ピタゴラス三角形とピタゴラス数

６年Ｂ組　清水　悠平
６年Ｃ組　西井　良徳
６年Ｃ組　森　宇宏
指導教員　川口　慎二

１．概要

サイエンス研究会数学班６年生は、ピタゴラス三角形について４年間継続して研究を行った。主な内容はピタゴラス三角形の基本的性質や辺の長さ、周の長さ、面積に関する考察、ヘロン三角形とフェルマーの大定理との関係、そして辺の長さと個数の関係である。本稿では、その結果について紹介し、これまでの研究を総括する。

キーワード　　ピタゴラスの定理(三平方の定理)、ピタゴラス三角形、ピタゴラス数、既約、平方数、フェルマー・ペル型不定方程式、ヘロン三角形、フェルマーの定理、近似式

２．研究の背景と目的

ピタゴラス三角形(Pythagorean triangle)とは、３辺の長さを整数で表すことができる直角三角形である。

B.C.2000 頃のエジプトではすでに辺の長さが 3, 4, 5 のピタゴラス三角形の存在を知られていた。このようにピタゴラス三角形はとてつもなく長い歴史がある。

また、よく知られているように直角三角形の３辺の間には、ピタゴラスの定理(定理１)が成り立つ。

<u>定理１</u>　(ピタゴラスの定理)

直角を挟む２辺の長さが x, y である直角三角形の斜辺の長さを z としたとき、

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \cdots(1)$$

が成り立つ。

このとき、等式(1)を**ピタゴラス方程式**(Pythagorean equation)という。

また逆に、等式(1)が成り立つ三角形は直角三角形となる(「**ピタゴラスの定理の逆**」と呼ばれる)。 そして、ピタゴラス三角形の３辺の長さの組み合わせを**ピタゴラス数**(Pythagorean number)という。

あるピタゴラス三角形を拡大すると、新しい直角三角形ができる。新しくできた直角三角形は、各辺が自然数であり、もとの三角形に相似なので、これもまたピタゴラス三角形となる。このようにあるピタゴラス三角形を２倍，３倍，４倍…としていくと、次々に新たなピタゴラス三角形ができる。つまり、１つのピタゴラス三角形から無数のピタゴラス三角形が生み出される。これを記号で表現しよう。一般に、３辺が x, y, z であるピタゴラス三角形を (x, y, z) と表すことにする。このとき (kx, ky, kz) (ただし $k = 1,2,3,\cdots$)はすべてピタゴラス三

角形になる。

　例えば、(3, 4, 5)という組み合わせのピタゴラス三角形からは、(6, 8, 10), (9, 12, 15)などのピタゴラス三角形が得られる。

　ここで、ピタゴラスの定理の証明をいくつか紹介する。

［証明１］

　３辺の長さが x, y, z であり、∠A＝90°である直角三角形 ABC を考える。まず、

　△ABC と合同な直角三角形を図１のように４枚並べて、正方形 ADEF をつくる。

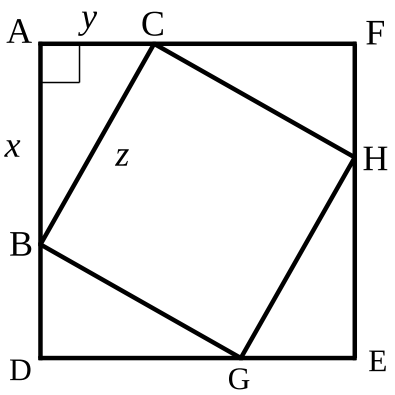


図１

　このとき、△ABC, △DGB, △EHG, △FCH はすべて合同である。すると、

AB＝DG＝EH＝FC＝x ,

AC＝DB＝EG＝FH＝y ,

BC＝GB＝HG＝CH＝z .

であるから、正方形 BGHC の面積 S は、$S = z^2$ と表すことができる。一方、正方形 BGHC の面積は、一辺が $(x+y)$ の正方形から、４枚分の直角三角形の面積を引いたものなので

$$(x+y)^2 - 4 \times \frac{1}{2}xy$$

と表すこともできる。したがって、

$$z^2 = (x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$$

となる。

(Q.E.D.)

［証明２］

　図２のように、３辺の長さが x, y, z であり、∠C＝90° である直角三角形 ABC を考える。頂点 C から斜辺 AB へ下ろした垂線の足を D とする。

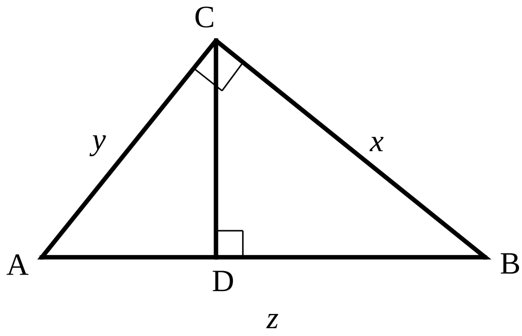


図２

　ここで、∠D＝90°より、

△ABC∽△ACD∽△CBD

となる。よって、△ABC と△ACD の相似比は y ：AD＝z ： y である。

よって、AD＝$\dfrac{y^2}{z}$ である。

　同様に、△ABC と△CBD の相似比は x ：BD ＝z ： x である。

したがって、BD＝$\dfrac{x^2}{z}$ となる。

　いま、z ＝AB＝AD+BD であるから、

$$z = \frac{y^2}{z} + \frac{x^2}{z} = \frac{x^2+y^2}{z}$$

が成り立つ。この両辺に z (>0) を掛ける

と、$z^2 = x^2 + y^2$ となる。

(Q.E.D.)

［証明３］

３辺の長さが x, y, z (BC= x，CA= y，AB= z とする)であり、∠A＝90°である直角三角形 ABC を考え、図３のように、各辺を一辺とする正方形を辺上につける。また、点 C から辺 DE におろした垂線の足を L とし、AB との交点を M とする。また、I を通り AB に平行な直線 IJ を引き、線分 AH との交点を J、線分 IJ と辺 BD の延長線との交点を K とする。

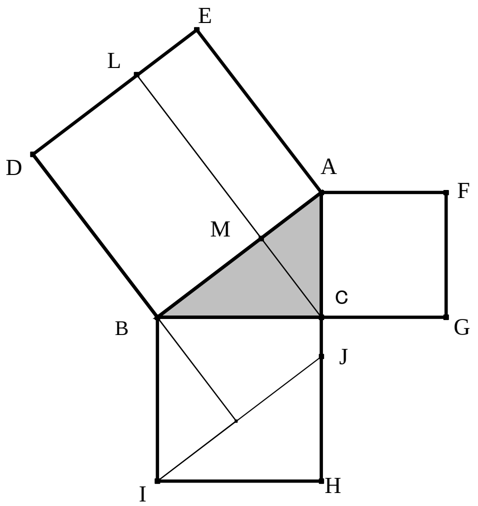


図３

すると、IJ//BA、IB//JA であるため、四角形 ABIJ は平行四辺形である。ここで、

▱ABIJ＝BI×BC なので、

▱ABIJ＝□BIHC …①

ここで、▱ABIJ と□BIHC はそれぞれ平行四辺形 ABIJ と正方形 BIHC の面積をそれぞれ表している。

また、△IBK と△CBM において、

BI＝BC であり、

∠IBK＝90°－∠KBC＝∠CBM

なので、ともに直角三角形であり、斜辺と１鋭角が等しいので、△IBK≡△CBM である。

よって BK＝BM となり、また KD//CL であるから、

▱ABIJ＝AB×BK=BD×BM

＝▭BMLD …②

ここで、▭BMLD は長方形 BMLD の面積を表している。

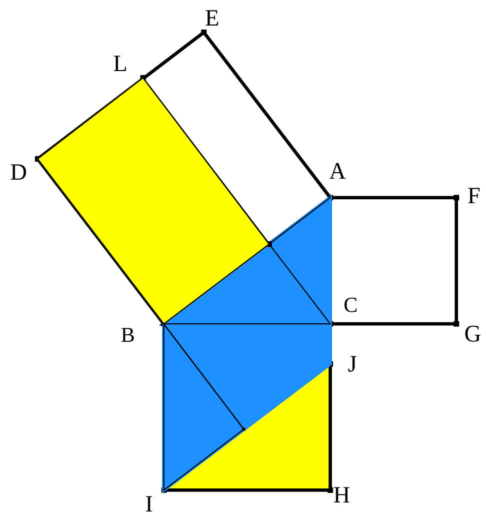


図４

①, ②より、

□BIHC＝▭BMLD …③

であり、同様に、

□ACGF＝▭AELM …④

となる。③, ④より、

□BIHC＋□ACGF＝□AEDB

つまり、$x^2 + y^2 = z^2$ が成り立つ。

(Q.E.D.)

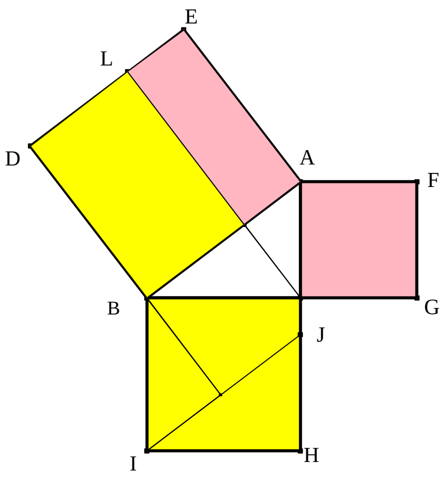


図５

［証明４］

３辺の長さが x, y, z (AB= x , BC= y , CA= z とする)であり、∠B＝90° である直角三角形 ABC を考える。

図６のように、直角三角形の１辺 AB の延長上に AD＝BC となるような点 D をとり、AD⊥DE かつ DE＝AC となるような点 E をとる。E と A，E と C を結ぶ。

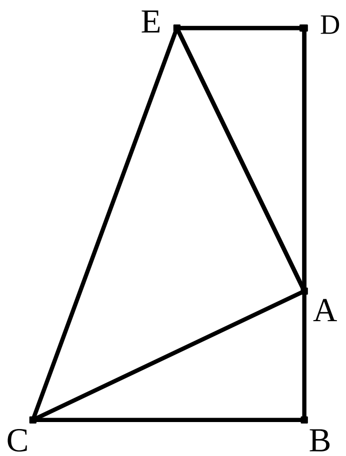


図６

△EDA と△ABC において、AD＝CB であり、DE＝BA，∠ADE＝∠CBA＝90°なので、△EDA≡△ABC となる。よって AE＝CA＝z である。

ここで、四角形 BDEC は上底が DE＝x , 下底が BC＝y , 高さが BD＝AB+AD＝$x+y$ の台形であるので、その面積は

$$\frac{1}{2}(x+y)^2=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2\right) \quad \cdots①$$

である。また、この台形は△ABC+△ABE＋△EAD と表すことができる。△EAD は一辺の長さが z の直角二等辺三角形なので、

$$\triangle \mathrm{EAD}=\frac{1}{2}z^2 \quad \cdots②$$

である。したがって、この台形 BDEC の面積は、②より、

$$\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}z^2+xy \quad \cdots③$$

となる。ゆえに、①，③から、

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+xy=\frac{1}{2}z^2+xy$$

すなわち、$x^2+y^2=z^2$ が成り立つ。

(Q.E.D)

本稿では、ピタゴラス三角形のもつ幾何的性質と、ピタゴラス数のもつ代数的性質の対応に注目しながら、ピタゴラス数の基本的性質や、様々な条件を加えた時のピタゴラス三角形の性質について紹介する。

３．研究内容

３－１．既約なピタゴラス三角形

２つの整数 a,b が**既約**(irreducible)であるとは、２数の最大公約数が１であるときをいう。一般に、２数 a,b の最大公約数を (a,b) と表すので、a,b が既約であることを $(a,b)=1$ と表す。このとき、a,b は**互いに素**(coprime)であるともいう。さらに、

$(a,b)=1$ かつ $b \neq 0$ であるとき、分数 $\dfrac{a}{b}$ はこれ以上約分できない。このような分数を**既約分数**(irreducible fraction)という。

ピタゴラス三角形が既約であるとは、３辺のうち、どの２つの辺の長さも既約になっているときをいう。

以降、ピタゴラス三角形 (x,y,z) を考え、z をその斜辺とする。つまり、$x^2+y^2=z^2$ が成り立っているものとする。

まず、斜辺以外の２辺について既約なピタゴラス三角形を求めるためにまず既約なピタゴラス三角形 (x,y,z) について、この３辺の長さの性質を調べていく。まず、３辺の偶奇性(パリティ)が決定される。その証明のために、次の補題を準備しておく。

補題Ⅰ

奇数の平方を８で割ると、１余る。

［証明］

ある自然数 k をもちいて、ある奇数を $2k+1$ と表す。この平方は

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$$

となる。このとき、$k(k+1)$ は連続２数の積ゆえ偶数なので、$4k(k+1)$ は８で割り切れる。ゆえに、$(2k+1)^2$ は８で割ると１余る。

(Q.E.D.)

定理２

x, y は（奇数、偶数）または（偶数、奇数）の組合せとなる。

［証明］

まず仮定として、x, y が互いに素であるとする。

(i) どちらも偶数である場合

$x=2m, y=2n$ （m,n は自然数）と表すことができるので、どちらも２で割ることができ、２数が互いに素であるという仮定に反するため、起こり得ない。

(ii) どちらも奇数である場合

補題Ⅰから、２つの奇数の平方の和を８で割ると２余ることがわかる。したがって、２つの奇数の平方の和は４で割り切ることができない。奇数の平方は奇数なので、２つの奇数の平方の和は偶数になる。つまり、z^2 は偶数になる。ゆえに、z も偶数であるとわかる。

ここで $z=2k$ とすると、$z^2=4k^2$ となり４の倍数になる。つまり、x^2+y^2 が４の倍数である。これは、２つの奇数の平方の和を４で割り切ることができないという事実に反するので、２数が両方奇数ということはあり得ない。

(i), (ii)から、x, y は一方が奇数であり、一方が偶数でなければならないことが示された。

(Q.E.D.)

x, y, z をより具体的に求めるためには、次の補題が必要である。この補題は、２数を因数分解して考えれば、直感的には正しく思える。しかし、数学的に正確な証明をするためには、素因数分解の一意性を認めておく必要がある。ここでの証明は行わないので、参考文献[2]などを参照せよ。

補題Ⅱ

２つの互いに素である数の積が平方数のとき、この２数はどちらも平方数でなければならない。

定理３

x, y, zは互いに素な２数m, nを用いて、それぞれ

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

と表すことができる。

［証明］

定理２から、x, yの組の一方が奇数で、もう一方が偶数であることは証明された。ここで、xを奇数、yを偶数とおく（するとzは奇数となる)。

ピタゴラス方程式を変形させ、

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x) \quad \cdots①$$

としたとき、$z+x$ と$z-x$ は、x, zがともに奇数であることから、どちらも偶数となる。よって整数a, bを用いて、

$$z + x = 2a,\ z - x = 2b \quad \cdots②$$

と表すことができる。ゆえに、

$$z = a + b,\ x = a - b \quad \cdots③$$

となる。この等式からa, bが互いに素であることが導かれる。

なぜならば、背理法を用いて、a, bが 1 より大きな公約数dをもつとすると、③からdはx, zの公約数となる。ゆえに、$z+x$と$z-x$も公約数dをもつことになる。ここで①から、d^2はy^2の約数になり、dはyの約数ともなる。このとき、dはx, yの公約数となり、x, yが互いに素であるという仮定に反する。したがって、a, bは互いに素でないといけない。

また、自然数cを用いて$y = 2c$と表すことができるので、①，②から、

$4c^2 = 2a \times 2b$，つまり、$c^2 = ab \quad \cdots④$

となる。ここで、補題Ⅱと④から、

$$a = m^2,\ b = n^2$$

と表せる。

いま、aとbが互いに素であるので、mとnも互いに素であることが分かる。③からx, zは、

$$x = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$

となる。さらに、$c^2 = ab = m^2 n^2$より、，

$$y = 2c = 2mn$$

である。こうして、互いに素な２数m, nを用いて、x, y, zはそれぞれ

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2 \quad \cdots⑤$$

と表すことができた。

(Q.E.D.)

ちなみに、m, nがともに偶数または奇数のとき、$x = m^2 - n^2$から、xが偶数となり、最初の仮定に反するので、m, nの一方が偶数、他方が奇数でないといけないことがわかる。

定理３の証明からわかるように、ピタゴラス三角形の斜辺でない２辺のうちどちらかは 4 で割りきることができる。したがって、３辺がすべて素数であるピタゴラス三角形は存在しないことになる。

これまでの結果をまとめると、次の定理のように記述できる。

定理４

辺yが偶数であるような既約なピタゴラス三角形は、すべて

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

$(m > n)$から求められる。ただし、m, nは

一方が偶数で他方が奇数である互いに素な任意の２数である。

また、y が偶数である既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) は、このような２数 m, n によって一意的に定まる。

［証明］

m, n は互いに素な整数で、$m > n$ とし、さらに一方が偶数、もう一方が奇数であるとする。⑤によって、これらの数から既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) の辺が決まる。恒等式

$$(m-n)^2 + (2mn)^2 = (m+n)^2$$

から、ピタゴラス方程式が成り立つことは明らかである。

次に、⑤のように定めた x, y が互いに素になることを示そう。そこで、x, y が公約数 d（$d > 1$）をもつとする。x は奇数なので、d も奇数となる。また、d は z の約数にもなる。すると、⑤から $m^2 + n^2$ と $m^2 - n^2$ が公約数 d を持つことになり、$2m^2$ と $2n^2$ が d で割り切れる。ゆえに m^2 と n^2 も d で割り切れる。

しかし、これは m, n が互いに素であるという最初の条件に反するので、x, y が互いに素であることになる。

最後に、m, n が異なる (x, y, z) の組み合わせには、異なったピタゴラス三角形が対応するということを確かめる。これは、⑤から

$$2m^2 = x + z, \quad 2n^2 = x + z$$

となるため x, y, z が一致した場合 m, n も一致する。したがって、m, n が異なると x, y, z も異なることが示された。

(Q.E.D.)

<u>定理５</u>

y が偶数であるようなすべてのピタゴラス三角形 (x, y, z) は式

$$x = kl, \quad y = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

によって表される。ただし k と l は $k > l$ を満たす互いに素な奇数の組である。

さらに y が偶数である既約なピタゴラス三角形 (x, y, z) はこれによって一通りに表される。

［証明］

ピタゴラス方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ は、因数分解により、$x^2 = (z+y)(z-y)$ と表すことができる。

ここで、y は偶数、x, z は奇数である。よって、$u = z + y$ と $v = z - y$ はともに奇数で互いに素である。すると、$x^2 = uv$ と表すことができる。

したがって、$u = k^2, v = l^2$ をみたすような互いに素な２数 k, l が存在する。つまり、$x = kl$ であり、

$$y = \frac{u - v}{2} = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{u + v}{2} = \frac{k^2 + l^2}{2}$$

となる。したがって、

$$x = kl, \quad y = \frac{k^2 - l^2}{2}, \quad z = \frac{k^2 + l^2}{2} \quad \cdots ⑥$$

と表される。一意性については、定理４と同様に証明できる。

(Q.E.D.)

y が偶数である既約なピタゴラス三角形を無限に求めたければ、まず k に奇数の値 3, 5, 7, 9, …を順に代入し、l に k より小さく k と互いに素な奇数の値を順に代入する。最後に公式⑥によって x, y, z の値

を計算しればよい。

公式⑥によって最初の 20 個の既約なピタゴラス三角形を表１に示す。

あらゆるピタゴラス三角形を求めるには、既約なピタゴラス三角形をなす自然数を次々にかけていけばよい。このようにして、y が偶数であるようなあらゆるピタゴラス三角形を得ることができる。さらに、x と y を入れ替えたピタゴラス三角形を追加すれば、すべてのピタゴラス三角形が得られる。

このような性質を用いて、次節以降では、特別な場合のピタゴラス三角形を調べていく。

表１　既約なピタゴラス三角形

（はじめの 20 個）

k	l	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65
11	1	11	60	61
11	3	33	56	65
11	5	55	48	73
11	7	77	36	85
11	9	99	20	101
13	1	13	84	85
13	3	39	80	89
13	5	65	72	97
13	7	91	60	109
13	9	117	44	125
13	11	143	24	145

３－２．辺の長さが連続する自然数であるピタゴラス三角形

表１に挙げた既約なピタゴラス三角形を見ると、(3, 4, 5)というペアは連続する３数からできている。このようなピタゴラス三角形はこれしかない。この事実は、簡単に証明することができる。

定理６

連続する３数を辺としてもつピタゴラス三角形は(3, 4, 5)のみである。

［証明］

ある自然数 n（$n \geqq 2$)を用いて、連続する３数を $n-1, n, n+1$ と表す。この３数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1$$

から、$n^2 = 4n$， $n(n-4) = 0$ となり、$n \geqq 2$ なので、$n = 4$ である。

よって、この条件を満たすものは(3, 4, 5)のみである。

(Q.E.D.)

また、辺の長さが等差数列となるものを求めることも簡単である。

定理７

等差数列をなす３数が辺の長さであるピタゴラス三角形は(3, 4, 5)と相似である。

［証明］

定理６と同じように自然数kを公差として、３辺を$n-k$，n，$n+k$とする。

この３数がピタゴラス方程式を満たすとき、

$$(n-k)^2+n^2=(n+k)^2$$

$$n^2-2kn+k^2+n^2=n^2+2kn+k^2$$

から、

$$n^2=4kn,\ n(n-4k)=0$$

となり、$n \geqq 2$なので、$n=4k$である。

この条件を満たすものは$(3k,4k,5k)$であり、これらはすべて(3, 4, 5)と相似なものである。

(Q.E.D.)

次に２辺の長さが連続する自然数で表せるようなピタゴラス三角形を考える。このとき、

[1] 斜辺と他の１辺が連続するとき

[2] 直角をはさむ２辺が連続するとき

の２通りが考えられる。

３－２－１．斜辺と他の１辺の長さが連続する自然数あるピタゴラス三角形

このとき、x,zは奇数としたので、$z-y=1$を満たせばよい。

定理５より、$\dfrac{k^2+l^2}{2}-\dfrac{k^2-l^2}{2}=1$を解いて$l=1$とわかるので、$(x,y,z)$は

$$x=k,\ y=\frac{k^2-1}{2},\ z=\frac{k^2+1}{2} \quad \cdots(2)$$

となる。

式(2)によって、$z-y=1$であるすべてのピタゴラス三角形が求められ、最初のいくつかを挙げると次のようになる。

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), …

ここで、この式(2)以外でこのような三角形を求める方法を２つ紹介する。

１つ目は、次のメスネーラ(Moessnera)の恒等式を用いる方法である。

<u>定理８</u>(メスネーラの恒等式)

すべての自然数nに対して、

$$(10n-5)^2+\{50n(n-1)+12\}^2=\{50n(n-1)+13\}^2$$

が成り立つ。

これによって求められるものの例として、nに１から５を代入すると、(5, 12, 13), (15, 112, 113), (35, 612, 613), (45, 1012, 1013)などが挙げられる。

さらに、メスネーラの恒等式と(2)式を組み合わせると次の恒等式を導くことができる。

<u>定理９</u>

kを奇数とする。すべての自然数nに対して、

$$(2kn-k)^2+\left\{2k^2n(n-1)+\frac{k^2-1}{2}\right\}^2=\left\{2k^2n(n-1)+\frac{k^2+1}{2}\right\}^2$$

が成り立つ。

もうひとつの方法は、まずkが奇数であることから、$k=2n+1$とおき、さらにsを整数とし、$n=10^s$とおくと、(2)から

$$x=2\times10^s+1=2\overbrace{0\cdots0}^{s-1}1$$

$$y=2\times10^{2s}+2\times10^s=2\overbrace{0\ldots0}^{s-1}2\overbrace{0\ldots0}^{s}$$

$$z=2\times10^{2s}+2\times10^s+1=2\overbrace{0\ldots0}^{s-1}2\overbrace{0\ldots0}^{s-1}1$$

が得られる。

例えば、$s=1,2,3,4$を代入すると下表２を得る。

表２　$s=1,2,3,4$の場合

x	y	z
21	220	221
201	20200	20201
2001	2002000	2002001
20001	200020000	200020001

このように、機械的にいくらでもピタゴラス三角形を求めることができる。

３－２－２．直角をはさむ２辺の長さが連続する自然数であるピタゴラス三角形

直角をはさむ２辺の長さが連続する自然数で表せるピタゴラス三角形について次の事実はすぐに証明される。

補題Ⅲ

直角をはさむ２辺の長さが連続する自然数で表せるピタゴラス三角形は無数に存在する。

［証明］

ある２つの自然数x, zによって表されるピタゴラス三角形$(x, x+1, z)$があるとき、（$3x+2z+1$，$3x+2z+2$，$4x+3z+2$）もピタゴラス三角形になる。

実際に、

$$(3x+2z+1)^2+(3x+2z+2)^2$$
$$=18x^2+24xz+8z^2+18x+12z+5 \quad \cdots①$$

である。ここで、$(x, x+1, z)$はピタゴラス三角形なので、

$$x^2+x^2-2x+1=z^2$$

つまり、$2x^2+2x+1=z^2$である。

したがって①から、

$$18x^2+24xz+8z^2+18x+12z+5$$
$$=(2x^2+2x+1)+16x^2+24xz$$
$$+8z^2+16x+12z+4$$
$$=16x^2+24xz+9z^2+16x+12z+4$$
$$=(4x+3z+2)^2$$

となり、

（$3x+2z+1$，$3x+2z+2$，$4x+3z+2$）

がピタゴラス三角形であることがわかる。

直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形を、この式に当てはめることでできた三角形は、これもまた直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形である。この操作を繰り返すと、次々に、直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形が求められる。

(Q.E.D.)

このようにして求められるもので、最初の４つを挙げると次のようになる。(3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169), (696, 697, 985)である。

次に、上の方法によって直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形がすべて求められることを証明しよう。

定理 10

直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形は、必ず三角形の無限列 $(3,4,5), f(3,4,5), ff(3,4,5) \cdots$ の中に現れる。ただし、 $f(x, x+1, z)$ はピタゴラス三角形

（$3x+2z+1$，$3x+2z+2$，$4x+3z+2$）

を表すと定める。

この定理 10 を証明するために、次の補題を証明する。

補題Ⅳ

$x>3$ のとき、$(x, x+1, z)$ がピタゴラス三角形ならば、$f(p, p+1, q)=(x, x+1, z)$ を満たす $(p, p+1, q)$ もピタゴラス三角形であり、$q<z$ である。さらに、

$$(p, p+1, q) = (3x-2z+1, 3x-2z+2, 3z-4x-2)$$

である。

［証明］

まず、$(p, p+1, q)=(3x-2z+1, 3x-2z+2, 3z-4x-2)$ とするとき、$(p, p+1, q)$ が

$$f(p, p+1, q)=(x, x+1, z) \cdots ①$$

を満たすことを確かめればよい。

$$3p-2q+1 = 3(3x-2z+1)+2(3z-4x-2)+1 = x,$$

$$4p+3q+2 = 4(3x-2z+1)+3(3z-4x-2)+2 = z$$

となることから、$(p, p+1, q)$ は①を満たす。

次に、 $p>0$，$0<q<z$ となることを示す。 $x>3$ ゆえ、

$$x^2 > 3x = 2x + x > 2x+3$$

である。ところが、$(x, x+1, z)$ がピタゴラス三角形なので、$x^2+(x+1)^2=z^2$ であるから、

$$\begin{aligned} 4z^2 &= 8x^2+4-(2x+3) \\ &= 9x^2+8x+4-x^2 \\ &< 9x^2+8x+4-(2x+3) \\ &= 9x^2+6x+1=(3x+1)^2 \end{aligned}$$

であるから、$2z<3x+1 \cdots ②$，つまり、

$$p=3x-2z+1>0$$

となる。ここで、$x>0$ に注意すると、不等式②を弱めて、$2z<4x+2$ とすることができる。ゆえに、$z<2x+1$ となり、さらに、

$x^2+(x+1)^2=z^2$ かつ $x>0$ であるから、

$$\begin{aligned} 9z^2 &= 18x^2+18x+9 \\ &> 16x^2+16x+4=(4x+2)^2 \end{aligned}$$

つまり、$3z>4x+2$ となる。したがって、$0<3z-4x-2=q$ である。一方、

$$q=3z-4x-2<3z-2z=z$$

ゆえ、$0<q<z$ となり、これで不等式は証明された。

最後に、$(p, p+1, q)$ がピタゴラス三角形になることを証明する。

$$\begin{aligned} p^2+(p+1)^2 &= (3x-2z+1)^2+(3x-2z+2)^2 \\ &= 18x^2+8z^2-24xz+18x-12z+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^2 &= (3z-4x-2)^2 \\ &= 16x^2+9z^2-24xz+16x-12z+4 \end{aligned}$$

であるが、$z^2=2x^2+2x+1$ であるので、

$$\begin{aligned} &16x^2+9z^2-24xz+18x-12z+5 \\ &= 18x^2+8z^2-24xz+18x-12z+5 \end{aligned}$$

となる。したがって、$q^2=p^2+(p+1)^2$ が

成り立ち、補題は証明された。

(Q.E.D.)

ここで、ピタゴラス三角形$(x,x+1,z)$に対して、

$$f(p,p+1,q)=(x,x+1,z)$$

を満たすピタゴラス三角形$(p,p+1,q)$を対応させる操作をgとして表すことにすると、gはfの逆操作になる。つまり、

$$g(x,x+1,z)=(p,p+1,q)$$
$$=(3x-2z+1,3x-2z+2,3z-4x-2)$$

となる。

［定理 10 の証明］

補題Ⅳによって、小さい２辺が連続する自然数になっているピタゴラス三角形$(x,x+1,z)$（$x>3$)から、また新たに、条件を満たすピタゴラス三角形$(p,p+1,q)$ができる。

そこでさらに$x>3$ならば、再び補題Ⅳによって新たなピタゴラス三角形ができる。しかし、また同様に操作を続けたからといって、無限に新たな三角形ができることはない。この操作をするごとに斜辺の長さは短くなっていくからである。つまり必ず、ある整数nに対して、ピタゴラス三角形

$$(x_n x_n+1,z_n)=g^n(x,x+1,z)$$

（ただし、$x_n=3$）

に行きつくだろう。すると、

$$x_n^2+(x_n+1)^2=z_n^2$$

から、$z_n=5$でなければならない。したがって、ある整数nに対して、

$$g^n(x,x+1,z)=(3,\ 4,\ 5)\ \cdots①$$

が成り立たなければならない。

ここで、$x>3$である任意のピタゴラス三角形$(x,x+1,z)$に対して、

$$fg(x,x+1,z)$$
$$=f(3x-2z+1,3x+2z+2,3z-4x-2)$$
$$=(x,x+1,z)\ \ \cdots②$$

が成り立つ。よって、

$$ffgg(x,x+1,z)=(x,x+1,z)$$

であり、一般に$k=1,2,3\cdots$に対して

$$f^k g^k(x,x+1,z)=(x,x+1,z)\ \ \cdots③$$

が導かれる。したがって、①より、ある整数nに対して、$(x,x+1,z)=f^n(3,4,5)$となり、定理 10 は証明された。

(Q.E.D.)

このようにして、直角をはさむ２辺が連続する自然数で表せるピタゴラス三角形は無限に存在し、それらは必ずある三角形の無限列の中に現れることが証明できたが、実際に２辺の長さが連続する大きな自然数で表されるピタゴラス三角形をこの方法で求めることは困難である。

そこで、別の方法を用いて条件を満たすピタゴラス三角形の一般式を求める。

先ほどと同様に

$$x-y=kl-\frac{k^2-l^2}{2}=\pm1$$

が成り立てばよいのだが、この式からk,lを効率的に求めることができなかった。そこで定理５よりピタゴラス三角形を求め、その中からx,yが連続しているときのk,lについて注目すると、(k,l)は$(3,1)$,$(7,3)$,$(17,7)$, $\cdots$となった。

実際に$x-y=\pm1$ を満たす(x,y,z)と対応する(k,l)の組を表３に示す。

表３

k	l		x	y	z
3	1		3	4	5
7	3		21	20	29
17	7		119	120	169
41	17		697	696	985
99	41		4059	4060	5741
239	99		23661	23660	33461
577	239		137903	137904	195025
1393	577		803761	803760	1136689
3363	1393		4684659	4684660	6625109
8119	3363		27304197	27304196	38613965
19601	8119		159140519	159140520	225058681
47321	19601		927538921	927538920	1311738121
114243	47321		5406093003	5406093004	7645370045
275807	114243		31509019101	31509019100	44560482149

表３から以下のことが類推できる。

k の n 番目の項を k_n 、l の n 番目の項を l_n とすると、

（ⅰ）k の第 n 項は、l の第 $n+1$ 項に一致する。

$$k_n = l_{n+1}$$

（ⅱ）l の第 n 項は第 $n-1$ 項の２倍したものと第 $n-2$ 項の和となる。

$$l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2}$$

（ⅲ）$x-y$ の値は $1,-1$ が交互で出てくる。

このうち、（ⅱ）の漸化式

$l_n = 2l_{n-1} + l_{n-2}$ つまり $l_{n+2} = 2l_{n+1} + l_n$

を解く。

$l_{n+2} = 2l_{n+1} + l_n$,　$l_{n+2} - 2l_{n+1} - l_n = 0$

ゆえに、特性方程式は

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

となる。

いま、$x^2 - 2x - 1 = 0$ の２つの解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと、

$\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ となる。

解と係数の関係より、

$\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -1$　…①

よって、もとの漸化式に代入すると、

$$l_{n+2} = (\alpha + \beta) l_{n+1} - \alpha\beta l_n$$

$$l_{n+2} - \beta l_{n+1} = \alpha(l_{n+1} - \beta l_n)$$

$$l_{n+2} - \alpha l_{n+1} = \beta(l_{n+1} - \alpha l_n)$$

ゆえに、

$$l_{n+1} - \beta l_n = \alpha^{n-1}(l_2 - \beta l_1)$$

$$= \alpha^{n-1}(3 - \beta) \cdots ②$$

$$l_{n+1} - \alpha l_n = \beta^{n+1}(l_2 - \alpha l_1)$$

$$= \beta^{n-1}(3 - \alpha) \cdots ③$$

となる。ここで、③－②より、

$$(\beta - \alpha) l_n = \beta^{n-1}(3 - \alpha) - \alpha^{n-1}(3 - \beta)$$

ここで、①から $3 = \alpha + \beta - \alpha\beta$ とわかるので代入すると、

$$(\beta - \alpha) l_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n$$

となる。

$\alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$ より、

$$\{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\} l_n = \sqrt{2}\beta^n + \sqrt{2}\alpha^n$$

したがって　$l_n = \dfrac{\alpha^n + \beta^n}{2}$.

ゆえに、$k_n = \dfrac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}$　と表せる。

これを用いて、x, y, z を次のように表すことができる。

$$x_n=k_nl_n=\left(\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+\alpha^n\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^n}{4}$$

$$=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+\alpha^n\beta^n\times\beta+\alpha^n\beta^n\times\alpha}{4}=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+(-1)^n\beta+(-1)^n\alpha}{4}$$

$$=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+(-1)^n(\alpha+\beta)}{4}=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+(-1)^n\times 2}{4}=\frac{\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}+(-1)^n}{2}$$

ここで、$l_n=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$ より、$x=\dfrac{l_{2n+1}+(-1)^n}{2}$ となる。

同様に、

$$y_n=\frac{k_n{}^2-l_n{}^2}{2}=\frac{\left(\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2}{2}=\frac{\dfrac{\alpha^{2n+1}+2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}}{4}-\dfrac{\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{4}}{2}$$

$$=\frac{\alpha^{2n+1}+2\alpha^{2n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}-\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n-\beta^{2n}}{8}=\frac{\alpha^{2n}\left(\alpha^2-1\right)+\beta^{2n}\left(\beta^2-1\right)+2\alpha^n\beta^n(\alpha\beta-1)}{8}$$

$$=\frac{\alpha^{2n}\left(1-2\sqrt{2}+2-1\right)+\beta^{2n}\left(1+2\sqrt{2}+2-1\right)-4(-1)}{8}=\frac{2\alpha^{2n}\left(1-\sqrt{2}\right)+2\beta^{2n}\left(1+\sqrt{2}\right)-4(-1)^n}{8}$$

$$=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}-2(-1)^n}{4}=\frac{\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}-(-1)^n}{2}=\frac{l_{2n+1}-(-1)^n}{2},$$

$$z_n=\frac{k_n{}^2+l_n{}^2}{2}=\frac{\left(\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2}{2}=\frac{\dfrac{\alpha^{2n+2}+2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}+\beta^{2n+2}}{4}+\dfrac{\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{4}}{2}$$

$$=\frac{\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}+\alpha^{2n}+\beta^{2n}+2\alpha^n\beta^n(\alpha\beta+1)}{8}=\frac{\alpha^{2n}\left(1+\alpha^2\right)+\beta^{2n}\left(1+\beta^2\right)}{4}$$

$$=\frac{\alpha^{2n}(1+\alpha)+\beta^{2n}(1+\beta)}{2}=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}+\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}=\frac{l_{2n}+l_{2n+1}}{2}.$$

以上より、

(x_n, y_n, z_n)

$$=\left(\frac{l_{2n+1}+(-1)^n}{2}, \frac{l_{2n+1}-(-1)^n}{2}, \frac{l_{2n}+l_{2n+1}}{2}\right)$$

となることがわかった。

そこで、以下の２つのことを確かめた。

【１】x と y の差が１である。

【２】ピタゴラス方程式が成り立つ。

【１】と【２】が成り立つと、$(x_n, y_n . z_n)$ は、x, y が連続するピタゴラス三角形であるといえる。

まず【１】については、上式より明らかである。

次に【２】について、実際にピタゴラス方程式を満たすか否かを計算してみると、

$$x_n{}^2 + y_n{}^2 - z_n{}^2 = \left\{\frac{l_{2n+1}+(-1)^n}{2}\right\}^2 + \left\{\frac{l_{2n+1}-(-1)^n}{2}\right\}^2 - \left(\frac{l_{2n}+l_{2n+1}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}-\alpha^{4n}-\beta^{4n}+4}{16} + \frac{-2\alpha^{4n+1}-2\alpha^{2n+1}\beta^{2n}-2\alpha^{2n}\beta^{2n+1}-2\beta^{4n+1}}{16}$$

$$= \frac{\alpha^{4n}\left(\alpha^2-2\alpha-1\right)+\beta^{4n}\left(\beta^2-2\beta-1\right)+4-2\alpha-2\beta}{16}$$

$$= 0.$$

したがって、ピタゴラス方程式が成り立つことがわかった。よって、

(x_n, y_n, z_n)

$$=\left(\frac{l_{2n+1}+(-1)^n}{2}, \frac{l_{2n+1}-(-1)^n}{2}, \frac{l_{2n}+l_{2n+1}}{2}\right)$$

に対して、n に自然数を順次代入していくことにより、x, y が連続するピタゴラス三角形を求めることができる。

しかし、この式を用いることで x, y が連続しているピタゴラス三角形をすべて求められているかどうかは判別することができなかった。

そこで、最初の条件であった不定方程式

$$x - y = kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

についてさらに考察を行った。

$$kl - \frac{k^2 - l^2}{2} = \pm 1$$

両辺を２倍して、

$$2kl - (k^2 - l^2) = \pm 2 .$$

これを整理すると、

$$2kl - k^2 + l^2 = \pm 2 , (l+k)^2 - 2k^2 = \pm 2 .$$

両辺を $-\frac{1}{2}$ 倍して、

$$k^2-\frac{(l+k)^2}{2}=\pm 1$$

ここで、$k=p,\ l=2q$ とおくと、

$$p^2-2q^2=\pm 1$$

これは**フェルマー・ペル型不定方程式**と(Fermat-Pell indeterminate equation)と呼ばれる特殊な不定方程式である。

__定理 11__（フェルマー・ペル型不定方程式）

$$x^2-dy^2=\pm 1$$

ただし、$d>0$，d は平方数でない。

上の不定方程式において、$\sqrt{d}$ の連分数展開を $\sqrt{d}=\left[k_0,\overline{k_1,k_2\cdots k_m}\right]$ とし、その近似分数を $\frac{p_0}{q_0},\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\cdots$ とする。

n が奇数で $n\equiv -1\ (\mathrm{mod}\, m)$ のような p_n,q_n は $x^2-dy^2=\pm 1$ の解であり、これで尽くされる。

このフェルマー・ペル型不定方程式を用いて、ピタゴラス三角形の斜辺以外の２辺が連続するピタゴラス三角形が上の式ですべて求められることを示す。

いま、$x-y=kl-\frac{k^2-l^2}{2}=\pm 1$ を変形して得た不定方程式

$$p^2-2q^2=\pm 1$$

は、$d=2$ の場合のフェルマー・ペル型不定方程式である。

したがって、q^2 の係数である $\sqrt{2}$ の近似分数を求めることで解を得ることができる。

まず $\sqrt{2}$ を連分数展開すると、$\sqrt{2}=\left[1;\overline{2}\right]$ より、

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

となる、

ゆえに $\sqrt{2}$ の近似分数は、深さを 1 とすると

$$\sqrt{2}\fallingdotseq 1$$

深さを 2 とすると

$$\sqrt{2}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

深さを 3 とすると

$$\sqrt{2}\fallingdotseq 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=\frac{7}{5}$$

というように求められる。これらの例を見てもわかるように、深さを深くするほど $\sqrt{2}$ に近い値となっている。同様にしてさらに $\sqrt{2}$ の近似分数を求めた結果が以下の表である。

p	1	3	7	17	41	99	239	⋯
q	1	2	5	12	29	70	169	⋯

$k=p,\ k+l=2q$ であったので、$k=p,\ l=2q-p$ より、k,l の解は次のようになる。

k	1	3	7	17	41	99	239	⋯
l	1	1	3	7	17	41	99	⋯

$k>l>0$ より、

$$(k,l)=(3,1),(7,3),(17,7),\ (41,17),(99,41),(239,99),\cdots$$

を得ることができた。

フェルマー・ペル型不定方程式より、これがすべての解である。しかし、この k,l の数列は $\sqrt{2}$ の近似分数の最初のいくつかを計算した結果なので、規則性があることを確かめられていない。そこで $\sqrt{2}$ の近似分数を分母と分子に分け、それぞれについての漸化式を算出しようと試みた。

そこで、まず $\sqrt{2}$ の近似分数の分母・分子の漸化式を推測することによって $\sqrt{2}$ の近似分数の一般項を算出するというパターンと、連分数展開から考えた漸化式によって算出するというパターンの２つの方法で考察を行った。

［Ｉ］ $\sqrt{2}$ の近似分数の分母・分子の漸化式を推測

分子の数列を $\{a_n\}$、分母の数列を $\{b_n\}$ とすると、それぞれの漸化式は次式のように推測される。

$\{a_n\}=1,3,7,17,\cdots$, $\{b_n\}=1,2,5,12,\cdots$ なので、

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$
$$b_{n+2}=2b_{n+1}+b_n$$

分子についての特性方程式を解いて

$t^2=2t+1,\ t^2-2t-1=0$

$t=1\pm\sqrt{2}$. したがって、

$$\{a_{n+2}-(1+\sqrt{2})a_{n+1}\}$$
$$=(1-\sqrt{2})\{a_{n+1}-(1+\sqrt{2})a_n\}$$

$a_{n+1}-(1+\sqrt{2})a_n=c_n$ とおくと、

$c_{n+1}=(1-\sqrt{2})c_n$. また、

$$c_1=a_2-(1-\sqrt{2})a_1=3-(1+\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$$

より、$c_n=(2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{n-1}$

同様に、

$$\{a_{n+2}-(1-\sqrt{2})a_{n+1}\}$$
$$=(1+\sqrt{2})\{a_{n+1}-(1-\sqrt{2})a_n\}$$

$a_{n+1}-(1-\sqrt{2})a_n=d_n$ とおくと、

$d_{n+1}=(1+\sqrt{2})d_n$. また、

$$d_1 = a_2 - \left(1-\sqrt{2}\right)a_1 = 3 - \left(1-\sqrt{2}\right) = 2+\sqrt{2}$$

より、$d_n = \left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}$.

整理すると、

$$a_{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)a_n = \left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} \cdots ①$$

$$a_{n+1} - \left(1+\sqrt{2}\right)a_n = \left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1} \cdots ②$$

①－②すると、

$$a_n\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right\} = \left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}$$

$$2\sqrt{2}a_n = \left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}.$$

同じく、$b_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$.

ゆえに、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n}$$

$$= \frac{2\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}}.$$

このようにして、$\sqrt{2}$ の近似分数の一般項を算出することができた。ここで留意しておきたいことは、この一般項が推測された漸化式によって求めた一般項なので、この一般項もまた推測の範囲を超えないということである。

そしてこの一般項について極限をとると、

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{2\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}}$$

両辺を $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ で割って、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\left\{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n\right\}} = \sqrt{2}$$

となり、たしかに $\sqrt{2}$ の近似分数であることがわかった。

［Ⅱ］連分数展開から考えた漸化式

$\sqrt{2}$ の近似分数は、

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

と変形できるので、$\sqrt{2}$ の近似分数の数列を $\{A_n\}$ とすると、その漸化式は、

$$A_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+A_n} = \frac{A_n+2}{A_n+1}$$

となる。ただし、$A_1 = 1,\quad A_2 = \frac{3}{2}$ とする。

特性方程式 $t = \frac{t+2}{t+1}$ を解いて、

$t=\pm\sqrt{2}$ であるから、

$$A_{n+1}+\sqrt{2}=\frac{(1+\sqrt{2})(A_n+\sqrt{2})}{A_n+1}\cdots①$$

$$A_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(1-\sqrt{2})(A_n-\sqrt{2})}{A_n+1}\cdots②$$

①÷②より、

$$\frac{A_{n+1}+\sqrt{2}}{A_{n+1}-\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2})(A_n+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(A_n-\sqrt{2})}$$
$$=-(3+2\sqrt{2})\frac{A_n+\sqrt{2}}{A_n-\sqrt{2}}.$$

ここで、$B_n=\dfrac{A_n+\sqrt{2}}{A_n-\sqrt{2}}$ とおくと、

$$B_{n+1}=-(3+2\sqrt{2})B_n.$$

また、$B_1=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-(3+2\sqrt{2})$ より、

$$B_n=-(3+2\sqrt{2})\cdot(-1)^{n-1}\cdot(3+2\sqrt{2})^{n-1}$$
$$=(-1)^n\cdot(3+2\sqrt{2})^n.$$

ゆえに、

$$B_n=\frac{A_n+\sqrt{2}}{A_n-\sqrt{2}}=(-1)^n\cdot(3+2\sqrt{2})^n.$$

$$A_n+\sqrt{2}=(-1)^n\cdot(3+2\sqrt{2})^n\cdot(A_n-\sqrt{2})$$

$$A_n\{1-(-1)^n\cdot(3+2\sqrt{2})^n\}$$
$$=-\sqrt{2}\cdot(-1)^n\cdot(3+2\sqrt{2})^n-\sqrt{2}$$

$$A_n=\frac{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n+1}{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n-1}\times\sqrt{2}.$$

このようにして、もう１つの $\sqrt{2}$ の近似分数を求めることができた。また[I]のときと同様に極限をとってみると、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n+1}{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n-1}\times\sqrt{2}.$$

この式を $(3+2\sqrt{2})^n$ で割ると、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}}{(-1)^n-\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

となって、たしかに $\sqrt{2}$ の近似分数であることが確かめられた。

ここまでの結果を整理すると $\sqrt{2}$ の分母分子の数列を類推して得られた一般項は、

分子の数列を $\{\alpha_n\}$, 分母の数列を $\{\beta_n\}$,

$\sqrt{2}$ の数列を $\{\gamma_n\}$ とした場合、

$$\alpha_n=\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)(1+\sqrt{2})^{n-1}-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)(1-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\beta_n=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n-\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})$$

$$\gamma_n=\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\frac{2\{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\}}{\sqrt{2}\{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\}}.$$

また、連分数の漸化式から求めた一般項を $\{\delta_\nu\}$ とすると、

$$\delta_n=\frac{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n+1}{(-1)^n(3+2\sqrt{2})^n-1}\times\sqrt{2}$$

である。

ここから、得られた２つの$\sqrt{2}$の一般項による数列が一致していることを証明する。

［証明］

$\{\gamma_n\}$と$\{\delta_n\}$の値が等しいことを確かめる。

$$\gamma_n \div \delta_n = \frac{2\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}}{\sqrt{2}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}} \div \frac{(-1)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+1}{(-1)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-1} \times \sqrt{2}$$

$$= \frac{\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}\left\{(-1)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-1\right\}}{\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}\left\{(-1)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+1\right\}}$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n(-1)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n(-1)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{\left(1+\sqrt{2}\right)^n(-1)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n(-1)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}$$

$$= \frac{(-1)^n\left(7+5\sqrt{2}\right)^n - \left(1+\sqrt{2}\right)^n + (-1)^n\left(-1-\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{(-1)^n\left(7+5\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n - (-1)^n\left(-1-\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}$$

$$= \frac{(-1)^n\left\{\left(7+5\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}}{(-1)^n\left\{\left(7+5\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}} = 1.$$

よって、$\{\gamma_n\}$と$\{\delta_n\}$の値が等しいことを確かめられた。

しかしこれでは、$\{\gamma_n\}$と$\{\delta_n\}$が一致しているかどうかはわからない。なぜなら、$\{\delta_n\}$は既約分数になるまで計算しているが、$\{\gamma_n\}$はもともと分母と分子の数列を合わせたものなので既約とは限らない。

例えば、$\alpha_n = 6, \beta_n = 4,\ \delta_n = \frac{3}{2}$　とする。このとき$\gamma_n = \frac{3}{2}$なので、$\{\gamma_n\}$と$\{\delta_n\}$の値は等しいが、$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$によって求めた分母、分子を組み合わせたものである$\frac{6}{4}$とでは一致していない。そこで、$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$が既約であることを確認し、$\frac{\{\alpha_n\}}{\{\beta_n\}}$が既約分数であることを示す。

ここで、

$$\alpha_n - \beta_n - \beta_{n-1} = 0$$

を確かめた。与式は、

$$\alpha_n - \beta_n = \beta_{n-1} \cdots ①$$

に変形できる。

ここから、背理法により証明する。

仮に、α_nとβ_nが公約数kをもつとする。①よりβ_{n-1}も約数kを持つ。漸化式

$$\beta_{n+2} = 2\beta_{n+1} + \beta_n$$

から、β_{n-2} も約数 k をもっているとわかる。
さらにこの作業を続けて行くと
$\beta_{n-3}, \beta_{n-4} \cdots, \beta_1$ も約数 k をもつ。
しかし、β_n の数列 $\{\beta_n\} = 1, 2, 5, 12, \cdots$ から明らかに矛盾している。ゆえに最初の仮定が間違っているので α_n と β_n は既約である。したがって、$\frac{\{\alpha_n\}}{\{\beta_n\}}$ が既約分数であることを示すことができたので、２つの数列 $\{\gamma_n\}, \{\delta_n\}$ は一致している。

ゆえに $\sqrt{2}$ の近似分数の分母と分子の数列が $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ であることがわかり、p, q の解が求められる。したがって、今までの類推がすべて正しかったとわかる。

(Q.E.D.)

３－３．辺が３または５で割り切れるピタゴラス三角形

３－１節で述べたように、すべてのピタゴラス三角形では直角をはさむ２辺のうち少なくとも一つは４で割りきれなくてはならない。
さらに、次の事実が成り立つ。

<u>**定理 12**</u>

任意のピタゴラス三角形について、直角をはさむ２辺のうち少なくとも一つは３で割り切れなければならない。

［証明］

この定理を証明するために、直角をはさむ２辺 x, y のどちらも３で割り切れないあるピタゴラス三角形 (x, y, z) が存在すると仮定する。このとき、

$$x = 3k \pm 1, \quad y = 3l \pm 1$$

$(k, l$ は整数$)$とおく。
すると、ピタゴラスの定理において、

$$x^2 + y^2 = 3(3k^2 + 3l^2 \pm 2k \pm 2l) + 2 \cdots ①$$

となる。ところが、この式①の右辺は平方数にはなりえない。まず、この数は 3 では割り切れないので、3 の倍数の平方でないことは明らかである。また、3 で割り切れない数 $3t \pm 1$（t は整数)の平方は

$$(3t \pm 1)^2 = 3(3t^2 \pm 2t) + 1$$

であり､3 で割ると 1 余る。しかし､$x^2 + y^2$ は 3 で割ると 2 余る。したがって、3 で割り切れない数の平方にもなり得ない。
こうして、直角をはさむ２辺のいずれもが、3 で割り切れないという仮定は矛盾を引き起こす。
ゆえに、x, y のうち一方は 3 で割り切れないといけない。

(Q.E.D.)

実例を見ると、(5, 12, 13)のように 3 で割り切れる数と、4 で割り切れる数が一致することもあり、また、(3, 4, 5)のように 3 で割り切れる数と、4 で割り切れる数が一致しないこともある。
すべてのピタゴラス三角形について、直角をはさむ２辺の少なくとも一方が n で割り切れるとき、このような自然数 n は、1, 2, 3, 4 に限られることがすぐわかる。なぜなら、ピタゴラス三角形(3, 4, 5)をとると小さい２辺のどちらをとっても４より大きい自然数では割り切れないからである。

また、ピタゴラス三角形の３辺については、次の事実がある。

定理 13

任意のピタゴラス三角形について、３辺のうち少なくとも一つは5で割り切れなければならない。

［証明］

この定理を証明するために、数nは5で割り切れないと仮定する。すると、整数kを用いて、nは $n=5k\pm1$ あるいは $n=5k\pm2$ の形をしている。

$n=5k\pm1$の場合には

$$n^2=5(5k^2\pm2k)+1,$$

$n=5k\pm2$の場合には

$$n^2=5(5k^2\pm4k)+4$$

が成り立つ。

以上から、5で割り切れない数の平方は、5で割ると1または4余ることがわかる。

もし、ピタゴラス三角形(x,y,z)のx,yがどちらも5で割り切れないとすると、上の式からx^2,y^2はいずれも1または4余るため、その結果x^2+y^2を5で割った余りは2，3，0のどれかになる。ここで、上で示したように、z^2は5で割って2または3で余ることはない。したがって、z^2は5で割ると0あまるという最後の条件のみに当てはまることがわかる。つまり、z^2が5で割り切れるので、zも5で割り切れる。

(Q.E.D.)

よって、直角をはさむ２辺がいずれも5で割り切れない場合は、斜辺が5で割り切れないといけない。

また、既約なピタゴラス三角形では明らかに5で割り切れる辺はただ１つしかない。次の三角形

$$(3,4,5),(5,12,13),(21,20,29)$$

を見てわかるように、5で割ることのできる辺は、直角をはさむ2辺のうち偶数のものであったり、奇数のものであったり、または斜辺であったりする。

以上からわかるように、すべてのピタゴラス三角形において、３辺のうち１つがnで割り切れるとき、このような自然数nは1, 2, 3, 4, 5のいずれかに限られる。

３－４．ピタゴラス三角形の辺の値

ここで、どのような自然数nを与えたら、直角をはさむ２辺のうち、一方がnに等しいピタゴラス三角形を作ることができるのだろうか。

これに対して次の定理を証明しよう。

定理 14

直角をはさむ２辺のうち小さい方がnに等しいピタゴラス三角形が存在するための必要十分条件は、nが2より大きい整数となることである。

［証明］

この定理を証明するために、まず次のことに注意しよう。つまり、ピタゴラス三角形(a,b,c)において

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$$

が成り立ち、また$c>b$なので、$b\geqq1$，$c\geqq2$である。したがって、$c-b\geqq1$，$c+b\geqq3$であるため、$a^2\geqq3$ となり、$a=1$とはならない。

また、$a=2$ともならない。なぜなら、$a=2$とすると、

$$4=(c+b)(c-b)$$

が成立しなくてはならず、$c-b \geqq 1$, $c+b \geqq 3$ であるため、$c-b=1$, $c+b=4$ となる。しかし、この式から $2c=5$ が導かれ、c が自然数でなくなってしまう。したがって、$a=2$ ともなり得ない。

このように、ピタゴラス三角形の小さい２辺はどちらも 2 より大きいことがわかった。

さて、ここで逆に、n が 2 より大きい奇数だとする。すると、

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

が成り立ち、また $\frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$ はどちらも自然数になるため、ピタゴラス三角形

$$\left(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}\right) \quad \cdots ①$$

ができる。

同様に、n が 2 より大きい偶数だとすると、

$$n^2+\left(\frac{n^2}{4}-1\right)^2=\left(\frac{n^2}{4}+1\right)^2$$

が成り立ち、ピタゴラス三角形

$$\left(n, \frac{n^2}{4}-1, \frac{n^2}{4}+1\right) \quad \cdots ②$$

ができる。

(Q.E.D.)

この２つの式①, ②を利用し、直角をはさむ辺が 3, 4, …, 10 のピタゴラス三角形の例は

(3, 4, 5), (4, 3, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10), (7, 24, 25), (8, 6, 10), (9, 40, 41), (10, 24, 26)

などである。

しかし、$t>2$ を満たすすべての整数 t に対して、直角をはさむ辺が t となる既約なピタゴラス三角形がいつも存在するわけではない。例えば、$t=6$ のとき、そのピタゴラス三角形は既約にはならない。なぜなら、定理３から $2mn=6$ であるが、$mn=3$ となるため、m, n の一方が偶数でなければならないという事実に反するので、$t=6$ となる既約なピタゴラス三角形は存在しない。

次に、斜辺が自然数 n と一致するピタゴラス三角形は存在するのだろうか。この問題を解くの困難なので、ここでは証明なしで次の定理を紹介する。

定理 15

n を斜辺とするピタゴラス三角形が存在するための必要十分条件は、n が $4k+1$ という形の素因数を少なくとも 1 つ持つことである。

したがって、$n \leqq 50$ に対して、以下の n を斜辺とするピタゴラス三角形が存在する。

n =5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 26, 29, 30, 34, 35, 37, 41, 39, 40, 45, 50

つまり、これらの数は素因数 5, 13, 17, 29, 37, 41 を持つ。

斜辺の長さが連続する２つの自然数 n, $n+1$ で表される２つのピタゴラス三角形の組合せが無数にあることは、次の恒等式からすぐに導かれる。

$$(25+65k)^2 = (15+39k)^2 + (20+52k)^2$$
$$(26+65k)^2 = (10+25k) \ \ + (24+60k)^2$$

（ただし、$k = 1,2,3,\cdots$）

また、次の事実も成り立つことがわかっている。

定理 16

任意の自然数mに対して、斜辺の長さがm個の連続する自然数

$$n, n+1, n+2, \cdots, n+m-1$$

(nは適当な自然数)で表されるm個のピタゴラス三角形が存在する。

例えば、$m=3$に対しては、$n=39$とすることができ、ピタゴラス三角形

(15, 36, 39), (24, 32, 40), (9, 40, 41)

が求められる。

また、$m=4$に対しては、$n=50$とすることができ、ピタゴラス三角形

(30, 40, 50), (24, 45, 51),
(20, 48, 52), (28, 45, 53)

が求められる。

３－５．共通する辺をもつピタゴラス三角形

ある自然数aを、直角をはさむ１辺とするピタゴラス三角形は有限個しか存在しない。なぜなら、ピタゴラス三角形(a,b,c)において、$a^2 = (c+b)(c-b)$から$b+c$がa^2の約数になるためには、$b<a^2$, $c<a^2$とならないといけなくて、このようなb,cの組み合わせは有限個しかないからである。

簡単に証明できるように、次のことが成り立つ。

定理 17

任意の自然数nに対して、直角をはさむ辺を共有している少なくともn個のピタゴラス三角形が存在する。

［証明］

これを示すため、$k = 0,1,2,\cdots,n-1$として、

$$b_k = 2^k(2^{2n-2k}-1),\ c_k = 2^k(2^{2n-2k}+1)$$

とおく。このとき、$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$は$2^n$で割るといつも異なった余り$2^k$が生じるので、明らかにすべて違っている。

さらに、${c_k}^2 - {b_k}^2 = (2^{n+1})^2$ が成り立つので、ここで$a = 2^{n+1}$とおくとピタゴラス方程式が成り立ち、n個のピタゴラス三角形$\left(a, b_k, c_k\right)$（$k = 0,1,2,\cdots,n-1$）を得るが、これらはみな共通辺aを持ち、斜辺はすべて異なっているので、これらの中に同じピタゴラス三角形は存在しない。

(Q.E.D.)

例えば、$n=2$のときには共通辺 8 をもった２つのピタゴラス三角形

(8, 15, 17), (8, 6, 10)

が、$n=3$のときには、共通辺 16 をもった３つのピタゴラス三角形

(16, 63, 65), (16, 30, 34), (16, 12, 20)

が求められる。

また、少し複雑なので証明などは加えないが、次が成り立つことも知られている。

定理 18

任意の自然数nに対して、直角をはさむ辺を共有する、少なくともn個の既約なピタゴラス三角形が存在する。

例えば、$n=2$のときには、三角形

(5, 12, 13), (35, 12, 37)

が求められ、$n=4$のときには、三角形

(105, 88, 137), (105, 208, 233),

(105,608, 617), (105, 5512, 5513)

が求められる。

共通な斜辺cを持つピタゴラス三角形は有限個しかない。これは簡単に示すことができる。なぜなら、直角三角形(a,b,c)において、$a<c$, $b<c$なので、与えられたcに対するa,bの組み合わせが有限だからである。それと同時に次のことも成り立つ。

定理 19

任意の自然数nに対して、共通の斜辺を持つ少なくともn個の異なったピタゴラス三角形が存在する。

［証明］

まず、自然数nに対して、

$$c=(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)\cdots\left\{(n^2+2)+1\right\}$$

とおく。このとき、$k=3,4,\cdots,n+2$とすると、$\dfrac{c}{k^2+1}$はいつも自然数となる。

したがって、同様に$k=3,4,\cdots,n+2$としたとき、

$$a_k=\frac{k^2-1}{k^2+1}c,\ b_k=\frac{2kc}{k^2+1}$$

はどちらも自然数になる。

よって、恒等式

$$a_k=\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}c\right)^2+\left(\frac{2kc}{k^2+1}\right)^2$$

から$c^2={a_k}^2-{b_k}^2$が成り立ち、(a_k,b_k,c)がピタゴラス三角形であることがわかる。

ここで、$k=3,4,\cdots,n+2$に対してa_kは

$$a_k=\frac{k^2-1}{k^2+1}c,=c-\frac{2kc}{k^2+1}$$

と変形することができ、kが増えればa_kも増えていることがわかる。したがってピタゴラス三角形(a_k,b_k,c)が共通の斜辺をもつn個の異なった三角形が得られることがわかった。

(Q.E.D.)

３－６．等しい周を持つピタゴラス三角形

まず次の定理を紹介する。

定理 20

任意に自然数nに対して、共通の周を持つn個のピタゴラス三角形が存在する。

［証明］

この定理は容易に示される。

まず、n個の異なった既約なピタゴラス三角形(a_k,b_k,c_k)（$k=1,2,3,\cdots,n$）をとり、

$$a_k+b_k+c_k=s_k\ (k=1,2,3,\cdots,n)$$

とおく。さらに、$s=s_1s_2\cdots s_{\mathrm{n}}$,

$$a'_k=\frac{a_ks}{s_k},\ b'_k=\frac{b_ks}{s_k},\ c'_k=\frac{c_ks}{s_k}$$

（$k=1,2,3,\cdots,n$）

とおく。このとき、任意のkに対して、

$a'_k+b'_k+c'_k=s$となり、このうち、どのピ

タゴラス三角形をとっても相似になる組み合わせはない。

よって、もとの三角形(a_k, b_k, c_k)によって、共通の斜辺を持つn個のピタゴラス三角形ができた。

(Q.E.D.)

例を挙げると、$n=3$として、もとのピタゴラス三角形を

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17)

とすると

$$s_1 = 3+4+5 = 12$$
$$s_2 = 5+12+13 = 30$$
$$s_3 = 8+15+17 = 40$$
$$s = 12\times 30\times 40 = 1440$$

したがって、

$$a_1' = \frac{3\times 1440}{12} = 360$$

$$b_1' = \frac{4\times 1440}{12} = 480$$

$$c_1' = \frac{5\times 1440}{12} = 600$$

となる。つまり、三角形(a_1', b_1', c_1')は(360, 480, 600)である。同様に

(a_2', b_2', c_2')＝(240, 576, 624)

(a_3', b_3', c_3')＝(288, 540, 612)

となり、これらの周は 1440 と等しくなる。

上の証明ではsの値を$s_1, s_2, \cdots, s_{\mathrm{n}}$の積としたが、これは$s_1, s_2, \cdots, s_{\mathrm{n}}$の公倍数をとっても良い。そのようにすると、先程使った既約なピタゴラス三角形(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17)を用いて周の長さが 120 に等しい３つのピタゴラス三角形ができる。これは先ほどの三角形よりも簡単なものになっている。

ちなみに周の長さが平方数である既約なピタゴラス三角形も存在する。その中でも最も小さい三角形が(16, 63, 65)である。この三角形では周の長さが144のため、12^2に等しくなっている。

３－７．等しい面積を持つピタゴラス三角形

前節は三角形の周に注目したが、次は面積について注目しよう。

既約なピタゴラス三角形の面積に注意してみると、(21, 20, 29)と(35, 12, 37)の面積が 210 と等しく、この１組のみである。実際これと同じ面積をもち、しかも斜辺の異なる既約なピタゴラス三角形で、これより小さなものは存在しない。そこで、斜辺が 37 以下の既約でないピタゴラス三角形を挙げてみると、次のようになる。

表４　斜辺が 37 以下の既約でない
ピタゴラス三角形

x	y	z	面積
6	8	10	24
9	12	15	54
12	16	20	96
15	20	25	150
18	24	30	216
21	28	35	296
10	24	26	120
30	16	34	240

この表４を見てもわかるように、斜辺が 37 以下の直角三角形の中で、同じ面積をもつものの組み合わせは(21, 20, 29)と(35, 12, 37)以外にない。つまり、異なった斜辺で、同じ面積を持つ既約なピタゴラス三角形の組で最小なものは(21, 20, 29), (35, 12, 37)

の組である。

定理 21

斜辺が同じで、面積も等しいピタゴラス三角形は一致する。

［証明］

まず、このようなピタゴラス三角形を(a_1, b_1, c_1)，(a_2, b_2, c_2)とし、$a_1 \geqq a_2$ ，$b_1 \geqq b_2$とする。

すると、面積が等しいことと、斜辺が等しいことから、$a_1 b_1 = a_1 b_2$，$c_1 = c_2$となる。加えて、ピタゴラス方程式が成り立つので、

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$$

である。これらの式から

$$a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2 = a_2^2 - 2a_2 b_2 + b_2^2$$

より、$(a_1 - b_1)^2 = (a_2 - b_2)^2$ …①

$$a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2 = a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_2^2$$

より、$(a_1 + b_1)^2 = (a_2 + b_2)^2$ …②となる。したがって、①，②から、連立方程式

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \\ a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

を解くと、$a_1 = a_2$，$b_1 = b_2$ が導かれ、斜辺が同じで、面積も等しい三角形は一致することが証明された。

(Q.E.D.)

ここで、面積の等しいピタゴラス三角形の他の例をいくつか挙げよう。

ピタゴラス三角形(15, 112, 113)の面積は840に等しい。またこれは、三角形(21, 20, 29), (35, 12, 37)の面積である210の４倍に等しいため、三角形(21, 20, 29), (35, 12, 37)の各辺を２倍した三角形(42, 40, 58), (70, 24, 74)の面積に等しいことがわかる。つまり、３つの三角形

(15, 112, 113), (42, 40, 58), (70, 24, 74)

の面積が等しいということである。

しかし、これらがみな既約なピタゴラス三角形というわけではない。３つの既約なピタゴラス三角形に共通な最小の面積は13123110であり、その三角形は

(4485, 5852, 7373), (19019, 1380, 19069),
(3509, 8580, 9109)

である。

次に、周のときと同様に、条件を満たす任意個のピタゴラス三角形が存在するかどうかである。この問題は次のフェルマーの定理によって証明される。

定理 22

任意の自然数nに対して、異なった斜辺で等しい面積をもつピタゴラス三角形がn個存在する。

定理 22 は次の補題Ｖを用いて、帰納法で証明される。

補題Ｖ

異なった斜辺で等しい面積をもつn個($n \geqq 1$)のピタゴラス三角形が存在し、そのうち１つが奇数の斜辺をもつと仮定すれば、やはり異なった斜辺で等しい面積をもつ$(n+1)$個のピタゴラス三角形が存在し、そのうち１つは奇数の斜辺をもつ。

［証明］

$n \geqq 1$ をある自然数とし、異なった斜辺で同じ面積を持つn個のピタゴラス三角形(a_k, b_k, c_k)　$(k = 1,2,3,\cdots,n)$を考える。また、$a_k < b_k < c_k$であり、c_1^2は奇数であるとする。

$k = 1,2,\cdots,n$　に対して、

$$
\begin{aligned}
a'_k &= 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)c_1 a_k \\
b'_k &= 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)c_1 b_k \qquad \cdots ① \\
c'_k &= 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)c_1 c_k
\end{aligned}
$$

とおき、さらに、

$$
\begin{aligned}
a'_{n+1} &= (b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 \\
b'_{n+1} &= 4a_1 b_1 c_1{}^2 \qquad \cdots ② \\
c'_{n+1} &= 4a_1{}^2 b_1{}^2 + c_1{}^4
\end{aligned}
$$

とおく。

すると、三角形(a'_k, b'_k, c'_k)はピタゴラス三角形になる。なぜなら、これらの三角形の辺は自然数で表され、しかもピタゴラス三角形(a_k, b_k, c_k)に相似だからである。

また三角形$(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$もピタゴラス三角形である。これは、②とピタゴラス方程式　$a_1{}^2 + b_1{}^2 = c_1{}^2$　から導かれる。

さて、これらの三角形(a'_k, b'_k, c'_k)　$(k = 1,2,3,\cdots,n)$　が必要な条件を満たしていること示そう。

三角形(a_k, b_k, c_k)　$(k = 1,2,3,\cdots,n)$に共通な面積をΔとすると、$k = 1,2,3,\cdots,n$に対して、

$$a_k b_k = 2\Delta$$

が成り立つ。一方、三角形(a'_k, b'_k, c'_k)の面積は、①から

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}a'_k b'_k &= 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 c_1{}^2 a_k b_k \\
&= 4(b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 c_1{}^2 \Delta
\end{aligned}
$$

となる。また、$(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$の面積は②から、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}a'_{n+1} b'_{n+1} &= 2(b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 a_1 b_1 c_1{}^2 \\
&= 4(b_1{}^2 - a_1{}^2)^2 c_1{}^2 \Delta
\end{aligned}
$$

と、互いに面積は等しくなる。したがって、三角形はすべて同じ面積を持ち、さらに$k = 1,2,3,\cdots,n$に対して、三角形(a_k, b_k, c_k)の斜辺はすべて異なっているから、三角形(a'_k, b'_k, c'_k)の斜辺もみな異なっている。それらの斜辺はどれも①からわかるように偶数である。

一方、c'_{n+1}は②によって、奇数で表されている。だから、$k = 1,2,3,\cdots,n$に対して斜辺c'_kはみな異なっている。

これで補題は証明された。

(Q.E.D.)

この補題Ⅴに対して、最も簡単なnの値として$n = 1$を考えよう。補題Ⅴが適応できる最も小さいピタゴラス三角形は、辺の長さが

$$a_1 = 3,\ b_1 = 4,\ c_1 = 5$$

のピタゴラス三角形である。このピタゴラス三角形から始めて、同じ面積を持つ２つのピタゴラス三角形$(a'_1, b'_1, c'_1), (a'_2, b'_2, c'_2)$が求められる。

$$2(b_1{}^2 - a_1{}^2)c_1 = 2 \times 7 \times 5 = 70$$

より、①から

$$
\begin{aligned}
a'_1 &= 70 \times 3 = 210 \\
b'_1 &= 70 \times 4 = 280 \\
c'_1 &= 70 \times 5 = 350
\end{aligned}
$$

となり、②から

$$a_2' = (4^2 - 3^2)^2 = 49$$
$$b_2' = 4 \times 3 \times 4 \times 5^2 = 1200$$
$$c_2' = 4 \times 3^2 \times 4^2 + 5^2 = 1201$$

となる。

これら２つのピタゴラス三角形は、異なった斜辺をもち、そのうち一方の辺が奇数となっている、面積が 29400 に等しいピタゴラス三角形である。

また、こうして求められた２つの三角形に同じ操作を行えば、新たに３つの同じ面積を持つピタゴラス三角形ができる。このようにしてできたピタゴラス三角形の各辺は 10 桁以上になる。

以前にも別の方法で３つの同じ面積を持つピタゴラス三角形を求めた。このときの三角形は、上とは違い各辺が３桁程度だった。同様にしてもとめられた、同じ面積をもつ簡単なピタゴラス三角形の例で、４つの組み合わせと、５つのものを挙げよう。

４つのピタゴラス三角形の組み合わせは、

(518, 1320, 1418), (280, 2442, 2458)
(231, 2961, 2969), (111, 6160, 6161)

であり、これらの三角形の面積は 341880 に等しく、三角形の各辺は４桁程度で表されている。

５つのピタゴラス三角形の組み合わせは

(2805, 52416, 52491),
(3168, 46410, 46518),
(5236, 28080, 28564),
(6006, 24480, 25206),
(8580, 17136, 19164)

であり、これらの三角形もまた、面積が 73513440 に等しく、各辺は５桁程度になっている。

面積が Δ に等しいピタゴラス三角形は明らかに有限個である。なぜなら、このような三角形の直角をはさむ辺は 2Δ の約数だからである。しかし、例えば面積が 6 に等しく、有理数辺をもつ異なった直角三角形は無数に存在する。この事実を示そう。

まず、補題Ｖから、異なった斜辺をもち、面積が同じ Δ であるピタゴラス三角形が n 個($n \geqq 1$)存在するとして、そのうち１つの三角形の斜辺が奇数であると考える。このとき、異なった斜辺をもち、面積が同じ Δd^2 (d は整数) であるピタゴラス三角形は $(n+1)$ 個存在し、そのうち１つの三角形の斜辺が奇数である。

ピタゴラス三角形(3, 4, 5)を考えよう。この三角形に補題Ｖを $(n-1)$ 回適用すると、異なる斜辺を持ち、面積が $6m^2$ （m は①, ②から求められる)と等しい n 個のピタゴラス三角形が求められる。このときできたピタゴラス三角形の各辺を m で割ると、その三角形の面積は 6 になり、また各辺は有理数になる。つまり、各辺が有理数で面積が 6 である異なったピタゴラス三角形が求められたということである。

また、n は任意の自然数であるから、上の方法でできた三角形は無数にあるとわかる。

３－９．平方数を辺とするピタゴラス三角形

この節ではまず、斜辺を平方数とするピタゴラス三角形について、次を示そう。

定理 23

斜辺を平方数とするピタゴラス三角形は無数にある。

［証明］

まず、$n < p < m$ であるピタゴラス三角形(m, n, p)を適当にとる。すると、２数 m, n は一方が奇数、他方が偶数であり、この２数は互いに素である。ここで、定理３から新たなピタゴラス三角形(x, y, z)を作ることができる。この x, y, z は公式

$$x = m^2 - n^2 ,\ y = 2mn ,\ z = m^2 + n^2$$

によって求められる。このとき斜辺 z は

$$z = m^2 + n^2 = p^2$$

となり、自然数の平方数になっている。同様に、x, y は

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$

となる。これを繰り返して、斜辺を平方数とするピタゴラス三角形を無数に作ることができる。

(Q.E.D.)

例えば、既約なピタゴラス三角形(3, 4, 5)からは、既約な三角形(7, 24, 25)が求められる。このとき斜辺は5^2になっている。また、既約なピタゴラス三角形(5, 12, 13)からは、既約な三角形(119, 120, 169)が求められ、斜辺は13^2になっている。ちなみに、斜辺が立方数になる三角形も存在し、その例には（117,44,125）があり、斜辺は5^3である。

次に、直角をはさむ辺に注目しよう。

<u>定理 24</u>

直角をはさむ一方の辺が平方数であるような既約なピタゴラス三角形は無数に存在する。

［証明］

まず、既約なピタゴラス三角形(q, n, m)で n が偶数、q, m が奇数であり、m, n が互いに素なものを考える。

斜辺のときと同様に、定理３を使って、直角をはさむ辺のうち奇数の方である x は

$$x = m^2 - n^2 = q^2$$

となり、自然数の平方数になっている。同じく y, z は

$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

となる。したがって、この方法で新たな既約であるピタゴラス三角形で、かつ直角をはさむ辺の奇数の方(＝ x)が平方数であるものが求められる。

(Q.E.D.)

この方法を使うと、既約なピタゴラス三角形(3, 4, 5)からは、既約な三角形(9, 40, 41)が求められ、x の値は3^2になっている。また、既約な三角形(5, 12, 13)からは、既約な三角形(25, 312, 313)が求められる。この三角形の x の値も5^2であり、自然数の平方数になっている。

上の x は、直角をはさむ辺のうち奇数のものだったが、次にこれが偶数であるものを考えよう。

<u>定理 25</u>

直角をはさむ偶数辺が平方数であるような既約なピタゴララス三角形は無数に存在する。

［証明］

この証明には、次の恒等式

$$(k^4 - 4)^2 + (2k)^4 = (k^4 + 4)^2$$

を用いる。ただしこのとき、$k^4 - 4$ と $4k^2$

は互いに素でないといけないので、k は奇数でないといけない。したがって、無数に存在する。

(Q.E.D.)

例えば、

$k=1$ のときは、$(3,2^2,5)$
$k=3$ のときは、$(77,6^2,85)$
$k=5$ のときは、$(621,10^2,629)$

が求められる。

さて、２辺が平方数で表せるピタゴラス三角形は存在するのだろうか。この問題については、次のフェルマーによる定理によって解決される。

<u>定理 26</u>

少なくとも２つの辺が平方数であるようなピタゴラス三角形は存在しない。

［証明］

直角をはさむ２辺が平方数であるようなピタゴラス三角形が存在すると仮定する。このようなピタゴラス三角形の中には、斜辺が最も小さいものがあり、その三角形を (x,y,z) とする。そこで、$x=a^2$，$y=b^2$（a,b は自然数）とおく。まず a,b が互いに素であることを示す。

数 a,b が整数 $d>1$ で割り切れるとすると、$a=da_1$，$b=db_1$ より、a_1,b_1 は整数になる。すると、

$$z^2=d^4({a_1}^4+{b_1}^4)$$

が成り立つ。

この等式から z^2 が d^4 で割り切れることがわかり、したがって、z が d^2 で割り切れて、$z=d^2z_1$（z_1 は整数）となることがわかる。ここで、等式 $z^2=d^4({a_1}^4+{b_1}^4)$ の両辺を d^4 で割ると、

$$a_1^4+b_1^4={z_1}^2,\quad z_1<d^2z_1=z$$

の形になる。つまり、ピタゴラス三角形 $({a_1}^2,{b_1}^2,z_1)$ は斜辺 $z_1<z$ をもち、直角をはさむ２辺は平方数である。

しかしこのとき、最初の仮定である最も小さい斜辺 z をもつピタゴラス三角形 (x,y,z) であるということに反するので、矛盾している。

したがって、数 a,b は互いに素であり、ピタゴラス三角形

$$(x,y,z)=(a^2,b^2,z)$$

は既約でなければならない。

そこで、このピタゴラス三角形に定理３を適用し、２数 a^2,b^2 のうち一方が偶数（ここでは b^2 を偶数とする）であり、３数 a^2,b^2,z は

$$a^2=m^2-n^2$$
$$b^2=2mn \qquad \cdots ①$$
$$z^2=m^2+n^2$$

と表せることがわかる。

このとき、m,n は互いに素であり、そのうち一方が偶数で、他方が奇数である。さらに、$m>n$ である。

ここでもし、m が偶数で n が奇数であるとすると、①のはじめの等式を変形させた $a^2+n^2=m^2$ から a^2 が奇数であるとわかる。ところが、この等式から (a,n,m) はピタゴラス三角形になるから、a と n がどちらも奇数であるということはありえない。

なぜなら、以前示したようにピタゴラス三角形において、直角をはさむ辺のうち一

方は偶数でないといけないからである。

したがって、m が奇数で、n が偶数でないといけない。そこで、k を整数として、$n=2k$ とおける。また、m と n が互いに素なので、m と k も互いに素である。①の第２式によって

$$b^2=2m\times 2k=2^2mk$$

となる。b は偶数としたから、l を自然数として、$b=2l$ とおく。すると、上の式から $l^2=mk$ となる。

ここで、m,k が互いに素であることを考えると、m も k も平方数でなければいけないことがわかる。だから整数 r,s を用いて

$$m=r^2,\ k=s^2$$

と表すことにする。

さらに、今までの式から

$$b^2=4l^2=4mk,\quad b^2=2mn$$

である。したがって

$$4mk=2mn,\ n=2k=2s^2$$

となる。

また、m と n が互いに素なので、①から a と n は互いに素である。だからピタゴラス三角形 (a,m,n) は既約である。

ここで、定理３から n が偶数であることを考えると、一方が偶数で互いに素な２数 m_1 と n_1 が存在し、

$$n=2m_1n_1,\quad m=m_1{}^2+n_1{}^2$$

という式が作れる。ところで、$n=2s^2$ であったから、

$$s^2=m_1n_1$$

とおくことができる。したがって、２数 m_1,n_1 はそれぞれ平方数であり、自然数 a_1 と b_1 を用いて、

$$m_1=a_1{}^2,\quad n_1=b_1{}^2$$

と表すことができる。

そこで、等式 $m=m_1{}^2+n_1{}^2$ に m,m_1,n_1 の値を代入すると、

$$a_1{}^4+b_1{}^4=r^2$$

となる。上式の r は

$$r\leqq r^2=m<m^2+n^2=z$$

を満たす。つまり、ピタゴラス三角形 $(a_1{}^2,b_1{}^2,r)$ は、直角をはさむ２辺が平方数で、斜辺 r は z よりも小さい。したがって、この三角形は最初の三角形 (x,y,z) も小さく、仮定に反している。

だから、直角をはさむ辺が平方数となるピタゴラス三角形があると仮定すると矛盾が生じる。したがってこのような三角形は存在しない。

次に、斜辺と他のもう一辺が平方数となる三角形を考えよう。

まず、三角形 (x,y,z) が、上のような三角形の中で最も小さな斜辺を持つものであるとする。したがって、自然数 a と c を用いて $x=a^2,\ z=c^2$ と表す。

最初に三角形 (x,y,z) が既約であることを示そう。それには x と z が既約であることを証明するだけで十分である。そこで、x と z に公約数 e があると仮定する。すると a,c が公約数 e を持つことになり、自然数 a_1,b_1 を用いて、

$$a=ea_1,\ c=ec_1$$

と表せる。したがって、３数 x,y,z は

$$x = a^2 = e^2 a_1{}^2$$
$$y^2 = x^2 - z^2 = e^4 (c_1{}^4 - a_1{}^4)$$
$$z = c^2 = e^2 c_1{}^2$$

である。これから、y^2はe^4で割り切れ、したがって、yはe^2で割り切れる。よってyは、自然数y_1を用いて、

$$y = e^2 y_1$$

と表すことができる。

ここで、三角形(x, y, z)の等式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

にこれまでの式を代入し、e^4でわると

$$e^4 a_1{}^4 + e^4 y_1{}^4 = e^4 c_1{}^4$$
$$a_1{}^4 + y_1{}^4 = c_1{}^4$$

が得られる。

さらに、$z = e^2 c_1^2$で$e > 1$のため、$c_1^2 < z$である。つまり、ピタゴラス三角形$\left(a_1^2, y_1, c_1^2\right)$は斜辺と、もうひとつの辺も平方数であり、その斜辺の長さはzよりも小さい。これは最初の仮定である、ピタゴラス三角形(x, y, z)が最も小さい斜辺をもち、斜辺ともうひとつも辺が平方数であるということに反している。

次に、yは偶数ではないことを示そう。なぜなら、yが偶数であるとすると、定理３によって、互いに素な２数m, n（$m > n$）が存在して、

$$a^2 = x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$c^2 = z = m^2 + n^2$$

と表すことができる。これから、

$$c^2 > m^2,\ (ac)^2 = m^4 - n^4$$

であり、$n^4 + (ac)^2 = m^4$となる。

したがって、ピタゴラス三角形(n^2, ac, m^2)では、直角をはさむ１辺が平方数で、斜辺は$m^2 < z$である。しかし、これは最初の仮定に反する。

これにより、yは奇数でなければならず、$x = a^2$が偶数でなければならない。また、$a^4 + y^2 = c^4$となり、aは偶数、yは奇数であるから、cは奇数で、

$$y^2 = c^4 - a^4 = (c^2 + a^2)(c^2 - a^2)$$

が成り立つ。

次に、２つの奇数$c^2 + a^2, c^2 - a^2$は互いに素であることを示す。

ここで、$c^2 + a^2$と$c^2 - a^2$の公約数は$2c^2$と$2a^2$の約数であるが、それは奇数でなければならないから、実は互いに素な２数a^2, c^2の公約数でなければならない。だから、２数$c^2 + a^2, c^2 - a^2$は互いに素である。

つまり、y^2は２つの素な因数に分解されるから

$$c^2 - a^2 = r^2, c^2 + a^2 = s^2$$

でなければならない。これから、

$$2c^2 = r^2 + s^2$$

となるが、ここでr, sは互いに奇数であるから数$\dfrac{s+r}{2}$と$\dfrac{s-r}{2}$は整数になる。

この２数は、それらの和と差が互いに素だから、それら自身も互いに素である。

だから、定理３によって互いに素な２数m, nが存在して、一方は偶数であり、

$$\frac{s+r}{2} = m^2 - n^2,\ \frac{s-r}{2} = 2mn,$$
$$c = m^2 + n^2$$

あるいは、

$$\frac{s-r}{2} = m^2 - n^2,\ \frac{s+r}{2} = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

が成り立つ。

ここから、どちらの場合も

$$2a^2 = s^2 - r^2 = 8mn(m^2 - n^2) \quad \cdots ②$$

が得られる。a は偶数だから、$a = 2a_1$ とおけて、

$$a_1^{\ 2} = mn(m^2 - n^2) \ = mn(m+n)(m-n)$$

が成り立つ。数 m, n は互いに素でそのうち一方は偶数である。２数 $m-n, m+n$ も互いに素で、m と $m-n$，m と $m+n$ もそれぞれ互いに素である。

ゆえに、②の右辺にある４つの因数どの２つを組み合わせても、互いに素である。したがって、等式②の右辺の各因数はそれぞれ平方数でなければならない。つまり、

$$m = k, \quad n = l, \quad m - n = p,$$
$$m + n = q$$

となる。ここから、

$$k^4 - l^4 = m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(pq)^2$$

で、さらに

$$k^4 = m^2 < m^2 + n^2 = c < c^2 = z$$

ゆえに、$k^2 < z$ でもある。つまり、ピタゴラス三角形 (l^2, pq, k^2) は、斜辺と一方の辺が平方数で、斜辺 k^2 は z よりも小さい。しかし、これは前の仮定に反する。

したがって、ピタゴラス三角形の斜辺と一方の辺が平方数であるようなものが存在するという仮定により矛盾が生じる。よって、このような三角形は存在しない。これで定理 24 は証明された。

(Q.E.D.)

この定理から３辺が平方数であるピタゴラス三角形はもちろん存在しないことが分かる。また、これを代数学的に言い直すと、次の定理のような命題になる。

定理 27

不定方程式 $x^4 + y^4 = z^4$ は自然数解をもたない。

この定理は、有名な「**フェルマーの大定理**」(定理 28)の特別な場合である。

定理 28 (フェルマーの大定理)

任意の整数 $n > 2$ に対して、不定方程式 $x^n + y^n = z^n$ は自然数の解をもたない。

「フェルマーの大定理」は、数学者**フェルマー**(Pierre de Fermat)がディオファントスの著書『数論』の余白に命題のみを記述し、証明を付していなかったエピソードで有名であり、その後、「フェルマー予想」として、数論の未解決問題となった。多くの数学者が証明に挑戦し、失敗を重ねてきた。しかし、少しずつ進歩を重ねていき、ついに、1994 年アメリカの数学者**アンドリュー・ワイルズ**(Andrew John Wiles)によって、完全な証明が与えられた。その過程には、**志村五郎**、**谷山豊**という２人の日本人数学者による「**志村－谷山予想**」が大きな役割を果たしたことも有名である。このような深遠な理論にまで達することは、数学の世界の広がりと深さを実感できる。

３－10. ピタゴラス三角形と平面上の点

(a, b, c) を既約なピタゴラス三角形とする。この三角形に x 座標 $\dfrac{a}{c}$、y 座標 $\dfrac{b}{c}$ をもつ平面上の点 $\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}\right)$ を対応させる。すると

ピタゴラス方程式$a^2+b^2=c^2$から

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$$

となる。

よって、点$\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$は原点を中心とした半径１の円、つまり単位円上に存在する。

つまり、１つのピタゴラス三角形について、単位円$x^2+y^2=1$上の正の有理数座標をもつ点、つまり、単位上の有理点が対応する。逆に、点(x,y)を円$x^2+y^2=1$上の正の有理数座標をもつ。つまり、x,yが方程式$x^2+y^2=1$を満たす正の有理数であると仮定すると、

$$x^2+y^2=1=\frac{c^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}$$

$x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$とみなすことができる。

よって、この点(x,y)と既約なピタゴラス三角形(a,b,c)を対応させることができた。

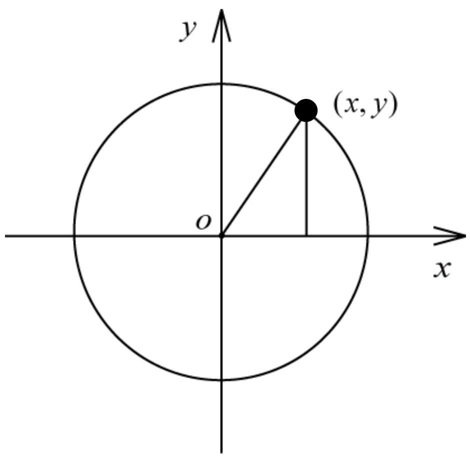


図５

こうして、既約なピタゴラス三角形と、単位円上の有理点で第一象限にあるものとの間に１対１の対応がつけられる。

定理 29

２つの任意の実数x_1,x_2を$0<x_1<x_2<1$と定める。この２数x_1,x_2に対して、既約なピタゴラス三角形(a,b,c)が存在して、それに対応する単位円上の点(x,y)が$x_1<x<x_2$を満たす。

［証明］

$0<x_1<x_2<1$であることから、

$$1<\frac{1+x_1}{1-x_1}<\frac{1+x_2}{1-x_2}.$$

これより、$1<\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}}<\sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}}$.

有理数の稠密性から、

$\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}},\sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}}$の間には有理数$\frac{m}{n}$はいくらでも存在するので、$m,n$は互いに素で、$m$が奇数、$n$が偶数とおくことができる。よって、

$$\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}}<\frac{m}{n}<\sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}} \qquad \cdots①$$

ここで、

$$1-\frac{2}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}=1-2\times\frac{n^2}{n^2+m^2}$$
$$=\frac{n^2+m^2-2n^2}{n^2+m^2}$$
$$=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

であるから①より、

$$x_1<\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}<x_2$$

となる。

定理３より、

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn, c = m^2 + n^2$$

とおくと、既約なピタゴラス三角形が得られ、$x_1 < \dfrac{a}{c} < x_2$ になる。

よって、この三角形に対して単位円上で点 (x, y) が対応し、$x = \dfrac{a}{c}$， $y = \dfrac{b}{c}$ かつ $x_1 < x < x_2$ が成り立つことがわかった。

(Q.E.D.)

この結果から、第一象限の単位円上にある２点を取ると、その間には必ず既約なピタゴラス三角形に対応する点があることがわかった。

また言い換えると、$0° \leqq \alpha \leqq 90°$ を満たす任意の角 α に対して、角 α にいくらでも近い鋭角をもつ有理数辺の直角三角形を得ることできる。すべての辺が有理数なので、うまく拡大するとピタゴラス三角形を得ることができる。

このようにして、任意の角に近いものを作ることができる。その中で角が $45°$ に限りなく近いピタゴラス三角形を作ることはできるが、$45°$ のピタゴラス三角形は存在しない。理由は以下の通りである。

まず、ピタゴラス三角形に限らず各辺が整数の任意の三角形 ABC について考える。この三角形について、余弦定理を適用すると、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

である。ここで a, b, c は整数なので、$\cos A, \cos B, \cos C$ は有理数となる。

これより、$\cos A, \cos B, \cos C$ のうち１つでも無理数となると a, b, c のうち少なくとも１つは無理数となる。

$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より、$45°$ のときは a, b, c のうち少なくとも１つが無理数である。よって、１つの角が $45°$ であり、各辺が整数であるような三角形は存在しない。

４．主結果（条件を満たすピタゴラス三角形の個数）

ピタゴラス三角形について、すべての辺の長さが n 以下のピタゴラス三角形の個数を $F(n)$ として n と $F(n)$ の関係を考える。

ここで、ピタゴラス三角形は直角三角形であり斜辺が最長辺なので、斜辺が n 以下のピタゴラス三角形を考えればよい。

実際に私たちがコンピュータで調べた結果を下の図６に示す。x 軸を個数 n 、y 軸を個数 $F(n)$ とする。

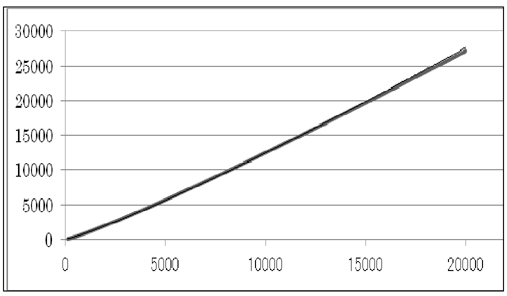


図６

このグラフから、私たちは斜辺の制限 n と個数 $F(n)$ に線型関係が成り立つと予想し、個数 $F(n)$ に対する斜辺の制限 n の比を調べた。その結果を次ページの図７に示す。

x 軸を個数 n 、y 軸を個数 $F(n)$ に対する斜辺の制限 n の比 $\dfrac{F(n)}{n}$ である。

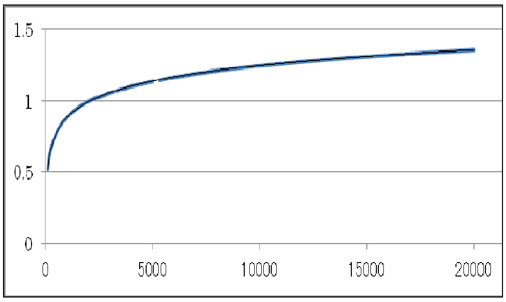


図７

斜辺の制限 n と個数 $F(n)$ に線型関係が成り立つならば、比のグラフは一定の値をとる。しかし上のグラフは一定の値をとるようには見えない。つまり、n と $F(n)$ の関係は単純な線型関係では表せない、より複雑なものであると推察できる。

４－１． 辺の長さが任意の数以下である既約なピタゴラス三角形の個数

さらに条件を絞った斜辺の長さが n 以下であるような既約なピタゴラス三角形の個数 $f(n)$ を考える。

すると、次のような先行研究があった。

<u>定理 30</u> （レーマーの近似式）

斜辺の長さが n 以下である、既約なピタゴラス三角形の個数 $f(n)$ は

$$f(n) \approx \frac{n}{2\pi}$$

で与えられる。

文献[5]の中にはこの定理の証明がなかったため、証明は私たち独自の方法で行った。

［証明］

既約なピタゴラス三角形の斜辺 z は互いに素である奇数の組み合わせ (k,l) を用いて、$z = \dfrac{k^2 + l^2}{2}$ と表せる。

このとき、z は n 以下であるから、

$z = \dfrac{k^2 + l^2}{2} \leq n$ となる。この式を変形して、

$$k^2 + l^2 \leq 2n \quad \cdots①$$

である。いま、横軸を k 軸、縦軸を l 軸とすると、図８のように①は中心が原点、半径が $\sqrt{2n}$ の円の内部を表している。

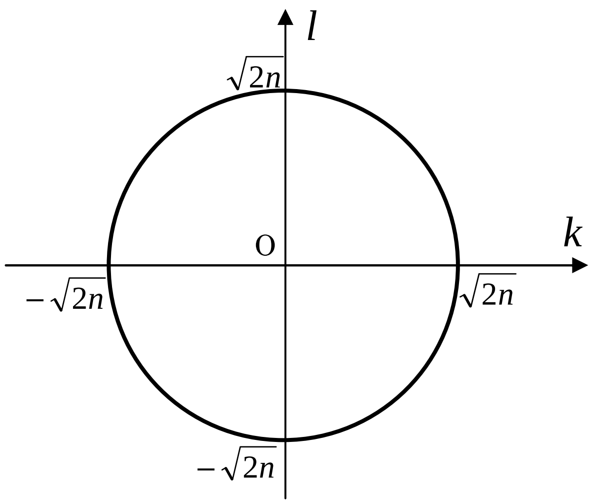


図８

このとき、求めたいピタゴラス三角形の個数 $f(n)$ は①の円の内部および境界上の格子点 (k,l) の個数である。さらに、kl 座標上の一辺１の正方形は、格子点１つに対応しているので、n を十分大きくすれば、N

はkl座標上の条件を満たす部分の面積と等しくなると考えて良い。これは後述の補題Ⅵで示す。

そこで、①の面積Sを求めると、

$$S=\sqrt{2n}^2\pi=2n\pi.$$

ここで、k,lについて$k>l>0$であるので、この条件を満たすのは図２の斜線部分であり、面積はSの８分の１なので、

$$\frac{S}{8}=\frac{2n\pi}{8}=\frac{n\pi}{4}.$$

さらに、k,lはどちらも奇数なので、この条件を満たすのは図９の斜線部内の４分の１なので、求める面積は

$$\frac{n\pi}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{n\pi}{16}.$$

最後に、k,lは互いに素である奇数であったので、この条件を満たす確率である$\frac{8}{\pi^2}$(後述の補題Ⅶで示す)をかけて、

$$\frac{n\pi}{16}\times\frac{8}{\pi^2}=\frac{n}{2\pi}.$$

したがって、条件を満たすピタゴラス三角形の個数$f(n)$は

$$f(n)\approx\frac{n}{2\pi}$$

となる。　　　　　　　　　　　(Q.E.D)

<u>補題Ⅵ</u>

nを十分大きくする。このとき、領域$D:k^2+l^2\le 2n$ 内に含まれる格子点の数は、その領域の面積と等しくなることを示す。

［証明］

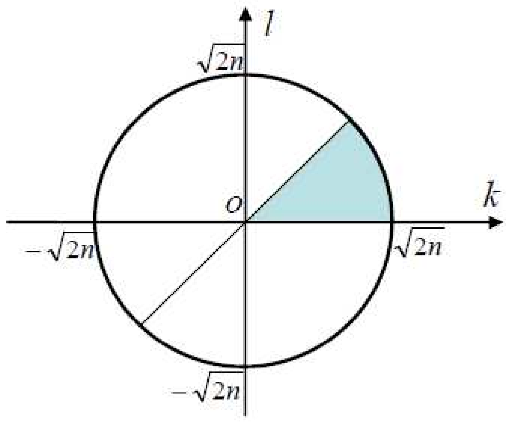
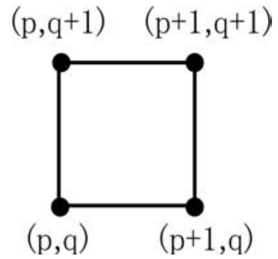


図９

ここでは、四分円を考える。まず頂点が点(p,q)，点$(p,q+1)$，点$(p+1,q)$，点$(p+1,q+1)$で囲まれた格子を$F_{p,q}$とおく。



格子点の数をT_n，$(p,q)\in D$となる$F_{p,q}$をすべて合わせてできる図形の面積をU_n，$F_{p,q}\subset D$となる$F_{p,q}$をすべて合わせてできる図形の面積をR_nとする。このとき、$T_n=U_n$であることは明らかである。さらに、$R_n<S_n<T_n=U_n$であることも明らかである。ここで、$n\to\infty$のとき$R_n\to T_n$であることを示し、はさみうちの原理から$S_n\to T_n$であることを示す。

まず、T_nについて、$k=p$ $(k\in Z, 0\le p\le[\sqrt{2n}])$のとき、格子点は

$$(p,0),(p,1)\cdots,(p,[\sqrt{2n-p^2}])$$

なので、この個数は$[\sqrt{2n-p^2}+1]$個である。ここで、pは０から$\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$まで動くので、

$$T_n=\sum_{k=0}^{[\sqrt{2n}]}\left[\sqrt{2n-p^2}+1\right]$$

である。

同様に考えて、

$$R_n = \sum_{k=0}^{[\sqrt{2n}]} \left[\sqrt{2n-k^2}\right]$$

である。

ここから、$n \to \infty$ のとき $R_n \to T_n$ であることを示す。$n \to \infty$ のとき T_n, R_n はどちらも $R_n \to \infty, T_n \to \infty$ なのでそれを解消するために T_n, R_n を $n^{\frac{3}{2}}$ で割って考える。

すると、T_n, R_n はどちらも同じ値に収束する。したがってはさみうちの原理から

$$R_n = S_n = T_n = U_n \quad (n \to \infty)$$

ゆえに、格子点の数 T_n はその領域内の面積 U_n によって近似してもよいことがわかった。　(Q.E.D)

<u>補題Ⅶ</u>

２つの奇数の組み合わせ (k,l) が互いに素である確率は $\dfrac{8}{\pi^2}$ である。

［証明］

まず、２数 (a,b) が互いに素となる確率を求めよう。a と b が互いに素であるならば同じ素数を共通の約数にはもたないということを用いる。

まず、ある素数 p_1 で任意に選んだ整数が割り切れる確率は $\dfrac{1}{p_1}$ となる。ゆえに、a と b のうち少なくとも一つが p_1 で割り切れないという事象は、a と b がどちらも p_1 によって割り切れるという事象の余事象なので、a と b のうち少なくとも一つが p_1 で割り切れない、つまり素数 p_1 を共通の約数にもたない確率を考える。a が p_1 で割り切れる確率を p_2、b が p_1 で割り切れる確率を p_3 とすると、

$$1-(p_2 \times p_3) = 1-\frac{1}{p_1^{\,2}}$$

となる。さらに,すべての素数に関してこの確率の積をとったものが a と b が互いに素である確率である。つまり、

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

$$= \prod_{p:prime}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p:prime}^{\infty}\left(1-p^{-2}\right)$$

$$= \prod_{p:prime}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p^{-2}}\right)^{-1} = \varsigma(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$$

である。ここで $\varsigma(n)$ は**ゼータ関数**(zeta functuion)を表す。

こうして、２つの奇数 (a,b) が互いに素となる確率は $\dfrac{6}{\pi^2}$ であることが証明された。

では互いに素である２つの奇数の組 (k,l) の場合について考えてみよう。(k,l) はどちらも奇数なので明らかにどちらも 2 で割ることはできない。したがって求める確率は、２数 (a,b) が互いに素となる確率を求める中で素数が 2 の場合を除けばよいので、実際にその確率を求めると、

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)$$

$$\times\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots\div\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$$

$$=\frac{6}{\pi^2}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{\pi^2}.$$

このようにして、奇数の組み合わせ(k,l)が互いに素である確率は$\dfrac{8}{\pi^2}$であることが示された。　　(Q.E.D)

これまで得られた結果から、各辺がn以下の既約なピタゴラス三角形の個数$f(n)$は、$f(n)\approx\dfrac{n}{2\pi}$で近似できることが分かった。この結果を利用して、$F(n)$を考える。

４－２．辺の長さが任意の数以下であるすべてのピタゴラス三角形の個数

$f(n)$は既約なピタゴラス三角形の個数のみを考えたものなので、斜辺がnを超えない範囲で整数倍して、既約でない三角形も加える必要がある。
まず、１倍しても斜辺がnを超えない既約なピタゴラス三角形の個数は$f(n)$自身である。次に２倍しても斜辺がnを超えないものは、斜辺が$\dfrac{n}{2}$以下であればよいのでその個数は$f\left(\dfrac{n}{2}\right)$である。

同様にして、3 倍、4 倍、…、n倍と考えていく。このときそれぞれの個数は、$f\left(\dfrac{n}{3}\right)$, $f\left(\dfrac{n}{4}\right)$, …, $f\left(\dfrac{n}{n}\right)$である。

このとき、各辺がn以下のピタゴラス三角形の個数は、

$$F(n)=f(n)+f\left(\frac{n}{2}\right)+\cdots+f(1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2\pi k}$$

$$=\frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

このように、$F(n)$を計算する過程で調和数列の有限和が現れた。そこで、次の事実を利用して計算を進めた。

<u>定理 31</u>

n番目までの調和級数の和とnの自然対数の差はオイラー定数γに収束する。つまり、

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right\}=\gamma$$

$$=0.5772156649\cdots$$

これを利用して、nが十分大きいとき$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\approx\ln n+\gamma$という近似式を用いて計算すると、

$$G(n)=\frac{n}{2\pi}(\ln n+\gamma)$$

ただし$\gamma=0.57721\cdots$

という、辺の長さがn以下のすべてのピタゴラス三角形の個数の近似式を得る。

次に、この近似式の精度について考える。

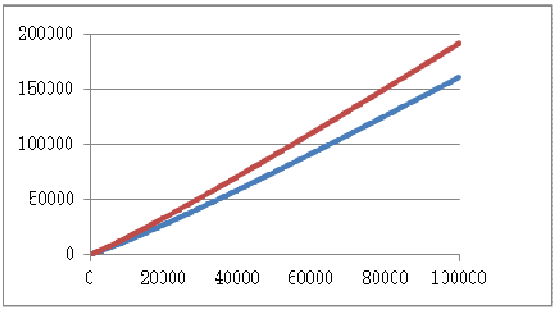


図 10

図 10 において、x 軸は n 、y 軸は個数であり、青のグラフは実際の個数 $F(n)$、赤のグラフは近似式で求めた個数 $G(n)$ である。

このグラフを見ると、誤差が大きいように見える。そこで、誤差の割合について調べると次のようになる。

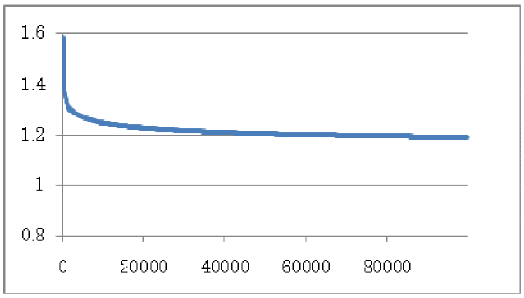


図 11

図 11 において、x 軸は n 、y 軸は実際の個数に対する近似式で求めた個数の比 $\dfrac{G(n)}{F(n)}$ である。つまり、$y=1$ に近いほど実際の値に近い。

しかし、グラフを見ると実際の値より 20%ほど多く数えている。

そこで、この誤差がなぜ出てきてしまうのかを考えた。レーマーによる既約なピタゴラス三角形の個数を求める近似式の精度は高いことが実際に調べてみてわかっていたので、

$$F(n)=f(n)+f\left(\frac{n}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)$$

という部分に注目してみた。そして、私たちは誤差の理由は「斜辺は少なくとも 5 以上である」ということではないかと推測した。この条件を加えることによって近似式の精度を向上させようと考えた。

これはつまり斜辺が 5 未満であるピタゴラス三角形は存在しないということである。レーマーの近似式を用いると、

$f\left(\dfrac{n}{n}\right), f\left(\dfrac{n}{n-1}\right),\cdots$ という値を余計に数えている。$n\to\infty$ のとき $\dfrac{n}{n-k}\to 1$ であり、$f(1)=\dfrac{1}{2\pi}\fallingdotseq 0.16$ より、小さい数ではあるが項数は n を大きくするほど多くなるので、誤差大きくなるのは明らかである。したがって、斜辺が 5 未満のものは無視しなければならない。つまり、

$F(n)=f(n)+f\left(\dfrac{n}{2}\right)+\cdots+f(5)$ としなければならないということである。

これを考慮した近似式を $G^*(n)$ すると、

$$G^*(n)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{5}} f\left(\frac{n}{k}\right)$$
$$=\frac{n}{2\pi}(\ln\frac{n}{5}+\gamma)$$

を得る。

ここでも同様に誤差の割合について調べると次のようになる。

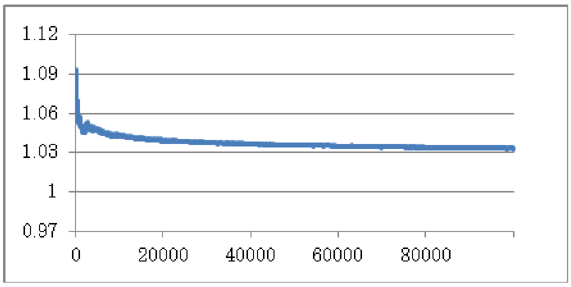


図 12

図 12 において、x 軸は n 、y 軸は実際の個数に対する近似式で求めた個数の比 $\dfrac{G^*(n)}{F(n)}$ である。

$G(n)$ の場合での誤差が約 20%なのに対し、$G^*(n)$ の場合は約 3%とかなり誤差を減らすことができた。

さらに斜辺が 5 より大きく 13 以下であるものが 1 つ、13 より大きく 17 以下であるものが 1 つ、と同様に繰り返すと誤差はさらに小さくなる。しかし、この方法ではいくら誤差を減らしても常に実際の個数より多く数えている。

そこで、実際の個数より少なく数える近似式を考えることで実際の個数の範囲を絞ることができるのではないかと考え、新たな近似式を導いた。

レーマーの近似式において $f(n)=1,2\cdots$ となる n の値は 1 番目、2 番目…の既約なピタゴラス三角形の斜辺の近似になっている。

例えば $f(n)=100$ となる n は、$\dfrac{n}{2\pi}=100$ を解いて $n=628.3\cdots$ である。小さいほうから数えて 100 番目の既約なピタゴラス三角形の斜辺の大きさは 629 なので確かに近い値をとっている。この誤差はレーマーの近似式と同様 n を大きくするほど小さくなる。

つまり、小さいほうから数えて k 番目の既約なピタゴラス三角形の斜辺の大きさ z_k は $z_k=2\pi k$ と表せる。また、$z_k=n$ となるのは $k=\dfrac{n}{2\pi}$ のときである。

さらに、z は n を超えない範囲で $\dfrac{n}{z}$ 倍できる。つまり、斜辺が z である既約なピタゴラス三角形と相似なものは $\dfrac{n}{z}$ 個あるということになる。しかし、$\dfrac{n}{z}$ は常に割り切れるとは限らず、割り切れない場合は実際の個数より大きい値になる。そこで、$\dfrac{n}{z}-1$ とすることによって実際の値より確実に小さく、かつ最も近く計算できる。

この考え方を利用すると、

$$F(n)=\left(\frac{n}{z_1}-1\right)+\left(\frac{n}{z_2}-1\right)+\cdots+\left(\frac{n}{z_{\frac{n}{2\pi}}}-1\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{n}{z_k}-1\right)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{n}{2\pi k}-1\right)$$
$$=\frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2\pi}}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\frac{n}{2\pi}}1$$

ここでも $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\approx\ln n+\gamma$ を用いて、近似式を $H(n)$ とすると、

$$\boxed{H(n)=\frac{n}{2\pi}\left(\ln\frac{n}{2\pi}+\gamma-1\right)}$$

という小さく数える近似式を得る。

このときの誤差は次のようになる。

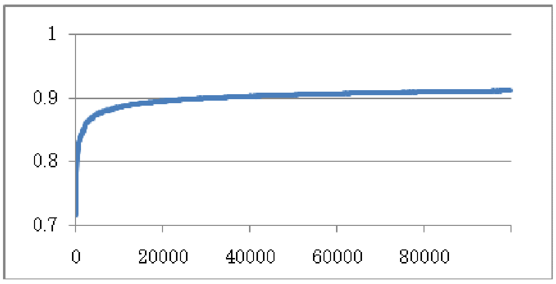


図 13

図 13 において、x 軸は n 、y 軸は実際の個数に対する近似式で求めた個数の比 $\dfrac{H(n)}{F(n)}$ である。

グラフは常に $y=1$ より下になっている。つまり、求めたかった実際の個数より少なく数える近似式が得られた。

ここでこれまでの考察から、$F(n),G(n)$ $,H(n)$ には

$$H(n)<F(n)<G(n)$$

すなわち

$$\frac{n}{2\pi}\left(\ln\frac{n}{2\pi}+\gamma-1\right)<F(n)<\frac{n}{2\pi}(\ln n+\gamma)$$

という大小関係が成り立っている。

この式の( )内の定数を計算すると、

$$\frac{n}{2\pi}(\ln n-2.26)<F(n)<\frac{n}{2\pi}(\ln n+0.57)$$

となる。ここで、τ を定数として辺々を $\dfrac{n}{2\pi}(\ln n-\tau)$ で割ると、

$$\frac{\ln n-2.26}{\ln n-\tau}<\frac{F(n)}{\frac{n}{2\pi}(\ln n-\tau)}<\frac{\ln n+0.57}{\ln n-\tau}$$

$$\frac{1-\frac{2.26}{\ln n}}{1-\frac{\tau}{\ln n}}<\frac{F(n)}{\frac{n}{2\pi}(\ln n-\tau)}<\frac{1+\frac{0.57}{\ln n}}{1-\frac{\tau}{\ln n}}.$$

$n\to\infty$ のとき、はさみうちの原理より

$$\frac{F(n)}{\frac{n}{2\pi}(\ln n-\tau)}\to 1$$

すなわち $\dfrac{n}{2\pi}(\ln n-\tau)\to F(n)$.

つまり、$\dfrac{n}{2\pi}(\ln n-\tau)$ と表せる関数はすべてピタゴラス三角形の個数の近似式になっていて、これまで求めた式は確かに近似式になっている。また、

$$\frac{n}{2\pi}(\ln n-2.26)<F(n)<\frac{n}{2\pi}(\ln n+0.57)$$

より、$-0.57<\tau<2.26$ の範囲に精度の高い近似式を与える定数 τ が存在する。

この τ をコンピュータを用いて区間縮小により調べると、$\tau=1.37042909005805$ のとき誤差のグラフが次のようになった

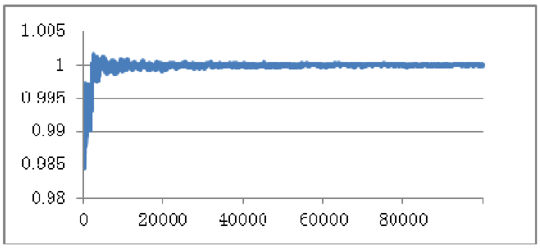


図 14

このことから、辺の長さが任意の数以下

であるすべてのピタゴラス三角形の個数の精度の高い近似式を求めることができた。

５．ピタゴラス三角形の種々の性質（補遺）

５−１．ヘロン三角形と有理三角形

これまで、各辺が整数で表される直角三角形について考えてきたが、この章では各辺が整数の直角三角形とは限らない三角形を考える。

３辺の長さと面積がいずれもしえ数である三角形を**ヘロン三角形**(Helon triangle)という。明らかに、ピタゴラス三角形はヘロン三角形の一部である。

ここで、ヘロン三角形を求める方法をいくつか紹介する。

まず、３辺が整数となる三角形を作る方法はよく知られている。３数 a,b,c を $|b-c|<a<b+c$ が成り立つように選び、三角形(a,b,c)を与える。

例えば$a=2,b=3,c=4$ とすると $|2-3|<4<2+3$であり、またこの３数は三角形を作ることができる。ちなみにこの三角形の内角はすべて整数値ではなく、その面積は$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$となった。

この例では、各辺は整数だが、内角と面積は整数にならなかった。

この方法では、内角はどれも整数ではなかった。そこで、ある 1 つの角が整数であり、各辺が整数である三角形を計算で求める方法を紹介する。

<u>定理 32</u>

$$\begin{cases} a=m^2+n^2+mn \\ b=m^2-n^2 \\ c=2mn+n^2 \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

これらの式$(*)$を満たす三角形(a,b,c)は$\angle A=120^\circ$であり、各辺が整数である三角形を表す。

［証明］

図 15 のような三角形 ABC を考える。

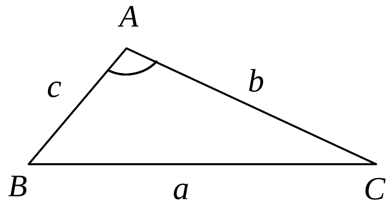


図 15

余弦定理から

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

$(*)$より、

$$\cos A$$

$$=\frac{(m^2-n^2)^2+(2mn+n^2)^2-(m^2+n^2+mn)^2}{2(m^2-n^2)(2mn+n^2)}$$

$$=\frac{(m^4-2m^2n^2+n^4)+(4m^2n^2+4mn^3+n^4)}{2(2m^3n+m^2n^2-2mn^3-n^4)}$$

$$-\frac{(m^4+n^4+m^2n^2+2m^2n^2+2mn^3+2m^3n)}{2(2m^3n+m^2n^2-2mn^3-n^4)}$$

$$=\frac{2m^3n-m^2n^2+2mn^3+n^4}{-2(2m^3n-m^2n^2+2mn^3+n^4)}$$

$= -\dfrac{1}{2}$.

よって、$0° < A < 180°$ より $\angle A = 120°$ をみたす。　(Q. E. D.)

例えば、定理 32 において、$m = 5,\ n = 3$ とすると

$$\begin{cases} a = 5^2 + 3^2 + 5\times 3 = 49 \\ b = 5^2 - 3^2 = 16 \\ c = 2\times 5\times 3 + 3^2 = 39 \end{cases}$$

こうして、$\angle A = 120°$ で各辺が整数の三角形(49,16,39)を求めることができた。

図 16 のように(5,12,13)と(35,12,37)を用意する。ここで、長さが 12 である辺同士を合わせると、新たに各辺が整数ではある鈍角三角形(13,40,37)を作ることができる。

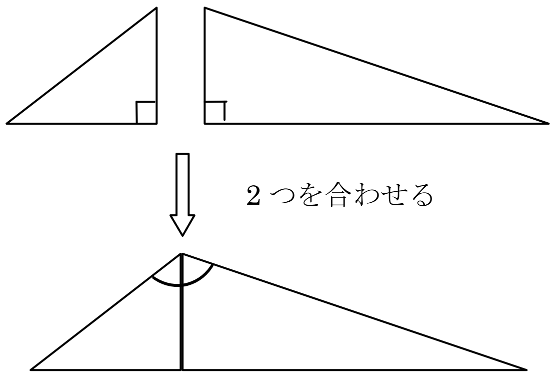


図 16

ちなみに、この場合の鈍角はおよそ

$$23° + 71° = 94°$$

となっていて、面積は、(5,12,13)と(35,12,37)の面積をあわせたもの、つまり $30 + 210 = 240$ となる。この方法で求めると、各辺だけでなく面積も整数となる。

ここで、この方法について注目する。このように、直角を挟む辺が等しいピタゴラス三角形はいくらでも求めることができる。

２つのピタゴラス三角形 (a_1, b_1, c_1) と (a_2, b_2, c_2) を考える。このとき、b_1 と b_2 がその最小公倍数になるように、２つのピタゴラス三角形を適当に拡大すると、b_1, b_2 が対応する辺が等しいピタゴラス三角形の組を作り出すことができる。

このようにして、各辺と面積が整数で表される２つのピタゴラス三角形を用意することで無限に求められることがわかった。

しかし、各辺と面積が整数で表される三角形が、すべて２つの直角三角形によってできているわけではない。

例えば、(65,119,180) を考える。この３数は

$$|65 - 119| < 180 < 65 + 119$$
$$54 < 180 < 184$$

を満たし、またこの三角形の面積はヘロンの公式を用いて、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{182(182-65)(182-119)(182-180)} \\ &= \sqrt{2683044} \\ &= 1638 \end{aligned}$$

となった。確かに面積は整数となっている。

ここで (65,119,180) が２つのピタゴラス三角形の組み合わせでないことを示す。

もし (65,119,180) が２つのピタゴラス三角形の組み合わせだとすると、その三角形の高さが整数となるはずである。

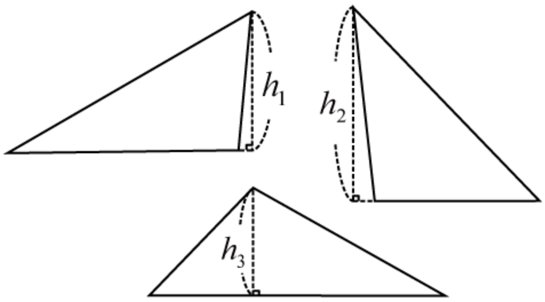


図 17

図 17 のようにそれぞれの辺を底辺とすると、その高さは

・底辺が 65 のとき $3276 \div 65 = 50.4$

・底辺が 119 のと $3276 \div 119 = 27.5294\cdots$

・底辺が 180 のとき $3276 \div 180 = 18.2$

となって、どの場合も高さが整数でないことがわかった。すなわち、(65,119,180)が２つのピタゴラス三角形の組み合わせではない。

では、ここから３辺が連続してかつ面積と各辺の長さが整数である三角形を考える。まず、その性質として、それが直角をはさむ１辺を共有する２つのピタゴラス三角形によってできているという点が挙げられる。それを証明する。

<u>**定理 33**</u>

３辺が連続しかつ面積と各辺の長さが整数である三角形(つまり、ヘロン三角形)は、直角をはさむ１辺を共有する２つのピタゴラス三角形によってできている。

［証明］

まず、このような三角形のうち最小の辺が奇数であることを示す。

背理法を用いて、最小の辺が偶数 $2k$ であるとすると三角形は $(2k, 2k+1, 2k+2)$ となる。ヘロンの公式から、三角形の面積 S は

$s = \dfrac{2k+2k+1+2k+2}{2} = \dfrac{6k+3}{2}$ とすると、

ヘロンの公式から、次式を導いて、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$16S^2 = 2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c).$$

これに、s と３辺を代入して

$$\begin{aligned}4(4S^2) &= (6k+3)(2k+3)(2k+1)(2k-1) \\ &= 4(3k^2+8k+2)(4k^2-1)+4k^2-1\end{aligned}$$

ここで、左辺は４で割り切れるが、右辺は４で割ると１余り、矛盾が生じる。したがって、三角形の最小の辺は奇数である。

そこで、最小の辺を $2k-1$ とすると、三角形は $(2k-1, 2k, 2k+1)$ となる。このとき上と同様に三角形の面積の平方は

$$S^2 = 3k^2(k^2-1)$$

となる。この等式から k^2 は S^2 の約数であることがわかる。よって、背理法を用いて k が S の約数であることがわかる。すると、S は整数 h を用いて、$S = kh$ と表せる。

一方、辺 $2k$ に対する高さを h_1 とすると、$S = kh_1$ と表すことができる。

これらの２式を比べると、$h = h_1$ であることがわかる。つまり、辺 $2k$ に対する高さは整数となることがわかる。

さらに、$S^2 = 3k^2(k^2-1)$ と $S = kh$ を比べると、

$$3k^2(k^2-1) = k^2h^2$$

ここで、

$$h^2 = 3(k^2-1) = (2k+1)^2 - (k+2)^2$$
$$h^2 = 3(k^2-1) = (2k-1)^2 - (k-2)^2$$

より

$$(2k+1)^2 = h^2 + (k+2)^2$$

$$(2k-1)^2 = h^2 + (k-2)^2$$

つまり、ピタゴラス方程式が成り立ち、$(2k+1, h, k+2)$ と $(2k+1, h, k+2)$ がピタゴラス三角形であることがわかる。これらのピタゴラス三角形をはり合わせると、$(2k-1, 2k, 2k+1)$ という三角形ができる。したがって、３辺が連続する三角形がピタゴラス三角形の組み合わせによってできていることがわかった。

(Q.E.D.)

ところで、

$$(2k+h\pm 2, 3k+2h, 4k+2h\pm 1)$$

（複号同順）

という２つの三角形を考える。

次の計算から、これらの三角形がピタゴラス方程式を満たすことがわかる。

$$\begin{aligned}&(2k+h\pm 2)^2 + (3k+2h)^2 - (4k+2h\pm 1)^2\\ &= 4k^2 + h^2 + 4 + 4kh + \pm 4h \pm 8k\\ &\quad +9k^2 + 4k^2 + 12kh\\ &\qquad -16k^2 - 4h^2 - 1 - 16kh \mp 4h \mp 8k\\ &= -3k^2 + h^2 + 3\end{aligned}$$

ここで、上の証明より、

$$3(k^2-1) = h^2$$
$$3k^2 = h^2 + 3$$

とわかるので、

$$\begin{aligned}&(2k+h\pm 2)^2 + (3k+2h)^2 - (4k+2h\pm 1)^2\\ &\quad = -3k^2 + h^2 + 3\\ &\quad = 0\end{aligned}$$

となり、ピタゴラス方程式が成り立つことがわかる。

ここで、これらの三角形は $(3k+2h)$ という辺を共有している。そこで、２つのピタゴラス三角形を組み合わせると、

$$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$$

という三角形ができる。この三角形は明らかに、３辺が連続する整数で表せる三角形である。

このことから、３辺が連続する整数である三角形があれば、新たに同じ性質をもつ三角形を求めることができるということがわかる。

例えば (3,4,5)という三角形を考える。このとき、$(2k-1, 2k, 2k+1) = (3,4,5)$ となるのは、$k=2$ のときである。また、$S=6$ から $h=3$ である。

これらの数を

$$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$$

に代入して、(13,14,15)という三角形ができる。この三角形の面積はヘロンの公式から、

$$S = \sqrt{21\times 8\times 7\times 6} = 84$$

より、確かに面積が整数になっている。

さらに、(13,14,15)から新たな三角形を作る。この場合、$k=7, h=12$ である。

よって、$(4k+2h-1, 4k+2h, 4k+2h+1)$ から(51,52,53)が得られた。この三角形の面積は、

$$S = \sqrt{78\times 27\times 26\times 25} = 1170$$

となり、面積も確かに整数になっている。

また、この方法によって３辺が連続する整数であるような三角形を無限に求められることがわかった。

では、３辺の長さと面積が整数である三角形を求めるにはどうすればよいかを考える。この問題は、各辺と面積が有理数である三角形を求めることと同値である。このように、各辺と面積が有理数で表せる三角形を**有理三角形**(rational triangle)とよぶ。

そこで、有理三角形は、別の２つの有理

三角形の組み合わせであることを証明する。

<u>定理 34</u>

有理数の辺をもつどのような三角形においても、三角形の内部に引いた高さは、それに垂直な辺を２つの有理数比に分ける。

［証明］

図 18 のような三角形(a,b,c)を考える。そして、a,bの正射影をa_1,b_1とする。

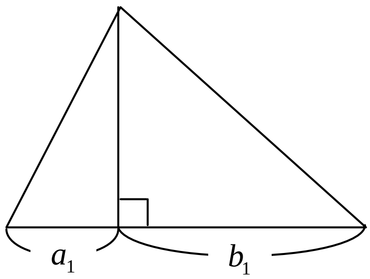


図 18

まず仮定から、

$$a_1+b_1=c \quad \cdots ①$$

であることがわかる。

高さhは、三角形(a,b,c)を２つの直角三角形に分ける。その三角形は
(a_1,h,a)と(b_1,h,b)であるので、ピタゴラス方程式から、

$$a_1{}^2=a^2-h^2, b_1{}^2=b^2-h^2$$

よって、$a_1{}^2-b_1{}^2=a^2-b^2$

ここで、①から

$$c(a_1-b_2)=(a_1+b_1)(a_1-b_1)$$
$$=a_1{}^2-b_1{}^2=a^2-b^2$$

より、$a_1-b_1=\dfrac{a^2-b^2}{c}$ となる一方、①から
ら

$$a_1=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\ ,\ \ b_1=\frac{b^2-a^2+c}{2c}$$

となる。この等式から、a_1,b_1は有理数である。

したがって、有理数の辺をもつ三角形において、三角形の内部に引いた高さは、それに垂直な辺を２つの有理数比に分けるということが証明された。 (Q.E.D.)

ここで、もし各辺だけでなく面積も有理数ならば、すべての高さも有理数になるということがわかる。

なぜなら、辺cに対する高さをhとすると、$S=\dfrac{ch}{2}$ から、$h=\dfrac{2S}{c}$ である。

したがって、辺と面積が有理数ならば高さも有理数になることがわかる。

すると、ある有理三角形を考えたとき、辺cに対する高さをhとすると、上の証明から、分けられる２つの直角三角形は各辺が有理数となり、有理三角形はそれとは別の２つの有理三角形の組み合わせによってできているということが証明された。

次に、各辺と中線が有理数である三角形について考える。

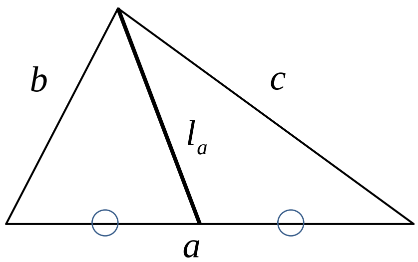


図 19

辺aへおろした中線をl_aとする。すると、

中線定理より、

$$b^2+c^2=2\left(l_a+\frac{a^2}{4}\right),$$

$$4{l_a}^2=2(b^2+c^2)-a^2$$

この公式から、各辺と中線が有理数である三角形が求められる。

例えば、(68,85,87)が中線と各辺が有理数である三角形であることがわかる。実際、

$$l_a=79,\ l_b=\frac{131}{2},\ l_c=\frac{127}{2}$$

とすべての中線が有理数になっている。

他にも、(127,131,158)や(204,255,261)という三角形も中線と各辺が有理数になっている。

５－２．自然数の逆数を辺としてもつ直角三角形

まず$\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$の直角三角形について考える。三平方の定理より、

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}\quad\cdots①$$

となる。

これを変形した$x^{-2}+y^{-2}=z^{-2}$より、$x^{-2}<z^{-2}$がわかる。これを解くと、$z<x$となる。

ここで、z,xの最大公約数dと互いに素な２つの数a,cを用いて、$x=da,\quad z=dc$と表すことができる。

すると①より、$\begin{array}{l} y^2z^2+x^2y^2=x^2y^2 \\ y^2\left(x^2-z^2\right)=x^2z^2 \end{array}$ ゆえ、

$$y^2\left(a^2-c^2\right)=(dac)^2\quad\cdots②$$

このことから、y^2が$(dac)^2$の約数である。

よって、yはdacの約数であるといえる。

したがって、ある整数bが存在して、

$yb=dac\quad\cdots$③となる。

これを②に代入すると、

$y^2\left(a^2-c^2\right)=y^2b^2$， $a^2-c^2=b^2\quad\cdots$④

a,cは互いに素な数なので、b,cも互いに素である。よって、④を変形すると、

$b^2+c^2=a^2\quad\cdots$⑤となる。

つまり、三角形(b,c,a)は既約なピタゴラス三角形である。だから、定理２より、互いに素な整数$m,n\ (m<n)$によって、

$$\begin{cases} a=m^2+n^2 \\ b=m^2-n^2 \\ c=2mn \end{cases}\quad\cdots⑥$$

$$\begin{cases} a=m^2+n^2 \\ b=2mn \\ c=m^2-n^2 \end{cases}\quad\cdots⑦$$

のどちらかが成り立つ。

またa,b,cは互いに素であり、⑤からbとacは互いに素でなければばらない。すると、③より、dはbで割り切れなければならない。だから、自然数δが存在し、$d=b\delta$が成り立つ。

$$x=da=\delta ab,\ y=\delta ac,\ z=dc=\delta bc$$

が成り立つので⑥より、

$$x=\left(m^2+n^2\right)\left(m^2-n^2\right)\delta$$
$$y=2mn\left(m^2+n^2\right)\delta$$
$$z=2mn\left(m^2-n^2\right)\delta$$

また、⑦より、

$$x=2mn\left(m^2+n^2\right)\delta$$
$$y=\left(m^2+n^2\right)\left(m^2-n^2\right)\delta$$
$$z=2mn\left(m^2-n^2\right)\delta$$

を得る。

一方、任意の自然数$m,n,\delta\ (n<m)$に対して上の等式により、x,y,zを定義し、等式⑥，⑦によりb,c,aを定義すると、$x=\delta ab, y=\delta ac, z=\delta bc$になる。こうして、得られた$x,y,z$の値は、先程の方程式$y^2(x^2-z^2)=x^2z^2$および$b^2+c^2=a^2$を満たすから、$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$も満たす。

したがって、方程式$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$のあらゆる正の整数解は、等式

$$x=(m^4-n^4)\delta$$
$$y=2mn(m^2+n^2)\delta$$
$$z=2mn(m^2-n^2)\delta$$

あるいは、

$$x=2mn(m^2+n^2)\delta$$
$$y=(m^4-n^4)\delta$$
$$z=2mn(m^2-n^2)\delta$$

から得られる。ここで、δは任意の自然数であり、m,nをみたす$m>n$は互いに素な整数である。

実際に直角三角形を求める。最も小さい整数解を求めるために、$m=2,n=1,\delta=1$とおく。すると上の式より、$x=80,$ $y=60,$ $x=15, y=20, z=12$となる。よって、$\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}=\frac{1}{12^2}$が得られる。

ちなみに$m=3,n=1,\delta=1$のときは、$z=48$なので、$\frac{1}{80^2}+\frac{1}{60^2}=\frac{1}{48^2}$が得られる。

また、$m=3,n=2,\delta=1$のときは、$x=65, y=156, z=60$であるので、$\frac{1}{65^2}+\frac{1}{156^2}=\frac{1}{60^2}$が得られる。

また、３辺の長さが平方数の逆数の場合について考える。上と同様に、ピタゴラスの定理より、$\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}=\frac{1}{z^4}$が成り立つ。

しかし、フェルマーの定理より上の式を満たすx,y,zは存在しない。よって３辺の長さが平方数の逆数であるような直角三角形は存在しない。

５－３．各辺と対角線が自然数になる直方体

１つのピタゴラス三角形があれば、そこから各辺および、対角線が自然数である長方形を得ることができる。

また逆に、そのような長方形からピタゴラス三角形を得ることができる。この問題を３次元空間と認識すると各辺と対角線が自然数で表せられる直方体をどのように見つけるかという問題になる。

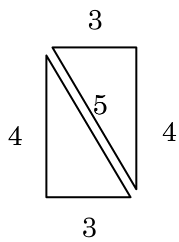


図 20

直方体の各辺をx,y,z、また対角線をtとすると

$$x^2+y^2+z^2=t^2$$

が成り立つ。逆にx,y,zおよびtが上の方程式を満たすとx,y,zは直方体の辺の長さとなり、tはその対角線の長さとなる。

さらに、各辺と対角線が自然数で表すことができる直方体を求めることは、上の方程式を満たす整数解を求めることと同値である。

そのために、いくつかの準備を行う。

補題Ⅷ

自然数 x, y, z, t に対して、方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ が成り立つとき、x, y, z のうち少なくても２つは偶数である。

［証明］

まず、すべてが奇数であると仮定する。奇数の２乗は４で割ると１余るため $x^2+y^2+z^2$ を４で割ると３余ることがわかる。しかし、t^2 は平方数であるため、等号は成り立たない。

次に１つだけ偶数とすると $x^2+y^2+z^2$ は４で割ると２余る。しかし、t^2 は平方数であるためこちらも等号が成り立たない。

よって x, y, z のうち少なくとも２つは偶数であることがわかった。

補題Ⅸ

自然数 x, y, z, t に対して、方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ が成り立つとき、x, y, z, t のうち少なくても１つは3の倍数である。

［証明］

x, y, z のうち、どの１つも３の倍数でないと仮定するとき、t は３で割り切れなければならないことを示す。

まず、3の倍数でない数を２乗すると、３で割ると１が余る。x, y, z のいずれも３で割り切れないのだから、t^2 は３で割り切れる。したがって、t は３の倍数でなければならない。

よって、x, y, z, t のうち少なくとも１つは３の倍数であることがわかった。

(Q.E.D.)

補題Ⅹ

任意の自然数 x に対して、方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ を満たすような３数 y, z, t の組が無数に存在する。

n を任意の自然数とする。

（ｉ）x が奇数であるとき

$$x,\ y=2n,\ z=\frac{x^2-1}{2}+2n^2,$$
$$t=\frac{x^2-1}{2}+2n^2+1$$

は明らかに自然数であり、方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ を満たす。

（ii）x が偶数であるとき

$$x,\ \ y=2n+1,\ z=\frac{x^2}{2}+2n^2+2n,$$
$$t=\frac{x^2}{2}+2n^2+2n+1$$

は明らかに自然数であり、方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ が成り立つ。

(Q. E. D.)

補題Ⅺ

任意の自然数の組 x, y に対して、方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ を満たすような z, t が存在する。

［証明］

（ｉ）２数 x, y がともに偶数のとき

x^2+y^2 は４で割り切れるから、

$$z=\frac{x^2+y^2}{4}-1,\ \ t=\frac{x^2+y^2}{4}+1$$

は自然数であり、x, y, z, t は方程式 $x^2+y^2+z^2=t^2$ を満たす。

（ii）２数 x, y のうち一方が偶数、もう一方が奇数であるとき

（i）このとき、数$x^2+y^2\pm1$は偶数となり、

$$z=\frac{x^2+y^2-1}{2},\ t=\frac{x^2+y^2+1}{2}$$

は自然数であり、x, y, z, tは方程式

$x^2+y^2+z^2=t^2$を満たす。

(Q. E. D.)

そこで、これまでの式を用いて直方体を求めてみよう。ここでは、xが奇数の場合を考える。よって、$x=3$，$n=4$としてみよう。

$$x,\ y=2n,$$
$$z=\frac{x^2-1}{2}+2n^2,$$
$$t=\frac{x^2-1}{2}+2n^2+1$$

より、$x=3$，$y=2\times4=8$，

$$z=\frac{3^2-1}{2}+2\times4^2=4+32=36$$

$$t=\frac{3^2-1}{2}+2\times4^2+1=4+32+1=37$$

となり、$(x, y, z, t)=(3, 8, 36, 37)$が求められた。実際、この４数は

$x^2+y^2+z^2=t^2=1369$を満たしている。

ここまでを整理すると、直方体の２辺を表す数は両方ともが奇数であるという場合以外は、他の辺と対角線を表す残りのz, tも与えることができる。

定理 35

対角線が自然数で表されて、３辺が連続するような直方体は存在しない。

［証明］

いま、、直方体の３辺を$(y-1, y, y+1)$、対角線を整数tで表すとすると、

$$(y-1)^2+y^2+(y+1)^2-t^2$$

$$3y^2+2=t^2$$

が成り立つ。

ここで、yが奇数のときは、y^2を８で割ると１余り、左辺$3y^2+2$を８で割ると５余る。しかし、8 で割って５余る数は平方数にはなりえない。また、yが偶数のときは、左辺$3y^2+2$は４で割ると２余る。しかし、そのような数も平方数にはなり得ない。

(Q.E.D.)

最後に、各辺が自然数で表される直方体の対角線について、次の事実が成り立つ。

定理 36

各辺が自然数で表せるような直方体の対角線は、2^kまたは$2^k\times5$のような形にはならない。ここで、kは０以上の整数である。

［証明］

負でない整数kが存在して、$t=2^k$とするとき、方程式$x^2+y^2+z^2=t^2$が自然数の解をもつと仮定する。

このようなkの中には最小のものmが存在する。しかも方程式$x^2+y^2+z^2=t^2$の左辺の和$x^2+y^2+z^2$は、x, y, zが自然数のときは３より小さくはなり得ないから、$m>2$である。

$x^2+y^2+z^2=2^{2m}$で、３数x, y, zのうち少なくと２つは偶数であることを考えると、残りの１つも偶数でなければならないことがわかる。

よって、ある自然数x_1, y_1, z_1を用いて、$x=2x_1$，$y=2y_1$，$z=2z_1$とかける。

すると、$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=\left(2^{m-1}\right)^2$.

このとき、不定方程式が自然数解をもつ

という条件でのmの最小性に反するため、直方体の対角線は$t=2^k$という形にはならないことが証明された。

次に、$t=2^k\times 5$という形にはならないことを証明する。そこで、同様に$t=2^k\times 5$とするとき、条件を満たすkの最小値mを考える。

まず$m=0$のときを考える。このとき、x, y, zについて

$$x^2+y^2+z^2=5^2$$

が成り立つことがわかる。

ここで、補題Ⅸからx, y, z, tのうち1つは3の倍数でなければならず、tは3の倍数ではないので、xが3の倍数であると仮定する。

すると、

$$y^2+z^2=t^2-x^2=5^2-3^2=4^2$$

が成り立ち、$(y, z, 4)$がピタゴラス方程式を満たす。しかし、斜辺が4であるピタゴラス三角形は存在しないので矛盾する。したがって、$m=0$のときは成り立たないことがわかる。

次に$m>0$の場合を考えよう。

$x^2+y^2+z^2=t^2$ より、

$$x^2+y^2+z^2=2^{2m}\times 25$$

が成り立つ。ここで、右辺は偶数なので、x, y, zはすべて偶数でなければならない。

よって、x_1, y_1, z_1という整数が存在して、$x=2x_1$，$y=2y_1$，$z=2z_1$ を満たすことがわかる。

よって、x_1, y_1, z_1の3数は

$$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=\left(2^{m-1}\times 5\right)^2$$

を満たす。しかしこれは、mが不定方程式

$$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=\left(2^k\times 5\right)^2$$

を満たすkのうち最小であるということに反する。したがって、直方体の対角線は$t=2^k\times 5$という形にもならないことが証明された。 (Q.E.D.)

直方体の対角線について、上述とは逆に、辺が整数により表すことができる直方体の対角線の長さになり得ないのは、2^kという形と$2^k\times 5$という形のみであるということを、フルヴィッツ（A.Hurwitz）が証明している。

つまり、100 以下の整数について考えると、1,2,4,5,8,10,16,20,32,40,64,80 のような数が直方体の対角線の長さになり得ないのである。

６．今後の課題

斜辺がn以下であるピタゴラス三角形の個数を精度のよい近似式として求めることができた。しがし、定数τの値はあくまでコンピュータを用いて絞り込んだ結果なので計算によってτの値を求めたい。また、τの値にどのような意味があるのかについても考察を深めたい。

７．参考文献

[1]「ピタゴラスの三角形」, B. シェルピンスキー著，銀林浩訳，東京図書 (1993)

[2] 「はじめての数論」，J. H. シルヴァーマン著，鈴木治郎訳，ピアソン・エデュケーション(2007)

[3] 「数論入門」, 北村泰一著, 槙書店(1965)

[4]「数論入門」,芹沢正三,講談社ブルーバックス

[5] *Asymptotic Evaluation of certain Totient Sums*, D.N.Lehmer, American J. of Math. （1900）
[6] 「1 つの角の大きさが決まっていて、3 辺の長さがすべて整数である三角形のつくり方」，山田　潤

８．謝辞

顧問の川口先生には、整数論に関する基本的な部分を説明していただき、各発表会および本稿について様々なアドバイスをいただきました。また、サイエンス研究会物理班武田君には、データを求める際の基本的なパソコンの使用方法、プログラミングについて説明していただきました。ありがとうございました。