関数$\sin x$をマクローリン展開すると、$\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$ ―①となる。

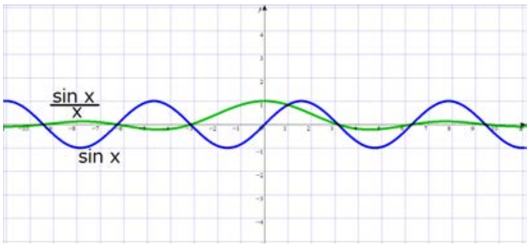

図 1

図 1 で原点を通っているグラフを表す関数が$f(x)$に$\sin x$，$(0,1)$を通る関数が$\dfrac{\sin x}{x}$である。

ここで、①の両辺を$x(\neq 0)$で割ると、

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{1!}-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\quad ―②$$

$\dfrac{\sin x}{x}$は$x=\pm n\pi\ (n\in N)$のとき 0 になるので、

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

―③

すると、②, ③のx^2の係数を考えると

②において、x^2の係数は$-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{6}$.

②の場合は、

$$-\left(\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{x^2}{2^2\pi^2}+\frac{x^2}{3^2\pi^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

つまり、

$$-\frac{1}{6}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

よって級数の収束値は、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

とわかる。

これより、$\zeta(2)^{-1}=\dfrac{6}{\pi^2}$.

したがって２個の任意に選んだ整数が互いに素である確率は$\dfrac{6}{\pi^2}$であることが示される。$(Q.E.D.)$

この証明より一般にk個の整数については次の系が成立する。

系

k個任意に選んだ整数が互いに素である確率は$\zeta(k)^{-1}$である。

３―３．算術級数定理

初項と公差が互いに素である算術級数には無限に素数があらわれる。

今回は直接計算することが困難であるため、Visual C#を用いて、さまざまな初項と公差を用いて、実際に素数が現れるのかを計算した。

■極限

$\lim_{x\to a} f(x)=b$とは、任意の正の数εに対し、ある適当な正の数δが存在して、$0<|x-a|<\delta$を満たすすべての実数xに対し、$|f(x)-b|<\varepsilon$が成り立つことをいう。

つまり、$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall\varepsilon>0,\ s.t.$

$\forall x\in R,\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$

が成り立つことをいう。

■絶対収束と条件収束

無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$に対して$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$が収束する場合を**絶対収束**するといい、その他の場合において収束する場合を**条件収束**という。

■積分判定法

関数$f(x)$が、$x\geq 1$で連続であり、単調減少でかつ$f(x)\geq 0$であるとき、$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$と$\int_1^{\infty}f(x)dx$は同時に収束・発散する。

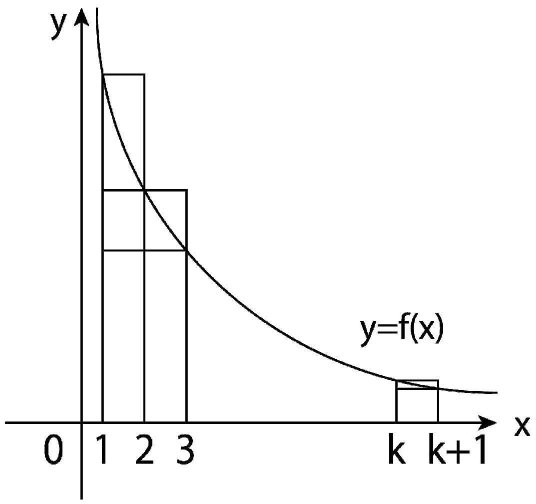

図２

$f(x)$は減少関数なので$k\leq x\leq k+1$のとき、$f(k)\geq f(x)\geq f(k+1)$.

ゆえに、xについてkから$k+1$まで積分すると、

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1).$$

$k=1,2,\cdots,l$ とおいて和を取ると $\sum f(l)$ の l 部分和を S_l として、

$$S_l \geq \int_1^{l+1} f(x)dx \geq S_{l+1} - f(1).$$

これより、$\{S_l\}$ が発散すれば

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$$

となり、逆に $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$ となれば $\{S_l\}$ は発散する。したがって、S_l が収束するための必要十分条件は $\int_1^{\infty} f(x)dx$ が収束することであるといえる。$(Q.E.D.)$

■比較判定法

$\boxed{\text{定理}}$ （ダランベールの収束判定法）

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ であれば絶対収束し、

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ であるとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

ここで、$\zeta(2)$ である $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ に対して、ダランベールの判定法を試してみた。しかし、

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = 1$ であり判定できない。

$\boxed{\text{定理}}$ （コーシーの収束判定法）

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、$0 \leq \lim_{h\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ であるとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

■無限積について

0 でない数の無限列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ の積

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$$

がある有限の値 α に収束するとは、部分積

$$\alpha_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

において $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$ ただし $\alpha \neq 0$ となると定める。

$\boxed{\text{命題}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束（あるいは発散）するとき $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ も同時に収束（あるいは発散）する。

$\boxed{\text{証明}}$

$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \mu$ とする。無限積の n 部分積を p_n として $s_1 = p_1, s_n = p_n - p_{n-1} = a_n p_{n-1}$ とおくと、

$$p_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n.$$

ここで、$x > 0$ のとき $1 + x \leq e^x$ であるので

$$|p_n| = \prod_{k=1}^{n}|1+a_k| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} e^{|a_k|} = e^{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|} \leq e^{\mu}$$

となり、ゆえに、

$$|s_n| = |p_{n-1}a_n| \le e^{\mu}|a_n|.$$

したがって、比較判定法より$\sum s_n$が収束し、数列$\{p_n\}$は収束する。

また、$0 < x < \dfrac{1}{2}$であれば$1 - x \ge e^{-2x}$であるので、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$より、十分大きな$n_0$に対して、$n \ge n_0$ならば$|a_n| < \dfrac{1}{2}$であり、

$$|1 + a_n| \ge 1 - |a_n| \ge e^{-2|a_n|}$$

としてもよい。$\varphi = \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$とおくと、

$$\left|\prod_{k=n_0}^{n}(1 + a_k)\right| \ge \prod_{k=n_0}^{n} e^{-2|a_k|} = e^{-2\sum|a_k|} > e^{-2\varphi} > 0$$

が各$n \ge n_0$に対して成立する。したがって、$\lim_{n\to\infty} p_n \ne 0$であるとわかる。$(Q.E.D.)$

命題

$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$が収束あるいは発散するとき

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$も同時に収束、発散する

証明

nに関する帰納法を用いる。

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| \le \prod_{k=1}^{n}(1 + |a_k|)$$

であることを表す。

$k = 1$の場合は自明なので、$k = n$で成り立つとする。$k = n + 1$のとき、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}|a_k| &= \prod_{k=1}^{n}|a_k| + |a_{n+1}| \\ &\le \prod_{k=1}^{n}(1 + |a_k|) + \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + |a_k|)\right)|a_{k+1}| \\ &= \prod_{k=1}^{n}(1 + |a_k|)\end{aligned}$$

より、$k = n + 1$でも成り立つ。ゆえに、すべての$n \in N$において

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| \le \prod_{k=1}^{\infty}(1 + |a_k|)$$

が成立する。よって

$$\sum_{k=1}^{1}|a_k| \le \cdots \le \sum_{k=1}^{n}|a_k| \le \sum_{k=1}^{n+1}|a_k| \le \cdots \le \prod_{k=1}^{\infty}(1 + |a_k|)$$

であり、n部分和が単調増加で上に有界であるため、$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$が収束することがわかる。

$(Q.E.D.)$

３－５．L 関数

先程のゼータ関数は各項の分子が 1 であったが、これを数列$a = \{a(n)\}$に変えた級数$L(s,a) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a(n)}{n^s}$を**L 関数**とよぶ。

■乗法的関数と完全乗法的関数

互いに素である自然数mとnに対して、$f(mn) = f(m)f(n)$が成り立つとき、fを**乗法的関数**といい、特に、任意の自然数mとnに対して$f(mn) = f(m)f(n)$が成り立つとき、**完全乗法的関数**という。

まず、$a(n)$が完全乗法的であるため、

$$a(n) = a(n \times 1) = a(n) \times 1,$$

$$a(n)(a(1) - 1) = 0.$$

ゆえに、任意の自然数nにおいて

$$a(n)=0\text{ または }a(1)=1$$

である。

次に、$a(n)$が周期性をもつため、周期をNとし、任意の自然数nに対し

$$a(n+N)=a(n)$$

である。このうち、$n=N$であるとき、

$$a(2N)=a(N).$$

ここで、完全乗法性より、

$$a(2)a(N)=a(N)$$
$$a(N)(a(2)-1)=0.$$

これより、$a(N)=0$ $a(2)=1$.

これが、3 以上の自然数にも同様に成り立つので、結論として、「$a(N)=0$」または「任意の自然数nに対して、$a(n)=1$」となる。

後者の場合、$L(s,a)=\zeta(s)$である。ゆえに$\zeta(s)$以外のL関数においては、$a(N)=0$となる。ここで、周期Nの約数dについて考える。さりとて、$d=1,N$については該に既に考えたため、$d\neq 1,N$とし、$dd'=N$とおくと、乗法性より

$$a(d)a(d')=a(dd')=a(N)=0$$

ゆえに

$$a(d)=0\text{ または }a(d')=0$$

が成り立つ。これらが両者とも成り立つ場合、すなわち数列$a(n)$は、周期Nの任意の1でない約数のdに対し、$a(d)=0$を満たすと仮定すると、$a(n)$が完全乗法的であるため、dの任意の倍数、つまりNと互いに素でないような任意の自然数mにおいて、$a(m)=0$となる。

これは、数列$a(n)$がN以下でかつ、Nと互いに素な自然数に対して完全乗法性を満たすように定義をすれば、他の自然数に対しては自明に定まることになる。

■ディリクレL関数

完全乗法性を満たすような乗法群から乗法群への写像を**準同型**という。**ディリクレ指標**χとは、整数から複素数への関数χで、

・ある自然数Nに対して、$a\equiv b \pmod N$ならば$\chi(a)=\chi(b)$

・$\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$

・$\chi(1)=1$

・aとNが互いに素でなければ$\chi(a)=0$

という性質を持たすものである。

厳密な定義は、有限環Z/NZの乗法群$(Z/NZ)^{\times}$から複素数体Cの乗法群$\mathrm{C}^{\times}$への準同型（すなわち乗法的な関数）

$$\chi:(\mathrm{Z/NZ})^{\times}\to \mathrm{C}^{\times}$$

のことである。

$n\geq 2$の自然数において、nで割った剰余が等しい整数をすべて集めたものを「nを法とする」**合同類**や**剰余類**と呼ぶ。したがって、ふたつの整数が同じ剰余類に属するのは、それらの差がnで整除されるときであり、かつそのときに限る。nを法とする剰余類の全体は、以下に述べる加法と乗法に関してnを法とする**合同類環**や**剰余類環**と呼ばれる環を成す。剰余類環をZ/NZと表す。

ディリクレ指数の値$\chi(n)$は、この定義によればNと互いに素な$n\in Z/NZ$に対してのみ定義されるが、それ以外のnに対して$\chi(n)=0$と定めることにより、定義域をZ/NZ全体に拡張し、さらに、ZからZ/NZへの自然な写像$Z\to Z/NZ$を合成し、定義域を任意の整数に拡張することができる。その拡張した写像

$$\chi:Z\to Z/NZ\to C$$

を用いて$a(n)=\chi(n)$と定めたときの L 関数$L(s,\chi)$のことを、**ディリクレの L 関数**という。

準同型の定義から、$\chi(n)$は、周期Nと互いに素な整数同士に対しては完全乗法的、すなわち、$\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$を満たす。

また、少なくとも一方が周期Nと互いに素でない場合は、$\chi(n)$は値が 0 になることから、やはり完全乗法的である。

これよりディリクレの L 関数はオイラー積表示

$$\mathrm{L}(s,\chi)=\prod_{p:prime}^{\infty}\left(1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)$$

をもつ。各オイラー因子の中身も計算することができて、

$$\mathrm{L}(s,\chi)=\prod_{p:prime}^{\infty}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

となる。

■完全数

完全数とは、その数自身を除く約数の和が、その数自身と等しい自然数のことである。完全数の定義より、完全数の正の約数の和は元の数の 2 倍に等しい。すなわちnが完全数であるとは、約数関数$\sigma(n)$に対して、$\sigma(n)=2n$を満たすことである。

■約数関数

約数関数$\sigma_x(n)$は自然数nの約数dのx乗の総和の値を持つ関数であり、

$$\sigma_x(n)=\sum_{d|n}d^x$$

と表される。

■多角数

多角形の形に点を並べたときの点の総数をいう。例えば、三角数は$1,3,6,10,15,\cdots$であり、四角数は$1,4,9,16,25,\cdots$、五角数は$1,5,12,22\cdots$と定義される。ここで一般化を考えてみた。

$P(n,m)$をn番目のm角数とすると、

$$P(n+1,m)-P(n,m)=(m-2)n+1$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}P(n,m)&=\sum_{k=0}^{n-1}\{(m-2)k+1\}\\&=\frac{[1+\{(m-2)(n-1)+1\}]n}{2}\\&=\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}\end{aligned}$$

となる。

■完全数に関する考察

ここで、六角数に 6 と 28

$$P(2,6)=6,\quad P(4,6)=28$$

が含まれていることに気づいた。そこで、

$$496=\frac{(6-2)n^2-(6-4)n}{2},$$

$$8128=\frac{(6-2)n^2-(6-4)n}{2}$$

を解くと、

$$P(16,6)=496,\quad P(64,6)=8128.$$

ここで、$P(n,6)$が完全数になるときのnに規則があるのではないかと考えた。そこで、さらに次の完全数の場合を求めた。

$$P(4096,6)=33550336,$$

$$P(65536,6)=8589869056$$

ここまでで得られた、

$$1,2,4,16,64,4096,65536$$

という数列を見ると、

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^6,\ 2^{12},\ 2^{16}$$

であることがわかった。

数列 0,1,2,4,6,12,16 から始まるものを考察した結果、「$2^{n+1}-1$が素数になるようなn」の数列、または「n個の約数をもつものの数列昇順の数列」とであることに気づいた。

前者：$0,1,2,4,6,12,16,18,30,60,\cdots$

後者：$0,1,2,4,6,12,16.24.36.48.\cdots$

であることから、計算してみると前者であることがわかり、このことから、n番目の完全数を$K(n)$とすると

$$K(n)=2\times 2^{q_n^{\ 2}}-2^{q_n}$$

$$q_n=\{\ l\,|\,2^{l+1}-1\in P\}$$

となることが予想できた。

実際に$K(9)$を計算してみると、

2658455991569831744654692615953842176

となり、完全数であることがわかった。

実際に計算してみると次のようになった。

$K(1)=$6

$K(2)=$28

$K(3)=$496

$K(4)=$8128

$K(5)=$33550336

$K(6)=$8589869056

$K(7)=$137438691328

$K(8)=$2305843008139952128

$K(9)=$ 2658455991569831744654692615953842176

■オイラーのφ関数

正の整数nに対し、1 からnまでの自然数のうち、nと互いに素なものの個数を$\phi(n)$として与えることにより定まる数論的関数を**オイラーのφ関数**または**オイラーのトーシェント関数**という。

pを素数とすると、1 から$p-1$のうちにpの素因子であるpを因子として含むものは存在しないから、$\varphi(p)=p-1$が成り立つ。さらに、kを自然数としたとき、1 からp^kの中でpを因子として含むもの、すなわちpの倍数はp^{k-1}個なので

$$\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

が成り立つ。また、nの素因数分解を

$n=\prod_{k=1}^{d}p_k^{\ ek}$　とすると、

$$\varphi(n)=n\prod_{k=1}^{d}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)$$

となる。

■ヤコビの三重積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1})$$

$$=\sum_{m\in Z}z^m q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

において、$q=q^3,\ z=-q^{-1}$と特殊化すると、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1+(-q^{-1})q^{3n})(1+(-q^{-1})^{-1}q^{3n-3})$$

$$=\sum_{m\in Z}(-q)^{-m}q^{\frac{m(3m+1)}{2}}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1+q^{3n-1})(1+q^{3n-2})$$

$$=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}}.$$

ここで、mと$-m$を入れ替えると、

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{3n}\right)\left(1+q^{3n-1}\right)\left(1+q^{3n-2}\right)$$

$$=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}.$$

左辺に注目すると、左辺はオイラーのφ関数であるから

$$\varphi(q)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\right)=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

となる。

■ラマヌジャンのＬ関数とτ関数

このオイラーの五角数定理を 24 乗したものである

$$f(q)=q\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^k\right)^{24}$$

を展開した式

$$f(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

について考える。

$$f(q)=q(1-q)^{24}\left(1-q^2\right)^{24}\left(1-q^3\right)^{24}\cdots$$

$$f(q)=q(1-24q+\cdots)\left(1-q^2\right)^{24}\left(1-q^3\right)^{24}\cdots$$

のように式を展開していき、$\tau(n)$を実際に求めてみた。

$\tau(1)=1$
$\tau(2)=-24$
$\tau(3)=252$
$\tau(4)=-1472$
$\tau(5)=4830$
$\tau(6)=-6048$
$\tau(7)=-16744$
$\tau(8)=84480$
$\tau(9)=-113643$
$\tau(10)=-115920$
$\tau(11)=534612$
$\tau(12)=-370944$

この結果をもとに以下のような計算をしてみた。

$$\tau(2)\tau(3)=-24\times 252=-6048=\tau(6)$$
$$\tau(3)\tau(5)=252\times 4830=1217160=\tau(15)$$

これらの式より、τ関数は乗法的であると推測できる。**ラマヌジャンの予想** 1 にあたるものである。

【ラマヌジャンの予想 1】

$\tau(n)$は乗法的である。

しかし、オイラー積にするには完全乗法的であることが必要十分条件である。ところが、

$$\tau(2)^2=24^2=576\neq -1472=\tau(4)$$

となり、完全乗法的でないことがわかった。今回、τ関数が何かしらの法則をもっていることは既に感じていたため、この結果を考察してみることにした。

［考察］

任意の自然数nに対する$\tau(n)$について、

$$f(q)=q\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^k\right)^{24}\cdots(*)$$

を展開するとき次数が重要である。次数はそれぞれ

$$1*(0,1,2,3,4,\cdots,23,24)$$
$$*(0,2,4,6,8,\cdots,46,48)$$
$$*(0,3,6,9,12,\cdots,69,72)$$
$$*(0,4,8,12,16,\cdots,92,96)$$
$$\vdots$$

となる。つまり、すべての係数を考えるとき、集合$A_n=\{nx\mid x\in N,0\leq x\leq 24\}$からな

る集合族 $X=\{A_n \mid x\in N, 0\le x\le\infty\}$ から、

$2^{|X|}$ を取り出して考える必要がある。ここで、べき集合 2^X に含まれる空集合には(*)式の q が含まれているので除外しない。また、今回は $\left|2^X\right|=\aleph_0$ なので単純に個数としては出てこないことがわかる。

　集合族 X に含まれる集合 A_n（ただし、$n\le 24$）の個数は n の約数の個数に等しい。任意の自然数 n に対して、$\tau(n)$ を求めることではできない、もしくは困難であるため、まず、先程の結果の差を求めてみると次のようになった。

　任意の素数 p について考える。$p=2$ のとき、

$$\tau(2)^2-\tau(4)=576-(-1472)$$

$$=2048=2^{11}.$$

　また、同様に $p=3$ の場合を計算すると、

$$\tau(3)^2-\tau(9)=63504-(-113643)$$

$$=177147=3^{11}$$

となったので、次のような仮説を立てることができた：任意の素数 p について

$\tau(p)^2-\tau(p^2)=p^{11}$　が成り立つ。

　次に、3 乗の場合を考えてみた。$p=2$ のとき、

$$\tau(8)-\tau(2)^3=98304=-2\times2^{11}\tau(2)$$

ここで、－2 が何を意味しているのかを知るために、3 乗を分解し次のようにしてみた。

$$\tau(8)-\tau(2)\tau(4)=84480-35328$$

$$=49152=-2^{11}\tau(2)$$

また、既に得られた

$$\tau(p)^2-\tau(p^2)=p^{11}$$

を用いることによっても以下のように同様の結果が得られた。

$$\tau(8)-\tau(2)\tau(4)=\tau(8)-\tau(2)\left\{\tau(2)^2-2^{11}\right\}$$

$$=-2^{11}\tau(2)$$

つまり、$\tau(8)=\tau(2)^3+2\times2^{11}\tau(2).$

　未だに－2 という数字が出てくるため、次に

$$\tau\left(2^{2^2}\right)-\tau(2^2)^2=\tau(16)-\tau(4)^2$$

$$=987136-21667846$$

$$=-1179648=-2^{11}\times57$$

　ここで、576 に注目する。

$$576-\tau(4)=2^{11}$$

より、何かしらの全体的な法則があることがわかった。ゆえに、この 4 乗を分解して考えた。4＝2＋2 として考える。

$$\tau(2^4)-\tau(2^2)^2=-2^{11}\left\{2^{11}+\tau(2^2)\right\}$$

$$=-2^{11^2}-2^{11}\tau(2^2).$$

4＝1＋3 として考える。

$$\tau(2^4)-\tau(2)\tau(2^3)=-2^{11}\tau(2^2)$$

　この式から、

$$\tau(p^4)-\tau(p)\tau(p^3)=-2^{11}\tau(p^2)$$

と仮説を立てた。

　先程の式も

$$\tau(p^2)-\tau(p^2)=-p^{11}\tau(p^0)$$

と考えると自然であり、同様に 3 乗を考え

ると、

$$\tau(2^3)-\tau(2)\tau(2^2)=-2^{11}\tau(2)$$

と、同じ結果になった。これらから、仮説を

$$\tau(p^n)-\tau(p)\tau(p^{n-1})=-p^{11}\tau(p^{n-2}),$$

すなわち、

$$\tau(p^n)=\tau(p)\tau(p^{n-1})-p^{11}\tau(p^{n-2})$$

と修正した。

これを変数変換することにより、ラマヌジャンの予想に一致する。

【ラマヌジャンの予想 2】

$\tau(n)$は完全乗法的ではないが、素数 p と $j\in N$ に対して、次式が成立する。

$$\tau(p^{j+1})=\tau(p)\tau(p^j)-p^{11}\tau(p^{j-1})$$

もし右辺の第２項がなく、第１項 $\tau(p)\tau(p^j)$だけであれば、τ が完全乗法的であるということになる。すると、

$$L(s,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}.$$

もし、予想１が正しければ$\tau(n)$は乗法的なので、以下のようなオイラー積をもつが、それぞれの p 因子が等比級数ではないので

$$\mathrm{L}(s,\chi)=\prod_{p:prime}^{\infty}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

のような形にはならない。つまり、

$$\mathrm{L}(s,\tau)=\prod_{p:prime}^{\infty}\left(1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{\tau(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right).$$

ここで、予想２を仮定すると、

$$\tau(p^k)=\tau(p)\tau(p^{k-1})-p^{11}\tau(p^{k-2})$$

（$k=2,3,4,\cdots$）

$L(s,\tau)$ のディリクレ級数表示から $k=0,1$の項を取り除き、$k\geq 2$ においてはこの漸化式を用い、計算すると

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}$$

$$=1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(p)\tau(p^{k-1})-p^{11}\tau(p^{k-2})}{p^{ks}}$$

$$=1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{\tau(p)}{p^s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}-\frac{p^{11}}{p^{2s}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}$$

$$=1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{\tau(p)}{p^s}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}-1\right)$$

$$-\frac{p^{11}}{p^{2s}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}$$

$$=1+\frac{\tau(p)}{p^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}-\frac{p^{11}}{p^{2s}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}$$

より、

$$\left(1-\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{p^{11}}{p^{2s}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}=1.$$

これを、$\zeta(s)$や$L(s,\chi)$のオイラー積と比較する。$u=p^{-s}$とすると、$\zeta(s)$は$\dfrac{1}{1-u}$となり、$L(s,\chi)$　は$\dfrac{1}{1-\chi(p)u}$となる。

$L(s,\tau)$，$\dfrac{1}{1-\tau(p)u+p^{11}u^2}$のいずれの式も分母は多項式である。L 関数のオイラー因子をuの多項式として見たときの次数を**オイラー積の次数**という。$\zeta(s)$および$L(s,\chi)$は１次のオイラー積をもち、$L(s,\tau)$は２次のオイラー積をもつ。

■ラマヌジャン予想

先程の２次のオイラー積は２次方程式

$$1-\tau(p)u+p^{11}u^2=0$$

に解の公式をあてはめることができる。

両辺をu^2で割ると、

$$u^{-2}-\tau(p)u^{-1}+p^{11}=0.$$

これを、u^{-1}の２次方程式とみなすと、解の公式より、

$$u^{-1}=\frac{\tau(p)\pm\sqrt{\tau(p)^2-4p^{11}}}{2}.$$

ラマヌジャンは虚数解をもつと予想した。

つまり、$\tau(p)^2-4p^{11}<0$より、

$|\tau(p)|<2p^{\frac{11}{2}}$ が成り立つと予想した。

【ラマヌジャンの予想 3】

$$|\tau(p)|<2p^{\frac{11}{2}}$$

この予想 3 は「ラマヌジャン予想」といわれる一般形と同値である。予想 3 を仮定すると、根号部が純虚数になるので、

$$u^{-1}=\frac{\tau(p)\pm\left(\sqrt{4p^{11}-\tau(p)^2}\right)i}{2}.$$

絶対値の２乗を計算すると

$$|u|^{-2}=\frac{\tau(p)^2+\left(\sqrt{4p^{11}-\tau(p)^2}\right)^2}{4}=p^{11},$$

$|u|^{-1}=p^{\frac{11}{2}}$, $u^{-1}=p^{-s}$なので、$|u|^{-1}=p^{\Re(s)}$

より、$\Re(s)=\frac{11}{2}$.

ゆえに、実部が一定となる。よって、予想 3 の下でラマヌジャン予想の一般形は成立する。

逆に、ラマヌジャン予想の一般形が成り立つと、式を遡り解の公式の部分は純虚数でなければならない。したがって、ラマヌジャン予想の一般形を仮定すると予想 3 が成り立つ。

すなわち、$L(s,\tau)$に対して

「予想 3 $\Leftrightarrow$ ラマヌジャン予想の一般形」

となる。

４．今後の課題

今回、完全数とτ関数について、自ら考察することができた。しかし、算術級数定理の証明を完全には理解することができなかった。また、今回は新しい概念を膨大に学習したので、まだ理解が不十分なものも多い。そのため、さらに考察を深めるとともに、理論の大きな流れと微細な論理をしっかりと見極めながら学習と研究を進めたい。

５．参考文献

[1]「素数からゼータへそしてカオスへ」, 小山信也, 日本評論社

[2]「πと微積分の 23 話」, 寺澤順, 日本評論社

[3]「定本 解析概論」, 高木貞治, 岩波書店

[4]「ベルヌーイ数とゼータ関数」, 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, 牧野書店

[5]「ゼータの世界」, 梅田亨, 黒川信重, 若山正人, 中島さち子, 日本評論社

[6]「素数大百科」, Chris K. Caldwell 著, SOJIN 訳, 共立出版

[7]「 ヤコビの三重積公式」, 大宗勇輝, 守谷貴秀, 青山学院大学理工学部

６．謝辞

　今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございました。