カプレカー変換に関する考察(2)

3年B組　市田　美玲
指導教員　川口　慎二

１． 要約

サイエンス研究会数学班3年生はカプレカー変換について学習している。今回は6桁のカプレカー変換について考察した。また、4, 5, 6桁における、収束または循環までの過程をまとめたので紹介する。

キーワード　カプレカー変換、カプレカー定数、収束、循環

２． 研究の背景と目的

カプレカー変換とは自然数において、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作のことである。この変換を続けると1つの値に収束するか、複数の値で循環することが知られている。しかし、どのような場合に収束あるいは循環が表れるのか、どのような値を経て収束、循環にたどりつくのかは明らかになっていない。そこで、今回は6桁のカプレカー変換と4, 5, 6桁における、収束、循環の過程をまとめた。なお、2, 3桁の場合については、参考文献[1]にまとめている。

３． 研究内容

3.1 基本事項

■ソート

各桁の数字を並びかえて、最大の数にする操作をいう。

■カプレカー定数

１回の変換によって、値が変化しない自然数のことをいう。

ただし、ぞろ目は最初の変換で0になるので、除いて考える。また、n桁の変換を考える際に変換により1桁減ってしまったとしても、n桁とみなして考える。

3.2　6桁のカプレカー変換

■6桁のカプレカー定数を求める

<u>命題１</u>

6桁のカプレカー定数は存在する。

[証明]

6桁のカプレカー定数のソート後の値を

$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$

とおき、$\langle abcdef \rangle$と表記する。

(ただし、$9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f \geq 0$, $a, b, c, d, e, f \in Z$)

同様に変換後の値を$\langle pqrstu \rangle$とおく。中央の数、つまり、$c = d$のときと$c > d$のときで場合分けして、繰り下がりに注意して変換を筆算で行うと次のようになる。

[1] $c=d$ のとき

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
- & f & e & d & c & b & a \\
\hline
 & a-f & b-e-1 & 9 & 9 & e-b+9 & f-a+10
\end{array}
$$

筆算 1

$\langle abcdef \rangle$ はカプレカー定数をソートしたものであり、$a \geq b \geq c = d \geq e \geq f$ から、$a=b=r=s=9$ であるとわかる。すると、$t=e-b+9=e$ より $e=t$.

また、$u=f+1>f$ である。

さらに、$p=f$ と仮定すると、$p=a-f=9-f=f$ ゆえ、$f=4.5$ となり、適さない。

したがって、$f \neq p,r,s,t,u$.

よって、変換後の値 $\langle pqrstu \rangle$ に当てはまる $\langle abcdef \rangle$ は $\langle cfabed \rangle, \langle dfabec \rangle$ の 2 通りとなる。それぞれの連立方程式を解くと、

$\langle pqrstu \rangle = \langle cfabed \rangle = \langle dfabec \rangle = 549945$

となる。よって、6 桁のカプレカー定数は 549945 である。

[2] $c>d$ のとき

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
- & f & e & d & c & b & a \\
\hline
 & a-f & b-e & c-d-1 & d-c+9 & e-b+9 & f-a+10
\end{array}
$$

筆算 2

$a-f \geq b-e \geq c-d$ より $p \geq q > r$

また、$c=r$ と仮定すると、$r=c-d-1=c$ なので $d=-1$ となり、適さない。ゆえに、$c \neq r$.

加えて、$9 \geq a$ より $-a+10 \geq 1$ であるから、$f-a+10 \geq f+1 > f$ となり $f \neq u$.

さらに $\langle pqrstu \rangle$ に当てはまる $\langle abcdef \rangle$ を限定する。

〈$d \neq s$ でないことの証明〉

$d=s$ と仮定する。$s=d-c+9=d$ より $c=9$. $a \geq b \geq c$ より、$a=b=c=9$.

よって、

$$
\begin{cases}
a=b=c=9 \\
p=9-f \\
q=9-e \\
r=8-d \\
s=d \\
t=e \\
u=f+1
\end{cases}
$$

となる。

$a=b=c=9$ より、p, q, r, s, t, u のうちの 3 つは値が 9 である必要がある。

$r=9$ と仮定すると、$d=-1$ となり $r \neq 9$.

$c>d \geq e \geq f$ より $e, f \neq 9$. したがって、$p=q=u=9$.

このとき、$p=9-f=9$ より $f=0$ である。ところが、$u=f+1=9$ より $f=8$ であり、矛盾が生じる。よって、$d \neq s$. ∎

〈$e \neq t$ でないことの証明〉

$e=t$ と仮定する。$t=e-b+9=e$ より、$b=9$. $a \geq b$ より $a=b=9$.

よって、

$$\begin{cases} a=b=9 \\ p=9-f \\ q=9-e \\ r=c-d-1 \\ s=d-c+9 \\ t=e \\ u=f+1 \end{cases}$$

となる。

$a=b=9$ より、 p, q, r, s, t, u のうちの 2 つは値が 9 である必要がある。

$r=9$ と仮定すると、$r=c-d-1=9$ より $c-d=10$ となり、適さないから $r \neq 9$.

$s=9$ と仮定すると、$s=d-c+9=9$ より $c-d=0$ となるが、$c>d$ より適さないから、$s \neq 9$.

$t=9$ と仮定すると、$t=e=9$ および $c>d \geq e$ より、$c \geq 10$ となり、適さないから $t \neq 9$.

$u=9$ と仮定すると、$u=f+1=9$ より、$f=8$.

ここで、a, b, c, d, e, f の大小関係より、$a=b=c=9, d=e=f=8$ となる。したがって、p, q, r, s, t, u のうちの 3 つは値が 9, 他の 3 つは値が 8 である必要がある。p を求めると、$p=9-f=9-8=1$ となり、矛盾が生じるから $u \neq 9$.

以上から、$p=q=9$ であるとわかる。すると、$p=9-f=9$ より、$f=0$. また、$q=9-e=9$ より $e=0$ である。さらに、$e=f=0$ より、p, q, r, s, t, u のうちの 2 つは値が 0 である必要がある。

ここで、$t=e=0$ より $t=0$ である。また、$p=q=9$ より $p \neq 0,\ q \neq 0$. $s=0$ と仮定すると、$s=d-c+9=0$ より、$c-d=9$ となり、適さないから $s \neq 0$.

最後に、$u=f+1=1$ より $u \neq 0$.

以上から、$r=0, t=0$ である。よって、$r=c-d-1=0$ より、$c-d=1$.

このとき、$s=d-c+9=8$ となる。

これらを整理すると、

$$p=q=a=b=9$$
$$r=t=e=f=0$$
$$s=8,\ u=1$$

となる。

$c>d$ より $s=c=8, u=d=1$ と決まる。

このとき、$c-d=8-1=7$ となり矛盾が生じる。

よって、$e \neq t$ である。∎

以上から、$d \neq s,\ e \neq t$ であることがわかった。ここで、$p=a$ のときを考える。

$q>r,\ c \neq r, d \neq s, e \neq t,\ f \neq u$ より、$\langle pqrstu \rangle$ に当てはまる $\langle abcdef \rangle$ は 15 通りとなる。それぞれについて、a, b, c, d, e, f に関する連立方程式を解くと、解として適するものがない。ゆえに、$p=a$ のときカプレカー定数は存在しない。

同様に、$p=b$ のとき 37 通りとなり、それぞれの連立方程式を解くと、

$$\langle pqrstu \rangle = \langle befacd \rangle = 631764$$

だけが解として適する。

ここで、$b=q$ と仮定すると、$q=b-e$, $e \geq f$ より $f=0$ となり $a=p$ となる。$p=a$ のときにはカプレカー定数は存在しないから、$b \neq q$ であるといえる。

同様に $p=c, d, e, f$ のとき、$p \geq q > r$, $b \neq q,\ c \neq r,\ d \neq s,\ e \neq t,\ f \neq u$ より、条件を満たす $\langle abcdef \rangle$ の並びはそれぞれ 23,

6, 6, 6 通りとなる。それぞれの連立方程式を解くと、

$$\langle pqrstu \rangle = \langle cefabd \rangle = 631764$$

だけが解として適する。

よって、6 桁のカプレカー定数は 631764 である。　(Q. E. D.)

■変換を続けるとどうなるのか

［考察］

6 桁のカプレカー定数が 549945, 631764 であることが示されたが、任意の 6 桁の数 $\langle abcdef \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかを考える。

$\langle abcdef \rangle$ を変換すると筆算 2 より、

$$99999(a-f)+9990(b-e)+900(c-d)$$

となる。

ここから、変換後の値は $a-f$, $b-e$, $c-d$ の値によって決まることがわかる(ただし、$a-f \geq b-e \geq c-d$)。そこで、この値によって場合分けし、変換を繰り返し行った。

すると、6 桁の自然数は変換を繰り返していくと、次の 3 パターンのいずれかで循環または収束することがわかった。

① 420876→851742→750843→840852→860832→862632→642654→420876→ …

② 631764

③ 549945

さらに、①は最大で 13 回の変換で循環に入り、②は最大で 4 回、③は最大で 1 回の変換で収束するということが明らかになった。

3.3　収束、循環の過程

4, 5, 6 桁の収束、循環の過程を文末の樹形図に表した。ある自然数を 1 回変換すると、樹形図中のいずれかの数になる。さらに、その数を変換すると線でつながれている右側の数になる。

例えば、「950841━970821」は 950841 を 1 回変換すると、970821 に変換されることを表している。

4．今後の課題

今回、6 桁のカプレカー変換について、自ら考察することができた。しかし、収束、循環の過程の値についての考察は十分にはできなかった。また、今回は手計算で行ったが、手計算と並行して計算機を用いて計算していく必要がある。今後は過程の値には規則性はあるのかということを詳しく考察していきたい。

5．参考文献

[1] 「カプレカー変換に関する考察」, 市田美玲, 2013 年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

6．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩、後輩の方々にもご協力いただきました。ありがとうございました。

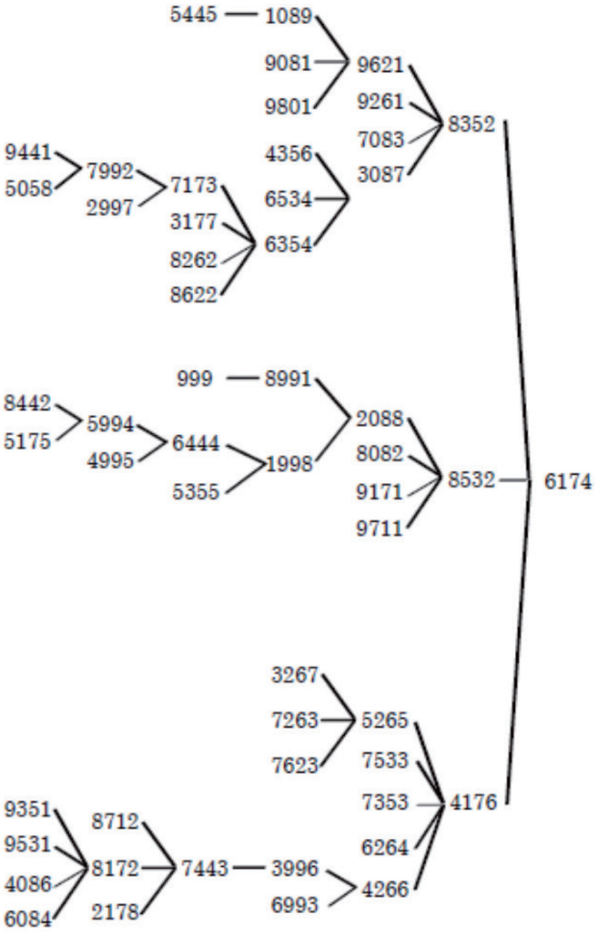


図１　4 桁の場合

●4 桁の場合

すべての 4 桁の自然数は変換を繰り返すと 6174 なる。さらに、それに辿り着くまでに最大で 7 回の変換が必要である。

●5 桁の場合

すべての 5 桁の自然数は変換を繰り返すと次の 3 パターンのいずれかで循環する。

① **74943→62964→71973→83952**
② **75933→63954→61974→82962**
③ **59994→53955**

さらに、①, ②は最大で 6 回の変換を行うと循環に入り、③は最大で 2 回の変換を行うと循環に入る。

4 桁あるいは 5 桁の場合の詳細については、参考文献[1]を参照されたい。

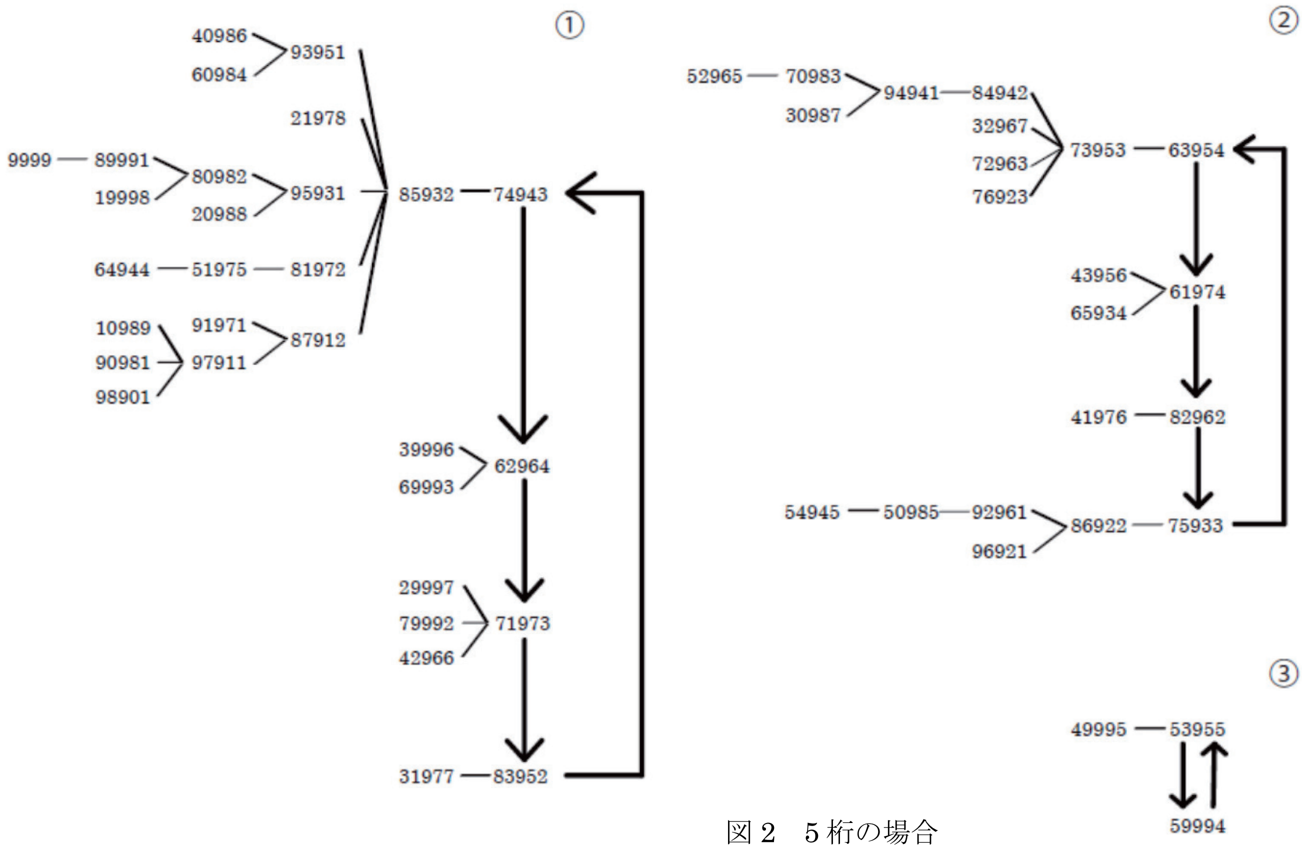


図２　5 桁の場合

図３　６桁の場合Ｉ

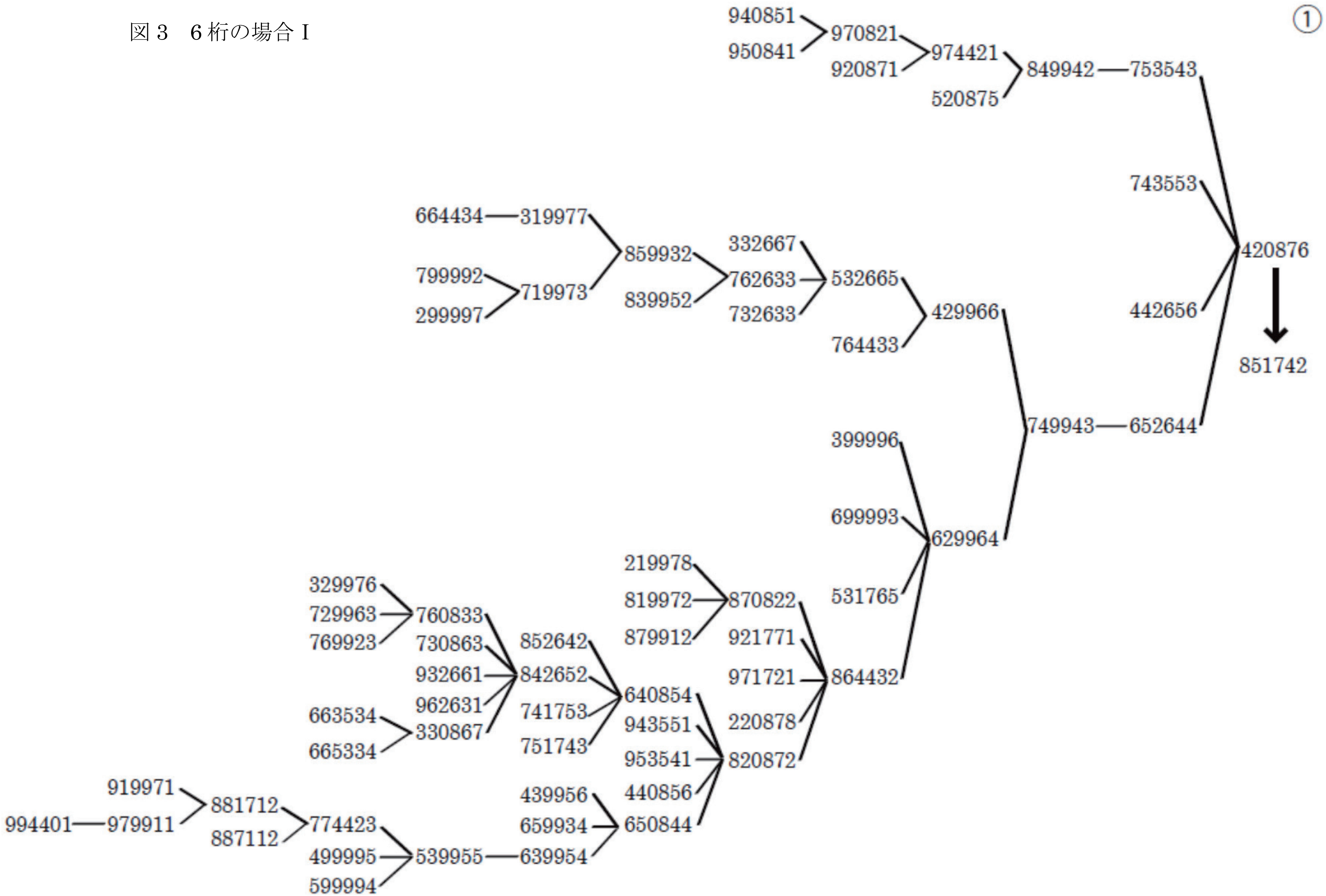
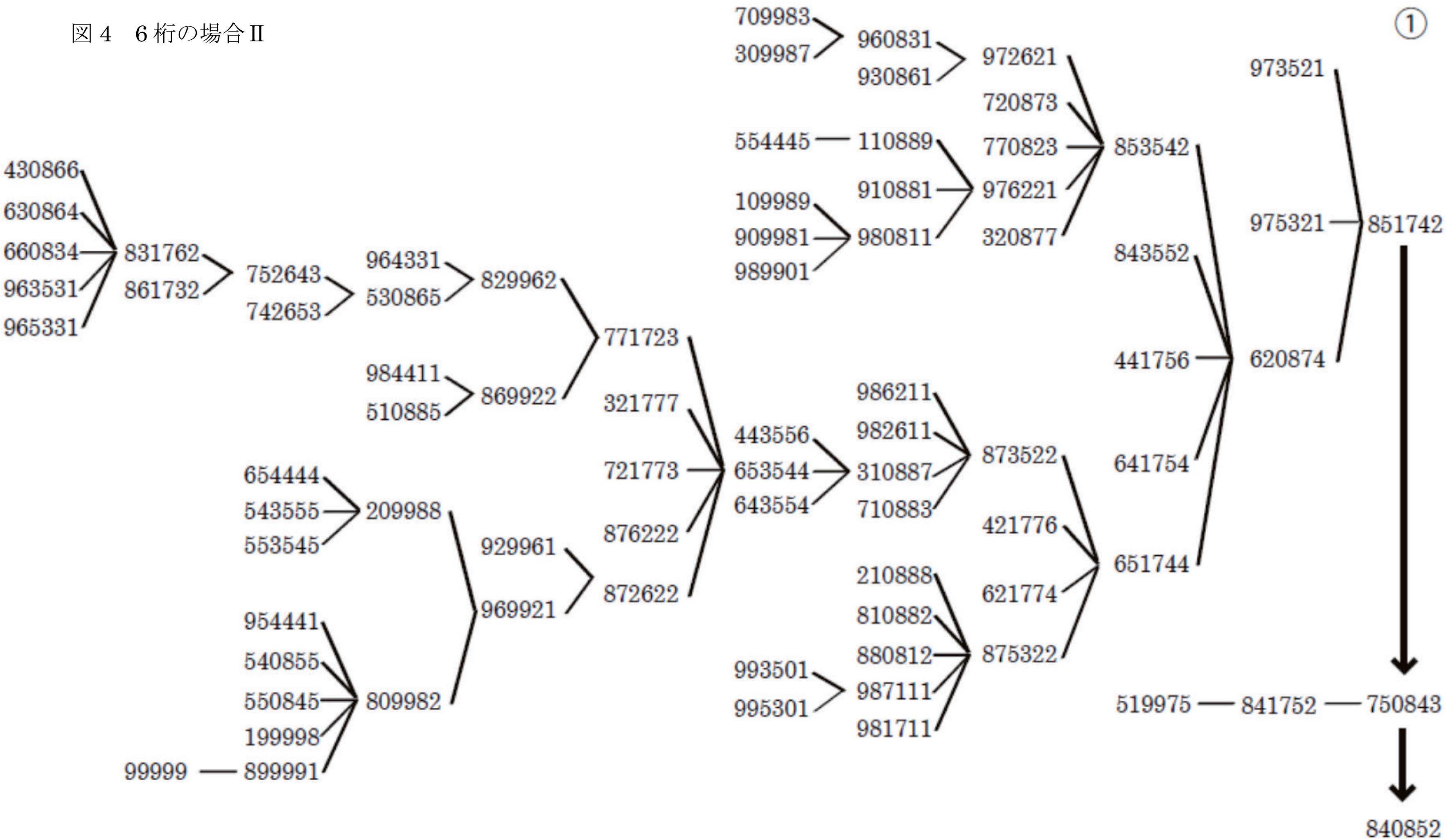

①
940851
950841
970821
920871
974421
520875
849942
753543
743553
420876
442656
851742
664434
319977
799992
719973
299997
859932
839952
332667
762633
732633
532665
764433
429966
749943
652644
399996
699993
629964
531765
219978
819972
879912
870822
921771
971721
864432
220878
820872
329976
729963
769923
760833
730863
932661
962631
852642
842652
741753
751743
640854
943551
953541
440856
650844
663534
665334
330867
919971
994401
979911
881712
887112
774423
499995
599994
539955
639954
439956
659934

図４　６桁の場合Ⅱ


430866
630864
660834
963531
965331
831762
861732
752643
742653
964331
530865
829962
984411
510885
869922
771723
654444
543555
553545
209988
929961
969921
954441
540855
550845
199998
99999
899991
809982
321777
721773
876222
872622
709983
309987
960831
930861
554445
110889
109989
909981
989901
910881
980811
443556
653544
643554
986211
982611
310887
710883
210888
810882
880812
993501
995301
987111
981711
972621
720873
770823
976221
320877
873522
421776
621774
875322
853542
843552
441756
641754
651744
973521
975321
620874
851742
①
519975
841752
750843
840852

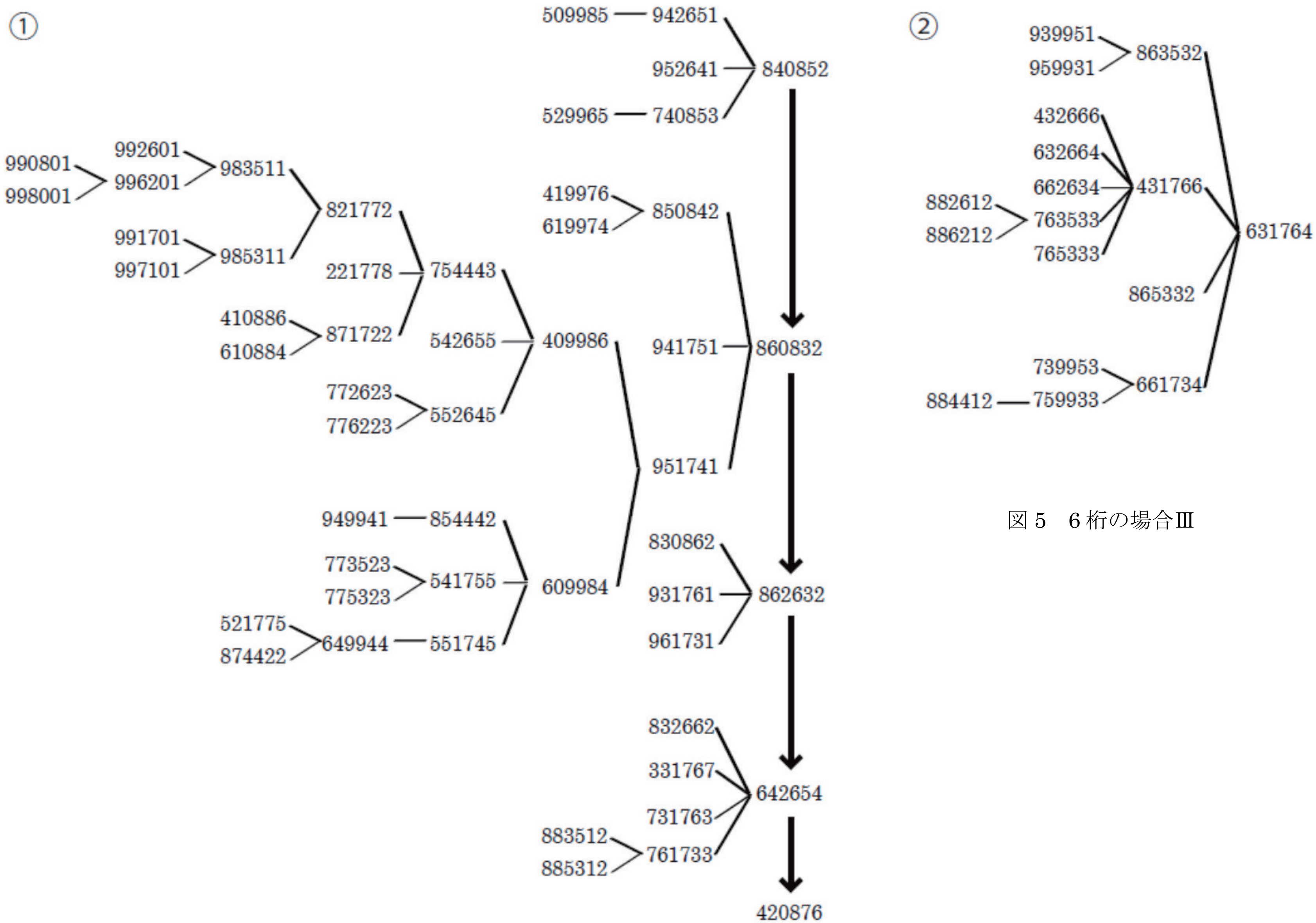

①
509985
942651
952641
840852
529965
740853
990801
992601
983511
998001
996201
821772
991701
985311
997101
221778
754443
410886
871722
610884
542655
409986
772623
552645
776223
419976
850842
619974
941751
860832
951741
949941
854442
773523
541755
775323
609984
521775
649944
551745
874422
830862
931761
862632
961731
832662
331767
642654
731763
883512
761733
885312
420876
②
939951
863532
959931
432666
632664
662634
431766
882612
763533
886212
765333
631764
865332
739953
661734
884412
759933

図５　６桁の場合Ⅲ