完全数について

1年C組　小椋　晃一
指導教員　川口　慎二

１.要約

サイエンス研究会数学班1年生は完全数について学習している。今回は完全数を扱い、新たなことを見つけることを目標とした。その過程において、完全数に関する考察をすることができたので紹介する。

キーワード　完全数、約数、準完全数、概完全数、奇数、k倍完全数

２. 研究の背景と目的

完全数とはその数nの正の約数の和が$2n$と等しくなる自然数のことであり、6,28,496・・・と続く。

私は、完全数に先行興味をもった。すると、完全数に関する研究がいくつもあることを知った。そこで、基本的な内容と発見できたことを本稿にまとめることにした。

３. 研究内容

3.1 定義

■約数

通常、整数αに対して、$\alpha=\beta\chi$を満たす整数β,χが存在するとき、β,χをαの約数というが、今回は自然数αに対して$\alpha=\beta\chi$を満たす自然数β,χが存在するとき、β,χをαの約数という。つまり、負の数について考えないことにする。

■準完全数

ある数nの約数の和が$2n+1$になるとき、その数nを**準完全数**という。未だに見つかっていない数である。

■概完全数

ある数nの約数の和が$2n-1$になるとき、その数nを**概完全数**という。具体的には、$4,8,16,32\cdots$があるが、2^x以外には見つかっていない数である。

■k倍完全数

本稿では、kを整数として、ある数nの約数の和がknになるとき、その数を**k倍完全数**という。

■メルセンヌ素数

2^n-1になっている素数を**メルセンヌ素数**という。例えば、$3,7,31\cdots$がある。

3.2 偶数の完全数

<u>命題</u>

2^n-1が素数ならば$2^{n-1}(2^n-1)$は完全数である。

（証明）
$2^{n-1}(2^n-1)$ は既に素因数分解されており、約数も素因数分解ができるか素数であるため、小さい順に

$$1,2,4,8,\cdots,2^{n-1},(2^n-1),2(2^n-1),$$
$$4(2^n-1)\cdots 2^{n-1}(2^n-1)$$

となる。$1,2,4,8,\cdots,2^{n-1}$ の和は、
$$2^n \div 2 = 2^{n-1}, 2^{n-1} \div 2 = 2^{n-2}, \cdots$$
より、2^n-1、
$(2^n-1),2(2^n-1),4(2^n-1)\cdots 2^{n-1}(2^n-1)$
の和は分配法則より $(2^n-1)^2$ となるので
$2^n-1+(2^n-1)^2 = 2^n(2^n-1)$
より $2^{n-1}(2^n-1)$ の約数の総和は
$2^n(2^n-1)$ となり、$2^{n-1}(2^n-1)$ の２倍であるため、$2^{n-1}(2^n-1)$ は素数である。

$(Q.E.D)$

これは有名な定理であるが、偶数の完全数に関する定理である。次項からは奇数の考察を述べていく。

3.3 奇数の完全数

命題

奇数の完全数は平方数ではない

（証明）

平方数である奇数の完全数を n とおいたとき、その約数を小さい順に

$1,n_1,n_2,\cdots,n_a,\sqrt{n},\cdots,n_{m-1},n_m$ とする。このとき、n_m は n 自身になり、
$n_1 \times n_{m-1} = n,\ n_2 \times n_{m-2} = n, \cdots$ となる。
また、奇数の約数は奇数であるため、$n_1,n_2,\cdots$ もすべて奇数である。この約数を縦同士を掛けると n になるように並べ替える。$\sqrt{n}$ も約数になるが、掛けるのはおなじ $\sqrt{n}$ となるため

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & n_1, & n_2, & \cdots, & n_{a-1}, & n_a & ,\sqrt{n} \\ n, & n_{m-1}, & n_{m-2}, & \cdots, & n_{m-a+1}, & n_{m-a} & \end{array}$$

この約数の和は奇数個の和ゆえ奇数である。しかし、奇数の完全数 n の約数の和は偶数 $2n$ でなければならない。したがって、奇数の完全数は平方数ではない。$(Q.E.D)$

3.4 奇数の準完全数および概完全数

命題

奇数の準完全数と概完全数はともに平方数である。

（証明）

約数の和が奇数になるが、約数は全て奇数で偶数個あるため和が奇数にならない。約数の和を奇数にするにはもう一つ奇数を足す必要があり、平方数である必要があるため、奇数の準完全数と奇数の概完全数は平方数である $(Q.E.D)$

3.5 奇数の k 倍完全数

まず、3倍完全数 n をつくるためには、n の約数の和が奇数である必要がある。これは平方数でないと約数の和は奇数にならない。

約数の和が $3n$ ということは n を除いた

$$\begin{array}{cccccc} 1, & n_1, & n_2, & \cdots, n_{a-1}, & n_a, & \sqrt{n} \\ & n_{m-1}, & n_{m-2}, & \cdots, n_{m-a+1}, & n_{m-a} & \end{array}$$

の和が $2n$ になればいいということであり、

$n_{m-1}+n_{m-2}+\cdots+n_{m-a}>n_1+n_2+\cdots+n_a$
なので

$$n_{m-1}+n_{m-2}+\cdots+n_{m-a}+\sqrt{n}>n$$

となる。
$n_1\times n_{m-1}=n,\quad n_1\geq 3$ なので
$\frac{1}{3}n\geq n_{m-1},\ \frac{1}{5}n\geq n_{m-2},\cdots$ となり
n 以上になるには

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\geq 1$$

より、７つ必要なので

$n_{m-1},n_{m-2},\cdots,n_{m-a},\sqrt{n}$ の約数の数が７つ以上になる。

　となると、n_1,n_2・・n_a は6つ以上になるため奇数の3倍完全数の約数は13個と n と1をあわせた15個以上となる。
同様に奇数の４倍完全数についても考えると、

$$n_{m-1}+n_{m-2}+\cdot\cdot n_{m-a}+\sqrt{n}>1.5n$$

になるようにすればよいため、計算した結果より、約数は41個以上となる。
奇数の5倍完全数についても、113個以上の約数があることがわかった。

４．今後の課題

　今回研究するにあたって約数を並び替えるという操作をしたが、その際約数が奇数に限られるように「奇数の」と限定するという方法を用いた。この場合主にある偶数の完全数については考えていなかったため、かなり強い条件のもとでの証明になってしまった。偶数についても今後自分で挑戦したい。

５．参考文献

　美しくて感動する数の教室

６．謝辞

　今回の研究にあたり顧問の川口先生をはじめとした方々にアドバイスをいただきました。ありがとうございました。