

# 組みひもについて考える

3年B組 佐野 仁祥

指導教諭 川口 慎二

## 1. 要約

サイエンス研究会数学班 3年生は組みひもについて学習している。今回は、数式で組みひもを扱い、組みひもの理論の基本構造を理解することを目標とした。その際に学習したリンクダイアグラムを中心に参考文献[1]から学んだことを紹介したい。

キーワード 組みひも、リンクダイアグラム、ライデマイスタームーブ

## 2. 研究の背景と目的

組みひもという一見、単純に見えるもの  
がもつ複雑さや、幾何学で考え出された理  
論が現実に応用できるという点に興味をも  
ったからである。

対応する2通りの組みひもを $\sigma_i, \sigma_i^{-1}$ と表  
す(図2)。

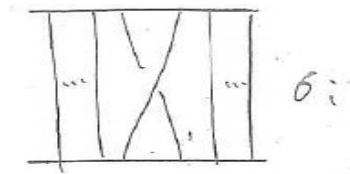


図1

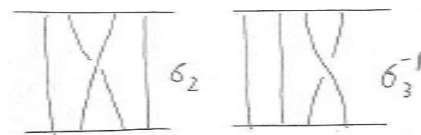


図2

## 3. 研究内容

### 3-1. 組みひもとは

上面Aと下面Bがあったとき、面A上の  
点 $a_n$ の真下にある点を $b_n$ とする。また  
 $a_1 \sim a_n$ から出発した点が $b_1 \sim b_n$ のい  
ずれかに到達するものを $n$ 本と組みひもと  
する。一旦下がったひもが、上に再び上  
がったり、一本のひもが結ばれたりする  
ことはない。

表示の際は、一方から光を当てて投影  
した図に、ひもの重なりがわかるよう  
に描く。

### 3-2. 組みひもの構成要素

ある1つの組みひもを交わる箇所に注  
目し、もとの組みひもがいくつかの組  
みひもの集まりからなるということを  
式で表せないか考える。

まず次の図1のような組みひもを $\sigma_i$   
とする。さらに、右回転で入れ替わる  
ことで

例えば、3本のひもからなる組みひも  
は必ず、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$ から  
なることがわかる、つまりそれぞ  
れいづれかを積の記号を用い式で表  
すということである。

一般的に、 $n$ 本のひもからなる組み  
ひもの場合、 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_n^n$   
の組み合わせにより表されることが  
わかる。

### 3-3. 組みひも関係式

上面の $a_1 \sim a_n$ 、下面の $b_1 \sim b_n$ は  
固定し

たまま移りあえる組みひもは、同じとみなすことにする。

例えば、図3では  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$  であり、4本の組みひもの場合、 $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$  となる (図4)。

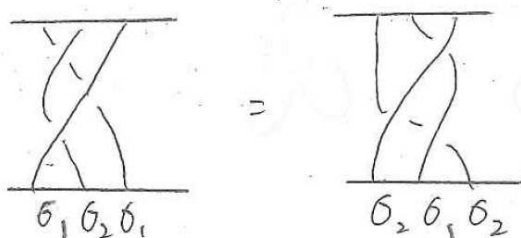


図3

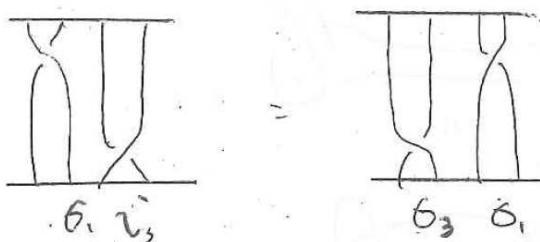


図4

よって、一般に組みひもについて2通りのタイプの関係式が得られることがわかる。

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (i=1,2,\dots,n-1)$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \Rightarrow |i-j| > 1$$

これを、**組みひも関係式**と呼ぶ。

### 3-4. 組みひもの積構造

組みひもを積の記号を用いて合成し、定める。まず**自明な組みひも**(交差していない組みひも) $e$ を考えたとき、同じひもの本数の組みひも  $x$  に対し、 $ex = xe = x$  となる。このような性質を満たす  $e$  は**単位元**と呼ばれる。また、この組みひも同士の積は、は

結合法則  $(xy)z = x(yz)$  を満たしている。

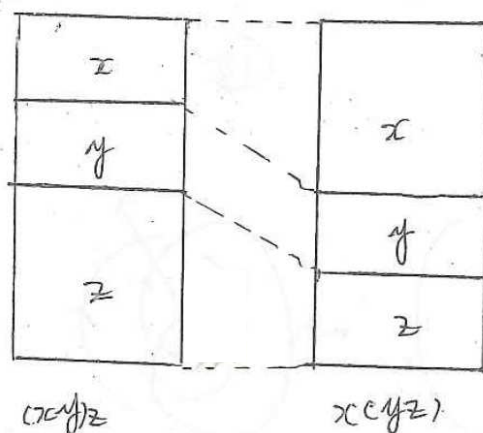


図5

ひもが  $n$  本である組みひもは

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \text{ と } \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_n^{-n}$$

で表すことができる。ここで、ある組みひも  $x$  を考えてみる。  $xy = e$  というように自明な組みひもを作るためには、組みひも  $x$  を後ろから読んで、それぞれの交差の上下を逆にしたものを組みひも  $y$  とおけばよい。このとき、この組みひも  $y$  は  $xy = yx = e$  を満たす。このような組みひも  $y$  は  $x$  の**逆元**と呼ばれる。

$$\text{例を示すと } x = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1},$$

$y = \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$  をそれぞれの組みひもとするとき、この2つを合成させると自明な組みひもになったことがわかる。

### 3-5. 群とは

空でない集合  $G$  とその上の二項演算  $*: G \times G \rightarrow G$  の組  $(G, *)$  が**群**であるとは、

(G1) 結合法則:  $x*(y*z) = (x*y)*z$

(G2) 単位元の存在:  $ex = xe = x$

(G3) 逆元の存在:

$$\forall a \in G, \exists b \in G \text{ s.t. } ab = ba = e$$

の3つの条件を満たすものをいう。ひもの本数が  $n$  本の組みひも全体は上の条件を満たすため群であり、**ブレイド群**や**組みひも群**と呼ばれ  $B_n$  であらわすことができる。

### 3-6. 組みひもとアミダくじ

次の図のようにある組みひも  $a$  にそのひもの本数だけ、上下がそれぞれ対応するよう点をつける。ひもの本数を  $n$  本とすると、これにより  $n$  個の文字  $\{1, 2, \dots, n\}$  の入れ替えが起こることがわかる。この作業はアミダくじの図式をたどっていくのと同じだといえ、根本的な違いは、組みひもではひもの上下関係を問題にしており、アミダくじでは線の上下関係を考えていないという点である。文字  $\{1, 2, \dots, n\}$  の入れ替えは、 $n!$  のパターンがあり、入れ替えの合成に関して、群の構造をもつことがわかる。また、集合  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$  に対し、 $I_n$  から  $I_n$  への全単射全体の集合は写像(入れ替え)の合成を積として群になることがわかる。これを  $n$  次**対称群**とよび  $S_n$  であらわされる。

組みひもが、 $n$  個の文字をどのように入れ替えるかをみると、組みひも群から  $n$  次対称群への写像  $B_n \rightarrow S_n$  が構成される。

### 3-7. リンクダイアグラムとライデマイスター移動

ひもの両端をとじて三次元空間にできた閉曲線を考えることにする。このとき、閉曲線は自分自身と交わったりすることはないとここでは仮定する。ここでも組みひもと同じように、光をあて投影し、かつひもの上下関係をわかるようにする。

ひもを動かすことで、ほどけてしまう結び目は**自明な結び目**と呼ばれる。また、い

くつかの結び目が互いに交わることなく絡み合っているものを**リンク**と呼び、次の図6が代表例である。また、このように表したものを**リンクダイアグラム**という。

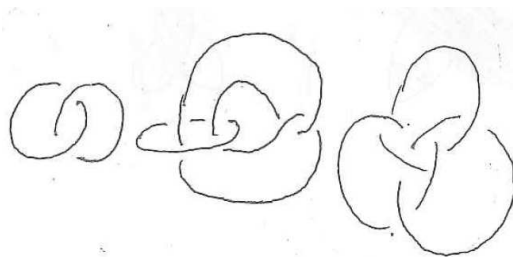


図6

同じリンクでも、見かけ上異なったリンクダイアグラムで表すことができる場合がある。2つのリンクが同じであることは、そのリンクダイアグラムが、次の**ライデマイスター移動**と呼ばれる3つの操作によって得られる。

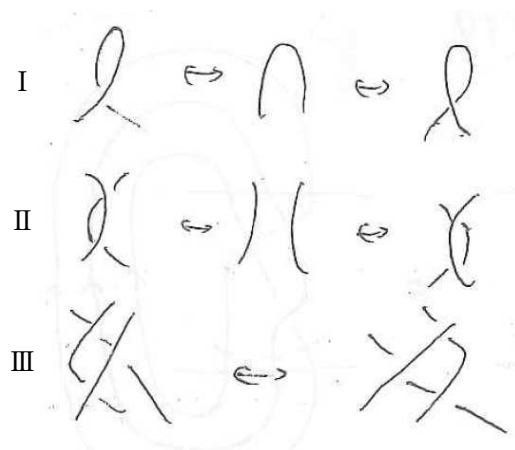


図7

### 3-8. 向きをついたリンク、絡み数

まず、向きをついたリンクについて説明する。**向きをついたリンク**とは、リンクを構成するそれぞれの結び目に矢印を付けたものをいう。

次に絡み数について説明する。**絡み数**と

は、図8の左を正の交差点、右を負の交差点としたとき、正の交差点の個数から負の交差点の個数を引いたものの半分のことと定義する。またこのとき、リンク  $k_1, k_2$  により定まる絡み数を  $LK(k_1, k_2)$  と表す。

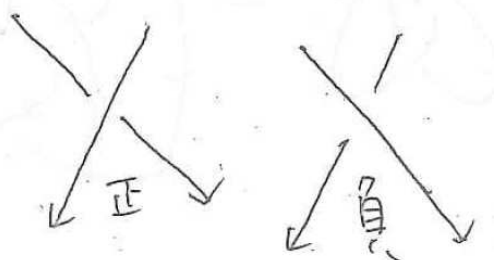


図8

図9のように、下の向きのついたリンクの絡み数を計算することができる。この場合においても、これらの絡み数が同じであることは、ライデマイスター移動によってとらえることができる。ただしこのとき、次のように、可能な矢印の付け方についてすべて考える必要がある。

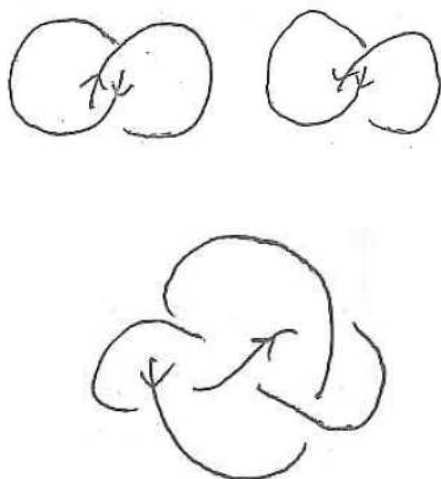


図9

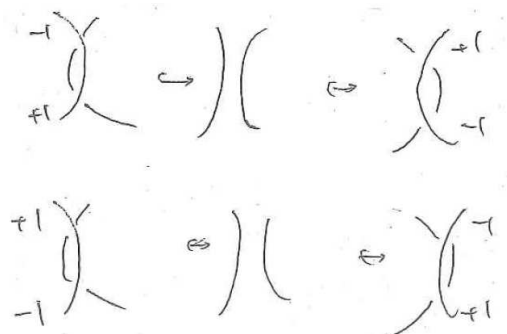


図10

ところで、絡み数は先程のような向きのついたリンクダイアグラムに対して計算されるが、これがライデマイスター移動によって不変であることが次のように示される。

- ①ライデマイスター移動Ⅰのとき、 $k_1, k_2$  の交差は現れないので問題にはならない。
- ②ライデマイスター移動Ⅱのとき、交差の符号が反対になって打消しあう。
- ③ライデマイスター移動Ⅲのとき、点  $a$  が同じ結び目どうしの交差点ならば、点  $b$  もそうであり、ともに同じ符号の交差点であることが確かめられる。

このように、ライデマイスタームーブで絡み数は不変であるということが示される。これは、絡み数が、リンクダイアグラムによる見かけに関わらず、リンク固有の量であることを示している。よって、絡み数はリンクの最も基本的な不変量である。

### 3-9. 結び目の合成

2つの結び目をつなぎあわせることにより、新しい結び目を作ることを**合成**とよび、その逆の操作を**分解**と呼ぶ。

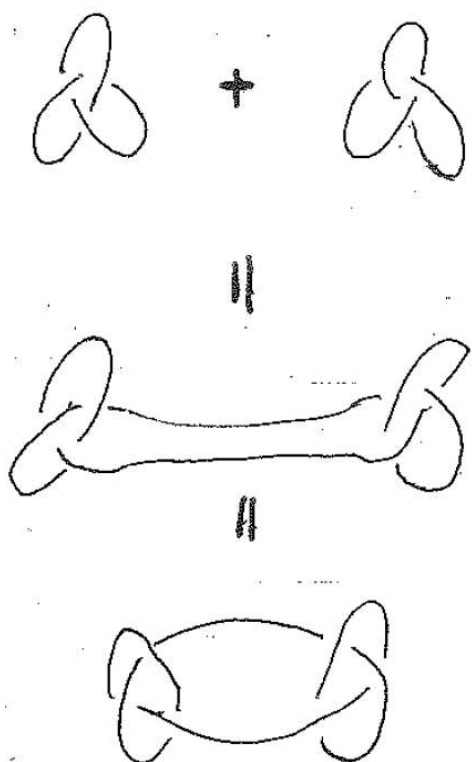


図 11

結び目を分解したとき、一方の結び目が必ず自明な結び目になるとき、これを**素な結び目**と呼ぶ。また、結び目ダイアグラムのうち、交差点の個数が最も少なくなるものを考え、その交差点の数を**最小交点数**と呼ぶ。

### 3-10. 組みひもからリンクをつくる

まず、次のような組みひも  $A$  を用意する。

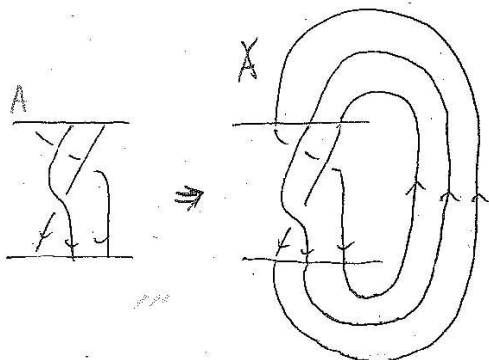


図 12

図 12 のように、組みひも  $A$  から出発して両端をとじると、リンクをつくることができる。このときできるリンクを  $\hat{A}$  と表すことにする。リンク  $\hat{A}$  には、組みひも  $A$  に下向きの矢印をつけることにより、向きを与えることができる。つまり、組みひもから向きのついたリンクが構成できるということである。

このとき、逆はどうか考えよう。向きのついたリンク  $L$  があるとき、両端をとじると、リンク  $L$  となる組みひも  $A$  があるかどうかは後に考える。

### 3-11. 結び目から組みひもへ

図 13 の結び目はそれぞれ点  $o$  を中心に見ると、左回転の曲線からなっている。よって、点  $o$  を通る図のような直線で切り開くと、組みひもは得られることがわかる。さらに、逆をいうと、もとの結び目は組みひもの両端を閉じたものとして表すことができる。

図 14 の結び目は、点  $o$  を中心にしてみると、右回転や左回転の曲線など、回転が一定ではない。ひもを動かして一定にすることを考えると表すことができた。式にあらわすと、 $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$  となる。

これにより、リンクを組みひもで表すには、ひもをうまくうごかして、ある基点についての回転方向を一定にすればよいことがわかった

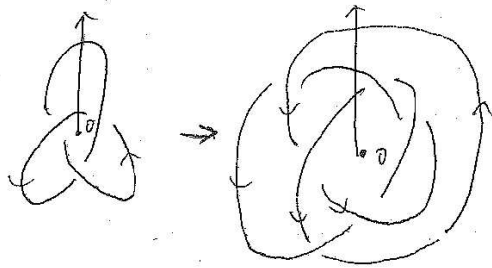


図 13

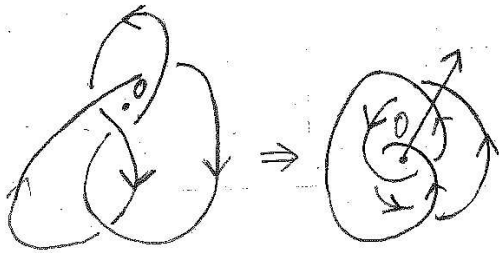


図 14

### 3-12. アレクサンダーの定理の証明

向きのついたリンク  $L$  を、次の規則に従って修正していく。

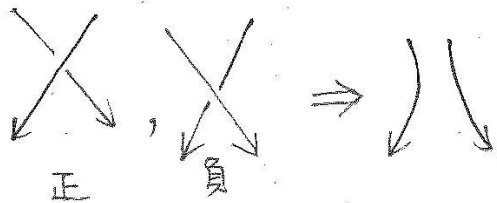


図 15

結果として、平面上のお互いに交わらない有限個の閉じた曲線が得られる。

このように、向きのついたリンクダイアグラムから構成される曲線を**ザイフェルトサークル**と呼び、このとき、リンクの交差に対応した線分をかき入れる。

ここで、リンクを組みひもで表すことについて考える。

まず向きのついたリンクが、ある組みひもの両端をとじたものとして表されているとすると、そのザイフェルトサークルは図

16 のように、同心円になるはずである。

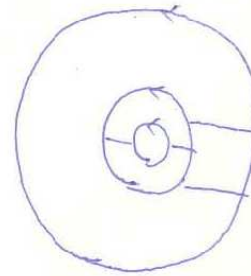


図 16

また、これらの円にはすべて同じ向きが与えられていることになる。逆に、ザイフェルトサークルがこのように同心円になっていれば、もとのリンクダイアグラムは、組みひもを閉じたものとして表すことができる。このとき、リンクダイアグラムをライデマイスター移動 I, II によって変形し、対応するザイフェルトサークルが同心円になるように操作すればいいことがわかる。

いまから、いくつかの典型的な場合を考えてみる。

まず、図 17 のような、ザイフェルトサークルから考える。

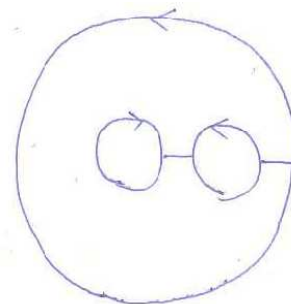


図 17

このとき、一番外側のザイフェルトサークルの向きが定まっていると、ほかのザイフェルトサークルの向きも同じ向きを与えることにする。また、ザイフェルトサークル

ルにおける線分のつなぎ規則より、図 18(a)の場合のみ起こり、(b)に対応する場合はおきかえないことによる。

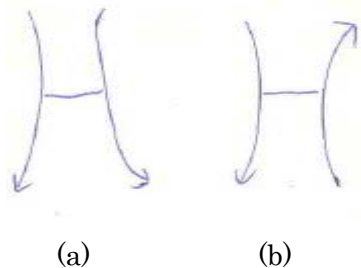


図 18

先程のザイフェルトサークルが同心円になるように変形したのが図 19 である。

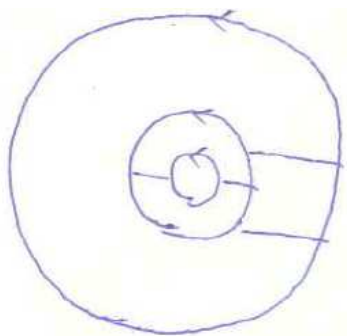


図 19

元のザイフェルトサークルから変形したものにいたる過程を、リンクダイアグラムによって見たのが、次の図 20 である。

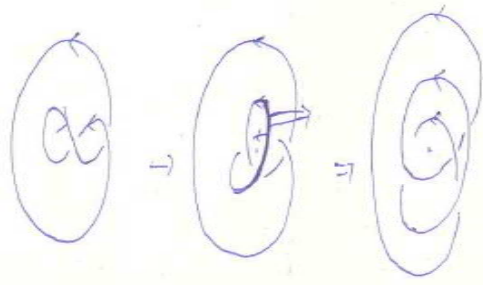


図 20

得られたザイフェルトサークルのすべて

が同じ向きを得たかどうかを確認する。

もうひとつの場合として、次のザイフェルトダイアグラムについて考えてみる。このときも先程の操作に同じく、ライデマイスター移動によって同心円のダイアグラムに変形することができる。

一般に、次の図 21 のようなザイフェルトダイアグラムが考えられるが、先ほど実行した 2 通りの操作で、それぞれ同じ向きが与えられた、同心円のダイアグラムにできるということがわかる。

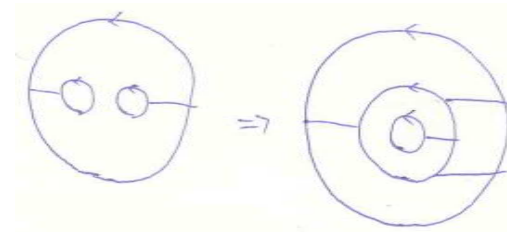


図 21

一番外側のザイフェルトサークルの向きが定まっている場合、その向きをそれぞれの円に与えるとすると、前提において話を進めていたように、一番外側のザイフェルトサークルがない場合については考えていない。だが、もし一番外側のザイフェルトサークルがないときは、一番外側にザイフェルトサークルが存在すると仮定して先程の 2 通りの変形を行い、その後、取り除けばよいということがわかる。

どのようなザイフェルトダイアグラムも、対応するリンクダイアグラムのライデマイスター移動により、同心円に変形できるということがわかる。すると、**アレクサンダーの定理**「すべてのリンクは、ある組みひもの両端をとじたものとしてあらわすことができる」を得る。

#### 4. 感想

今年は組みひもについて基本的な内容を理解することに時間がかかってしまった。一つひとつの内容を理解するまでが大変であった。

これからもさらに組みひもやリンクについて学んでいきたい。

#### 5. 参考文献

[1] 「組みひもの数理」, 河野俊丈, 遊星社