真の約数の和に関する考察

５年Ｂ組　秋山　健太
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班５年生は、真の約数の和を取り続けるという操作について研究している。まず初期値が 1～10000 までの場合について調べてみたところ、操作の結果が単調に増加していくと思われるものがあり、特にそのような場合について考察した。

キーワード　真の約数の和、過剰数、完全数、不足数

２．研究内容

２－１．約数

整数a, bに対して、$a = bq$を満たす整数qが存在するとき、bをaの(広義の)約数という。例えば、9 の約数は±1, ±3, ±9 である。

また、自然数m, nに対して、$m = nr$を満たす自然数rが存在するとき、nをmの(**狭義の**)**約数**または**正の約数**という。例えば、9 の正の約数は 1, 3, 9 である。

「約数」の定義について、一般には広義の意で用いるが、本論文では以降自然数について議論を進めるので、「約数」という用語を使う際は狭義の意味に解釈することにする。つまり、負の数の方は考えない。

２—２．真の約数とその和

自然数nの約数のうち、n自身を除いたものをnの**真の約数**という。なお、1 の真の約数は定義されない。例えば、9 の真の約数は 1, 3 である。

ここで真の約数の和をとるという操作を繰り返すことを考える。以下、自然数nの真の約数の和を$\Sigma(n)$と表すと、例えば 9 の真の約数の和は

$$\Sigma(9) = 1 + 3 = 4$$

である。そして得られた値、つまりここでは「4」についても同様に真の約数の和を計算すると、

$$\Sigma(4) = 1 + 2 = 3$$

となり、また同様に「3」についても真の約数の和を計算すると、

$$\Sigma(3) = 1$$

となる。このように、初期値が「9」である場合は、9→4→3→1 と最終的に「1」に辿り着いた。

では、「9」に限らず、あらゆる自然数を初期値として、このように真の約数の和をとるという操作を続けていくと、どのようになるのだろうか。

２－３．検証

そこでまず初期値が 1～10000 である場合について Excel を用いて計算してみた。
その結果を表１に示す。

表１　Excel を用いた計算結果

初期値	1	2	3	4	5	6	7	8	…
		1	1	3	1	6	1	7	
				1		6		1	
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						6			
						：			

しかし、この中には計算過程で非常に大きな数が出てくるものが少なからずあり、計算がとても遅くなってしまった。そこで、「真の約数の和をとる」という操作をそれぞれ 20 回ずつ行い、

- 「1 で終わるもの」
- 「途中から循環するもの」
- 「20 回の操作では全貌が不明なもの」

の３種類に分けた。
次の表２はその３種類のそれぞれの例である。

表２　３種類の計算結果の例

操作数	1で終わるものの例	循環するものの例	不明なものの例
	30	*4840*	*5880*
1	42	7130	14640
2	54	6694	31488
3	66	3350	54360
4	78	2974	123480
5	90	1490	344520
6	144	1210	951480
7	259	1184	2223720
8	45	1210	5552280
9	33	1184	13498920
10	15	1210	33157080
11	9	1184	87457320
12	4	1210	229221664
13	3	1184	635004288
14	1	1210	2401084672
15		1184	11596401664
16		1210	73281847296
17		1184	611709980032
18		1210	6386637340672
19		1184	82003391152128
20		1210	1125899906842620

そして、次ページの図１は１から n までの各種類の累計の割合を示す。

やはり操作回数が20回と少ないこともあり、徐々に「不明なもの」の個数の割合が増えていることがわかる。

ではこの「不明なもの」も、操作数を十分に増やせば、最終的に1になったり、あるいは循環したりするのだろうか。それとも永遠に1になったり循環したりすることはないのだろうか。

この疑問を解決するために、自然数を「過剰数」、「完全数」、「不足数」という3つのグループに分けて分析を試みた。

なお、これ以降は、便宜上1の真の約数の和を0として扱う。

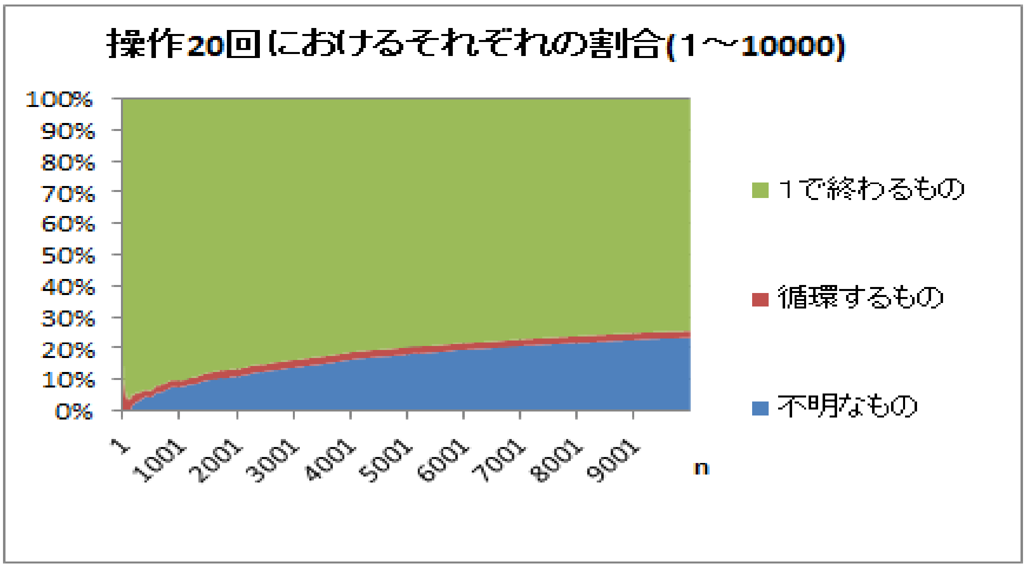

図1

2－4．過剰数・完全数・不足数

不等式 $n<\Sigma(n)$ を満たす自然数 n を**過剰数**といい、等式 $n=\Sigma(n)$ を満たす自然数 n を**完全数**という。また、不等式 $n>\Sigma(n)$ を満たす自然数 n を**不足数**という。

例えば、

$\Sigma(12)=1+2+3+4+6=16$ ゆえ、$12<\Sigma(12)$ であるから、12は過剰数である。また、$\Sigma(6)=1+2+3=6$ ゆえ、6 は完全数とわかる。さらに、$\Sigma(8)=1+2+4=7$ ゆえ、$8>\Sigma(8)$ であるから、8は不足数である。

定義からも分かるように、どの自然数も「過剰数」、「完全数」、「不足数」のいずれかである。

そこで、自然数の中にそれぞれの数はどのぐらいの割合で含まれているのかを調べるため、1～10000までの数について、その数が過剰数であるか、完全数であるか、不足数であるかを求めてみた。

図2は1から n までの数について、3種類それぞれの累計の全体に占める割合を示す。

この図から、非常にグラフが安定していることがわかる。過剰数が約25%、不足数が約75%であり、完全数は 10000 の中に4つしかない。

よって、グラフが非常に安定していることから、1〜10000 という範囲だけでなく、自然数全体で、おおよそ 25%の割合で過剰数が含まれ、また、おおよそ 75%の割合で不足数が含まれ、完全数はごくわずかしかないと考えた。

すると、グラフから１〜10000 までの自然数のうち約 2500 個が過剰数、約 7500 個が不足数であると考えられる。これは初期値が 1〜10000 である 10000 通りのうち、真の約数をとるという操作を１回行うと、（初期値より）値が増加するものが約 2500 通り、（初期値より）値が減少するものが約 7500 通りあるということになる。

そこで今度は値の増減に着目した。まず、2〜10000 までの自然数 n を過剰数、完全数、不足数の３つのグループに分ける。さらに、グループごとに $\Sigma(n)$ を過剰数、完全数、不足数の３つのグループに分ける。つまり、n と $\Sigma(n)$ の大小を比べ、$\Sigma(n)$ と $\Sigma(\Sigma(n))$ の大小を比べて、最終的に、計 3×3＝9 個のグループに、初期値が１である場合を除く、先程の 9999 通りを分類する。

表３がそれらをまとめたものである。

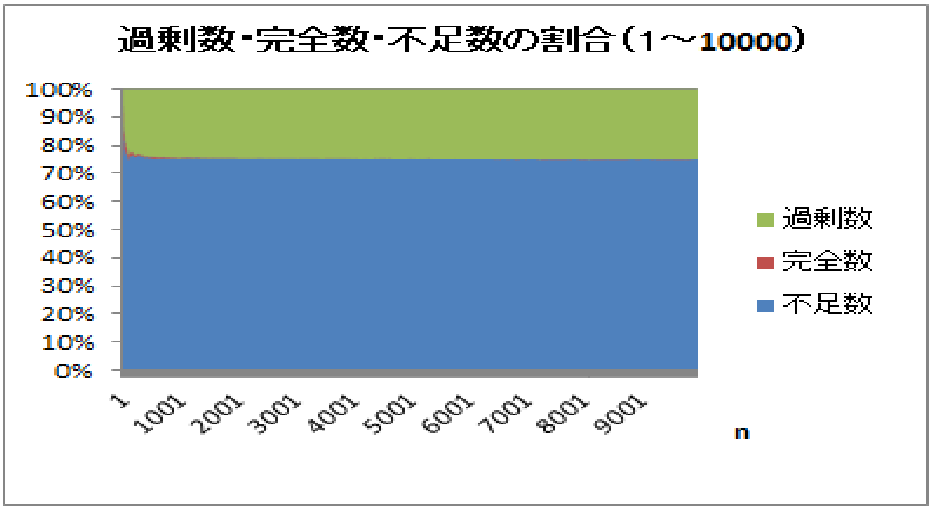

図２

表３

			Σ（n）		
		総数	過剰数	完全数	不足数
n	過剰数	2488	1869 (75.12%)	0 (　0.00%)	619 (24.88%)
	完全数	4	0 (0.00%)	4 (100.00%)	0 (0.00%)
	不足数	7507	478 (6.37%)	2 (　0.03%)	7027 (93.60%)
	※初期値1の場合は1回目の操作で0になってしまうため、除いている				

この表３から、「過剰数の真の約数の和は過剰数を、不足数の真の約数の和は不足数を生成しやすい」ということが読み取れる。

特に過剰数について詳しく見てみると、初期値が 2～10000 であるものの中で過剰数、つまり $n<\Sigma(n)$ を満たす数は、全体の 25%ほどしかないが、そのうちの実に 75%以上が過剰数、すなわち

$$\Sigma(n)<\Sigma(\Sigma(n))$$

を満たすことがわかる。

このことから、自然数の真の約数の和をとる、という操作を繰り返すと、どのような初期値で始めても、その全ての場合において、1 で終わったり、どこかから循環したりするのではなく、いくら操作数を増やしても、1 で終わることもなく、また循環もずっとしないようなものもある、と考えている。

３．今後の課題

今後の最大の目標は「不明なもの」の結末を解明することである。そのためには、ある数が過剰数、完全数、不足数になるための条件を考えたり、「不明なもの」の中でグループ分けをしたりすることが解明の糸口になるのではないかと考えている。

４．参考文献

[1]「プライムナンバーズ」，David Wells 著，伊地知 宏監訳，さかいなおみ訳，オーム社

５．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導して下さった顧問の川口先生、ありがとうございました。