コラッツ予想について

2年C組　小椋　晃一
指導教諭　川口　慎二

1.　要約

サイエンス研究会数学班2年生はコラッツ予想について学習している。今回はコラッツ予想の性質を発見することを目的とした。その過程において、コラッツ予想に関する考察をすることができたので紹介する。

キーワード　コラッツ予想、$3n+1$、$4a-1$、偶奇、整数論

2.　研究の背景と目的

「**コラッツ予想**」とは、自然数nが偶数であるときは $\frac{1}{2}n$ の値を計算し、奇数であるときは $3n+1$ の値を計算するという操作をm回繰り返すと、値が1になるmが必ず存在するという予想である。例えば、$n=3$のときを考える。なお、本稿では、計算の過程を以下のように表記することにする。

$$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

計算の回数(＝$\to$の数)より、$m=7$である。私は、この操作に興味を持ったので考察した。本稿ではその結果をまとめる。

3.　研究内容

3.1　定義

■合同式

$p,q,r \in Z$として、$p-q$がrの倍数となるとき、$p \equiv q \pmod{r}$と表せる。この式を**合同式**という。このとき、pとqはr**を法として合同**であるという。

また、$p \equiv q \pmod{r}$であることは、$p \div r$の余りと$q \div r$の余りが等しいことと同値である。

■操作

本稿では、$\frac{1}{2}n$を計算することを操作A, $3n+1$を計算することを操作Bとする。また、値が1になるまでの操作回数をm回とする。

3.2　操作をして増える数

さまざまな数にこの操作を施してみると、$n=4a+3$の場合は操作回数が多くなるのではないだろうかと推測した。

■$n=4a+3$となる場合

<u>命題1</u>

$a \equiv 1 \pmod{2}$のとき、$n=4a+3$に2回操作した値をbとすると$b \equiv 3 \pmod{4}$となる。

(証明) $4a+3$ に操作を施すと、$4a+3$ は奇数なので、操作 B により

$$3(4a+3)+1=12a+10\,.$$

次は偶数なので、操作 A により、

$$\frac{1}{2}(12a+10)=6a+5\,.$$

つまり、$4a+3 \to 12a+10 \to 6a+5$ となり、$b=6a+5$.

$a \equiv 1 \pmod 2$ より、ある $x \in Z$ を用いて、$a=2x-1$ と表すことができる。そこで、$a=2x-1$ を $b=6a+5$ に代入すると、

$$b=6a+5=6(2x-1)+5=12x-1$$

4 を法として考えると、

$$12x-1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4\,.$$

したがって、$b \equiv 3 \pmod 4$. (Q. E. D.)

■ $n=16y-1$ の場合

命題２

$a \equiv 3 \pmod 4$ のとき、$n=4a+3$ に 4 回操作した値を c とすると $c \equiv 3 \pmod 4$ となる。

(証明)

$a \equiv 3 \pmod 4$ より、ある $y \in Z$ を用いて $a=4y-1$ とおける。そこで、$4a+3$ に代入すると、

$$n=4a+3=(16y-4)+3=16y-1\,.$$

各回の値の偶奇に注意して操作すると、

$$16y-1 \to 48y-2 \to 24y-1 \to$$
$$72y-2 \to 36y-1$$

となるから、$c=36y-1$。ここで、$36y$ は 4 で割り切れるので、4 を法として、

$$36y-1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4\,.$$

したがって、$c \equiv 3 \pmod 4$. (Q. E. D.)

命題 2 は、$16y-1$ を 4 回操作したら、4 を法として合同になることを示している。またこのとき、2 回連続では操作 A をしていない。

■ $n=64z-1$ の場合

$n=64z-1$ に 12 回操作したとき、以下のようになる。

$$64z-1 \to 192z-2 \to 96z-1 \to$$
$$288z-2 \to 144z-1 \to 432z-2 \to$$
$$216z-1 \to 648z-2 \to 324z-1 \to$$
$$972z-2 \to 486z-1 \to 1458z-2 \to$$
$$729z-1$$

このとき、操作 A を 2 回連続では実行していない。12 回の操作の間では、z の係数の値が大きくなっていく。そのため $64z-1$ 以外の場合と操作回数を比べようと考えた。$64z-1$ の操作回数は以下のとおりである。

$z=1$ のとき　操作回数：107 回
$z=2$ のとき　操作回数：46 回
$z=3$ のとき　操作回数：44 回
$z=4$ のとき　操作回数：47 回
$z=5$ のとき　操作回数：55 回
$z=6$ のとき　操作回数：45 回
$z=7$ のとき　操作回数：97 回

いくつかの数について、操作回数を調べてみたが、それらに比べて、これらは比較的操作回数が多いように思えた。

3.3　コラッツ予想が成り立つ自然数 n について

命題３

$q \in Z$ を m 回操作すると 1 になるとする。このとき、$k \in N$ に対して、$2^k q$ は $k+m$ 回操作すると 1 になる。

なぜならば、2^k は2でk回割ることができるので、$2^k q$ に操作Aをk回施すと値はqとなる。また仮定より、q 自身はm回操作すると1になることから、命題3が成り立つ。

■コラッツ予想が成り立つ自然数n

$s \in N$として、$1, 2, 3, \cdots, s$のすべてに対してコラッツ予想が成り立つとき、それぞれを2倍した2から$2s$までの偶数に対してもコラッツ予想が成立する。また、逆も成り立つ。

なぜならば命題3と仮定より、1×2, $2 \times 2, 3 \times 2, \cdots, 2s$ もコラッツ予想が成立する。逆も同様の考えである。また、この考え方から、すべての自然数に対してコラッツ予想が成り立つことと、すべての偶数に対して予想が成立すること、あるいはすべての奇数に対して予想が成立することは、すべて同値となる。

3.4　4の倍数の場合

命題4

$b \in N$のとき、$\dfrac{4^b - 1}{3} \in N$.

(証明)　数学的帰納法を用いて証明する。

①$b = 1$のとき、$\dfrac{4^1 - 1}{3} = 1$より、命題は成り立つ。

②$b = k$のとき、命題が成り立つとする。つまり、$\dfrac{4^k - 1}{3} \in N$とする。

$b = k + 1$のとき、

$$\frac{4^{k+1} - 1}{3} = \frac{3 \times 4^k + 4^k - 1}{3} = 4^k + \frac{4^k - 1}{3}$$

より、$\dfrac{4^{k+1} - 1}{3} \in N$. よって、命題が成り立つ。

したがって、①, ②より、すべての$b \in N$に対して命題が正しいことが示された。

(Q. E. D.)

ちなみに、同様にして$\dfrac{4^b - 1}{3} \equiv 1 \pmod 4$であることを示すことができる。

命題5

$b \in N$のとき、$\dfrac{4^b - 1}{3} \equiv 1 \pmod 4$.

(証明) 4を法として、$4^b - 1 \equiv -1 \equiv 3$　より、$c \in N$を用いて、$4^b - 1 = 4c + 3$　と表すことができる。すると、

$$\frac{4^b - 1}{3} = \frac{4c + 3}{3} = \frac{4}{3}c + 1$$

であり、命題4より$4^b - 1$は3で割り切れるので、$\dfrac{4}{3}c + 1 \in N$. いま、$c \in N$より$\dfrac{4}{3}c$は4の倍数である。ゆえに、

$$\frac{4}{3}c + 1 \equiv 1 \pmod 4$$

なので、$\dfrac{4^b - 1}{3} \equiv 1 \pmod 4$.　(Q. E. D.)

命題6

mが5以上の奇数であるとき、操作回数がm回となる自然数nは2個以上存在する。

(証明)

命題 3 より、2^m の操作は m 回である。仮定より m は奇数なので、$\frac{m-1}{2} \in N$.

すると、命題 5 より、$\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3} \equiv 1 \pmod 4$

なので、$\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3}$ は奇数である。ゆえに操作 B を行うと $\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3} \times 3 + 1 = 4^{\frac{m-1}{2}} = 2^{m-1}$.

ここで、命題 3 より、2^{m-1} の操作回数は $m-1$ 回であるので、$\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3}$ の操作回数は $1+(m-1)=m$ (回)である。すると、

$$\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3} = \frac{1}{3}(2^{m-1}-1) = \frac{1}{6} \times 2(2^{m-1}-1)$$

$$= \frac{1}{6}(2^m - 2)$$

より、$2^m \neq \frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3}$.

したがって、操作回数が m 回となる自然数 n は、少なくとも $n = 2^m, \frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3}$ の 2 個は存在する。　(Q. E. D.)

４．　今後の課題

今回、n が $4a+3$ や $16y-1$，$64z-1$ の場合のコラッツの予想について考察することができた。しかし、それら以外の場合や、コラッツの予想の本筋である、m が必ず存在することに関してはあまり考察を深めることができなかった。今後はそれらについても挑戦していきたい。

５．参考文献

[1] web ページ「未解決問題」
http://math.a.la9.jp/amikai.htm

６．　謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にも助言をいただくことができました。ありがとうございました。