カプレカー変換に関する考察

2年A組 市田 美玲

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班2年生はカプレカー変換について学習している。今回は3, 4桁のカプレカー変換と変換後の各桁の和の一般化について学習した。また、2, 5桁のカプレカー変換に関する考察ができたので紹介する。

キーワード カプレカー変換、カプレカー定数、ソート

2. 研究の背景と目的

私は顧問の先生からカプレカー変換について教えていただき、興味を持った。このカプレカー変換を続けるとどのような値になるのか疑問に思い、桁数ごとに考察しようと考えた。そこで、3, 4桁のカプレカー変換と n 桁の変換後の各桁の和について先行研究から学習し、2, 5桁のカプレカー変換について考察を行ったので紹介する。

3. 研究内容

3.1 基本事項

■カプレカー変換

自然数において、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作のことをいう。例えば、265を変換すると、 $652 - 256 = 396$ より396となる。以降、これを**変換**と呼ぶ。

ただし、ぞろ目は最初の変換で0になるので、除いて考える。また、 n 桁の変換を考える際に変換により1桁減ってしまったとしても、 n 桁とみなして考える。例えば、99を099とみなして、 $445 \rightarrow 99 \rightarrow 891$ と変換する。

■ソート

各桁の数字を並びかえて、最大の数にする操作をいう。

■カプレカー定数

1回の変換によって、値が変化しない自然数のことをいう。例えば、 $495 (954 - 459 = 495)$ などである。

3.2 2桁のカプレカー変換

■2桁のカプレカー定数を求める

命題1

2桁のカプレカー定数は存在しない。

[証明]

2桁の自然数のソート後の値を $10a + b$ (ただし、 $9 \geq a > b \geq 0$ かつ $a, b \in \mathbb{Z}$)

とおき、これを $\langle ab \rangle$ と表記する。同様に変

換後の値を $\langle pq \rangle$ とおく。 $a > b$ より繰り返りに注意して変換を筆算で行うと次のようになる。

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 a-b-1 \quad b-a+10 \\
 (p) \qquad (q) \\
 \text{筆算 1}
 \end{array}$$

$\langle ab \rangle$ がカプレカー定数のとき、 a, b それぞれの値が p, q のどちらかと等しくなる。

$a = p$ ならば、筆算 1 より

$p = a - b - 1 = a$ より $b = -1$ となり矛盾。

したがって、 $a = q, b = p$ とすると、

$$\begin{cases} b - a + 10 = a \\ a - b - 1 = b \end{cases} \text{この連立方程式を解くと、}$$

$a = \frac{19}{3}, b = \frac{8}{3}$ となり $a, b \in \mathbb{Z}$ に矛盾。

よって、2桁のカプレカー定数は存在しない。(Q.E.D.)

■変換を続けるとどうなるのか

[考察]

2桁のカプレカー定数は存在しないことが示されたが、任意の2桁の数 $\langle ab \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかを考える。

$\langle ab \rangle$ を変換すると筆算 1 より、

$$10(a-b-1) + b - a + 10 = 9(a-b)$$

となる。ここから、変換後の値は $a-b$ の値によって決まることがわかる。 $a-b$ は自然数 ($a-b \in \mathbb{N}$ かつ $1 \leq a-b \leq 9$) なので、この値によって場合分けし、変換を繰り返すと次のようになる。

$a-b$	変換後の値のソート後	2回目
-------	------------	-----

1	90	81
2, 9	81	63
3, 8	72	45
4, 7	63	27
5, 6	54	9

表 1

3回目の変換後の値は、2回目の変換後の値から計算でき、それ以降も同様に計算できる。

よって、表 1 から、すべての2桁の自然数は変換を繰り返すと

$$9 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 9 \rightarrow \dots$$

と循環し、さらにそれは最大2回目の変換でその循環に入ることが示された。

3.3 3桁のカプレカー変換

■3桁のカプレカー定数を求める

命題 2

3桁のカプレカー定数は 495 である。

[証明]

ソート後の値を $\langle abc \rangle$ 、変換後の値を

$\langle pqr \rangle$ とおく。 ($9 \geq a \geq b \geq c \geq 0$,

$a > c$ かつ $a, b, c \in \mathbb{Z}$) 繰り返し下がり注意して変換を筆算で行うと次のようになる。

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \hline
 a-c-1 \quad 9 \quad c-a+10 \\
 \text{筆算 2}
 \end{array}$$

$\langle abc \rangle$ がカプレカー定数のとき、 a, b, c それぞれの値が p, q, r のうち、どれかと等しくなる。

$9 \geq a \geq b \geq c$, $a > c$ かつ $q = 9$ より

$$a = q = 9$$

よって、 $r = c - a + 10 = c + 1 \neq c$ より $c \neq r$ したがって、 $c = p$, $b = r$ となり、

$$\langle pqr \rangle = \langle cab \rangle \text{ となる。}$$

$$\text{連立方程式} \begin{cases} a - c - 1 = c \\ a = 9 \\ c - a + 10 = b \end{cases} \text{ を解くと、}$$

$a = 9, b = 5, c = 4$ となる。よって、3桁のカプレカ一定数は 495 である。(Q.E.D.)

■変換を続けるとどうなるのか

[考察]

3桁のカプレカ一定数は 495 であることが示されたが、任意の3桁の数 $\langle abc \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかについて考える。

$\langle abc \rangle$ を変換すると筆算 2 より

$100(a - c - 1) + 10 \times 9 + c - a + 10 = 99(a - c)$ となる。ここから、変換後の値は $a - c$ の値によって決まることがわかる。 $a - c$ は自然数 ($a - c \in \mathbb{N}$ かつ $1 \leq a - c \leq 9$) なので、この値によって場合分けし、変換を繰り返すと次のようになる。

$a - c$	変換後の値のソート後	2回目
1	990	891
2, 9	981	792
3, 8	972	693
4, 7	963	594
5, 6	954	495

表 2

よって、表 2 より、すべての3桁の自然数は変換を繰り返すと 495 になる。さらに、それに辿り着くまでに最大で6回の変換が必要であるということが示された。

3.4 4桁のカプレカ変換

■4桁のカプレカ一定数を求める。

命題 3

4桁のカプレカ一定数は 6174 である。

[証明]

ソート後の値を $\langle abcd \rangle$ 、変換後の値を

$\langle pqrs \rangle$ とおく。 ($9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$,

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \sim d$ のうち1つは必ず異なる) $b = c$ のときと $b > c$ のときで場合分けして、変換を筆算で行うと次のようになる。

[1] $b = c$ のとき

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & b & d \\ - & d & b & b & a \\ \hline a - d - 1 & 9 & 9 & d - a + 10 \end{array}$$

筆算 3

$9 \geq a \geq b = c \geq d$, $a > d$ かつ $q = r = 9$ より、 $a = b = q = r = 9$

したがって、 $d = p$ または $d = s$ となる。

筆算 3 より、 $s = d - a + 10 = d + 1 \neq d$ となり、 $d = p$

$p = a - d - 1 = 8 - d$ より $8 - d = d$ となり、 $d = 4$

このとき、 $c = s = d + 1 = 5$

$b = c$ かつ $b = 9$ より $c = 9$ 矛盾である。

よって、 $b = c$ のときカプレカ一定数は存在しない。

[2] $b > c$ のとき

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline a-d & b-c-1 & c-b+9 & d-a+10 \end{array}$$

筆算4

$a-d \geq b-c$ より、 $p > q$

$p > q$ より $a \neq q, d \neq p$

$b-c-1 \neq b$ より、 $b \neq q$

$9 \geq a$ より $-a+10 \geq 1$

$s = d-a+10 \geq d+1 > d$ となり $d \neq s$

$\langle pqrs \rangle$ に当てはまる $\langle abcd \rangle$ は

$\langle acdb \rangle, \langle adbc \rangle, \langle adcb \rangle, \langle bcda \rangle, \langle bdac \rangle, \langle bdca \rangle, \langle cdab \rangle, \langle cdba \rangle$

の8通りとなる。それぞれの連立方程式を解くと、 $\langle pqrs \rangle = \langle bdac \rangle = 6174$ だけが解として適する。よって、4桁のカプレカ一定数は6174である。(Q.E.D.)

■変換を続けるとどうなるのか

[考察]

4桁のカプレカ一定数は6174であること

とが示されたが、任意の4桁の数 $\langle abcd \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのか考える。

$b=c$ のときも筆算4で考えることができるので、全ての場合を筆算4で考える。

$\langle abcd \rangle$ を変換すると筆算4より、

$999(a-d) + 90(b-c)$ となる。ここから、変換後の値は $a-d$ と $b-c$ の2つの値で決まることがわかる。

(ただし、 $9 \geq a-d \geq b-c \geq 0$ かつ $a-d, b-c \in \mathbb{Z}$ かつ $a-d \neq 0$) 変換後の値をソートした値を $a-d$ と $b-c$ の値によって場合分けし、変換を繰り返したものをまとめると次のようになる。

$(a-d, b-c)$	1回目 ソート後	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
(1, 0)	9990	8991	8082	8532	6174	6174	6174
(1, 1), (9, 1), (9, 9)	9810	9621	8352	6174	6174	6174	6174
(2, 0), (9, 0)	9981	8082	8532	6174	6174	6174	6174
(2, 1), (8, 1)	8820	8532	6174	6174	6174	6174	6174
(2, 2), (8, 2), (8, 8)	8721	7443	3996	6264	4176	6174	6174
(3, 0), (8, 0)	9972	7173	6354	3087	8352	6174	6174
(3, 1), (7, 1)	8730	8352	6174	6174	6174	6174	6174
(3, 2), (7, 2)	7731	6354	3087	8352	6174	6174	6174
(3, 3), (7, 3), (7, 7)	7632	5265	4176	6174	6174	6174	6174
(4, 0), (7, 0)	9963	6264	4176	6174	6174	6174	6174
(4, 1), (6, 1)	8640	8172	7443	3996	6264	4176	6174

(4, 2), (6, 2)	7641	6174	6174	6174	6174	6174	6174
(4, 3), (6, 3)	6642	4176	6174	6174	6174	6174	6174
(4, 4), (6, 4), (6, 6)	6543	3087	8352	6174	6174	6174	6174
(5, 0), (6, 0)	9954	5355	1998	8082	8532	6174	6174
(5, 1)	8550	7992	7173	6354	3087	8352	6174
(5, 2)	7551	5994	5355	1998	8082	8532	6174
(5, 3)	6552	4176	6174	6174	6174	6174	6174
(5, 4)	5553	1998	8082	8532	6174	6174	6174
(5, 5)	5544	1089	9621	8352	6174	6174	6174
(6, 5)	6444	1998	8082	8532	6174	6174	6174
(7, 4), (7, 6)	7533	4176	6174	6174	6174	6174	6174
(7, 5)	7443	3996	6264	4176	6174	6174	6174
(8, 3), (8, 7)	8622	6354	3087	8352	6174	6174	6174
(8, 4), (8, 6)	8532	6174	6174	6174	6174	6174	6174
(8, 5)	8442	5994	5355	1998	8082	8532	6174
(9, 2), (9, 8)	9711	8532	6174	6174	6174	6174	6174
(9, 3), (9, 7)	9621	8352	6174	6174	6174	6174	6174
(9, 4), (9, 6)	9531	8172	7443	3996	6264	4176	6174
(9, 5)	9441	7992	7173	6354	3087	8352	6174

よって、すべての4桁の自然数は変換を繰り返すと6174なる。さらに、それに辿り着くまでに最大で7回の変換が必要であることが示された。

3.5 5桁のカプレカ一定数

■ 5桁のカプレカ一定数を求める

命題4

5桁のカプレカ一定数は存在しない。

[証明]

ソート後の値を $\langle abcde \rangle$ と表記し、変換

後の値を $\langle pqrst \rangle$ とする。

(ただし、 $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0$, $a > e$ かつ

$a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$) 変換を筆算で行うと次のようになる。

$$\begin{array}{r}
 a \quad b \quad c \quad d \quad a \\
 - e \quad d \quad c \quad b \quad e \\
 \hline
 a-e \quad b-d-1 \quad 9 \quad d-b+9 \quad e-a+10
 \end{array}$$

筆算5

$a \geq b \geq c \geq d \geq e$, $a > e$ かつ $r=9$ より、 $a=9, e \neq r$ とわかる。

$a-e \geq b-d$ より、 $p > q$

$p > q$ より、 $a \neq q, e \neq p$

$b-d-1 \neq b$ より、 $b \neq q$

$-a+10 \geq 1$ より、 $e-a+10 = e+1 \neq e$ となり、 $e \neq t$

$\langle pqrst \rangle$ に当てはまる $\langle abcde \rangle$ は

$\langle acbed \rangle, \langle acdeb \rangle, \langle adbec \rangle, \langle adceb \rangle, \langle aebcd \rangle,$
 $\langle aebdc \rangle, \langle aecbd \rangle, \langle aecdb \rangle, \langle aedbc \rangle, \langle aedcb \rangle,$
 $\langle bcaed \rangle, \langle bcdea \rangle, \langle bdaec \rangle, \langle bdcea \rangle, \langle beacd \rangle,$
 $\langle beadc \rangle, \langle becad \rangle, \langle becda \rangle, \langle bedac \rangle, \langle bedca \rangle,$
 $\langle cdaeb \rangle, \langle cdbea \rangle, \langle ceabd \rangle, \langle ceadb \rangle, \langle cebad \rangle,$
 $\langle cebda \rangle, \langle cedab \rangle, \langle cedba \rangle, \langle deabc \rangle, \langle deacb \rangle,$
 $\langle debac \rangle, \langle debca \rangle, \langle decab \rangle, \langle decba \rangle$

の34通りとなる。これらを解くと、解として適するものがない。

よって、5桁のカプレカ一定数は存在しない。

(Q.E.D.)

■変換を繰り返すとどうなるのか

[考察]

5桁のカプレカ一定数は存在しないことが示されたが、任意の5桁の数 $\langle abcde \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかを考える。

$\langle abcde \rangle$ を変換すると筆算5より、

$9999(a-e) + 990(b-d)$ となる。変換後の値は $a-e$ と $b-d$ の値で決まることがわかる。 $(a-e \geq b-d)$ 変換後の値をソートした値を $a-e$ と $b-d$ の値によって場合分けし、変換を繰り返したものをまとめると次のようになる。

$(a-e, b-d)$	1回目 ソート後	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目
(1, 0)	99990	89991	80982	95931	85932	74943
(1, 1), (9, 9), (9, 9)	99810	97911	87912	85932	74943	62964
(2, 0), (9, 0)	99981	80982	95931	85932	74943	62964
(2, 1), (8, 1)	98820	95931	85932	74943	62964	71973
(2, 2), (8, 2), (8, 8)	98721	85932	74943	62964	71973	83952
(3, 0), (8, 0)	99972	71973	83952	74943	62964	71973
(3, 1), (7, 1)	98730	94941	84942	73953	63954	61974
(3, 2), (7, 2)	97731	83952	74943	62964	71973	83952
(3, 3), (7, 3), (7, 7)	97632	73953	63954	61974	82962	75933
(4, 0), (7, 0)	99963	62964	71973	83952	74943	62964
(4, 1), (6, 1)	98640	93951	85932	74943	62964	71973
(4, 2), (6, 2)	97641	82962	75933	63954	61974	82962
(4, 3), (6, 3)	96642	71973	83952	74943	62964	71973
(4, 4), (6, 4), (6, 6)	96543	61974	82962	75933	63954	61974
(5, 0), (6, 0)	99954	53955	59994	53955	59994	53955
(5, 1)	98550	92961	86922	75933	63954	61974
(5, 2)	97551	81972	85932	74943	62964	71973
(5, 3)	96552	70983	94941	84942	73953	63954

(5, 4)	95553	59994	53955	59994	53955	59994
(5, 5)	95544	50985	92961	86922	75933	63954
(6, 5)	96444	51975	81972	85932	74943	62964
(7, 4), (7, 6)	97533	63954	61974	82962	75933	63954
(7, 5)	97443	62964	71973	83952	74943	62964
(8, 3), (8, 7)	98622	75933	63954	61974	82962	75933
(8, 4), (8, 6)	98532	74943	62964	71973	83952	74943
(8, 5)	85442	73953	63954	61974	82962	75933
(9, 2), (9, 8)	99711	87912	85932	74943	62964	71973
(9, 3), (9, 7)	99621	86922	75933	63954	61974	82962
(9, 4), (9, 6)	99531	85932	74943	62964	71973	83952
(9, 5)	99441	84942	75953	63954	61974	82962

よって、全ての5桁の自然数は変換を繰り返すと次の3パターンのいずれかで循環する。

- ① 74943 → 62964 → 71973 → 83952
- ② 75933 → 63954 → 61974 → 82962
- ③ 59994 → 53955

さらに、①、②は最大で6回の変換を行うと循環に入り、③は最大で2回の変換を行うと循環に入ることが示された。

3.6 変換後の各桁の和の一般化

命題5

n 桁の変換後の各桁の和は9の倍数になる。

[証明]

n 桁の自然数のソート後の値を

$\langle a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \rangle$ とする。(ただし、

$9 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ かつ $a_1 > a_n$ かつ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$)

ここで、変換後の値を $\langle p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \rangle$ とし、

$a_k - a_{n+1-k} = b_k$ とおく。($k = 1, \dots, n$)

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n$ かつ $a_1 > a_n$ より、

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n$ かつ $b_1 > b_n$ であり

$b_k = -b_{n+1-k}$ が成り立つ。変換を筆算で行うと次のようになる。

$$\begin{array}{r}
 a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n \\
 - \quad a_n \quad a_{n-1} \quad \cdots \quad a_2 \quad a_1 \\
 \hline
 p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_{n-1} \quad p_n
 \end{array}$$

また、 m が $b_k = 0$ となる最小の k として、各桁の和を S とする。

[1] n が奇数のとき

奇数桁の場合、中央の桁で同じ数を引く

ので、必ず $m \left(2 \leq m \leq \frac{n}{2} \right)$ が存在する。

$b_k = -b_{n+1-k}$ より、 $b_m = -b_{n-m+1} = 0$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n$ かつ $b_1 > b_n$ より、

$m \geq k \geq n - m + 1$ のとき、 $b_k = 0$

また、 m の最小性より、 $k < m$ のとき $b_k > 0$ 、

$k > n + 1 - m$ のとき $b_k < 0$

したがって、 $k \geq m$ のとき繰り下がりが起こり、逆に $k < m$ のとき繰り下がりが起こ

らない。これを考慮して、 b_k の値から p_k の値を求めると次のようになる。

- ・ $k = n$ のとき、 $p_n = b_n + 10$
- ・ $n > k \geq m$ のとき、 $p_k = b_k + 9$
- ・ $k = m - 1$ のとき、 $p_{m-1} = b_{m-1} - 1$
- ・ $k < m - 1$ のとき、 $p_k = b_k$

したがって、

$$S = \sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n b_k + 10 + 9(n - m) - 1$$

$b_k = -b_{n+1-k}$ より、 b_k をすべてたすと 0 にな

る。つまり、 $\sum_{k=1}^n b_k = 0$

よって、 $S = 9(n - m - 1)$

[2] n が偶数のとき

偶数桁の場合、 m が存在するときと存在しないときがある。 m が存在するときは奇数桁の場合と同様、 $S = 9(n - m - 1)$ となる。

m が存在しない場合、 $k > \frac{n}{2}$ のとき繰り

下がりが起こり、逆に $k \leq \frac{n}{2}$ のとき繰り下

がりが起こらない。これを考慮して b_k の値から p_k の値を求めると次のようになる。

- ・ $k = n$ のとき、 $p_n = b_n + 10$
- ・ $n > k > \frac{n}{2}$ のとき、 $p_k = b_k + 9$
- ・ $k = \frac{n}{2}$ のとき、 $p_{\frac{n}{2}} = b_{\frac{n}{2}} - 1$
- ・ $k < \frac{n}{2}$ のとき、 $p_k = b_k$

したがって、

$$S = \sum_{k=1}^n b_k + 10 + 9\left(\frac{n}{2} - 1\right) - 1$$

$$b_k = -b_{n+1-k} \text{ より、} \sum_{k=1}^n b_k = 0$$

$$\text{よって、} S = \frac{9}{2}n$$

以上の結果から偶数でも奇数でも S の値が 9 の倍数になることがわかる。各桁の和が 9 の倍数である数は 9 の倍数であるから、変換後の値は 9 の倍数であることが示された。

(Q.E.D.)

4. 今後の課題

今回、2、5 桁のカプレカー変換について、自ら考察することができた。2、3、4、5 桁を比べるとカプレカー定数が存在する桁と、カプレカー定数が存在せず循環する桁があった。その違いに規則性があるか、どのような数がカプレカー定数になるのかについて疑問をもったので、さらに研究を進めていきたい。桁数が大きくなるにつれて計算量が非常に増えるので、今後はコンピューターを用いて計算することも見据えていきたい。また、今回は十進法の数について考察したが、それ以外の数についても調べていきたい。

5. 参考文献

[1] http://nadamath2012.web.fc2.com/bushi/2011_sigma.pdf、重村卓人

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございます。また、サイエンス研究会の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございます。