正五角形と黄金比Ⅱ

２年Ｃ組　古宮　昌典
指導教員　川口　愼二

１. 要約

サイエンス研究会数学班 2 年生は図形の性質について研究している。今回は自分で考えた図形の性質をとらえることを目標とし、その性質の証明のために三角比に関する定理を利用した。

キーワード　正五角形、黄金比、三角比、円と円の交点、正多角形

２．研究の背景と目的

正五角形の一辺の長さと対角線の長さの比が黄金比になっているということは、広く知られていることである。他にもそのような関係があるのかと考え、その例として、独自に発見したことについて本稿にまとめることにした。また、その考察も紹介する。

３．研究内容

３－１．基本的な定義と定理

■黄金比

黄金比とは比１：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$のことであり、$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$をϕで表すことが多い。このϕは、$\phi^2+1=\phi+1$，$\dfrac{1}{\phi}=\phi-1$という不思議な性質をもっている。

■三角比

図１のような AB を斜辺とする直角三角形 ABC において、∠ABC をθとする。このとき、

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}},\quad \cos\theta=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}},\quad \tan\theta=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$

と定義する。

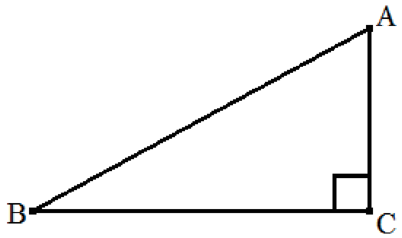

図１

<u>定理１</u>（ピタゴラスの定理）

直角三角形 ABC において、AB を斜辺とする。このとき、$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$が成り立つ。

(証明)

図２において、AB＝z，AC＝x，BC＝yとする。このとき、4 つの直角三角形はすべて合同である。すると、△ABC の面積は$\dfrac{1}{2}xy$　と表すことができる。しかし、zを用いて、$\dfrac{1}{4}\left\{(x+y)^2-z^2\right\}$　とも表すことができる。

よって、$\dfrac{1}{4}\left\{(x+y)^2-z^2\right\}=\dfrac{1}{2}xy$.

この等式を変形させて、

$$x^2+2xy+y^2-z^2=2xy.$$

したがって、$x^2+y^2=z^2$.　(Q. E. D.)

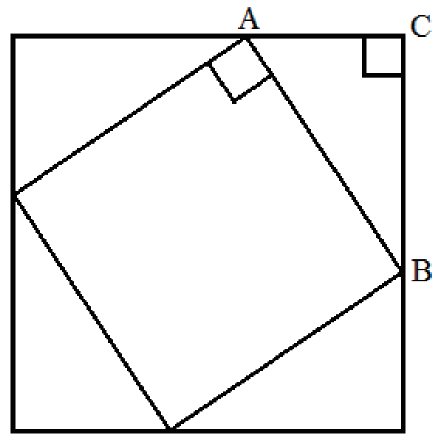

図２

定理２　　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

(証明)

直角三角形 ABC で、AB を斜辺(つまり、∠C＝90°)として、∠ABC＝θとする。また、AB＝1 とすると、

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{AC}}{1}=\mathrm{AC},\ \cos\theta=\frac{\mathrm{BC}}{1}=\mathrm{BC}.$$

定理１より、$1^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2$.

よって、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.　(Q. E. D.)

定理３（加法定理）

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(証明)

(1) 図３の四角形 ACDF は長方形で、$\angle\mathrm{BGD}=90^\circ$, $\angle\mathrm{BDG}=\beta$, $\angle\mathrm{GDF}=\alpha$, $\angle\mathrm{BGA}=\gamma$ とする。また、点 B は弧と辺 AC との交点である。いま、BD の長さを 1 とすると、α＋∠GFD＝∠AGD,　γ＋∠BGD＝∠AGD より、α＋90°＝γ＋90°. ゆえに、$\alpha=\gamma$.

また、$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}=\mathrm{BE}=\mathrm{AF}$ より、AF の長さが $\sin(\alpha+\beta)$ となる。一方、$\mathrm{GB}=\sin\beta$ より、$\cos\gamma=\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{BG}}=\frac{\mathrm{AG}}{\sin\beta}$.

ゆえに、$\mathrm{AG}=\cos\gamma\sin\beta$.

また、$\mathrm{DG}=\cos\beta$ より、$\sin\alpha=\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{DG}}=\frac{\mathrm{GF}}{\cos\beta}$. ゆえに、$\mathrm{GF}=\sin\alpha\cos\beta$.

よって、

$$\begin{aligned}\mathrm{BE}&=\mathrm{AG}+\mathrm{GF}\\&=\cos\gamma\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

$\alpha=\gamma$ なので、

$$\mathrm{BE}=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

したがって、

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

(Q. E. D.)

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DB}}=\mathrm{DE}$ より DE の長さが $\cos(\alpha+\beta)$ となる。まず、$\mathrm{DG}=\cos\beta$ より、$\cos\alpha=\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DG}}=\frac{\mathrm{DF}}{\cos\beta}$. ゆえに、

$\mathrm{DF}=\cos\alpha\cos\beta$.

また、$\mathrm{BG}=\sin\beta$ より、$\sin\gamma=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BG}}=\frac{\mathrm{BA}}{\sin\beta}$. ゆえに、$\mathrm{DF}=\sin\gamma\sin\beta$.

よって、

$$\begin{aligned}\mathrm{DE}&=\mathrm{DF}-\mathrm{BA}\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\gamma\sin\beta.\end{aligned}$$

$\alpha=\gamma$ なので、

$$\mathrm{DE}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

したがって、

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

(Q. E. D.)

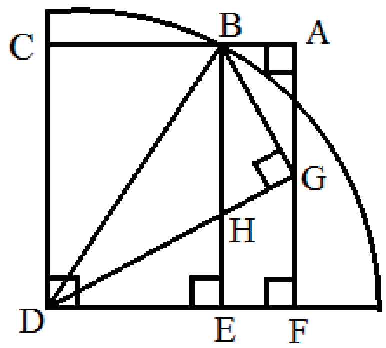

図３

定理４　(2 倍角の定理)

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

(証明)

定理３(1)より、

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

この式に、$\beta=\alpha$ を代入すると、

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

が得られる。また、定理３(2)に $\beta=\alpha$ を代入することで、

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

が得られる。(Q. E. D.)

定理５

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

(証明)

定理２と定理４より、

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

また、$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

(Q. E. D.)

定理６　（余弦定理）

△ABC について、BC＝a，CA＝b，AB＝c，∠BAC＝θとする。このとき、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

が成り立つ。

(証明)

図４のように、点 C から AB に降ろした垂線の足を H_1 とする。$\sin\theta = \frac{CH_1}{b}$ より、$CH_1 = b\sin\theta$ …①. また、$\cos\theta = \frac{AH_1}{b}$ より、$AH_1 = b\cos\theta$．ゆえに、

$BH_1 = c - AH_1 = c - b\cos\theta$ ...②.

すると、①，②および定理１より、

$$a^2 = CH_1^2 + BH_1^2$$
$$= (b\sin\theta)^2 + (c - b\cos\theta)^2$$
$$= b^2\sin^2\theta + c^2 - 2bc\cos\theta + b^2\cos^2\theta$$
$$= c^2 + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2bc\cos\theta$$

ここで定理２より、

$$a^2 = c^2 + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2bc\cos\theta$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

(Q. E. D.)

３－２．正五角形と黄金比

正五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ について、各頂点を中心とし、この正五角形に外接する円の半径を半径とする円をそれぞれ描き、正五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の外接円の中心 O から等距離にある円の交点を結ぶと最初の正五角形以外に 2 つ正五角形を作ることができる。

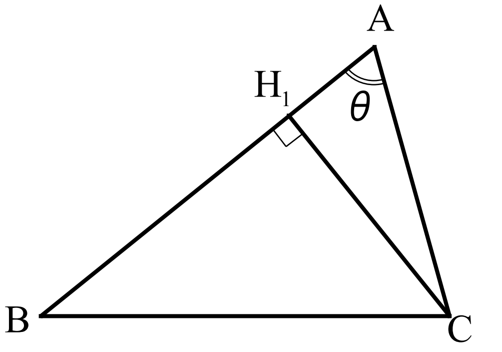

図４

そして、正五角形の中心から一番近い正五角形を $B_1B_2B_3B_4B_5$, 一番遠い正五角形を $C_1C_2C_3C_4C_5$ とする。図５を見よ。このとき、これらの図形は、次の 2 つの性質をもつ。ここで、円の半径はすべて r とする。

命題１

(1) $OA_i : OC_j = 1 : \phi \qquad (1 \leqq i,\ j \leqq 5)$

(2) 4 点 C_5, B_1, B_2, C_2 は一直線上にある。

(証明)

(1)　$\triangle C_1OA_2$ は二等辺三角形である。いま、四角形 $OA_1C_1A_2$ はひし形なので、対角線 A_1A_2 と OC_1 は互いの中点で直交する。ゆえに、A_1A_2 と OC_1 の交点を H_2 とすると、$\angle A_2OC_1 = 36°$ なので、

$$\cos 36° = \frac{OH_2}{OA_2} = \frac{OH_2}{r} = \frac{OC_1}{2r} \text{ より、}$$

$$OC_1 = 2r\cos 36° = 2r \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}r$$

となる。よって、

$$OA_1 : OC_1 = r : \frac{1+\sqrt{5}}{2}r = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$= 1 : \phi$$

(Q. E. D.)

(2) この図形は直線 OC_1 を対称の軸として線対称である。よって、点 O から B_1B_2 に下ろした垂線の足を H_3，点 O から C_5C_2 に下ろした垂線の足を H_4 とし、$OH_3 = OH_4$ を証明すれば十分である。まず、B1, B2 はそれぞれ OA_1, OA_2 上にあるため、明らかに H_3 は OC ${}_1$ 上にある。さらに、$C_1C_2 = C_1C_5$ より、H_4 も明らかに OC_1 上にある。

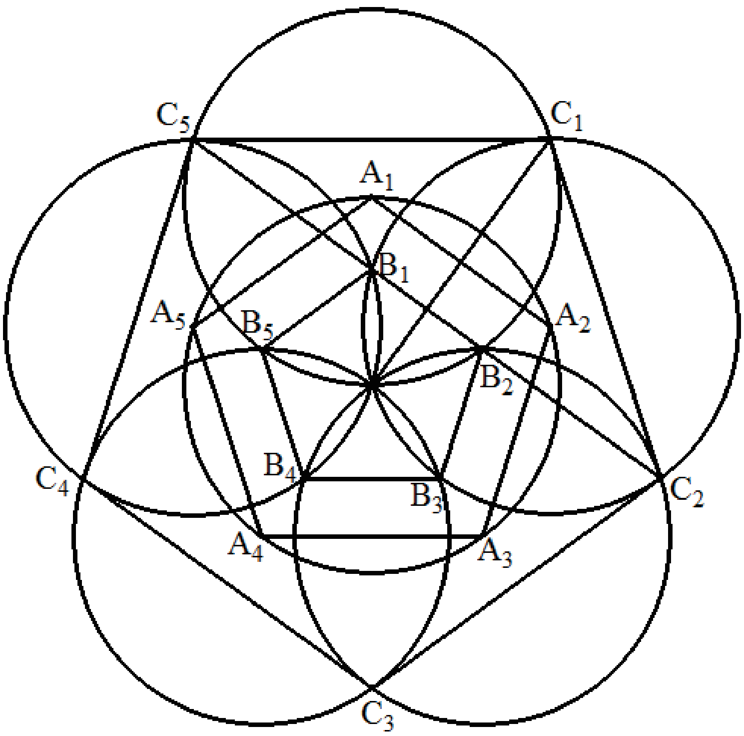

図５

まず、$A_2B_1=A_2O$ より、$\triangle A_2B_1O$ は二等辺三角形である。よって、この二等辺三角形の底角は$\angle A_2OB_1=72°$ であるから、頂角は $\angle OA_2B_1=180°-(72°\times 2)=36°$ である。ゆえに、余弦定理(定理６)より、

B_1O^2
$=A_2B_1^2+A_2O^2-2\times A_2B_1\times A_2O\times\cos 36°$
$=2r^2-2r^2\cos 36°$
$=2r^2(1-\cos 36°)$.

ゆえに、$B_1O>0$ より、

$B_1O=\sqrt{2r^2(1-\cos 36°)}=r\sqrt{2(1-\cos 36°)}$.

　ここで、定理５より、

$\cos 36°=\cos(2\times 18°)=2\cos^2 18°-1$

より、

$$
\begin{aligned}
B_1O &= r\sqrt{2(1-\cos 36°)}\\
&= r\sqrt{2\{1-(2\cos^2 18°-1)\}}\\
&= r\sqrt{2(2-2\cos^2 18°)}\\
&= r\sqrt{4(1-\cos^2 18°)}=r\sqrt{4\sin^2 18°}\\
&= 2r\sin 18°.
\end{aligned}
$$

$\triangle B_1OH_3$ は直角三角形なので、

$$\cos 36°=\frac{H_3O}{B_1O}=\frac{H_3O}{2r\sin 18°}.$$

ゆえに、$OH_3=2r\sin 18°\cos 36°$ …①

　一方、A_1 から OC_5 に下ろした垂線の足を H_5 とする。$\triangle A_1C_5O$ は二等辺三角形なので、$\triangle A_1OH_5$ は直角三角形となり、$C_5H_5=OH_5$ である。よって、図６より、

$$\cos 36°=\cos\angle H_5OA_1=\frac{OH_5}{r}$$

ゆえに、$OC_5=2OH_5=2r\cos 36°$ …②

$\triangle OC_5H_4$ は直角三角形であり、また、

$\angle OC_5H_4=90°-\angle C_1OC_5=90°-72°$
$=18°$

であるから、$\sin 18°=\dfrac{OH_4}{OC_5}$.

ここで、②より、

$$\sin 18°=\frac{OH_4}{OC_5}=\frac{OH_4}{2r\cos 36°}.$$

よって、$OH_4=2r\sin 18°\cos 36°$ …③

　したがって、①, ③より、$OH_3=OH_4$ なので、４点 C_5, B_1, B_2, C_2 は一直線上に並ぶことが示された。 (Q. E. D.)

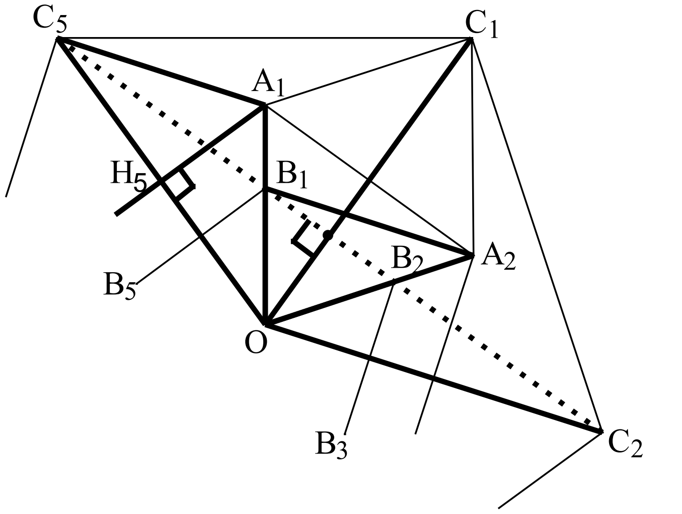

図６

３－３．一般化

ここで、先ほどの図形を正 n 角形に対して考えてみた。すると、6 つの性質を発見することができた。ただし、もとの正 n 角形を $A_1A_2A_3 \cdots A_n$，中心から一番近い正 n 角形を $B_1B_2B_3 \cdots B_n$，中心から一番遠い正 n 角形を $C_1C_2C_3 \cdots C_n$，中心から二番目に遠い正 n 角形を $D_1D_2D_3 \cdots D_n$ とする。また、点 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ を中心とする円をそれぞれ $O_1, O_2, O_3, \cdots, O_n$ とする。ここで、円の半径はすべて r とする。図７は $n=7$ の場合を、図８は $n=10$ の場合をそれぞれ表している。

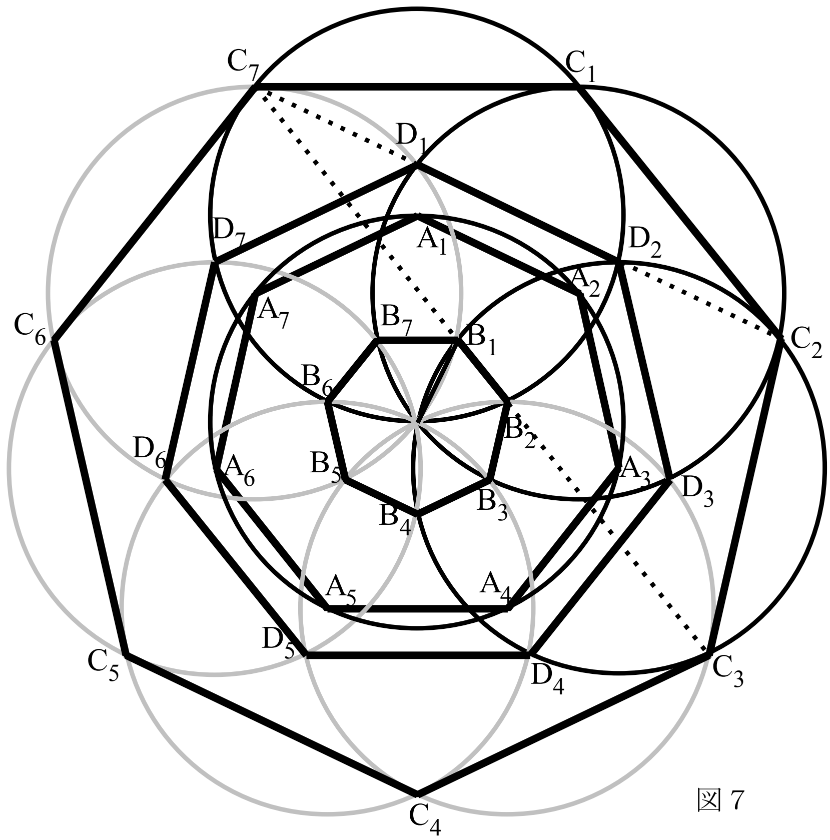

図７

命題２

円の交点を結んでできる正n角形は、

① nが偶数のとき、$\dfrac{n-2}{2}$個,

② nが奇数のとき、$\dfrac{n-1}{2}$個

できる。

(証明)

①nが偶数のとき

円O_iの反対側には、円O_iと点 O 以外の交点をもたない円$\mathrm{O}_{i+\frac{n}{2}}$が存在する。逆に、それ以外の円は$\mathrm{O}_i$と O 以外の交点をもつので、1 つの円につき、他の円と$n-2$(個)の交点をもつ。n個の円すべてで同じことがいえるので、全部で$n(n-2)$個。しかし、そのうち 2 つずつ交点が重複するので、円と円の交点の総数は$\dfrac{n(n-2)}{2}$個である。

よって、正n角形の個数は、

$$\frac{n(n-2)}{2}\times\frac{1}{n}=\frac{n-2}{2}\ (個)$$

である。

②nが奇数の場合

偶数の場合とは異なり、円O_iの反対側に点 O 以外の交点をもたない円は存在しない。よって、1 つの円につき、他の円と$n-1$(個)の交点をもつ。先程と同様に考えると、正n角形の個数は、

$$\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{n}=\frac{n-1}{2}\ (個)$$

である。 (Q. E. D.)

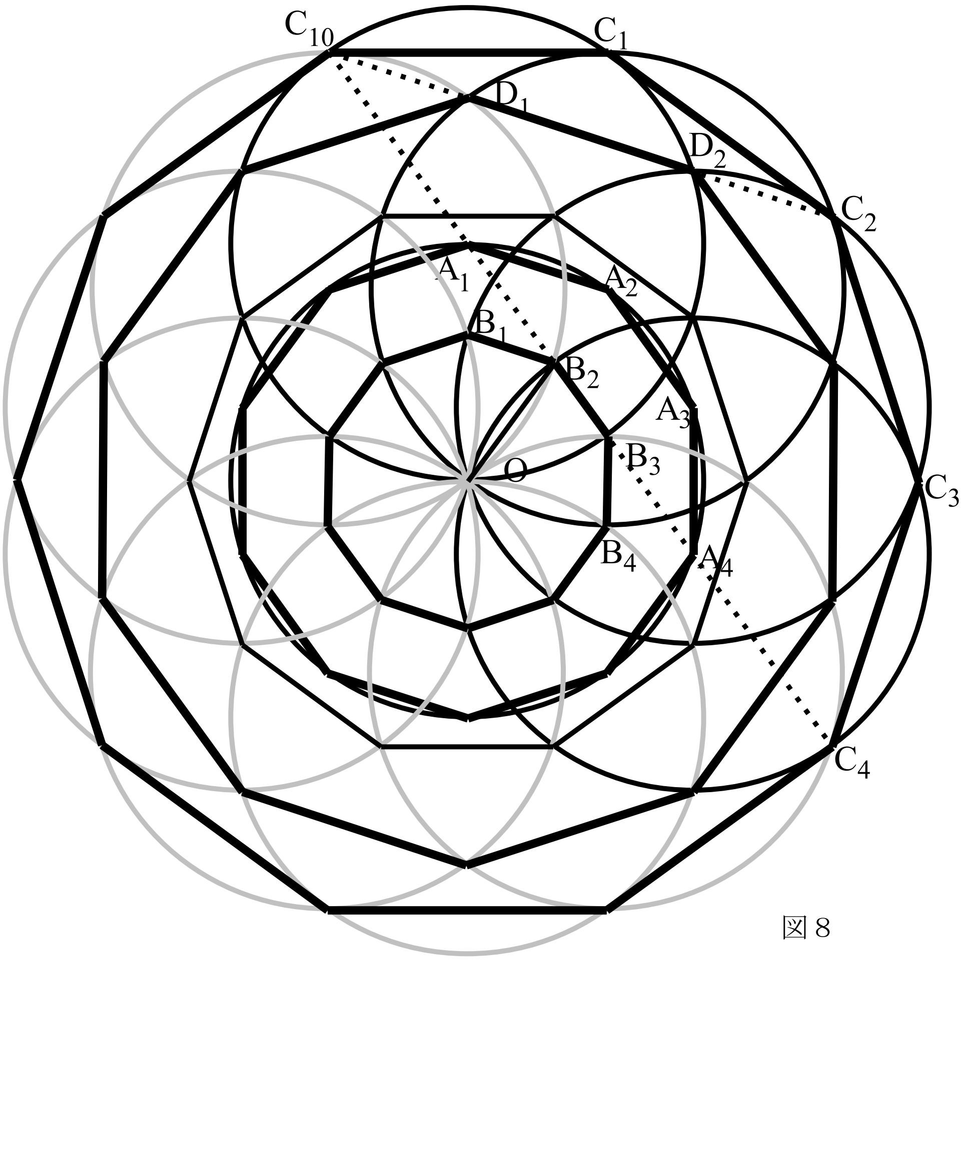

図８

命題３

nが奇数$n=2k+1$であるとする。

(1) kが奇数のとき

4 点$\mathrm{C}_n, \mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}, \mathrm{B}_{\frac{k+1}{2}}, \mathrm{C}_k$は一直線上にある。

(2) kが偶数のとき

4 点$\mathrm{C}_n, \mathrm{B}_{\frac{k}{2}}, \mathrm{B}_{\frac{k}{2}+1}, \mathrm{C}_k$は一直線上にある。

(証明)

(1) kが奇数のとき

点 O から、$\mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{B}_{\frac{k+1}{2}}$へ下ろした垂線の足を H_5, 点 O から$\mathrm{C}_n\mathrm{C}_k$へ下ろした垂線の足を H_6 とする。図形の対称性から、$\mathrm{OH}_5=\mathrm{OH}_6$を証明すれば十分である。

さらに、点$\mathrm{A}_{\frac{k+3}{2}}$から$\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}$へ下ろした垂線の足を H_7とすると、$\triangle \mathrm{OA}_{\frac{k+3}{2}}\mathrm{H}_7$は直角三角形であり、$\mathrm{OA}_{\frac{k+3}{2}}=r$,

$\angle \mathrm{A}_{\frac{k+3}{2}}\mathrm{OH}_7=\dfrac{540^\circ}{n}$ より、

$$\cos\frac{540^\circ}{n}=\frac{\mathrm{OH}_7}{\mathrm{OA}_{\frac{k+3}{2}}}=\frac{\mathrm{OH}_7}{r}$$

ゆえ、$\mathrm{OH}_7=r\cos\dfrac{540^\circ}{n}$.

よって、$\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}=2\mathrm{OH}_7=2r\cos\dfrac{540^\circ}{n}$.

$\angle \mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{OH}_5=\dfrac{180^\circ}{n}$より、

$$\cos\frac{180^\circ}{n}=\frac{\mathrm{OH}_5}{\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}}=\frac{\mathrm{OH}_5}{2r\cos\frac{540^\circ}{n}}.$$

よって、$\mathrm{OH}_5=2r\cos\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{540^\circ}{n}$ …①

また、点$\mathrm{A}_{\frac{k-1}{2}}$から$\mathrm{OC}_n$へ下ろした垂線の足を H_8とする。$\triangle \mathrm{OA}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{H}_8$は直角三角形であり、$\angle \mathrm{A}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{OH}_8=\dfrac{180^\circ}{n}$なので、

$\mathrm{OH}_8=r\cos\dfrac{180^\circ}{n}$. よって、

$$\mathrm{OC}_n=2\mathrm{OH}_8=2r\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

さらに、$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{OH}_6=\dfrac{540^\circ}{n}$ より、

$\cos\dfrac{540^\circ}{n}=\dfrac{\mathrm{OH}_6}{2r\cos\frac{180^\circ}{n}}$ であるから、

$$\mathrm{OH}_6=2r\cos\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{540^\circ}{n} \quad \cdots ②$$

①, ②より、$\mathrm{OH}_5=\mathrm{OH}_6$. (Q. E. D.)

(2) kが偶数のときも同様に証明できる。

命題４

nが偶数$n=2k$であるとする。

(1) kが奇数のとき

4 点$\mathrm{C}_n, \mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}, \mathrm{B}_{\frac{k+1}{2}}, \mathrm{C}_{k-1}$は一直線上にある。

(2) kが偶数のとき

4 点$\mathrm{C}_n, \mathrm{B}_{\frac{n}{4}-1}, \mathrm{B}_{\frac{n}{4}}, \mathrm{C}_{\frac{n}{2}-1}$は一直線上にある。

(証明)

(1) kが奇数のとき (図９参照)

点 O から$\mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{B}_{\frac{k+1}{2}}$へ下ろした垂線の足を H_9, $\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{k-1}$へ下ろした垂線の足を H_{10}とする。図形の対称性から、$\mathrm{OH}_9=\mathrm{OH}_{10}$を証明すればよい。点$A_{\frac{k+3}{2}}$から$\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}$へ下ろした垂線を H_{11}とすると、

$$\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}=2\mathrm{OH}_{11}=2r\cos\angle \mathrm{A}_{\frac{k+1}{2}}\mathrm{OH}_{11}.$$

$\angle \mathrm{A}_{\frac{k+3}{2}}\mathrm{OH}_{11}=\dfrac{720^\circ}{n}$ であるから、

$$\mathrm{OB}_{\frac{k+1}{2}}=\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}=2r\cos\frac{720^\circ}{n}.$$

したがって、$\angle \mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{OH}_9=\dfrac{180^\circ}{n}$より、

$$\cos\frac{180°}{n}=\frac{OH_9}{OB_{\frac{k-1}{2}}}=\frac{OH_9}{2r\cos\frac{720°}{n}}$$

よって、$OH_9=2r\cos\frac{180°}{n}\cos\frac{720°}{n}$ …①

また、点$A_{\frac{k-3}{2}}$からOC_nへ下ろした垂線の足をH_{12}とする。△$A_{\frac{k-3}{2}}OH_{12}$は直角三角形であるから、$\cos\frac{180°}{n}=\frac{OH_{12}}{OA_{\frac{k-3}{2}}}=\frac{OH_{12}}{r}$.

ゆえに、$OH_{12}=r\cos\frac{180°}{n}$ であり、

$OC_n=2OH_{12}=2r\cos\frac{180°}{n}$.

いま、$\cos\angle C_nOH_{10}=\frac{720°}{n}$ なので、

$$\cos\frac{720°}{n}=\frac{OH_{10}}{OC_n}=\frac{OH_{10}}{2r\cos\frac{180°}{n}}.$$

よって、$OH_{10}=2r\cos\frac{180°}{n}\cos\frac{720°}{n}$ …②

①，②より、$OH_9=OH_{10}$.

(2) kが偶数のときも同様に証明できる。

(Q. E. D.)

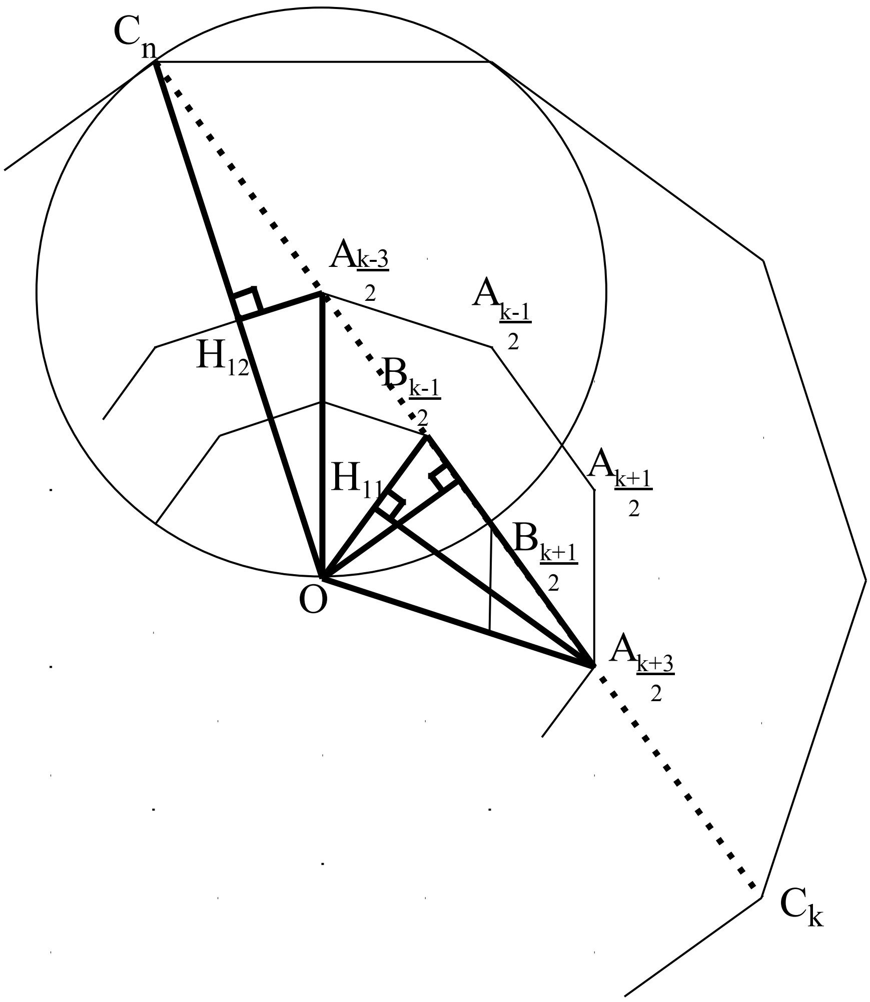

図 9

命題５

4 点 C_n, D_1, D_2, C_2 は一直線上にある。

(証明)（図 10 参照)

点Oから D_1D_2 に下ろした垂線の足を H_{13}, C_nC_2 に下ろした垂線の足を H_{14} とする。これから $OH_{13}=OH_{14}$ を示せばよいことがわかる。$\triangle OA_2D_1$ は二等辺三角形なので、点 A_2 から OD_1 に下ろした垂線の足を H_{15} とすると、H_{15} は線分 OD_1 を二等分する。

よって、$\angle A_2OH_{15}=\dfrac{360°}{n}$ より、

$$\cos\frac{360°}{n}=\frac{OH_{15}}{OA_2}=\frac{OH_{15}}{r}.$$

ゆえに、$OD_1=2OH_{15}=2r\cos\dfrac{360°}{n}$.

また、$\triangle OD_1H_{13}$ は直角三角形であり、

$\angle D_1OH_{13}=\dfrac{180°}{n}$ だから、

$$\cos\frac{180°}{n}=\frac{OH_{13}}{OD_1}=\frac{OH_{13}}{2r\cos\frac{360°}{n}}.$$

ゆえに、$OH_{13}=2r\cos\dfrac{180°}{n}\cos\dfrac{360°}{n}$ …①

さらに、点 A_1 から OC_n へ下ろした垂線の足を H_{16} とする。$\triangle OA_1C_n$ は二等辺三角形であるから、H_{16} は線分 OC_n を二等分する。また、$\triangle OA_1H_{16}$ は直角三角形であり、

$\angle A_1OH_{16}=\dfrac{180°}{n}$ だから、

$$\cos\frac{180°}{n}=\frac{OH_{16}}{OA_1}=\frac{OC_{16}}{r}.$$

よって、$OC_n=2OH_{16}=2r\cos\dfrac{180°}{n}$.

$\triangle H_{14}OC_n$ は直角三角形であり、

$\angle H_{14}OC_n=\dfrac{360°}{n}$ なので、

$$\cos\frac{360°}{n}=\frac{OH_{14}}{OC_n}=\frac{OH_{14}}{2r\cos\frac{180°}{n}}.$$

よって、$OH_{14}=2r\cos\dfrac{180°}{n}\cos\dfrac{360°}{n}$ …②

①, ②より、$OH_{13}=OH_{14}$ (Q. E. D.)

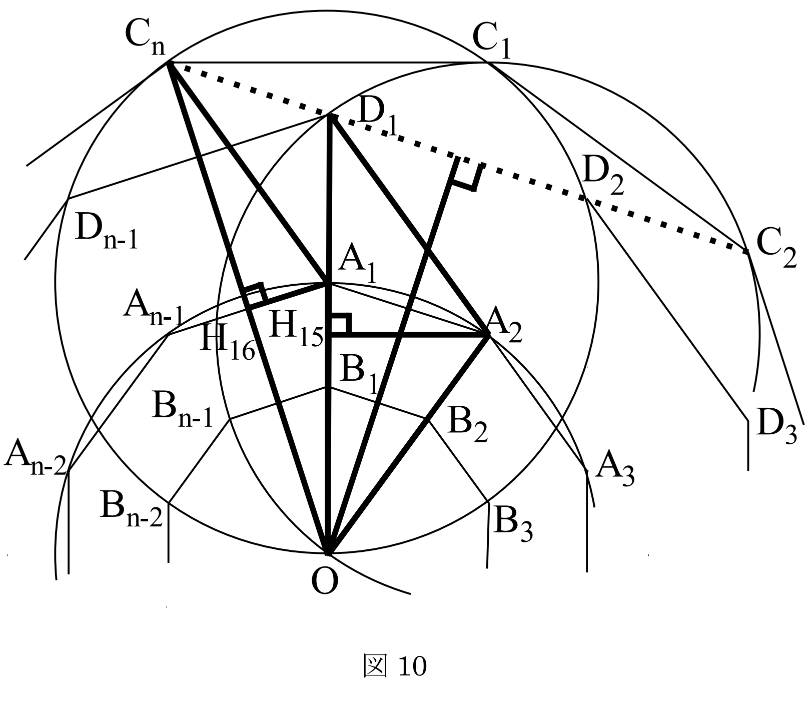

図 10

命題６

n が偶数 $n=2k$ であるとする。

(1) k が奇数のとき

4 点 A_1, $B_{\frac{k-1}{2}}$, $B_{\frac{k+1}{2}}$, A_{k-1} は一直線上にある。

(2) k が偶数のとき

4 点 $A_1, B_{\frac{k-1}{2}}, B_{\frac{k}{2}}, A_{k-1}$ は一直線上にある。

(証明)

(1) 点 O から線分 A_1A_{k-1} へ下ろした垂線の足を H_{17}，点 O から線分 $B_{\frac{k-1}{2}}B_{\frac{k+1}{2}}$ へ下ろした垂線の足を H_{18} とする。これから $OH_{17}=OH_{18}$ を証明すればよい。

点 A_{k-1} から $OB_{\frac{k-1}{2}}$ へ下ろした垂線を H_{19} とすると、

$$OB_{\frac{k-1}{2}} = 2OH_{19} = 2r\cos\angle A_{k-1}OH_{19}.$$

$$\angle A_{k-1}OH_{19} = \frac{360°}{n}\times\left(k-1-\frac{k+1}{2}\right)+\frac{360°}{n}$$
$$=\frac{k-1}{n}\times180°.$$

であるから、

$$OB_{\frac{k+1}{2}} = 2r\cos\left(\frac{k-1}{n}\times180°\right).$$

したがって、$\angle B_{\frac{k-1}{2}}OH_{18}=\dfrac{180°}{n}$ より、

$$OH_{18} = OB_{\frac{k-1}{2}}\cos\angle B_{\frac{k-1}{2}}OH_{18}$$
$$=2r\cos\left(\frac{k-1}{n}\times180°\right)\cos\frac{180°}{n}\cdots①$$

また、$\triangle A_1OH_{17}$ は直角三角形であるから、

$$OH_{17} = 2r\cos\angle A_1OH_{17}.$$

$$\angle A_1OH_{17} = \frac{360°}{n}\times\left(\frac{k-1}{2}-1\right)+\frac{180°}{n}$$
$$=\frac{k-2}{n}\times180°.$$

であるから、

$$OH_{17} = r\cos\left(\frac{k-2}{n}\times180°\right)\ \cdots②.$$

ここで、積和公式より、

$$2\cos\left(\frac{k-1}{n}\times180°\right)\cos\frac{180°}{n}$$
$$=\cos\left\{\left(\frac{k-1}{n}\times180°\right)+\frac{180°}{n}\right\}$$
$$+\cos\left\{\left(\frac{k-1}{n}\times180°\right)-\frac{180°}{n}\right\}$$
$$=\cos\left(\frac{k}{n}\times180°\right)+\cos\left(\frac{k-2}{n}\times180°\right).$$

すると、$n=2k$ より、

$$\cos\left(\frac{k}{n}\times180°\right)=\cos\left(\frac{k}{2k}\times180°\right)$$
$$=\cos 90°=0.$$

したがって、

$$OH_{18} = 2r\cos\left(\frac{k-2}{n}\times180°\right).$$

①，②より、$OH_{17}=OH_{18}$.

(2) k が偶数のときも同様に証明できる。

(Q. E. D.)

４．今後の課題

今回は、正多角形で操作をしたが、正多角形以外の図形についても、どのような性質をもつのか調べてみたい。また、正多角形の各頂点を中心とする円の半径の長さを変えて性質を調べることも今後の課題である。さらに、星形正多角形との関係も調べていきたい。

５．参考文献

[1] 「図解雑学　フーリエ変換」，佐藤敏明，ナツメ社

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。