塔の美しさは数式のままに

5年B組　田村　拓也

指導教員　川口　慎二

1．要約

学校への通学路で見ることができる興福寺の五重塔は非常に美しいと感じた。また、薬師寺の三重塔は裳階を持ち、アメリカの東洋美術史家のフェノロサは「凍れる音楽」と評したほどである。この美しさはどこからくるものなのかを明らかにしたいと思った。

キーワード　五重塔、貴金属比(黄金比、白銀比)、漸化式、平行投影、透視投影

2．研究の背景と目的

古都奈良には様々な建築物が残っている。特にお寺や神社が多数存在し、独特の美しさを持っている。この美しさはどこから来るものなのかを研究した。

3．研究内容

■黄金比

自然界に存在する数列としてフィボナッチ数列が有名である。これは以下の漸化式から導かれる数列で松毬や向日葵に見ることができる。

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

このフィボナッチ数の隣接二項の比の極限を考える。

$$\phi = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{F_n / F_{n-1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\phi}$$

ここで得られた方程式$\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$を$\phi > 0$の範囲で解くことで黄金数$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$が得られ、1：$\phi$の比率を黄金比という。

■貴金属比

フィボナッチ数列を導く漸化式を以下のように自然数nを用いて拡張する。

$$M_0 = 0, M_1 = 1,\ M_{k+2} = nM_{k+1} + M_k$$

同様に隣接二項比の極限を取り、方程式を解くと自然数nに対する関数μ_nが得られる。

$$\mu_n = \lim_{k\to\infty}\frac{M_{k+1}}{M_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{nM_k + M_{k-1}}{M_k}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(n + \frac{1}{M_k / M_{k-1}}\right)$$

$$= n + \frac{1}{\mu_n}$$

より、$\mu_n = \dfrac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$.

特に、$n = 1$のときを黄金数、$n = 2$のときを白銀数、$n = 3$のときを青銅数と呼ぶ。ここで、1 と白銀数の比として得られる白銀比は 1：$\left(1 + \sqrt{2}\right)$である。一方、一般的に

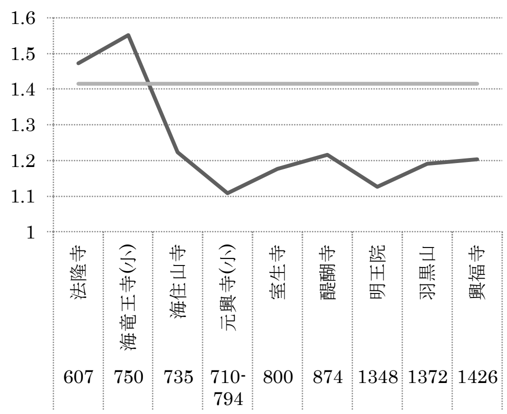
は1 : $\sqrt{2}$ が白銀比とされている。両者の違いは見た目の美しさとして似たものと考え、今回はどちらも同様に考慮した。

■法隆寺

法隆寺は、推古天皇15年(607年)に建立された世界最古の木造建築物である。

この法隆寺にある五重塔の屋根の最上層と最下層の長さの比(以下、これを層長比という)が 1 : $\sqrt{2}$ であることは有名である。そこで法隆寺以降、日本に建てられた多くの五重塔のうち断面図が手に入ったものについて層長比を測定した。

■日本に存在する五重塔の屋根の長さの比



※（小）は小塔を意味する。

※　興福寺は再建時の記録を用いた。

※　時間軸の間隔は考えていない。

寺院建築が伝来して間もない時期に建てられた法隆寺は白銀比に近い比を持っているが、それ以降の仏塔には白銀比が見られない。

■平行投影と透視投影

設計図と我々が見た景色の違いは様々あるが、投影方法の違いは比を考える上で非常に重要である。次の図1の左側が平行投影、右側が透視投影を用いており、それぞれの層長比は 1 : 1.48 と 1 : 1.96 のように顕著に差が現れる。今回は透視投影を用いて考察を行った。

平行投影　　　　透視投影

図1

■各投影方法における座標計算

平行投影を用いて、ある点(x, y, z)をxz平面上の点(x', y', z')に投影するとき、$(x', y', z') = (x, 0, z)$と簡単に計算できる。

透視投影を用いて、ある点(x, y, z)を距離Rだけ離れた焦点をもつ、焦点距離kの投影面上の点(x', y', z')に投影すると、

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

■計算実験1とその効率化

【目的】

塔と投影面の距離を変えながら透視投影を用いて層長比を求め、貴金属比になる距離を見つける。

【方法】

設計図から五重塔を3次元座標空間上で

モデルを作成し、投影面を動かしながら逐次座標計算を行う。しかし、この方法は膨大な時間がかかってしまうので効率化をする必要がある。

【効率化の方法】

インターネットでは Google が提供する、Google Earth という、地球上の様々な地形図や建物の立体図を見ることができるソフトウェアがある。ここから種々の五重塔の 3D モデルをダウンロードし、3DCG アニメーションソフトウェアである Blender を用いて人間の視界をモデル化した動画を作成する。今回は、五重塔から 100m 離れた地点から焦点距離 35mm，視野角 135°の人間が見た視界をモデル化した。次に同研究班に所属する目線認識ソフトウェアを開発している稲益秀成君に開発してもらった、五重塔の層認識ソフトウェアを用いて長さを測定する。最後に表計算ソフト Excel を用いて層長比を算出した。

【結果】

（イ）法隆寺；40m 地点／白銀比

（ロ）興福寺；57m 地点／黄金比

（ハ）薬師寺；40m 地点／白銀比

詳細は次ページのグラフ 1 を参照されたい。

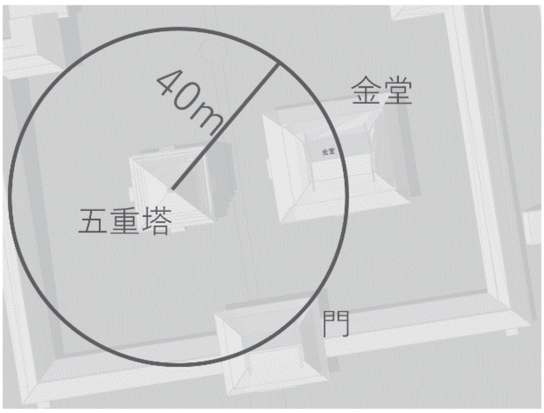


図２　法隆寺境内

【考察】

今回用いた三塔はすべて、白銀比、黄金比を見ることができた距離の位置に金堂と門が存在した。ただし、金堂の中から塔を見ることはできないため、ここでは門を採用する。

【結論】

この三塔は、設計図の上では層長比に貴金属比は見られないが、境内に入って最初に塔を見ることができる場所である門から見ることによって貴金属比になることがわかる。

■計算実験２―実例検証―

実例を検証するには人々が撮った五重塔の写真上で層長比を測るのが良い。

【目的】

実際に人々は塔の美しさを白銀比に関連付けて見ているのかについて調べる。

【方法】

Google 画像検索を用い上位 10 枚の写真を用いて層長比を計算する。ただし、一枚の写真に 2 基以上の塔や堂が含まれていた場合は平均値を用いる。

【結果】　1：1.40

【考察】

写真の中で門から撮られたものはなかったが、結果は非常に白銀比に近い比になった。すなわち、日本人は無意識に白銀比を構図に取り入れた写真を撮ることがわかる。

■計算実験３―国による差異―

今回用いた Google 画像検索は Google Japan によるものであるため、基本的に日本人による写真である。そこで、同様の計算実験 2 を日本に比較的近い韓国の Google Korea、比較的遠くにあるフランス

の Google French の画像検索で行ってみた。

【結果】

Google Japan　1：1.40

Google Korea　1：1.39

Google French　1：1.49

【考察】

日本と韓国では白銀比に近い値をとり、フランスではそれより大きい値をとった。美しいと感じる比に地域差があるとすると、フランス人が日本の建築物を撮ったとき、黄金比寄りの白銀比になったという可能性が考えられる。またこの逆も十分に考えられるので、調査する写真数や建築物数、その所在地を変えて研究する余地があると思われる。

４． 今後の課題

計算実験１での層長比のグラフ１は動画からの算出であり、誤差が生じやすかった。ゆえに設計図から動画を介さずに計算するソフトウェア必要がある。これは現在 Visual C#を用いて開発中である。

また、計算に用いた建築物の数は３つと非常に少ないため増やす必要がある。

５． 参考文献

[1]「雪月花の数学」，桜井進，祥伝社

６． 謝辞

今回の研究にご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の稲益秀成君にもご協力いただきました。ありがとうございました。

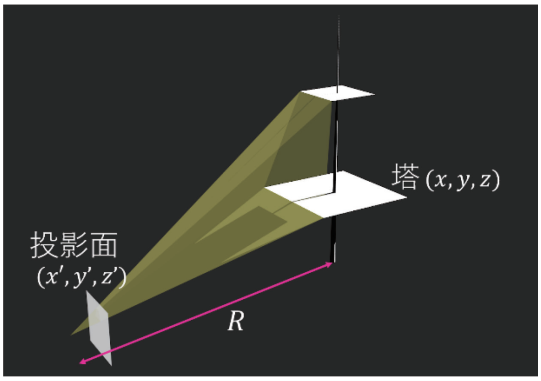
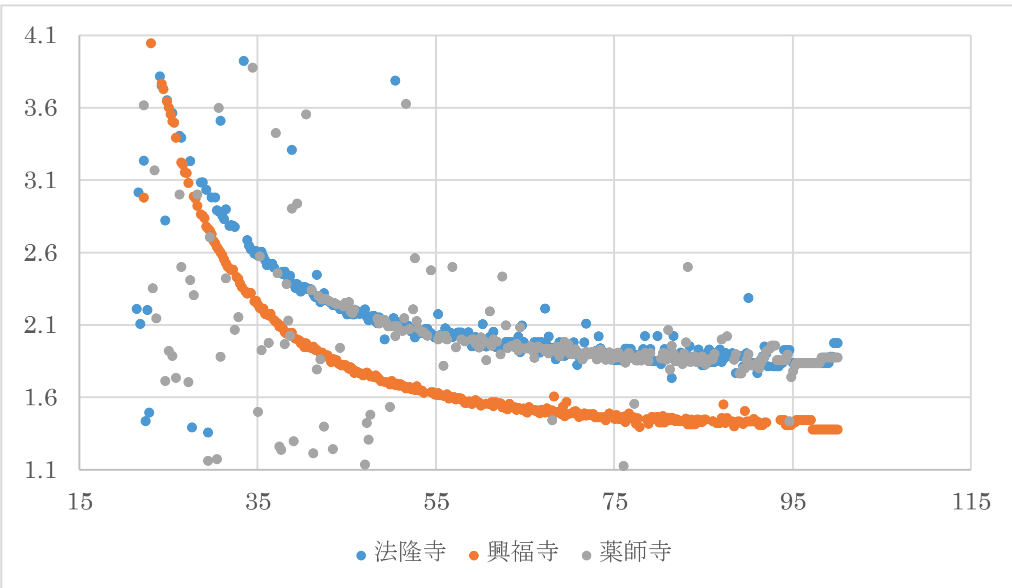


図３　透視投影の座標計



グラフ１　計算実験１の結果