フィボナッチ数列の剰余における法則

２年Ｂ組　志村　恒太郎
指導教員　川口　慎二

１．要約

私はフィボナッチ数列の剰余について研究している。今回は、これらに関する興味深い法則が見つかったので、これを紹介する。

キーワード　　フィボナッチ数列、k - フィボナッチ数列、剰余、合同式

２．研究の背景

フィボナッチ数列について新たな法則を探していたとき、同数列の 1 の位を並べたものに興味深い法則を発見した。よって私の興味をかき立て、これを研究するに至った。

３．研究内容

本稿では、特に注意のない場合、l, m, n を自然数とする。

３．１　定義

3.1.1　フィボナッチ数列の定義

$F_x^{\,y}(z)$ において、x は数列の種類を表す番号（添え字）、y は除数、z は項の番号を表している。また、$1 \leqq x \leqq 6,\ 1 \leqq y,\ 0 \leqq z$ とする。

このとき、k - **フィボナッチ数列**を漸化式

$$F_k^{\,10}(n+2) \equiv F_k^{\,10}(n+1) + F_k^{\,10}(n) \pmod{10}$$

から導かれる数列 $\left\{F_k^{\,10}(n)\right\}$ と定義する。ただし、$1 \leqq k \leqq 6$ とする。

いま、$\left\{F_1^{\,10}(n)\right\}$ の初期値を

$$F_1^{\,10}(0) = 0,\ F_1^{\,10}(1) = 1$$

と定めると、$\left\{F_1^{\,10}(n)\right\}$ の各項を列挙したものは以下の通りとなる。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0,
7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0,
9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0,
3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0, ⋯

上述の定義における数列 $\left\{F_k^{\,10}(n)\right\}$（$k$ = 2, 3, 4, 5, 6)を、以下のような初期値により定義する。

$$F_2^{\,10}(0) = 0,\ F_2^{\,10}(1) = 2$$

$$F_3^{\,10}(0) = 2,\ F_3^{\,10}(1) = 1$$

$$F_4^{\,10}(0) = 2,\ F_4^{\,10}(1) = 6$$

$$F_5^{\,10}(0) = 0,\ F_5^{\,10}(1) = 5$$

$$F_6^{\,10}(0) = 0,\ F_6^{\,10}(1) = 0$$

定理１

k ‐フィボナッチ数列 $\{F_k^{10}(n)\}$ はすべての $1 \leqq k \leqq 6$ について、周期性があり、そのパターンは有限である。

（証明）([1]より）

連続する 2 項の余りが、これまでの連続する 2 項の余りと順序まで等しければ、周期は存在することになる。

ここで周期は存在しないとすると、どの連続する 2 項の余りも等しくないことになる。これは余りの組み合わせが有限個であることに矛盾する。

よって、周期は存在する。(Q. E. D.)

３．２　基本定理

まず、定理１が自明に成り立つ。

定理２

自然数 $l\,(1 \leqq l \leqq 6)$ に対して、l ‐フィボナッチ数列 $\{F_l^{10}(n)\}$ から、

$$F_m^{10}(n) = F_l^{10}(pn+q)*r$$

または、

$$F_m^{10}(n) \equiv F_l^{10}(pn+q)*r \pmod{10}$$

を満たす適当な自然数 $m\,(1 \leqq m \leqq 6)$ と p, q を選ぶと、もとの数列 $\{F_l^{10}(n)\}$ の周期の約数を周期としてもつ m ‐フィボナッチ数列 $\{F_m^{10}(n)\}$ を導き出すことができる。

定理 2 の実例を、前節で述べた形式で列挙すると、

- $F_2^{10}(n) \equiv F_1^{10}(n)*2m$
- $F_2^{10}(n) = F_1^{10}(57n+57)$
- $F_3^{10}(n) = F_1^{10}(5n+3)$
- $F_4^{10}(n) = F_1^{10}\{3*(5n+1)\}$
- $F_5^{10}(n) = F_1^{10}(5n)$
- $F_5^{10}(n) \equiv F_1^{10}(n)*5(2m+1)$
- $F_6^{10}(n) = F_1^{10}(15mn)$
- $F_6^{10}(n) \equiv F_1^{10}(n)*10m$
- $F_4^{10}(n) = F_2^{10}(5n+1)$
- $F_4^{10}(n) = F_2^{10}(5n+2)$
- $F_6^{10}(n) = F_2^{10}(5mn)$
- $F_6^{10}(n) \equiv F_2^{10}(n)*5m$
- $F_4^{10}(n) = F_3^{10}(9n)$
- $F_4^{10}(n) \equiv F_3^{10}(n+m)*2^m$
- $F_5^{10}(n) \equiv F_3^{10}(n)*5(2m+1)$
- $F_6^{10}(n) \equiv F_3^{10}(n)*10m$
- $F_6^{10}(n) \equiv F_4^{10}(n)*5m$
- $F_6^{10}(n) = F_5^{10}(3mn)$
- $F_6^{10}(n) \equiv F_5^{10}(n)*2m$

・$F_1^{10}(5n+3)=F_1^{10}(5n+54)$
$=F_1^{10}(5n+57)$

・$F_1^{10}(n)*3\equiv F_2^{10}(n+45)$

ただし、合同式はいずれも mod 10 とする。

今回は証明を割愛する。これらを組み合わせることにより、より多くの関係式を得ることができる。

定理 2 を発展させて、次の定理を得た。

３．３　10 以外の除数

10 以外の除数の場合の数列 $\{F_l^m(n)\}$（$m\neq 10$）　をすべて求めると、次のことがわかった。

・長さの等しい数列がある場合がある
・それぞれに固有の法則がある
・すべての除数について成り立つ法則は解が 0 になるものを除いて存在しない

これらの事実については、成立することを実例から確認したものの、精細に調べることができなかったため、今後さらに詳しく研究が進める必要がある。

３．４　トリボナッチ数列

この研究はフィボナッチ数列を取り扱ってきたが、これはすべての項が前の 2 項の和となる漸化式で構成される数列である。

ここで「トリボナッチ数列」という数列を考える。トリボナッチ数列とは全ての項が前の 3 項の和となる、フィボナッチ数列によく似た数列である。

この数列を先程まで述べていた剰余の研究に組み込んで考える。

$T_x^y(z)$ において、x は数列の種類を表す番号（添え字)、y は除数、z は項の番号を表している。また、$1\leqq x\leqq 20, 1\leqq y, 0\leqq z$ とする。

このとき、k ‐ **トリボナッチ数列**を漸化式

$$T_k^{10}(n+3)\equiv T_k^{10}(n+2)+T_k^{10}(n+1)+T_k^{10}(n) \pmod{10}$$

から導かれる数列 $\{T_k^{10}(n)\}$ と定義する。ただし、$1\leqq k\leqq 20$ とする。

いま、$\{T_1^{10}(n)\}$ の初期値を

$T_1^{10}(-1)=0,\ T_1^{10}(0)=0,\ T_1^{10}(1)=1$

と定めると、$\{T_1^{10}(n)\}$ の各項を列挙したものは以下の通りとなる。

1, 1, 2, 4, 7, 3, 4, 4, 1, 9, 4, 4, 7, 5, 6,
8, 9, 3, 0, 2, 5, 7, 4, 6, 7, 7, 0, 4, 1, 5,
0, 6, 1, 7, 4, 2, 3, 9, 4, 6, 9, 9, 4, 2, 5,
1, 8, 4, 3, 5, 2, 0, 7, 9, 6, 2, 7, 5, 4, 6,
5, 5, 6, 6, 7, 9, 2, 8, 9, 9, 6, 4, 9, 9, 2,
0, 1, 3, 4, 8, 5, 7, 0, 2, 9, 1, 2, 2, 5, 9,
6, 0, 5, 2, 4, 1, 6, 2, 9, 7, 8, 4, 9, 1, 4,
4, 9, 7, 0, 6, 3, 9, 8, 0, 7, 5, 2, 4, 1, 7,
2, 0, 9, 1, 0, 0, (1, 1, …)

これらから、以下が推測できるが、現時点では証明には至っていない。

・10 以外の除数の場合と同じく、周期の等しい数列が存在する
・数列は次の 4 パターンの並び方が存在

する
①奇数のみの並び
②偶数のみの並び
③奇数、偶数、奇数、偶数のように奇数と偶数が交互になる並び
④奇数、奇数、偶数、偶数のように 1 つおきに奇数と偶数が替わるような並び
・全数列の周期の和は同じ除数のフィボナッチ数列の全数列の和の 2 乗に等しい

ここで、最後の「全数列の周期の和は同じ除数のフィボナッチ数列の全数列の和の 2 乗に等しい」とあるように、トリボナッチ数列などの研究にはさらなる考察が必要である。

しかも、トリボナッチ数列に限らず、「テトラナッチ数列」や、「ペンタナッチ数列」、「ヘキサナッチ数列」といった、すべての項がそれぞれ直前の 4, 5, 6 項の和となる数列、さらには「すべての項が直前の n 項の和となる数列」というように一般化までして考えたいので、コンピューターを用いるなど計算方法の改善が求められる。

４．今後の課題

今回は時間の問題で除数が 10 のときについてしか重点的に研究できなかったが、今後は他の除数の場合について詳しく研究したい。

また、今回はフィボナッチ数列を基本に研究を進めたが、今後はトリボナッチ数列や、テトラナッチ数列といった数列のような、足す項数を変えた数列についてももっと深く研究したい。よって計算速度の向上が必須となってくるので、コンピューター上での計算プログラム作成も行いたい。

５．参考文献

[1] フィボナッチ数列の剰余の周期性の証明
http://blog.livedoor.jp/enjoy_math/archives/50640281.html

６．謝辞

この研究を行うにあたりまして、顧問の川口先生には多大なご指導を賜りました。また、サイエンス研究会の先輩方や、研究発表会でお会いいたしました他校の皆様、友人にも多くの助言・協力を賜りました。この場を借りて、深く御礼申し上げますとともに、これからも御協力お願い申し上げます。