

正五角形と黄金比

1 年 B 組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 1 年生は、三角比について学習している。今回は、正五角形と黄金比について理解することを目標とし、その理解のために三角比、黄金比、二次方程式、について学習した。また、その考察もできたので、紹介する。

キーワード 三角比、 36° 、黄金比、二次方程式

2. 研究の背景と目的

正五角形の一辺の長さとお角線の長さの比が黄金比になっているということは、広く知られていることである。そこについて私は、なぜそうなるか興味をもったからである。

3. 研究内容

3.1 基本的な定義と定理

■黄金比

黄金比とは比 $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のことであり

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を ϕ で表すことが多い。

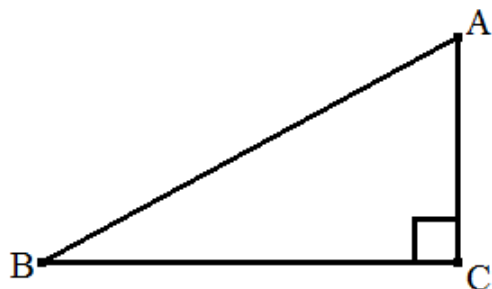
ϕ には、 $\phi^2 + 1 = \phi + 1$ 、 $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ という

不思議な性質をもっている。

■三角比

下図の AB を斜辺とする直角三角形 ABC において、 $\angle ABC$ を θ とする。このとき、

$\sin \theta = \frac{AC}{AB}$ 、 $\cos \theta = \frac{BC}{AB}$ 、 $\tan \theta = \frac{AC}{BC}$
と定義する。



定理 1 (ピタゴラスの定理)

直角三角形 ABC において、 AB を斜辺とする。このとき、 $AB^2 = BC^2 + CA^2$ が成り立つ。

証明

下図で、 $AB = z$ 、 $AC = x$ 、 $BC = y$ とする。このとき、4 つの直角三角形は、すべて

合同である。すると、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2}xy$

と表すことができる。しかし、

$\frac{1}{4}\{(x+y)^2 - z^2\}$ と表すことができる。

よって、

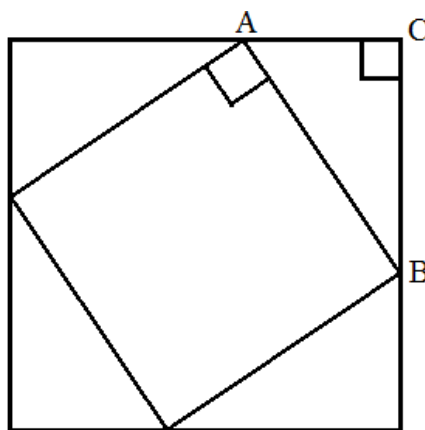
$$\frac{1}{4}\{(x+y)^2 - z^2\} = \frac{1}{2}xy$$

これを変形させて、

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 2xy$$

したがって、

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (Q.E.D)$$



定理 2

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

証明

直角三角形 ABC で、AB を斜辺、

$\angle ABC$ を θ とする。AB=1 とすると、

$$\sin \theta = \frac{AC}{1} = AC \quad \cos \theta = \frac{BC}{1} = BC$$

定理 1 より、 $1^2 = AC^2 + BC^2$ よって

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

(Q.E.D)

定理 3 (加法定理)

$$(1) \sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

証明 (1)

下図で四角形 ACDF は長方形で、

$\angle BGD = 90^\circ$ 、 $\angle BDG = b$ 、 $\angle GDF = a_1$ 、

$\angle BGA = a_2$ とし、いま、BD の長さを 1 とする。

$a_1 + \angle BGD (= 90^\circ) = \angle AGD$ より、

$$a_1 + 90^\circ = \angle BGD (= 90^\circ) + a_2$$

ゆえに、

$$a_1 = a_2$$

よって、 a_1 と a_2 の角は等しい。

$$\sin(a_1 + b) = \frac{BE}{BD} = BE = AF \text{ より、} AF$$

の長さが $\sin(a_1 + b)$ となる。まず、

$$GB = \sin b \text{ より、} \cos a_2 = \frac{AG}{\sin b}$$

ゆえに、

$$AG = \cos a_2 \sin b$$

また、 $DG = \cos b$ より、

$$\sin a_1 = \frac{GF}{\cos b} \text{ ゆえに、}$$

$$GF = \sin a_1 \cos b$$

よって、

$$BE = AG + GF = \cos a_1 \sin b + \sin a_2 \cos b,$$

$a_1 = a_2$ なので、

$$\sin(a_1 + b) = \cos a_1 \sin b + \sin a_1 \cos b$$

(Q.E.D)

証明 (2)

$$\cos(a_1 + b) = \frac{DE}{DB} = DE \text{ より } DE \text{ の長さ}$$

が $\cos(a_1 + b)$ となる。まず、 $DG = \cos b$

$$\text{より、} \cos a_1 = \frac{DF}{\cos b} \text{ ゆえに、}$$

$$DF = \cos a_1 \cos b$$

また、 $BG = \sin b$ より、

$$\sin a_2 = \frac{BA}{\sin b} \text{ ゆえに、}$$

$$DF = \cos a_1 \cos b,$$

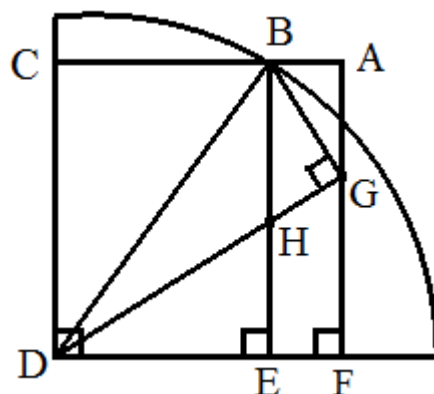
よって、

$$DE = DF - BA = \cos a_1 \cos b + \sin a_1 \sin b$$

つまり、

$$\cos(a_1 + b) = \cos a_1 \cos b + \sin a_1 \sin b$$

(Q.E.D)



■偶関数と奇関数

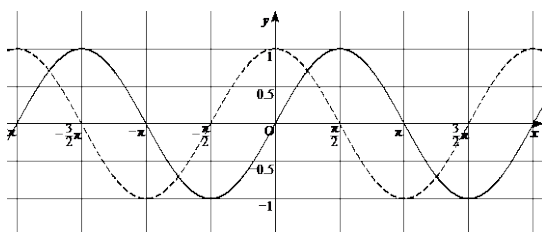
関数 $y = f(x)$ を考える。すべての x に対して $-f(x) = f(x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ を偶関数という。偶関数のグラフは y 軸に関して対称となる。

また、すべての x に対して

$-f(x) = f(-x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ を奇関数という。奇関数のグラフは、原点に関して対称となる。

例えば、 $y = \sin x$ は奇関数、 $y = \cos x$ は偶関数である。(下図)

実線 $\cdots y = \sin x$ 破線 $\cdots y = \cos x$



定理 4

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

証明

定理 2 より、

$$\sin(a-b)$$

$$= \sin\{a + (-b)\}$$

$$= \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$$

ここで、

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x$$

より、

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

同様に、

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

(Q.E.D)

定理 5 (二次方程式の解)

x の二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0, a, b, c \in R)$$

の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる。

証明

$ax^2 + bx + c = 0$ を平方完成すると、

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0,$$

よって、

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Q.E.D)

■頂角が 36° の二等辺三角形

下図の直角二等辺三角形 ADC において、

$$\angle DAC = 36^\circ, \angle ADB = \angle BDC$$

とする。

$$\angle ADC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

よって、 $\angle BDC = \angle ADB = 36^\circ$

ゆえに、

$$AB = BD$$

また、 $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 36^\circ$

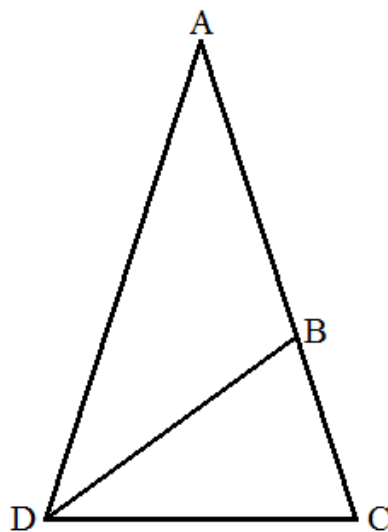
ゆえに、

$$BD = DC$$

したがって、

$$AB = BD = DC$$

が成り立つ。



3.2 正五角形と黄金比

下図で、 $\angle AGF = 90^\circ$ 、直線 HF は、直線

DC に平行である。すると、

$$\angle ABC = \angle AED = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$$

よって、

$$\angle CAB = \angle DAE = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

ゆえに、

$$\angle DAC = 180^\circ - 36^\circ \times 2 = 36^\circ$$

すると、先程の事実から、

$$AF = FD = DC$$

となる。

$\angle DAC = \angle FDC$ であり、

$AF = FD = DC = AH$ より、

$$\triangle DFC \equiv \triangle AHF$$

となる。また、

$\triangle ADC$ の $\triangle AHF$ なので、いま $DC = 1$ 、

$AC = x$ とすると、

$$x:1=1:(x-1)$$

よって、

$$x^2 - x - 1 = 0$$

となる。二次方程式の解の公式を用いると、

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

いま、 $x > 0$ なので、 $AC = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ これは

黄金数 ϕ と同じ値である。これで、

$AC:CD = 1:\phi$ が示された。ちなみに、

$$AF = 1, \quad AG = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ より、}$$

$$GF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

よって、

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

となる。また、点 A から辺 CD へ下ろした垂線の足を I とする。すると、

$$AC = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad IC = \frac{1}{2} \text{ より、}$$

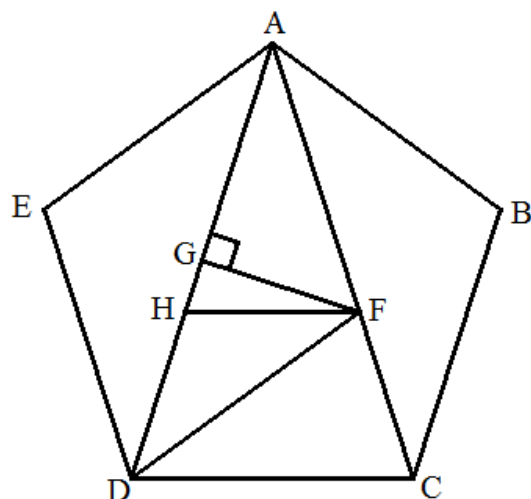
$$\begin{aligned} IA &= \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5} - 1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

なので、

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{1 + \sqrt{5}}, \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}$$

となる。



3.3.1 考察①

ここで、私は、 $\sin 18^\circ, \cos 18^\circ$ の値と

定理 4 を用いて、 $\sin 3^\circ, \cos 3^\circ$ を求めることができないかと考えた。

■ $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ を求める。

左図のような、 $\angle ACB = 30^\circ$ 、

$\angle ABD = 90^\circ, \angle ADB = 15^\circ$ となる、

直角三角形 ADB を考える。

$\angle CAB = 60^\circ, \angle DAB = 75^\circ$ より、

$$\angle DAC = 15^\circ$$

したがって、

$$AC = CD$$

いま、 $AB = 1$ とする。すると $AC = 2$ より

$$CB = \sqrt{3} \text{ ゆえに、} DB = 2 + \sqrt{3}$$

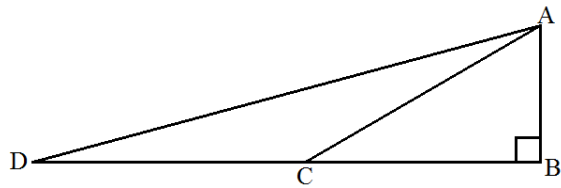
となる。よって、

$$AD = \sqrt{1^2 + (2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

よって、

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}, \quad \cos 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

となる。



■ $\sin 3^\circ, \cos 3^\circ$ を求める。

先程の、 $\sin 18^\circ, \cos 18^\circ, \sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ の値を定理 4 にあてはめると、
 $\sin(18-15)^\circ$

$$\begin{aligned} &= \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \frac{1 \cdot (2 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} - \frac{1 \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}} \end{aligned}$$

$\cos(18-15)^\circ$

$$\begin{aligned} &= \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}(2 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} + \frac{1}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} \\ &= \frac{2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \sin 3^\circ &= \frac{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}} \\ &\approx 0.05233595624 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3^\circ &= \frac{2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{30}} \\ &\approx 0.9986295348 \end{aligned}$$

3.3.2 考察②

さらに、定理 4 を用いて、 $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ を求めることができないかと考えた。

定理 6 (3 倍角の公式)

$$\sin 3a = 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

証明

定理 4 で $b = 2a$ を代入すると、

$$\sin 3a$$

$$= \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a$$

$$\begin{aligned} &= \sin a(\cos a \cos a - \sin a \sin a) \\ &\quad + \cos a(\sin a \cos a + \cos a \sin a) \end{aligned}$$

$$= \sin a \cos^2 a - \sin^3 a + 2\sin a \cos^2 a$$

$$= 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a$$

ここで、定理 2 より、 $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ なので、

$$\sin 3a = 3\sin a(1 - \sin^2 a) - \sin^3 a$$

$$= 3\sin a - 4\sin^3 a \dots \textcircled{1}$$

同様に、

$$\cos 3a$$

$$= \cos a \cos 2a + \sin a \sin 2a$$

$$= \cos a(\cos^2 a - \sin^2 a)$$

$$- \cos a \cdot 2\sin a \cos a$$

$$= \cos^3 a - \cos a(1 - \cos^2 a) - 2\cos a(1 - \cos^2 a)$$

$$= 4\cos^3 a - 3\cos a \dots \textcircled{2}$$

(Q.E.D)

■ $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$

ここで、①、②に $a = 1^\circ$ を代入すると、

$$\sin 3^\circ = 3\sin 1^\circ - 4\sin^3 1^\circ,$$

$$\cos 3^\circ = 4\cos^3 1^\circ - 3\cos 1^\circ$$

しかし、 $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ を求めるためには、上の三次方程式を解かなければならない。そこで、その方程式を関数電卓に計算させた。すると、それぞれ 3 つの解を得た。

$$(\sin 1^\circ, \cos 1^\circ)$$

$$= (-0.8746197071, 0.9998476952)$$

$$(0.8571673007, -0.4848096202)$$

$$(0.01745240644, -0.5150380749)$$

まず、 $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ の値が負になることはありえない。

$$\text{よって、} \cos 1^\circ \approx 0.9998476952$$

になることがわかる。また、 $\sin 1^\circ \approx 0.86$ となる直角三角形を描くと下図のようになり不適だとわかる。

$$\text{よって、} \sin 1^\circ \approx 0.01745240644$$

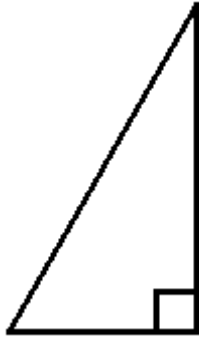
となる。

つまり、

$$\sin 1^\circ \approx 0.01745240644,$$

$$\cos 1^\circ \approx 0.9998476952$$

と求められた。



3.4 正 n 角形の面積

三角比を用いて、正 n 角形の面積を求めることができないかと私は考えた。下図の、正 n 角形を n 個の二等辺三角形に分けたものの1つ分の面積を考える。 $AC = CB = a$

とすると、まず、 $\angle ACD = \frac{360}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180}{n}$

より、 $\sin \frac{180}{n} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{a}$

したがって、 $AD = a \sin \frac{180}{n}$

ゆえに、

$$AB = 2a \sin \frac{180}{n}$$

また、 $\cos \frac{180}{n} = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{a}$

ゆえに、

$$DC = a \cos \frac{180}{n}$$

よって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\begin{aligned} & 2a \sin \frac{180}{n} \cdot a \cos \frac{180}{n} \cdot \frac{1}{2} \\ &= a^2 \sin \frac{180}{n} \cos \frac{180}{n} \end{aligned}$$

定理3を用いて、

$$\begin{aligned} & a^2 \sin \frac{180}{n} \cos \frac{180}{n} \\ &= a^2 \cdot \sin \frac{360}{n} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{360}{n} \end{aligned}$$

よって、正 n 角形の面積は、

$$\frac{1}{2} a^2 n \sin \frac{360}{n}$$

となる。また、 AB の長さを b とすると、

$$AD = \frac{b}{2} \text{ より、 } \tan \frac{180}{n} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{2DC}$$

$$\text{よって、 } DC \tan \frac{180}{n} = \frac{b}{2}$$

ゆえに

$$DC = \frac{b}{2 \tan \frac{180}{n}}$$

よって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$b \cdot \frac{b}{2 \tan \frac{180}{n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{b^2}{4 \tan \frac{180}{n}}$$

よって、正 n 角形の面積は、

$$\frac{b^2 n}{4 \tan \frac{180}{n}}$$

とも表すことができる。

4. 今後の課題

今回、 $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ の値を求めることができた。なので、さらに細かい角度についても求めることや、正 n 角形以外の形でも面積を三角比を用いて表すことができるのが今後の課題である。

5. 参考文献

- [1] 三角形の七不思議 細矢 治夫 講談社
- [2] 図解雑学フーリエ変換 佐藤 敏明 ナツメ社

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さった顧問の川口先生ありがとうございました。また、SSHの先輩方にも、パソコンの使い方など、さまざまなことを教えてくれました。ありがとうございました。