魔方陣を作る

３年Ｃ組　今中　翔哉
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班３年生は多様な研究を行っている。私は魔方陣について学習している。今回は魔法陣の作り方について考えた。その中でさまざまなことが明らかになってきたため、今回はそれらを紹介していきたい。

キーワード　　魔方陣、n 次魔方陣、正方行列、定和、補助方陣

２．研究の背景と目的

よく知られているように魔方陣は縦、横、斜めが一定の和になるという一見単純な性質しかないと思われがちだが、今回はあえて単純な部分に目を向けて調べてみた。なかなか一筋縄では容易に作ることができない魔方陣もさまざまな方法で何種類もの魔方陣を作られることがわかったためそれらを紹介する。

３．研究内容

３．１　魔方陣の基礎知識

魔方陣とは、１から始まる連続した自然数を碁盤の目状に並べ、各行、各列、及び両対角線の数の和をすべて相等しくしたものである。一般に一辺が n の魔方陣は「n 次魔方陣」といわれている。また、魔方陣を単に「**方陣**」と呼ぶこともある。まず魔方陣を詳しく調べるために基本用語について確認する。

n^2 個の数 a_{ik}（$i, k=1, 2, \ldots, n$）を正方形に並べたものを n 次**正方行列**という。n 次正方行列 A において、横列を**行**、縦列を**列**と呼び、上から数えて i 番目の行、

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}$$

を**第 i 行**、左から数えて k 番目の列

$$a_{1k},\ a_{2k},\ \cdots,\ a_{nk}$$

を**第 k 列**という。さらに、また行列 A を構成している n^2 個の数 a_{ik}（$i, k=1, 2, \ldots, n$）を行列 A の**要素**という。つまり、正方行列 A は

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と表現できる。

そして、正方行列 A に対して、左上隅の a_{11} から右下隅 a_{nn} への対角線を**主対角線**といい、その上にある要素を**主対角線要素**という。また、右上隅の a_{1n} から左下隅の a_{n1} を結ぶ線を**副対角線**、その上にある要素を**副対角線要素**という。

要素がすべて1であるn次正方行列をn次**単一行列**といい、一般にE_nと表す。例えば、4次単一行列E_4は

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

行列Aを行と列を入れ換えて得られる行列をAの**転置行列**といい、${}^tA$と表す。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

の転置行列${}^tA$は、

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

●一行の数の和

一般に、n次魔方陣陣に含まれるすべての数の和をS_nとすれば、S_nは初項1，末項n^2，項数n^2の等差数列の和であるから、

であり、各行（列）の和は相等しいので、各行、各列、両対角線要素の和Sは、

$$S = \frac{S_n}{n} = \frac{n(n^2+1)}{2} \quad \cdots①$$

である。これをn次魔方陣の**定和**（**魔法陣定和**）という。

したがって、$n = 3, \ldots, 12$の場合は次のようになる。

n	S	n	S
3	15	8	260
4	34	9	269
5	65	10	505
6	111	11	671
7	175	12	870

この結果より、nが奇数の場合は、$n = 2m+1$（$m \in N$）とおくと、①は

$$S = \frac{(2m+1)\{(2m+1)^2+1\}}{2}$$
$$= (2m+1)(2m^2+2m+1)$$

となり、(右辺)＝(奇数)×(奇数)＝(奇数)であるから定和Sは必ず奇数になる。したがって、奇数方陣の各行、各列、両対角線には奇数が奇数個含まれることがわかる。

また、nが半偶数（4で割れない偶数）のときは、$n = 4m+2$（$m \in N$）とおくと、①は

$$S = \frac{(4m+2)\{(4m+2)^2+1\}}{2}$$
$$= (2m+1)(16m^2+16m+5)$$

となり、(右辺)＝(奇数)×(奇数)＝(奇数)であるから定和Sは必ず奇数になる。したがって、半偶数方陣の各行、各列、両対角線には奇数が奇数個含まれる。

それに対して、nが全偶数（4で割れる偶数）のときは、$n = 4m$（$m \in N$）とおくと、①は

$$S = \frac{4m\{(4m)^2+1\}}{2} = 2m(16m^2+1)$$

となり、定和Sは必ず偶数になる。したがって、全偶数方陣の各行･各列･両対角線には、奇数も偶数も偶数個ずつ含まれる。

●魔方陣の作り方

ひとつの魔方陣を作るときに、もととなる２つの魔方陣を**補助方陣**という。そして、これらの補助方陣には次の直交性が成り立っていなければならない。

$0, 1, 2, \ldots, n-1$ の n 個の数字を要素としてもつ n 次正方行列 $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$ に対して、A と B の ik 要素を並べた順序対 $<a_{ik}, b_{ik}>$ を ik 要素としてもつ正方行列を A と B の **2 重配列**とよび、$A*B$ と表すことにする。つまり、

$$A*B=(<a_{ik},b_{ik}>)$$
$$=\begin{pmatrix} <a_{11},b_{11}> & \cdots & <a_{11},b_{11}> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <a_{11},b_{11}> & \cdots & <a_{11},b_{11}> \end{pmatrix}$$

である。このような 2 重配列に現れる n^2 個の順序対がすべて異なるとき、A と B は互いに**直交する**といい、そのときの 2 重配列を**直交配列**という。

例えば、次の行列 A と B は、2 重配列のすべての要素が異なるため、互いに直交している。

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A*B=\begin{pmatrix} <0,0> & <1,0> & <2,0> & <3,0> \\ <0,1> & <1,1> & <2,1> & <3,1> \\ <0,2> & <1,2> & <2,2> & <3,2> \\ <0,3> & <1,3> & <2,3> & <3,3> \end{pmatrix}$$

便宜上、順序対の< >を省略することが多い。直交しない 2 つの補助方陣からは、明らかに方陣を構成し得ない。これは 2 つの同じ数字が現れてしまうからである。

さて、ここで n が奇数、全偶数、半偶数の場合に分けて、n 次魔方陣の作り方をいくつか紹介する。

３．２　奇数方陣の作り方

ここでは、5 次方陣を例に説明する。

3.2.1　方法１：２つの補助方陣を用いる

まず、2 つの補助方陣をつくり、それらを利用して魔方陣を作る。

①補助方陣 A の作り方

はじめに副対角線上に下から順に 1, 2, 3, 4, 5 と入れる。次に、下図のように主対角線に平行な方向に同じ数を 5 個ずつ配列する。

A＝

3	5	2	4	1
1	3	5	2	4
4	1	3	5	2
2	4	1	3	5
5	2	4	1	3

②補助方陣 B の作り方

①で作った補助方陣 A を、その中央の列に関して左右対称に移す。

B＝

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

上の 2 つの補助方陣 A と B は互いに直交している。これらから、行列とみなして

$$M=n(A-E_n)+B$$

を各要素で計算してできる配列 M を構成

すれば、次の５次方陣Ｍを得る。

Ｍ＝

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

　また、この方陣を一度で書き下すことができる以下の方法が知られている。

3.2.2　方法２：ヒンズーの連続方式

　以下の手順で数を配置していく。

①まず正方形の最下行の中央のマスに１を置き、以下は次のように右斜下方に連続して自然数を順に並べる。

②最下行に来たときは、次の列の一番上に続け、そこからさらに、右斜下方へと進んでいく。

③最右列にきたときは、そのすぐ下の一番左の隅に続け、そこから順に右斜下方に進む。

④すでに数字の入っているマス目に出会った場合、１つ前の数字のすぐ上に進み右斜下方に続ける。

　実際にこの手順を行うと、次の５次方陣を得る。

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

3.2.3　方法３：ペルシャの連続方式

　以下の手順で数を配置していく。

①まず正方形の中央のマスの１つ下に１を置き、以下は次のように右斜下方に連続して自然数を順に並べる。

②最下行に来たときは、次の列の一番上に続け、そこからさらに、右斜下方へと進んでいく。

③最右列にきたときは、そのすぐ下の一番左の隅に続け、そこから順に右斜下方に進む。（※②③は方法２と同じ。）

④すでに数字の入っているマス目に出会った場合、１つ前の数字の真下２つ目のマスに進み右斜下方に続ける。

　実際にこの手順を行うと、次の５次方陣を得る。

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

　ただし、３次方陣については方法２（ヒンズーの連続方式）と方法３（ペルシャの連続方式）によって書き下されたものは、下のように一致したものになる。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

　また、これらの方法により得られたn次方陣の、中心について対称である２つの数の和を調べると、いずれもn^2+1となっていることが明らかになった。

3.2.4　方法４：桂馬跳びの方式

以下の手順で数を配置していく。

①まず、正方形の最下行の中央のマスに 1 を置く。以下は次のように連続した自然数を左上方向に桂馬跳びに順次並べる。

②第 1 行、または第 2 行に来たときは、すぐ左の列の相当する場所に続け、そこからさらに、左上方向に桂馬跳びに進む。

③第 1 列に来たときは、最右列の相当する場所に続け、そこからまた、左上方向に桂馬跳びに進む。

④すでに数字の入っている目に出会ったときは、1 つ前の数字のすぐ上に進み、左上方向に桂馬飛びを続ける。

実際にこの手順を行うと、次の 5 次方陣を得る。

3	14	25	6	17
22	8	19	5	11
16	2	13	24	10
15	21	7	18	4
9	20	1	12	23

$a+2$	$a+13$	$a+24$	$a+5$	$a+16$
$a+21$	$a+7$	$a+18$	$a+4$	$a+10$
$a+15$	$a+1$	$a+12$	$a+23$	$a+9$
$a+14$	$a+20$	$a+6$	$a+17$	$a+3$
$a+8$	$a+19$	a	$a+11$	$a+22$

最初の位置に数aを置いた場合は、上図のように数が配置される。これを、見ると、各行（列）の和は

$$5a+60=5(a+12)$$

となることがわかった。特に、$a=1$のとき、各行（列）の和は 65 となり定和に一致する。

同様に、方法 1 では両対角線上に 1, 2, 3, 4, 5 と並べたが、これはあくまでも主対角線要素（副対角線要素）をすべて 3 にするためであり、3 以外の$n-1$個の数は任意に入れ替えても構わない。

３．３　全偶数方陣の作り方

まず、自然配列について説明する。自然数を左上隅から順に行ごとに右下隅まで配置した配列を**自然配列**という。下図は 4×4 の自然配列である。これは右上から順に 1 から 4^2(=16)まで書き下ろした配列である。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

3.3.1　方法１：自然配列網掛け交換法

自然配列の両対角線要素は動かさず、残りの数はすべて、方陣の中心に関して対称の位置に移す。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

この操作は、両対角線要素の和は定和34であり、同じ列の2数の差は一定という性質によるものである。また、この全偶数魔方陣は、その中心に関して対称の位置にある2数の和はすべてn^2+1である（このような魔方陣を**対称方陣**という）。

より大きなn次魔方陣（例えばn＝12,16など）を作りたいときは、$n\times n$の自然配列を作りそれを4分割してできる自然配列それぞれに方法1と同様にして配列してから、最後に$n\times n$配列の中心に関してそれぞれの数を対称の位置に移せばよい。

3.3.2　方法２：「コの字形、逆コの字形」配列を利用する方法

自然配列とともに、「コの字形、逆コの字形」とよばれる配列も有効である。下図は4×4の「コの字形、逆コの字形」配列である。上2行では、「コの字形」に数が順に並び、下2行では「逆コの字形」に並んでいる。

1	2	3	4
8	7	6	5
12	11	10	9
13	14	15	16

ここでのすべての列の和は、4次方陣の定和34である。そこで、すべての行の和も定和となるようにするために、中央の2列を上下逆順に入れ換える。

「コの字形、逆コの字形」配列では、1行目の和が10，2行目が26，3行目が42，4行目58であるので、1行目は定和に24足りず，4行目は定和より24上回っている。そのため、中央の2列の上下を交換することにより、1行目は－5＋29＝＋24となり、4行目は－29＋5＝－24となり、どちらも定和34となる。2行目と3行目も同様である。

このようにして得られた配列は下図のようになる。

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

この方法で8次方陣を作ると、「コの字形、逆コの字形」を2回繰り返すような図になる。また、4次方陣では中央の2列を上下逆順に入れ換えたが、8次方陣の場合では、中央の4列（一般に、nが全偶数のとき$\frac{n}{2}$列）を上下逆順に並べ換えれば　完成する。同様にして12次、16次の方陣も作ることができる。

3.3.3　方法３：定和をもち、かつ、直交する２つの補助方陣を利用する

8次方陣の場合について説明する。

①補助方陣Aの作り方

　まず、主対角線上に左上から順に1, 2,3,4, 5, 6, 7, 8を入れる。次に、副対角線上にも右上から順に1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8を入れる。そして、各行には和が9（一般的には$n+1$）になるような2数を交互に4組ずつ入れる。ただし、左右対称に配置する。

②補助方陣Bの作り方

　補助方陣Aをその主対角線に関して対称に移す。つまり、BはAの転置行列に相当する。

2 つの補助方陣 A と B は下図のようになる。

A=

1	8	1	8	8	1	8	1
7	2	7	2	2	7	2	7
3	6	3	6	6	3	6	3
5	4	5	4	4	5	4	5
4	5	4	5	5	4	5	4
6	3	6	3	3	6	3	6
2	7	2	7	7	2	7	2
8	1	8	1	1	8	1	8

B=

1	7	3	5	4	6	2	8
8	2	6	4	5	3	7	1
1	7	3	5	4	6	2	8
8	2	6	4	5	3	7	1
8	2	6	4	5	3	7	1
1	7	3	5	4	6	2	8
8	2	6	4	5	3	7	1
1	7	3	5	4	6	2	8

これらを行列とみなして

$$M = n(A - E_n) + B$$

を各要素で計算してできる配列 M を構成すれば、次の 8 次方陣 M を得る。

M=

1	63	3	61	60	6	58	8
56	10	54	12	13	51	15	49
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
16	50	14	52	53	11	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64

なお、この方法 3 を用いると、任意の半偶数方陣も作ることができた。

３．４　半偶数方陣の作り方

n は半偶数 $n = 2(2m+1)$ とする。

3.4.1　方法１：$(2m+1)$ 次の奇数方陣の各マスに２次配列を取り込む方法

6 次方陣で説明する。6＝2×3 より、次のような 3 次方陣を**基礎方陣**として用いる。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6 次方陣を 3×3 の基礎方陣の各マスに 2 次配列を入れていく。下図の 3 次方陣の①に 1～4 を、②の部分に 5～8，③の部分に 9～12，④の部分に 13～16，⑤の部分に 17～20，…というように 4 つずつ数を配置していく。ただし、それぞれの 2 次配列では「コの字形」に配置する。

④	⑨	②
③	⑤	⑦
⑧	①	⑥

これにより、次の 6 次配置が得られる。

13	14	33	34	5	6
16	15	36	35	8	7
9	10	17	18	25	26
12	11	20	19	28	27
29	30	1	2	21	22
32	31	4	3	24	23

すると、次の状況が起こる。

・列について、各列の和はすべて 111 であり、6 次方陣の定和になっている。

・行の和は、第 1 行から 1 行おきに 105

と 117 を繰り返す。6 次方陣の定和 111 から 6 だけの過不足がある。

・主対角線要素の和は 108 で 111 より 3 足りない。副対角線要素の和は 114 で 111 より 3 多い。

上記の過不足を解消するために、①、②、③、⑥、⑦、⑨に対応している 2 次配列の 1 列目の上下を入れ替えた。このようにすると各行、各列、両対角線の和が、定和の 111 になることがわかった。

13	14	33	34	5	6
16	15	36	35	8	7
9	10	17	18	25	26
12	11	20	19	28	27
29	30	1	2	21	22
32	31	4	3	24	23

13	14	36	34	8	6
16	15	33	35	5	7
12	10	17	18	28	26
9	11	20	19	25	27
29	30	4	2	24	22
32	31	1	3	21	23

3.4.2　方法２：外周追加法

これは、全偶数方陣を核として、外周を一回り追加して、半偶数方陣を作る方法である。6 次方陣の場合は、4 次方陣の周りに外周をつけて、1 から 6^2(＝36)までの数のうち、初めの 10 個（一般には$2(n-1)$個）の 1～10 と終わりの 10 個の 27～36 を使って作る。核となる 4 次方陣は任意の 4 次方陣の各要素に 10 ずつ加え、11～ 26 で作る。また外周は向かい合った 2 数の和を 37 とする。

例えば、下図の外周を用いるとする。

1	34	33	32	9	2
6					31
10					27
30					7
29					8
35	3	4	5	28	36

このとき、辺の 4 数の順序は任意であり、4!×4!＝576 通りある。また、四隅も多数が可能である。この方法で作った 6 次方陣は次のようなものがある。

1	34	33	32	9	2
6	11	25	24	14	31
10	22	16	17	19	27
30	18	20	21	15	7
29	23	13	12	26	8
35	3	4	5	28	36

なおこの方法を反復すると 10 次、12 次などの偶数方陣も作ることができる。

４．　今後の課題

今回は、魔方陣を場合分けして作る方法について調べたが、これからはそれらの方法のメカニズムについても考察していきたい。またn次方陣の解法式の証明も挑戦したい。

５．　参考文献

[1]　「魔方陣の世界」、大森清美、日本評論社(2013)

６．　謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。