素数の並びに規則はあるかⅢ

4年A組　田村　拓也
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班４年生は素数について学習している。今回も算術級数定理の証明を理解することを目標とし、その理解のためにリーマン予想やラマヌジャン予想、ベルヌーイ数、スターリング数を学習した。

キーワード　素数、ゼータ関数、L関数、ベルヌーイ数、スターリング数

２．研究の背景と目的

素数とは１と自分自身以外に正の約数を持たない１以外の自然数であり、$2,3,5,7,11,\cdots$と続く。この並びは一見規則性がないように見える。しかし、実際はどうなのか未だわかっていない。

私は、「素数の並びに規則はあるのか」という問題に興味をもった。すると、素数の並びの背景には深い代数世界が広がっていることを知った。そこで、基礎的な内容に加えて、L関数、ディリクレ指標、ベルヌーイ数やスターリング数といった内容について、本稿にまとめておくことにした。

2年生のときに行った研究ではベルヌーイ数、3年生ではL関数についての研究を行ったので、4年生である本年は、その2つを関連付けながら算術級数定理の証明の理解を試みた。

３．研究内容

3.1 基本事項

算術級数定理

初項と公差が互いに素である算術級数には無限に素数があらわれる。

■テイラー展開・マクローリン展開

１変数関数$f(x)$に対して

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

を関数$f(x)$の$x=a$のまわりでの**テイラー展開**という。特に、$a=0$のとき、つまり、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を関数$f(x)$の**マクローリン展開**という。

■群

ある演算について、結合則、単位元の存在、逆元の存在を満たす集合のことを**群**という。

■対称群

$I_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$に対し、I_nからI_nへの全単射全体の集合は、写像の合成を積として群になり、これを**n次対称群**といい、S_n, $Sym(n)$などと表す。

Xを有限集合とし、XからXへの全単射全体の集合を$Sym(X)$と置くと、写像の合成を積として$Sym(X)$は群になる。

■**ゼータ関数**

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を**ゼータ関数**という。この関数は、因数分解によって、

$$\prod_{p:prime}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}$$

に式変形できる。

【考察】有限のゼータ関数

リーマンゼータ関数は無限までの総和である。そこで、有限個の総和は因数分解で有限のオイラー積に変形することができるのかについて考察した。

（１） 自然数を用いた和

${}_{1}Z_{n}(s)=\sum_{m=1}^{n} m^{-s}$ を考える。

因数分解できない。

（２） n の素因数を用いた和

${}_{2}Z_{n}(s)=\sum_{p|n} p^{-s}$ を考える。

因数分解できない。

（３） n の約数を用いた和

${}_{3}Z_{n}(s)=\sum_{m|n} m^{-s}$ を考える。

$$\sum_{m|n} m^{-s}=\prod_{p|n}\frac{1-p^{-\left(Df_{p,n}+1\right)s}}{1-p^{-s}}$$

と因数分解できる。ただし、$Df_{p,n}$ は n の素因数 p の個数とする。

これを無限に拡張しようとしてみたができないことがわかった。

■ディリクレ指標

定義

f を自然数とする。写像 $\chi: Z\to C$ が f を法とするディリクレ指標であるとは、

1, 任意の $a,b\in Z$ に対し、$\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$ は乗法的である。

2, 任意の $a,b\in Z$ に対し、$\chi(a+bf)=\chi(a)$ は乗法的である。

3, $(a,f)=1$ ならば、$\chi(a)\neq 0$ かつ、$(a,f)\neq 1$ ならば、$\chi(a)=0$。

■L 関数

先程のゼータ関数を拡張し、各項の分子である 1 を数列 $a=\{a(n)\}$ に変えた級数

$$L(s,a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{s}}$$

オイラー積に変形できるものもある。

ディリクレの L 関数

$$L(s,\chi)=\prod_{p:prime}^{\infty}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

ラマヌジャンの L 関数

$$L(s,\tau)=\prod_{p:prime}^{\infty}\frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11}\left(p^{-s}\right)^{2}}$$

■リーマン予想

ゼータ関数の非自明な零点の実部はすべて $\frac{1}{2}$ である。

■**ラマヌジャン予想**

ゼータ関数、L 関数のオイラー因子の零点の実部はすべて一定である。

3.2 べき乗和

ガウスの逸話で有名な以下の式

$1+2+3+4+5+6+\cdots+99+100$

は、$\frac{100\times(1+100)}{2}=5050$ と求められる。

これを一般化すると $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ という

公式が導かれる。しかし、以下のように各項を２乗したものの和では計算が困難であるように見える。

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots+99^2+100^2$$

況してや５乗や 100 乗ともなれば計算が出来るのかさえ、疑いを思ってしまう。すなわち、$\sum_{i=1}^{n} i^k$ において k や n が（非常に）大きくなると計算が困難であるということである。

3.3 ベルヌーイ数

ベルヌーイ数とは、

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=n+1$$

定義される数列 B_j のことである。これを用いれば、前項の $\sum_{i=1}^{n} i^k$ を簡単に求めることができる。

$$S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k=\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}B_j\frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

$$=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j n^{k+1-j}$$

また二項定理 $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ に非常によく似ていることに注意すれば、上の式で多項式環 $Q[b]$ から Q への線形写像 T を $T:T(b^j)=B_j$ で定義しておくと、

$$S_k(n)=\frac{T\left((n+b)^{k+1}-b^{k+1}\right)}{k+1}$$ と書き換えることができる。例えば、$k=5$ ならば、つまり n までの 5 乗の和は

$$S_5(n)=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$

$$=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$$=\frac{1}{12}100^2(100+1)^2(2\times100^2+2\times100-1)$$

$$=171708332500$$

と求めることができる。しかし、このベルヌーイ数を求めることが困難ならばあまり意味がない。そこで、ベルヌーイ数を先程の定義式以外から求める方法を次項で紹介する。

■ベルヌーイ数の母関数

B_n をベルヌーイ数とする。

$$\frac{te^t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$$

証明

$te^t=\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\right)(e^t-1)$ を示せばよい。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\right)(e^t-1)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}-1\right)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{B_i}{i!(n-1)!}\right)t^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}B_i\right)\frac{t^n}{n!}$$

ここでベルヌーイ数の漸化式

$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=n+1$ より $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}B_i=n$ となるので、マクローリン展開の逆を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}B_i\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}=te^t$$

となる。

$(Q.E.D.)$

3.4 スターリング数

スターリング数は 2 種存在し、それらはどちらも組み合わせに関係する。

■第 1 種スターリング数

$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$は m 個のサイクルからなる n 次対称群の個数(n cycle m)

漸化式$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix}+n\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$と初期値$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=1,\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix}=0\ (n,m\neq 0)$で定義する。

■第 2 種スターリング数

$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$は n 元集合を m 個の空でない部分集合に分ける方法の数。

漸化式$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m \end{matrix} \right\}=\left\{ \begin{matrix} n \\ m-1 \end{matrix} \right\}+m\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$と、初期値$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}=1$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}=\left\{ \begin{matrix} 0 \\ m \end{matrix} \right\}=0\ (n,m\neq 0)$で定義する。

■スターリング数関連の公式

ここでは自身で証明できたもののみ証明を示す。

(1) $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}=\left\{ \begin{matrix} -m \\ -n \end{matrix} \right\}$

証明

$a_{n,m}=\left\{ \begin{matrix} -m \\ -n \end{matrix} \right\}$と置く。これが$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$と同じ初期値、漸化式を満たすことを確かめればよい。初期値については自明。第 2 種スターリング数の漸化式より、

$$\left\{ \begin{matrix} -m+1 \\ -n \end{matrix} \right\}=\left\{ \begin{matrix} -m \\ -n-1 \end{matrix} \right\}-n\left\{ \begin{matrix} -m \\ -n \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} -m+1 \\ -n \end{matrix} \right\}+n\left\{ \begin{matrix} -m \\ -n \end{matrix} \right\}=\left\{ \begin{matrix} -m \\ -n-1 \end{matrix} \right\}$$

これは$a_{n,m-1}+na_{n,m}=a_{n+1,m}$と書け、これは第 1 種スターリング数の漸化式に等しい。

$(Q.E.D.)$

(2) $x^{\underline{n}}=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^n\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}x^m\ (n\geq 0)$

ただし、$x^{\underline{m}}$は

$x^{\underline{m}}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)$

$(m>0), x^{\underline{m}}=1$とする。

証明

先程と同様に考え、

$x^{\underline{n}}=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m a_{n,m}x^m$ とおいて、$a_{n,m}$が第 1 種スターリング数と同じ初期値、漸化式を満たすことを確かめる。初期値は自明。

$x^{\underline{m}}\times x=x^{\underline{m+1}}+mx^{\underline{m}}$より、

$$(-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{n+1}(-1)^m a_{n+1,m}x^m=x^{\underline{n+1}}$$

$$=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m a_{n,m}x^m(x-n)$$

$$=\sum_{m=0}^{n+1}a_{n,m-1}x^{\underline{m}}\times x+\sum_{m=0}^{n}ma_{n,m}x^{\underline{m}}$$

より、$x^{\underline{m}}$の係数より漸化式を満たす。

$(Q.E.D.)$

(3) $x^n = \sum_{m=0}^{n} \left\{ {n \atop m} \right\} x^{\underline{m}} \ (n \geq 0)$

証明

先程と同様に考え、$x^n = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m} x^{\underline{m}}$ とおいて、$a_{n,m}$ が第 2 種スターリング数と同じ初期値、漸化式を満たすことを確かめる。初期値は自明。

$x^{\underline{m}} \times x = x^{\underline{m+1}} + m x^{\underline{m}}$ より、

$$\sum_{m=0}^{n+1} a_{n+1,m} x^{\underline{m}} = x^{n+1} = x^n \times x$$

$$= \sum_{m=0}^{n} a_{n,m} x^{\underline{m}} \times x$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} a_{n,m-1} x^{\underline{m}} \times x + \sum_{m=0}^{n} m a_{n,m} x^{\underline{m}}$$

より、$x^{\underline{m}}$ の係数より漸化式を満たす。

(Q. E. D.)

(4) $\left(x \frac{d}{dx} \right)^n = \sum_{m=1}^{n} \left\{ {n \atop m} \right\} x^m \left(\frac{d}{dx} \right)^m \quad (n \geq 1)$

(5.1) $m, n \geq 0$ に対し

$$\sum_{l \geq 0} (-1)^l \left\{ {n \atop l} \right\} \left[{l \atop m} \right] = (-1)^m \delta_{m,n}$$

(5.2) $m, n \geq 0$ に対し

$$\sum_{l \geq 0} (-1)^l \left[{n \atop l} \right] \left\{ {l \atop m} \right\} = (-1)^m \delta_{m,n}$$

(6) $m, n \geq 0$ に対し

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^n$$

証明

同様に

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l a_{n,m} l^n$$

として考える。初期値は自明。2 項定理の定義域の外を 0 とすると、

$$a_{n,m-1} + m a_{n,m}$$

$$= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^n$$

$$+ \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m-1}{l} l^n$$

$$= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \left\{ \binom{m}{l} - \binom{m-1}{l} \right\} l^n$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^{n+1} = a_{n+1,m}$$

より成り立つ。

(Q. E. D.)

(7)

$$\frac{(e^t - 1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{t^n}{n!} \ (m \geq 0)$$

(8)

$$\frac{t^m}{(1-t)(1-2t)\cdots(1-mt)} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} t^n \ (m \geq 1)$$

3.5 ベルヌーイ数のスターリング数による公式

(1)

$$B_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1} \ (n \geq 0)$$

証明　引用

B_n の母関数を以下のように変形する。

$$\frac{te^t}{e^t-1}=\frac{t}{1-e^{-t}}=\frac{-\log\left\{1-\left(1-e^{-t}\right)\right\}}{1-e^{-t}}$$

テイラー展開した式$-\log(1-t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m}$に

$t=1-e^{-t}$を代入して変形すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}=\frac{-\log\left\{1-\left(1-e^{-t}\right)\right\}}{1-e^{-t}}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1-e^{-t}\right)^{m-1}}{m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(e^{-t}-1\right)^m}{m+1}$$

ここで公式(7)

$$\frac{\left(e^t-1\right)^m}{m!}=\sum_{n=m}^{\infty}\left\{{n \atop m}\right\}\frac{t^n}{n!}\ (m\geq 0)$$

を代入すると

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m m!}{m+1}\sum_{n=m}^{\infty}\left\{{n \atop m}\right\}\frac{(-t)^n}{n!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m m!\left\{{n \atop m}\right\}}{m+1}\right)\frac{t^n}{n!}$$

両辺の$\frac{t^n}{n!}$の係数を比べれば公式が導かれる。

$(Q.E.D.)$

また、公式(6)、すなわち$m,n\geq 0$に対し、

$$\left\{{n \atop m}\right\}=\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}l^n$$

を用いると、先程の公式は

$B_n=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}l^n$ と書けるわけであるが、計算が困難である。

(2)

$$B_n=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m m!\left\{{n+1 \atop m+1}\right\}}{m+1}\ (n\geq 0)$$

証明　引用

先程の公式(8)を用いて証明する。第 2 種スターリング数の漸化式より

$$\left\{{n+1 \atop m+1}\right\}=\left\{{n \atop m}\right\}+(m+1)\left\{{n \atop m+1}\right\}$$

であるので

$$B_n=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m m!\left(\left\{{n \atop m}\right\}+(m+1)\left\{{n \atop m+1}\right\}\right)}{m+1}$$

$\left[{n+1 \atop 1}\right]=m!$なので、公式(5.1)より

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m m!(m+1)\left\{{n \atop m+1}\right\}}{m+1}$$

$$=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\left[{m+1 \atop 1}\right]\left\{{n \atop m+1}\right\}=\delta_{1,n}$$

ゆえに命題の右辺は

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m m!(m+1)\left\{{n \atop m+1}\right\}}{m+1}+\delta_{1,n}$$

$$=(-1)^n B_n+\delta_{1,n}$$

となる。

$(Q.E.D.)$

これは次のようにパスカルの三角形に似た方法で求められるということも示す。

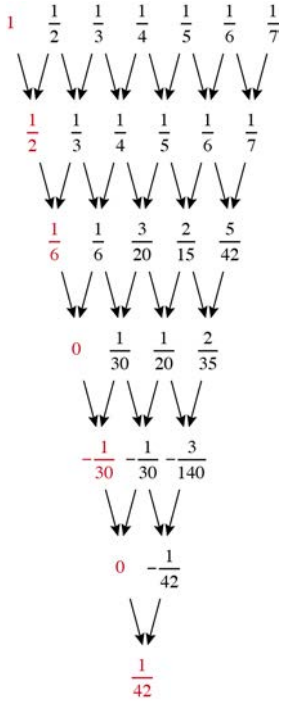

図 1 ベルヌーイ数を求める

$\boxed{\text{証明}}$　引用

$a_{n,m}=(m+1)(a_{n-1,m}-a_{n-1,m+1})$ で定められるような数列において、

$$a_{n,0}=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m m!\left\{\begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix}\right\}a_{0,m}$$

であればよい。

$$g_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}t^m$$

とおく。$a_{n,m}$ の漸化式より $n\geq 1$ に対して

$$g_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)(a_{n-1,m}-a_{n-1,m+1})t^m$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_{n-1,m}t^{m+1}\right)-\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_{n-1,m+1}t^{m+1}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}(tg_{n-1}(t))-\frac{d}{dt}(g_{n-1}(t)-a_{n-1,0})$$

$$=g_{n-1}(t)+(t-1)\frac{d}{dt}(g_{n-1}(t))$$

$$=\frac{d}{dt}((t-1)g_{n-1}(t))$$

よって、$(t-1)g_{n-1}(t)=h_n(t)$ とおくと、

$$h_n(t)=(t-1)\frac{d}{dt}(h_{n-1}(t))\ (n\geq 1)$$

これより、

$$h_n(t)=\left((t-1)\frac{d}{dt}\right)^n(h_0(t))$$

ここで公式(4)を用いると、

$$h_n(t)=\sum_{m=0}^{n}\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}(t-1)^m\left(\frac{d}{dt}\right)^m h_0(t)$$

両辺 $t=0$ とおいて

$$-a_{n,0}=\sum_{m=0}^{n}\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}(-1)^m m!(a_{n,m-1}-a_{0.m})$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\left\{\begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix}\right\}(-1)^{m+1}(m+1)!a_{0,m}$$

$$-\sum_{m=0}^{n}\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}(-1)^m m!a_{0.m}$$

$$=-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m m!\left\{\begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix}\right\}a_{0,m}$$

これで求める式が得られた。

$(Q.E.D.)$

3.6 一般ベルヌーイ数

法 f で定義された指標 χ に対して、一般ベルヌーイ数は $B_{n,\chi}$ は、母関数を用いて、

$$\sum_{a=1}^{f}\frac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,\chi}\frac{t^n}{n!}$$

で定義される。また、テイラー展開によって展開されていくので、一般ベルヌーイ数は、以下のように計算していくことができる。

$$B_{0,\chi}=0$$

$$B_{1,\chi}=\frac{1}{f}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a$$

$$B_{2,\chi}=\frac{1}{f}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a^2-\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a$$

$$B_{2,\chi}=\frac{1}{f}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a^3-\frac{3}{2}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a^2+\frac{f}{2}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)a$$

これを一般にはベルヌーイ数 B_n を用いて、

$$B_{n,\chi}=f^{n-1}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)B_n(a/f)$$

と表すことができる。

４．今後の課題

今回、スターリング数の証明について、自ら考察することができた。しかし、算術級数定理の証明を完全には理解することができなかった。また、今回は新しい概念を膨大に学習したので、まだ理解が不十分なものも多い。そのため、さらに考察を深めるとともに、理論の大きな流れと微細な論理をしっかりと見極めながら学習と研究を進めたい。

５．参考文献

[1]「素数からゼータへそしてカオスへ」，小山信也，日本評論社

[2]「ベルヌーイ数とゼータ関数」，荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信，牧野書店

６．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にもご協力いただきました。ありがとうございました。