モンティ・ホール問題についての考察

３年Ａ組　松川　賢太朗
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 3 年生はさまざまな問題について研究している。今回は、モンティ ・ホール問題の一般化に向けて研究をした。

キーワード　　モンティ・ホール問題、条件付き確率、ベイズの定理、事後確率

２．研究の背景と目的

まずモンティ・ホール問題とは、
「3 つのドアの 1 つには賞品が、残りの 2 つのドアにはヤギが隠されている。司会者(モンティ)は答えを知っている。まず挑戦者がドアを 1 つ選ぶ。そして司会者(モンティ)は残りのドアのうちヤギがいるドアを 1 つ開けて、挑戦者に残り 2 つのドアから選び直す機会を与えるというゲームがある。そのとき賞品を得るためには挑戦者はドアを変えるべきか変えるべきではないか。」という内容である。

このゲームは3つのドアで行っているがドアの数や司会者が開けるドアの数などを変えることによって、問題の解答がどうなるのかということに疑問を抱き、この問題に興味を持った。今回はモンティ・ホール問題を 3 通りの考え方で解いた。

３．研究内容

＜設定＞

3 つのドアをそれぞれ A, B, C とする。挑戦者は A のドアを選び（事象 A）、モンティは B のドアを開けた（事象 D_B）とする。ヤギがいるドアはハズレとする。

＜解法１＞

まず、挑戦者が A のドアを選ぶ確率は、3 枚のドア A, B, C から 1 つを選ぶので、$\dfrac{1}{3}$ とわかる。次に、モンティが B のドアを開ける確率をあわせて考える。

●A のドアに賞品がある場合

モンティは B, C どちらのドアも開けることができる。よってモンティが B のドアを開ける確率は $\dfrac{1}{2}$ とわかる。つまり A のドアに賞品があり、かつ B のドアをモンティが開ける確率は

$$P(A \cap D_B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

である。

●C のドアに賞品がある場合

モンティは B のドアしか開けることができない。よってモンティが B のドアを開ける確率は 1 である。ゆえに、C のドアに

賞品がありBのドアをモンティが開ける確率は$P(A\cap D_B)=\dfrac{1}{3}\times1=\dfrac{1}{3}$である。

以上から、挑戦者がAのドアを選び、かつモンティがBのドアを開ける確率

$P(A\cap D_B)$は、

・Aのドアに賞品がある場合は、$\dfrac{1}{6}$

・Cのドアに賞品がある場合は、$\dfrac{1}{3}$

となる。

したがって、Cのドアに賞品がある確率が高くなり、Cのドアに変更したほうが賞品を手に入れることができる確率が高いことになる。

＜解法2＞

ベイズの定理を利用する。

これ以降、$P(A), P(B)$をそれぞれ事象A, Bの起こる確率、$P_A(B)$を事象Aが起こったとわかっているときに事象Bが起こる条件付き確率、$P_B(A)$を事象Bが起こったとわかっているときに事象Aが起こる条件付き確率を表す。

定理（ベイズの定理）

$$P_A(B)=\frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$$

一般に、何も情報がない場合に考える確率を事前確率、ある条件が与えられた場合に考えられる確率を事後確率という。

●ベイズの定理を導く

「AとBの両方が起こる確率」は「Aの起こる確率」と「Aが起こった後でBが起こる確率」の積に等しいので、

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)\quad\cdots①$$

が成り立つ。今度はBが起こる確率を先に考えると、

$$P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)\quad\cdots②$$

が成り立つ。式①，②を連立させると、

$$P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$$

を得る。この式の両辺を$P(A)$で割ると、

$$P_A(B)=\frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$$

となる。

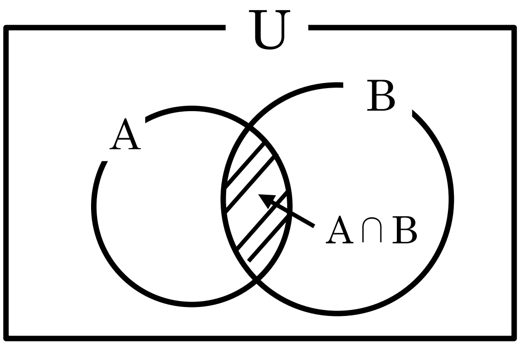
●ベン図で表す

いま、Uを全事象とすると、

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)},\quad P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(U)},\quad P_B(A)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

と表すことができる。



このベイズの定理を応用して、モンティ・ホール問題を考える。ベイズの定理を用いる前に、いくつか考えなければならないことがある。今回はモンティがすでにBのドアを開けておりハズレだと挑戦者に見せた後にAのドアのままにするか、ドア

を変更するかの２通りについて考えなければならない。

（パターン１）

モンティがＢのドアを開けたとき、Ａのドアに賞品がある確率を考える。

モンティがＢのドアを開けるという事象をD_B，Ａのドアに賞品があるという事象をAとすると、求める確率は$P_{D_B}(A)$である。

いま、Ａのドアに賞品があるとわかっていて、モンティがＢのドアを開ける確率$P_A(D_B)$は、＜解法１＞より、$P_A(D_B)=\frac{1}{2}$.

また、Ａのドアに賞品がある確率（事前確率）は$P(A)=\frac{1}{3}$である。

さらに、モンティがＢのドアを開ける確率$P(D_B)$は$P(D_B)=\frac{1}{2}$であるから、ベイズの定理から、

$$P_{D_B}(A)=\frac{P_A(D_B)P(A)}{P(D_b)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

となる。

（パターン２）

モンティがＢのドアを開けたとき、Ｃのドアに賞品がある確率を考える。

モンティがＢのドアを開けるという事象をD_B，Ｃのドアに賞品があるという事象をCとすると、求める確率は$P_{D_B}(C)$である。

いま、Ｃのドアに賞品があるとわかっていて、モンティがＢのドアを開ける確率$P_C(D_B)$は、＜解法１＞より、$P_A(D_B)=1$.

また、Ｃのドアに賞品がある確率（事前確率）は$P(C)=\frac{1}{3}$である。

さらに、、モンティがＢのドアを開ける確率$P(D_B)$は$P(D_B)=\frac{1}{2}$であるから、ベイズの定理から、

$$P_{D_B}(C)=\frac{P_C(D_B)P(C)}{P(D_b)}$$
$$=\frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

となる。

したがって、挑戦者がＡのドアを選んで、モンティがＢのドアを開けた場合、

・Ａのドアに賞品がある確率は$\frac{1}{3}$

・Ｃのドアに賞品がある確率は$\frac{2}{3}$

であるから、Ｃのドアに変更した方がよいことになる。

＜解法３＞

極端な場合を考えてみる。

賞品がＡのドアにはなかった場合、モンティはランダムにドアを開くことはしな

い。わざとハズレのドアを開くことになる。よって、この瞬間に司会者が挑戦者の選択に干渉している。

もともと3枚のドアに賞品がある確率は等しく$\dfrac{1}{3}$ずつであったが、司会者がわざとハズレのドアを1つ開いて見せたことにより、挑戦者の選んだAのドアではなく残っているドアに賞品がある確率は$\dfrac{2}{3}$になったと考えることができる。

わかりやすくするために、ドアを3枚ではなく100枚であると仮定して考える。挑戦者はAのドアを選択するとする。挑戦者が初めに選んだドアに賞品が隠されている確率は$\dfrac{1}{100}$である。一方で、順にハズレのドアを開いていき、2枚まで減らしていくと、残りのドアに賞品が隠されている確率は$\dfrac{99}{100}$と考えることができ、明らかに挑戦者はドアを変更したほうがいいということになる。

４．今後の課題

この研究の最終目標はモンティ・ホール問題の一般化である。もともとのドアの枚数やモンティが開けるドアの枚数、挑戦者が初めに選ぶドアの枚数などを変化させた場合について、3枚のドアのときの結果同じになるのかということをまず考えてみたい。

そのために、今回習得した3つの解法をうまく活用していきたい。

５．参考文献

[1]　「たまたまー日常に潜む「偶然」を科学する」(The Drunkard's Walk)、Leonard Mlodinow 著、田中三彦訳、ダイヤモンド社

[2]　高校数学の美しい物語 http://mathtrain.jp/bayes

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。